

L'universalisme mathématique

Pierre CARTIER



Institut des Hautes Études Scientifiques
35, route de Chartres
91440 – Bures-sur-Yvette (France)

Septembre 2007

IHES/M/07/29

L'universalisme mathématique*

Pierre CARTIER

Les mathématiques font certainement partie du patrimoine universel de l'humanité. Toute civilisation digne de ce nom a recours aux échanges et aux dénombrements, aux mesures et aux évaluations. La maîtrise des nombres, de la numération et des opérations fait partie du bagage élémentaire indispensable, et l'on peut mesurer le progrès parcouru en examinant les perfectionnements des méthodes de représentation et de calcul sur les nombres. La notion de nombre elle-même s'est fortement élargie au cours des siècles : aux nombres entiers "naturels" $1, 2, 3, \dots$ sont venus successivement s'ajouter le zéro, les fractions, les nombres négatifs, puis les nombres "réels" qui comprennent les nombres rationnels (ou fractions) et les irrationnels. Du seizième au dix-neuvième siècle, les nombres "complexes" (ou "imaginaires") ont progressivement acquis droit de cité, de manière pragmatique d'abord, puis avec des fondements rigoureux chez Euler, Gauss et Cauchy : cette évolution de la notion de nombre n'est pas terminée, comme on le verra plus loin.

Parallèlement, les besoins de l'architecture, ou de la construction navale par exemple, tout autant que les recherches "formelles" des artistes¹ conduisent à un catalogage des formes, et à l'étude de leurs mesures et de leurs transformations. Les termes tels que : carré, cercle, sphère, cube, cylindre, ligne droite, angle, perpendiculaire désignent les notions élémentaires de la géométrie, mais font partie intégrante du langage familier, au même titre que les noms des nombres. La mémoire d'une civilisation s'exprime dans la conservation et la description de nombreuses formes.

*Cet article recouvre, peu ou prou, le contenu d'une conférence faite à Paris (Unesco, 21 juin 2007).

¹Nous entendons par là l'exploration du monde des formes.

Dans un troisième ordre, les besoins de localisation, d'anticipation et de prédiction sont la source d'autres développements. La nécessité de se situer dans l'histoire, ou simplement de réguler la vie économique et sociale, oblige au perfectionnement constant des calendriers ; l'interconnexion croissante du monde nous oblige à vivre dans les deux échelles de temps : nous avons une horloge locale et un "temps universel" par rapport auquel nous nous situons en référence. A tout instant, il y a des individus qui vivent à un autre moment de la journée, mais avec lesquels nous communiquerons instantanément.

Depuis le début des voyages et des échanges, la géographie n'a cessé de vivre d'emprunts à la géométrie et à l'astronomie. Les rythmes célestes étant les plus faciles à observer, les calendriers ont profité des progrès de l'astronomie. Aujourd'hui encore, c'est l'exploration spatiale – forme moderne de l'astronomie – qui a permis la création des immenses systèmes de localisation instantanée (GPS, GALILEO) et de communication instantanée. La navigation – maritime, terrestre et aérienne – a bénéficié de ces progrès, mais les a fortement motivés. Voyager, faire du commerce, oblige à évaluer les risques, et en prévoir les conséquences pour les corriger. La gestion des grands ensembles économiques, sociaux ou financiers réclame des outils de prévision. Les notions de base de la statistique se sont imposées dès la fin du dix-septième siècle ; les concepts de moyenne, d'écart-type (ou marge d'erreur), de pourcentage, de degré de confiance font partie du bagage commun. Le calcul des probabilités, science aujourd'hui florissante, n'est que la forme la plus achevée de cette tendance.

Si tous les concepts précédemment évoqués correspondent à des chapitres des mathématiques orthodoxes (algèbre, géométrie, mécanique, calcul des probabilités), la considération si importante des *ordres de grandeur* qui permet de différencier un projet de 100.000 euros d'un projet de 10.000.000 euros, n'appartient pas à un registre accepté des mathématiques en elles-mêmes. On l'abandonne plutôt au savoir-faire du praticien (financier, ingénieur) mais cette circonstance n'a qu'une valeur sociologique temporaire, et il faudra bien inventer une théorie mathématique du petit et du grand.

