

Notion de spectre

Pierre CARTIER



Institut des Hautes Études Scientifiques
35, route de Chartres
91440 – Bures-sur-Yvette (France)

Décembre 2008

IHES/M/08/61

Notion de spectre

Pierre Cartier*
(IMJ et IHÉS)

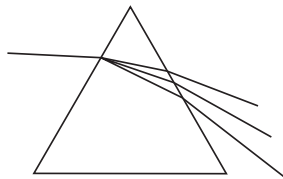
17 décembre 2008

Résumé

La notion de spectre est au départ une notion physique. Elle a pris progressivement une signification de plus en plus large en mathématique, sa signification mathématique la plus importante lui ayant été donnée par Grothendieck dans sa théorie des schémas. Nous nous promènerons donc de la physique à la géométrie algébrique.

1 Spectroscopie

Prisme et arc-en-ciel



La lumière blanche arrive d'un côté du prisme et comme les différentes couleurs correspondent à des indices de réfraction différents, la lumière est, à la sortie, décomposée suivant des couleurs différentes. Le spectre va du rouge au violet. On observe le même phénomène dans un arc-en-ciel.

Quand on fait passer de la lumière blanche dans un prisme, on peut voir, sur un écran placé à la sortie du prisme, des couleurs, et à certains endroits, de fines raies noires : *les raies d'absorption*. Ces raies d'absorption ont été étudiées tout d'abord par un astronome allemand : Fraunhofer.



*Rédigé avec l'aide de Marie Anglade, à partir d'un exposé à Brasilia le 27 février 2008.

L'explication physique de ce phénomène est qu'il y a dans l'atmosphère externe du soleil certains composés chimiques, moléculaires ou atomiques, qui non seulement peuvent émettre de la lumière mais qui, à chaque fois qu'ils émettent de la lumière d'une certaine fréquence, peuvent aussi absorber de la lumière de cette même fréquence. Les raies d'absorption permettent de déceler la présence de certains atomes ou composés chimiques dans la partie externe de l'atmosphère du soleil. Pendant plusieurs décennies on a examiné ces spectres et tâché de les comparer entre eux. On a remarqué que chaque substance chimie correspondait à un spectre (c'est-à-dire à une série de raies d'absorption) bien déterminé. Chaque élément chimique a ainsi sa propre signature. Grâce à quoi on peut faire un inventaire de ce qui se passe dans l'atmosphère du soleil, puis, plus généralement, des étoiles.

La spectroscopie identifie les composés chimiques :

H , Hydrogène atomique ;

H^2 , Hydrogène moléculaire ;

He , Hélium : cet élément, alors inconnu sur terre, a été observé pour la première fois à partir de son spectre dans la lumière solaire¹.

Fe , Fer ...

Prenons comme exemple le spectre de l'hydrogène. L'ensemble de ses raies a pu être synthétisé au moyen de la *formule empirique de Rydberg* :

$$\frac{1}{\lambda_{pq}} = Ry \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2} \right) \quad \text{avec } p = 1, 2, 3, \dots, \quad q = 1, 2, 3, \dots \quad \text{et } p < q.$$

La constante de Rydberg Ry a été déterminée expérimentalement et n'a pu être rattachée aux autres constantes de la physique (constante de Planck, masse et charge électrique de l'électron) que plus tard, grâce à la physique quantique. Le fait que deux entiers interviennent dans cette formule, et qu'une différence y apparaisse, sera explicité ultérieurement par la théorie de Niels Bohr (1913) qui réécrira cette formule de la façon suivante :

$$\frac{hc}{\lambda_{pq}} = E_q - E_p.$$

Cela permettra, si l'on veut connaître le spectre d'un atome, de condenser énormément l'information en remplaçant cette famille à double indice par une famille à un seul indice.

2 Spectre d'un opérateur

La loi fondamentale de la spectroscopie de Niels Bohr rappelée ci-dessus

$$\frac{hc}{\lambda_{pq}} = E_q - E_p,$$

¹D'où son nom : Helios est le Soleil en grec !

règle une fois pour toutes les échanges entre la matière et la lumière. On l'interprète parfois par un *saut quantique* : l'énergie libérée lors d'une transition atomique se matérialise en un photon ou inversement, un photon arrive sur un système atomique, il est absorbé et il fait monter l'énergie du système.

Dans le cas de l'atome d'hydrogène, la loi de Rydberg s'exprime de la façon suivante :

$$E_p = -\frac{hc Ry}{p^2}.$$

Schrödinger a interprété ces quantités² E_p au moyen d'une équation aux dérivées partielles qui est :

$$(1) \quad H\Psi_p = E_p\Psi_p.$$

A chaque quantité E_p , on fait donc correspondre une fonction Ψ_p qui, dans un cas simple, est une fonction dans l'espace à trois dimensions, de carré intégrable, satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles (1). De plus, $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V$ est l'opérateur dit *hamiltonien*, Δ le laplacien et V un potentiel. (Le signe moins provient du fait que, dans les conventions usuelles, le laplacien est la somme des carrés des dérivées premières ; comme opérateur, il est négatif. On met le signe moins pour le rendre à nouveau positif.)

Cela nous introduit directement à la notion de *spectre d'opérateur*. Mentionnons tout d'abord un cas simple : *le spectre d'une matrice est l'ensemble de ses valeurs propres*. Pour un opérateur, le *spectre discret* correspond aux valeurs propres : dans l'équation $H\Psi_p = E_p\Psi_p$, E_p est une valeur propre de l'opérateur, et Ψ_p la fonction propre correspondante. Le *spectre continu* s'interprète en physique par des phénomènes de diffusion. Quand on envoie par exemple un électron de haute énergie sur un noyau atomique, il ne sera pas capturé par l'atome, mais diffusé. Le mathématicien distingue le spectre continu du spectre absolument continu. Cela est dû à une subtilité de la théorie de Lebesgue. D'innombrables travaux ont montré que, pour des opérateurs de plus en plus généraux, le spectre était toujours absolument continu.