Ce qui précède est une description du savoir (et du savoir-faire) mathématique tel qu'il appartient à tout le monde. Il se peut que la veine créatrice, si féconde à notre époque, tarisse comme cela s'est produit plusieurs fois dans l'histoire. Tout ce savoir accumulé restera disponible, pourvu qu'un enseignement même routinier le transmette. En musique, tous les pays et tous les siècles n'ont pas produit Mozart, Bach ou Beethoven, mais pourvu

qu'il y ait quelques maîtres de musique et de chant, et un peu de goût pour cela, on continuera à fredonner, à danser en rythme, et à écouter romances et psaumes. La disparition de la musique ou des mathématiques signifierait le sommeil – ou la fin – de la civilisation, et l'histoire ne nous rend pas optimiste au point d'écarter une telle éventualité.

* * * * *

Si, comme je le maintiens, les mathématiques sont partie intégrante de la civilisation, elles doivent combiner leurs caractéristiques propres avec les tendances générales de l'époque, le *Zeitgeist*. Le dix-neuvième siècle a été marqué par l'héritage des Lumières du siècle précédent, par l'*Aufklärung*, par l'effort de refonte des Universités par von Humboldt, par la reconstruction napoléonienne de la France et de l'Europe. Les mathématiques n'y échappèrent pas.

Vers 1800, elles avaient reçu en héritage une masse de résultats et de concepts, certains remontant à l'Antiquité, d'autres venus s'ajouter au début du dix-huitième siècle (Newton, Leibniz et leurs émules), mais le tout reposait sur des *bases incertaines*. Les *nombres complexes* sont utilisés librement depuis 1700, mais avec mauvaise conscience (nombres "imaginaires"); ils ont donné de merveilleux résultats entre les mains d'Euler (né en 1707), tels que la formule "magique"

$$\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$$

qui contient toute la trigonométrie, et ouvre la voie à la trigonométrie hyperbolique, et dont découle la formule "mystique"

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Le *théorème fondamental de l'algèbre*, qui affirme que toute équation algébrique a une solution, attend encore une démonstration convaincante, qui sera finalement donnée par Gauss vers 1800. La justification des nombres complexes par leur représentation géométrique, due aussi à Gauss, ouvre la voie aux merveilleux travaux de Cauchy : intégrales curvilignes, résidus. Ceci permet aussi l'introduction des éléments "imaginaires" (points, droite, cercle) en géométrie ; comme l'aurait dit le géomètre Darboux dans une belle formule : "en géométrie, le plus court chemin entre les éléments réels passe

souvent par un détour dans l’imaginaire”. L’esprit technicien le plus pragmatique sait le bénéfice apporté dans la théorie de l’électricité par les facteurs complexes, et la Physique Quantique formule les lois fondamentales par une autre formule magique (Dirac, Feynman) :

$$e^{iS/\hbar},$$

où $i = \sqrt{-1}$ est l’unité imaginaire.

La géométrie elle-même est dans le trouble. A force d’essayer de démontrer l’axiome des parallèles d’Euclide, ou de réaliser la quadrature du cercle, et d’échouer à chaque fois, on commence à croire qu’il s’agit d’obstacles insurmontables. Serait-il possible qu’il existe des vérités géométriques non démontrables ? L’accord supposé entre la Logique, et la réalité physique de notre espace familier, serait-il un leurre ? La découverte, par Lobachevsky et Gauss, d’une géométrie logiquement cohérente, mais contredisant l’évidence des parallèles, oblige à repenser la légitimité des faits mathématiques. Ceux-ci sont-ils une vérité “naturelle”, ou des conventions (comme le soutiendra H. Poincaré), ou bien le but et l’utilité des mathématiques sont-ils de procurer des modèles de la réalité, donc falsifiables au sens de Popper.

On remarque aussi que bien des notions courantes de la géométrie, comme l’orientation d’une droite, d’un plan, sont restées implicites dans l’axiomatique d’Euclide. C’est la physique qui va imposer ces notions :

- règle d’Ampère et Faraday pour les courants et les forces électriques ;
- polarisation circulaire de la lumière ;
- cristaux “gauches” et “droits”.

Quand se développe l’analyse critique, on s’aperçoit qu’il ne va pas de soi qu’une droite et un cercle se coupent parce que le dessin semble le montrer. On ne sait pas non plus très bien ce qu’est la tangente à une courbe, l’aire d’une surface, . . .

La situation est pire dans le Calcul Différentiel et Intégral, malgré les efforts de présentation d’Euler et de Lagrange, malgré la croisade “encyclopédiste” de d’Alembert pour éclaircir la notion de dérivée. Et que sont ces infiniment petits et grands, que les plus rigoristes n’excluent pas complètement malgré les absurdités logiques qui entourent leur “définition” :

Est infiniment petite toute quantité qui est plus petite que toute quantité assignable

(donc plus petite qu'elle-même ?). Et que signifient tous ces rapports $\frac{0}{0}$ différents les uns des autres ?

La vérité est qu'on ne connaît pas la nature du continu. Que sont les grandeurs ? La théorie d'Eudoxe et Archimède, reproduite au Livre V d'Euclide, est rigoureuse, mais très lourde, et repose elle-même sur un certain nombre de présupposés. Si l'on veut prouver des théorèmes fondamentaux tels que le théorème de la valeur intermédiaire², ou l'existence de maxima, il faut cesser de se fier à l'intuition géométrique, et remplacer la notion vague de grandeur par celle de nombre réel (ou décimal).

Je laisse à Henri Poincaré (*La valeur de la science*, Flammarion, 1970, p. 36-7) le soin de décrire la solution apportée par les mathématiciens allemands, tels que Dedekind, ou Weierstrass :

“Voyons ce qui est arrivé, par exemple pour l'idée de fonction continue. Au début, ce n'était qu'une image sensible, par exemple, celle d'un trait continu tracé à la craie sur un tableau noir. Puis elle s'est épurée peu à peu, bientôt on s'en est servi pour construire un système compliqué d'inégalités, qui reproduisait pour ainsi dire toutes les lignes de l'image primitive ; quand cette construction a été terminée, on a décintré, pour ainsi dire, on a rejeté cette représentation grossière qui lui avait momentanément servi d'appui et qui était désormais inutile ; il n'est plus resté que la construction elle-même, irréprochable aux yeux du logicien. Et cependant si l'image primitive avait totalement disparu de notre souvenir, comment devinerions-nous par quel caprice toutes ces inégalités se sont échafaudées de cette façon les unes sur les autres ?”

Je ne saurais trop recommander la lecture de ce chapitre de Poincaré sur l'intuition et la logique en mathématiques.

Le salut est venu d'une *arithmétisation du continu*. On la doit à la minutie obsessionnelle d'un Frege par exemple, mais aussi à toute une tradition d'algèbre formelle en Angleterre, qui va de Cayley, Boole et L. Carroll, à Heaviside, et même Dirac. Il s'agit d'une confiance quasi absolue dans les

²Si une quantité varie continuellement, d'une valeur initiale A à une valeur finale $B > A$, toute valeur intermédiaire C telle que $A < C < B$ sera atteinte au moins une fois.

vertus d'un calcul, portant sur les opérateurs. L'expression de "Calcul symbolique" est due à Heaviside.

A la fin du 19^e siècle, comme le constate Poincaré, on semble avoir atteint le but ultime de la rigueur en mathématiques. Une construction par étages nous mène des nombres entiers, régis par le principe de récurrence (sous la forme des axiomes de Peano) aux nombres réels et complexes ; les notions de continuité, de dérivabilité, d'intégrale sont éclaircies définitivement moyennant le sacrifice des infiniment petits, la théorie des fonctions de variables réelles ou complexes et les équations différentielles et intégrales reposant désormais sur des bases solides. Grâce à la prodigieuse découverte des coordonnées cartésiennes, la géométrie est ramenée à l'algèbre et l'analyse. Ce qui parut aux contemporains comme le couronnement de ce courant *logisticiste* fut la publication des Fondements de la Géométrie par Hilbert. Là, l'axiomatique à la Euclide se déploie sans entrave, et le tour de force d'un exposé rigoureux de la géométrie sans coordonnées est réalisé. D'une certaine manière, c'est un projet ringard, mais ce sera le modèle de la méthode axiomatique rénovée au siècle suivant.

* * * * *

Vers 1900, la science est-elle achevée ? Que s'est-il passé dans ce qu'on a appelé le "siècle court" de 1914 à 1989 ? Selon les témoignages contemporains, le début de la guerre en 1914 a été perçu comme la fin d'un équilibre européen reposant sur les compromis du Congrès de Vienne après 1815. C'est le début d'une longue période de troubles, de guerres, de tensions qui ne s'achèveront qu'avec l'effondrement de l'empire soviétique. Entre temps, les empires turc, austro-hongrois et russe ont disparu, et les empires coloniaux français et britannique ont laissé la place à des Commonwealths fantomatiques. C'est aussi le siècle des idéologies révolutionnaires, fondées sur l'espoir d'un monde nouveau, et celui de la mise à mal de bien des certitudes en psychologie, sciences morales, économie, histoire et politique, sans compter l'espace et le temps, et la réalité des atomes. C'est aussi le siècle de grandes conquêtes technologiques : on sillonne la planète en avion en quelques heures, et l'on entre en relation en quelques secondes n'importe où sur terre. On a marché sur la Lune, et on le fera prochainement sur Mars !

En science, la Physique Quantique, née d'un ajustement conjoncturel par Planck de résultats expérimentaux portant sur un phénomène apparemment

secondaire, a imposé un paradigme nouveau que nous ne maîtrisons pas encore. En mathématiques, ce fut un siècle de grandes conquêtes, de changement de paradigme, de folles ambitions idéologiques, et de création d'outils commodes et performants. Comme on le montrera plus loin, l'universalisme des mathématiques en est sorti grandement renforcé.

Dans notre description des mathématiques du vingtième siècle, nous laisserons de côté les progrès purement internes, comme ces vingt-trois problèmes mentionnés par Hilbert dans sa conférence de Paris en 1900. Nous essayerons plutôt de décrire l'impact externe, l'influence sur la société.

J'ai mentionné plus haut l'exigence nouvelle, au dix-neuvième siècle, de rigueur et de précision logique. Cette exigence est décrite avec pertinence dans les premières lignes du *Traité de Bourbaki*, reproduites ci-contre. Or dans la constellation des Sciences Mathématiques, comme on disait alors, il en restait beaucoup qui étaient loin de la rigueur formelle : Mécanique, Calcul des Probabilités, mais aussi les parties les plus avancées de la géométrie différentielle, de la géométrie algébrique et de la théorie des groupes de Lie. Il faut y ajouter l'*Analysis Situs* inventée par Poincaré, et dont le nom deviendra "Topologie".

La première conquête est celle de l'*Analyse Fonctionnelle*. Le Calcul des variations se développe depuis le milieu du dix-huitième siècle. Son esprit est de rechercher une configuration, optimisée selon un certain critère, dans une masse de fonctions ou de figures plus ou moins arbitraires. Les méthodes directes sont développées vers 1900 sous le nom de *principe de Dirichlet*. Hilbert invente l'espace qui porte son nom, composé des suites de nombres complexes (z_1, z_2, z_3, \dots) telles que la série $\sum |z_n|^2$ converge ; il l'applique à la résolution des équations intégrales. L'invention contemporaine de l'intégrale de Lebesgue, puis vers 1920, le travail de l'école polonaise autour de Banach, familiarisent les mathématiciens avec ces raisonnements d'un nouveau genre, où l'on raisonne sur des *ensembles de fonctions*, comme l'on raisonnait en géométrie sur des figures qui sont des *ensembles de points*. Le dernier avatar sera, après un premier essai par Sobolev, l'invention par Laurent Schwartz, vers 1945, des distributions qui justifient enfin les méthodes symboliques de Heaviside et de Dirac. Toute une école se crée, autour d'Emile Borel, suivie en Pologne par Steinhaus, et aux USA par Norbert Wiener, qui développe la théorie des *processus stochastiques*. On se familiarise avec l'idée de raisonner de manière probabiliste sur des courbes très irrégulières, ce qui permet de modéliser les fluctuations boursières ou la turbulence en Mécanique des

Fluides.

Ce qui se met en place est un *paradigme nouveau*, celui des ensembles. Cantor le premier, pour cerner la convergence des séries de Fourier, est amené à considérer des ensembles exceptionnels de nombres réels, de plus en plus compliqués, dont il entreprend la classification. Comme dit plus haut, on s'enhardit à considérer des ensembles de fonctions très irréguliers, pour les besoins de la théorie de l'intégration à la Lebesgue, réincarnée en la théorie du mouvement brownien de Wiener-Lévy. Avec Banach, on apprend à manier des espaces de dimension infinie, et la *Topologie Générale* est un des outils qui transposent l'intuition géométrique dans ce nouveau monde. En algèbre, Dedekind nous a appris à interpréter les (nombres) idéaux de Kummer comme des ensembles de nombres, et la géométrie algébrique est refondée par Krull et ses successeurs par la considération des idéaux de polynômes.

On en vient donc, d'abord de manière fragmentaire, avec les idéaux, les anneaux, les corps des algébristes, et avec les espaces topologiques de Hausdorff, à considérer que tous les objets mathématiques sont à interpréter comme des ensembles : ensembles de points, mais aussi ensembles de droites ou de cercles (qui sont eux-mêmes des ensembles de points). En topologie, on se familiarise avec les structures topologiques, ou les filtres, qui sont des ensembles d'ensembles ; on montera dans l'échelle avec des ensembles d'ensembles d'ensembles ! On prête à Hilbert, qui souhaitait soumettre toutes les sciences mathématiques – et même la physique – à la méthode axiomatique, l'ambition de tout fonder sur les ensembles.

Le prophète de Hilbert sera Bourbaki. Ce groupe de mathématiciens conçut le projet grandiose de refonder toutes les mathématiques de manière cohérente sur l'idée des ensembles – et des structures qu'ils portent. Ce slogan des structures fut un moteur extraordinaire pour la confection de cette série encyclopédique, dont 40 volumes parurent entre 1940 et 1980. Depuis, le bel athlète a perdu de son souffle : un petit volume nouveau de 200 pages est paru en 1998, et l'on annonce pour dans quelques années la refonte complète d'un volume paru en 1958 ! Il est facile de railler les faiblesses de l'entreprise :

- *L'encyclopédie publiée ne couvre qu'une partie du savoir mathématique actuel* ; en particulier, les sujets auxquels tenaient tant les fondateurs de Bourbaki tels que la géométrie différentielle ou l'arithmétique ne sont jamais arrivés à maturité. Le calcul des probabilités, les équations aux dérivées partielles, ou les distributions ne sont pas traités.

- *Le style est dogmatique et rigide*, sans concession au lecteur. Mais c'est ce style qui assure l'unité du projet, se maintenant sans faiblesse sur 40 volumes.
- *La notion de structure* est un outil méthodologique, mais n'a jamais été promue au rang de concept épistémologique. Il est exact que l'exposé que tente Bourbaki de la notion de structure est maladroit et peu convaincant. Mais il faut noter que si les catégories ont avantageusement remplacé les structures, le raisonnement propre aux catégories est né de l'insistance de Bourbaki sur les sous-objets, les objets-quotient, les limites, etc . . .

Avec le recul de 30 années, on peut dire que, malgré les excès de quelques disciples trop zélés, l'encyclopédie³ de Bourbaki a marqué toute une époque, surtout de 1945 à 1975. Elle a établi un nouveau standard de l'activité mathématique, fixé les conventions, codifié les concepts de base (variétés, anneaux, . . .), renoué l'usage de la méthode axiomatique. C'est un nouvel épisode dans la création de *normes universelles*. A défaut de créer un monde nouveau, cette entreprise a "consolidé les acquis des révolutions du début du vingtième siècle". Le bilan est tout à fait "globalement positif".

* * * * *

L'héritage du vingtième siècle en mathématiques a jeté les bases d'un *nouvel universalisme*. L'histoire de l'humanité s'est articulée en partie sur les extensions successives de la notion de nombre, et l'aisance à manipuler ces extensions. Il est bon de créer des outils fiables et robustes, d'emploi facile, et un savoir-faire qu'on se transmette de génération en génération. De ce point de vue, le siècle précédent a une riche moisson. L'idée de formalisation, sorte de sublimation du calcul, a pris son essor dans la logique, mais a permis la création de l'informatique et du calcul scientifique. Au niveau des extensions du nombre, on peut compter les matrices : ces tableaux de nombres, presque inconnus vers 1925, sont devenus d'incontournables outils en Physique Quantique aussi bien qu'en statistique, et s'appliquent aussi bien

³Le besoin d'encyclopédies est permanent, et il y eut d'autres projets conséquents au cours du vingtième siècle. Aucun n'aura l'ampleur ni l'influence de Bourbaki.

à l'économie (modèle de Leontief) qu'à l'optique ou l'électricité. La combinatoire a atteint une grande flexibilité et une grande puissance d'expression, ainsi que les méthodes de calcul symbolique : "on dessine des calculs et on calcule sur des dessins". Les méthodes de la géométrie différentielle ont envahi la physique théorique, grâce en particulier à S.S. Chern qui a développé les méthodes d'Elie Cartan. Une géométrie nouvelle des formes a surgi, et des objets exotiques tels que les ensembles fractals sont des outils de compréhension puissants.

Cet universalisme s'est traduit dans l'organisation de la profession des mathématiciens. Rappelons quelques étapes : de 1650 à 1750, on assiste à la création et au développement d'un réseau d'Académies des Sciences. De 1750 à 1900, c'est l'expansion des revues mathématiques. C'est aussi l'expansion géographique de l'activité mathématique. L'Europe de l'Est, la Turquie, la Russie font partie de l'aire d'expansion culturelle germanique. Elle s'étendra au Chili et au Japon de l'ère Meiji. Naturellement, le vecteur linguistique est la langue allemande, et dans une moindre mesure, le français. Le latin ayant perdu ses privilèges au cours du dix-neuvième siècle, le problème d'une langue de communication internationale se pose de manière répétée. Depuis 1960 environ, l'anglais s'est imposé comme la référence, malgré le chagrin de certains francophones. La diffusion en Afrique ou en Asie d'une éducation européenne par les entreprises coloniales a créé des foyers d'activité mathématique au Maghreb, au Sénégal, en Afrique du Sud, et bien sûr en Inde, Australie, Viet-nam, et plus récemment Corée et Chine.

De manière parallèle, on a vu se créer des Sociétés Mathématiques nationales. Pour des raisons historiques ou politiques, la Grande-Bretagne ou la Russie n'ont pas de sociétés nationales (mais une société à Londres et à Glasgow, une à Moscou et une à Saint-Petersbourg, sans compter Kazan) et la société espagnole a des concurrentes catalane et basque. Le plus souvent, dans un pays donné, coexistent plusieurs sociétés mathématiques visant des publics différenciés : mathématiciens des Universités, mathématiciens de l'industrie et ingénieurs, statisticiens, professeurs des divers ordres d'enseignement pré-universitaire, femmes mathématiciennes ... En règle générale, il y a des liens organiques harmonieux entre ces diverses sociétés.

L'unification des normes mathématiques, le choix d'une (ou plusieurs) langues internationales, une mise en commun des expériences d'enseignement, ont favorisé les échanges internationaux. Depuis 1897, un Congrès Mondial de Mathématiques (baptisé "Congrès International des Mathématiciens" avec

le sigle ICM) se réunit tous les quatre ans avec de 3000 à 5000 participants. Il y a eu une interruption de 1936 à 1950 à cause de la Seconde guerre mondiale, et le congrès de Varsovie a été déplacé de 1982 à 1983 (en gardant le sigle ICM82) à cause de la situation politique en Pologne. Ces congrès ont eu lieu majoritairement en Europe ou en Amérique du Nord, mais celui de 2002 s'est tenu à Pékin, et le prochain est prévu à Hyderabad (Inde) en 2010. Une Union Mathématique Internationale (UMI) fonctionne maintenant régulièrement, et aussi une Société Mathématique Européenne (EMS) qui rêve d'égaliser la puissante American Mathematical Society⁴ (AMS).

Pour décrire cet esprit de coopération internationale, le mieux est peut-être de laisser la parole⁵ à C. Procesi, collègue italien et vice-président de cette UMI :

“... L'UMI sert de mieux en mieux la communauté mathématique. Pour moi, le plus important est que nous “les mathématiciens” agissions et réagissions comme les membres d'une communauté, et que nous fassions un effort soutenu vers cet objectif ultime : rendre cette communauté universelle.

Comme italien, j'ai été fier d'apprendre que ce fut un président italien de l'UMI, Salvatore Pincherle, qui insista pour inviter au congrès ICM de 1928 les mathématiciens des pays qui avaient perdu la guerre : les “ennemis”⁶.

L'UMI traversa alors une crise grave, et nous savons à quel point il fut tragique de laisser ces pays à l'écart de la communauté mathématique internationale. Il a fallu une autre terrible guerre pour nous apprendre à coopérer, au moins dans une partie du monde. Après la chute du “Rideau de Fer”, nous avons pu renouer les liens entre mathématiciens européens de l'Ouest et de l'Est. Nous avons devant nous la tâche plus difficile d'intégrer dans notre communauté les mathématiciens de pays qui, pour des raisons politiques, économiques ou même culturelles, restent encore à l'écart⁷.

⁴Devenue aussi une importante maison d'édition.

⁵Traduit librement de l'anglais au français par moi-même.

⁶Et corriger l'affront fait par certains mathématiciens français aux Allemands lors du congrès de 1920 à Strasbourg! (P.C.)

⁷L'UMI a des représentants de 65 pays sur les 190 représentés aux Nations Unies.

Nous sommes de petits acteurs dans le monde, avec des moyens financiers très restreints, mais avec des ressources humaines très importantes et un langage universel. Notre société, l'UMI, peut servir de référence pour les nombreuses organisations⁸ qui s'efforcent de bâtir les mathématiques dans les pays en développement. Elle peut aussi les assister dans la recherche de fonds."

Ne quittons pas ce chapitre de l'organisation internationale sans mentionner les problèmes de l'enseignement, de la Maternelle à l'Université, selon le slogan d'une de nos associations professionnelles françaises (Association des Professeurs de Mathématiques). Cela suppose des échanges d'expériences pédagogiques, des concours internationaux pour les élèves (les Olympiades mathématiques), un effort de création, de publication et de diffusion de manuels⁹. Il y a aussi ce que l'on peut appeler l'acculturation (ou l'indigénisation) de la liturgie mathématique. Comme je le disais il y a 30 ans à mes amis vietnamiens : "Au niveau du doctorat, il faut une langue universelle : ce fut pour vous le français et le russe en fonction d'aléas historiques, ce sera sans doute l'anglais plus tard. Mais il faut continuer l'effort de vietnamisation du vocabulaire mathématique, car l'enseignement élémentaire et secondaire doit se faire dans la langue nationale. A cet égard, l'utilisation de l'alphabet latin (vietnamisé par Alexandre de Rhodes vers 1600) vous rendra la vie plus facile qu'aux japonais et aux chinois."

* * * * *

Et maintenant ? Que faire de cet instrument universel au vingt-et-unième siècle ? Le structuralisme comme philosophie mathématique a fait long feu. Comme principe d'organisation du savoir mathématique, les *catégories* ont remplacé les structures et introduit un principe de relativité. Les mathématiques développées à l'intérieur d'un topos peuvent émigrer vers un autre topos. Le *problème des fondements*, c'est-à-dire la rigueur complète dans la construction de l'architecture, semble résolu. Mais il le paraissait vers 1900, et nous achoppons encore sur la même difficulté philosophique : qu'est-ce qu'une

⁸Parmi ces organisations, mentionnons le CIMPA basé à Nice, qui se charge d'organiser rencontres et stages de formation dans le monde entier.

⁹Les éditions soviétiques MIR jouèrent un rôle fabuleux à cet égard. Malheureusement, la situation économique catastrophique de la Russie a presque tari cette activité.

suite arbitraire (par exemple celle des décimales d'un nombre "arbitraire"), ou une fonction arbitraire ? Cantor nous a appris la distinction fondamentale entre deux infinis : le dénombrable et le continu. Toute l'analyse moderne repose sur cette distinction, sur le fait que le continu est irréductiblement plus grand que le dénombrable. La logique – et sa fille l'informatique – ont donné un sens de plus en plus précis à ce qu'est une fonction "constructible" décrite au moyen d'un algorithme ou d'un programme. Malheureusement, il n'y a qu'une infinité dénombrable de suites, ou de nombres, ou de fonctions constructibles, alors qu'il en faudrait une infinité ayant la puissance du continu. Les recherches logiques sur l'indécidabilité de l'hypothèse du continu (Gödel, P. Cohen) ont montré que la collection des sous-ensembles d'un ensemble donné, même très simple, peut être un puit sans fond. En fait, malgré les prétentions modernes d'avoir évacué les paradoxes par l'axiomatisation de la théorie des ensembles, n'a-t-on pas, selon le mot de Poincaré : "avec Zermelo enfermé le loup dans la bergerie, alors qu'on croyait avoir érigé une robuste barrière" ? Il est vraisemblable qu'il faut s'accoutumer à l'idée que toute théorie scientifique cache des abîmes, auprès desquels il faut éviter de se hasarder.

La fin d'une certaine hégémonie structuraliste signifie aussi fin de l'introspection, retour vers une politique d'exploration, d'aventure. Tant de mondes nouveaux s'offrent à nous, où la théorie des cordes nous convie. Cette théorie de physiciens est à la recherche peut-être illusoire d'une unification des deux grandes avancées de la physique du vingtième siècle : la gravitation d'Einstein (ou relativité générale) et la physique quantique des atomes et de leurs composants ultimes. Faute pour l'instant de prédictions physiques, elle a ouvert la voie à une foule d'avancées très hardies en mathématiques. D'une manière voisine, le mariage entre les algèbres d'opérateurs rebaptisées "géométrie non commutative" par Alain Connes, et les prédictions visionnaires de Grothendieck, deux tentatives d'approfondir la structure de l'espace et du nombre, promet aussi une transformation révolutionnaire des idées de symétrie en mathématiques et en physique, une version ultime de la théorie de Galois à l'échelle cosmique.

Ce changement de perspectives a été aussi favorisé par la fin de la division du monde due à la guerre froide. Les retrouvailles enthousiastes entre scientifiques de l'Ouest et de l'Est ont permis la confrontation de deux traditions, l'une plus formaliste et logique à l'Ouest, l'autre plus cosmopolite, plus ouverte aux rapprochements, moins cloisonnée à l'Est.

Bien entendu, les incroyables instruments offerts par les nouveaux moyens de communication quasi-instantanés, l'accès immédiat par le réseau Internet à toutes les bibliothèques et toutes les encyclopédies du monde, les possibilités d'une mathématique expérimentale nouvelle dans sa dimension sinon dans sa conception : tout ceci que les mathématiciens partagent avec le reste de l'humanité, tous ces côtés positifs de la mondialisation, servent au développement de notre science. Après un long mariage fructueux entre mathématiques et physique, vieux d'au moins quatre siècles, vient le temps d'appréhender mathématiquement l'énorme corpus d'informations en biologie, de comprendre la physiologie des comportements après la biologie moléculaire des mécanismes fondamentaux. Tant dans les mathématiques dites pures que dans les applications mathématiques, il y a place pour d'énormes avancées grâce aux outils créés dans les cinquante dernières années.

Cet universalisme renouvelé ne doit pas faire oublier que, faute d'équilibres sociaux suffisamment stables, faute de la maîtrise encore imparfaite des méthodes d'éducation, faute de savoir motiver une nouvelle génération qui prendra notre relève, faute d'être attentif à une diversité des situations, des comportements et des cultures, nous risquons de confirmer le jugement pessimiste de Paul Valéry au moment du tournant historique de 1914 : "Nous autres, civilisations, savons que nous sommes mortelles."

Bures, août 2007

INTRODUCTION

Depuis les Grecs, qui dit mathématique dit démonstration; certains doutent même qu'il se trouve, en dehors des mathématiques, des démonstrations au sens précis et rigoureux que ce mot a reçu des Grecs et qu'on entend lui donner ici. On a le droit de dire que ce sens n'a pas varié, car ce qui était une démonstration pour Euclide en est toujours une à nos yeux; et, aux époques où la notion a menacé de s'en perdre et où de ce fait la mathématique s'est trouvée en danger, c'est chez les Grecs qu'on en a recherché les modèles. Mais à ce vénérable héritage sont venues s'ajouter depuis un siècle d'importantes conquêtes.

En effet, l'analyse du mécanisme des démonstrations dans des textes mathématiques bien choisis a permis d'en dégager la structure, du double point de vue du vocabulaire et de la syntaxe. On arrive ainsi à la conclusion qu'un texte mathématique suffisamment explicite pourrait être exprimé dans une langue conventionnelle ne comportant qu'un petit nombre de « mots » invariables assemblés suivant une syntaxe qui consisterait en un petit nombre de règles inviolables: un tel texte est dit *formalisé*. La description d'une partie d'échecs au moyen de la notation usuelle, une table de logarithmes, sont des textes formalisés; les formules du calcul algébrique ordinaire en seraient aussi, si l'on avait complètement codifié les règles gouvernant l'emploi des parenthèses et qu'on s'y conformât strictement, alors qu'en fait certaines de ces règles ne s'apprennent guère qu'à l'usage, et que l'usage autorise à y faire certaines dérogations.