La théorie spectrale des opérateurs commence avec Hilbert dans ses travaux sur les équations intégrales vers 1910 ; elle atteint sa forme actuelle vers 1930, dans les articles et les livres de von Neumann, fortement motivés par le développement de la mécanique quantique quelques années plus tôt. Cette théorie est pratiquement indissociable du développement de la physique quantique.

J'ai dit tout à l'heure que l'on distinguait le spectre discret du spectre continu. La notion de spectre discret est facile à définir. Celle de spectre continu est plus difficile à définir correctement (Hilbert et Hermann Weyl essentiellement), mais il existe une présentation très simple : on peut montrer que $(H - \lambda)^{-1}$ existe dès l'instant où le nombre complexe λ n'est pas réel, et cet

²Au point de vue physique, E_p mesure une *énergie*.

opérateur s'appelle la *résolvante*. On lui associe des fonctions scalaires de la forme

$$r(\lambda) = \langle \psi | (H - \lambda)^{-1} | \psi \rangle .$$

Pour une matrice finie, inverser $H - \lambda$ donne naissance à une fonction rationnelle en λ dont les pôles correspondent exactement aux valeurs propres. C'est l'intérêt de la résolvante : *le spectre est formé des singularités de la résolvante*.



Dans le cas typique de l'atome d'hydrogène, les choses se présentent ainsi : dans chaque demi-plan (partie imaginaire > 0 ou partie imaginaire < 0), on dispose d'une fonction holomorphe en λ . Ces fonctions se raccordent-elles ? Dans le cas présent, ces fonctions se raccordent du côté négatif avec des singularités qui sont des pôles, et cela décrit la partie négative du spectre, qui est discrète. De l'autre côté, on a le phénomène bien connu d'une fonction holomorphe qui s'approche de la demi-droite positive par le haut et par le bas avec deux valeurs limites différentes. C'est *le phénomène classique de coupure*. On a fabriqué une fonction holomorphe et le spectre continu correspond à une coupure qui la rend régulière. Si l'on voulait aller plus loin, il faudrait introduire une surface de Riemann : on aurait d'autres feuillettes dans lesquels il pourrait y avoir des pôles. C'est ce qu'on appelle les *résonances*. On est en plein dans le monde des fonctions de variable complexe.

Plan de la variable λ



Revenons sur le cas de dimension finie, c'est-à-dire des matrices. L'équation caractéristique

$$\det(\lambda - X) = 0$$

a pour racines les valeurs propres de la matrice considérée. Il faut introduire la forme de Jordan pour les racines multiples. On peut, à partir des valeurs propres, trouver divers invariants :

$$Tr(X) = \sum_i \lambda_i, \quad \det(X) = \prod_i \lambda_i ;$$

c'est de l'algèbre élémentaire, mais qui fournit le modèle pour des situations plus compliquées, là où il y a des opérateurs en dimension infinie.

3 Théorie spectrale de Gelfand

Cette théorie est une reformulation de la théorie du spectre des opérateurs. Soit H un espace vectoriel sur \mathbb{C} , $\langle \theta | \psi \rangle$ le produit scalaire hermitien sur H , linéaire en ψ , $\langle \theta | \psi \rangle = \overline{\langle \psi | \theta \rangle}$. Pour un opérateur $T : H \rightarrow H$, dire qu'il est *hermitien* équivaut à supposer $\langle \psi | T\psi \rangle$ réel pour tout $\psi \in H$.

3.1 H de dimension finie

On peut diagonaliser tout opérateur hermitien T , c'est-à-dire que l'on peut décomposer l'espace H en somme directe orthogonale de n sous-espaces

$$H = H_1 \oplus \dots \oplus H_n,$$

de telle sorte que

$$T\psi_i = \lambda_i\psi_i \quad \text{si } \psi_i \in H_i.$$

Donc H_i est l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ_i , les λ_i étant deux à deux distinctes.

Il est plus commode d'introduire les projecteurs orthogonaux E_i , où E_i est le projecteur orthogonal de H sur H_i . On a :

$$1 = E_1 + \dots + E_n$$

$$E_i^2 = E_i^* = E_i$$

$$E_i E_j = 0 \quad \text{si } i \neq j.$$

On peut alors écrire l'opérateur T sous la forme :

$$T = \lambda_1 E_1 + \dots + \lambda_n E_n,$$

et tout polynôme à une variable $f(t) = c_0 t^m + c_1 t^{m-1} + \dots + c_m$, $c_i \in \mathbb{C}$, peut s'appliquer à l'opérateur T de manière évidente :

$$f(T) = c_0 T^m + c_1 T^{m-1} + \dots + c_m.$$

Mais, par rapport à la décomposition spectrale $T = \lambda_1 E_1 + \dots + \lambda_n E_n$ de l'opérateur, on a

$$f(T) = f(\lambda_1) E_1 + \dots + f(\lambda_n) E_n.$$

Autrement dit, *quand on passe de T à $f(T)$, on garde les vecteurs propres, mais chaque valeur propre λ est remplacée par $f(\lambda)$.*

L'ensemble de tous ces polynômes en T est un espace vectoriel qui est une algèbre A d'opérateurs dans H . Elle est engendrée par T et se compose des opérateurs $e_1 E_1 + \dots + e_n E_n$ avec $e_i \in \mathbb{C}$. Elle a donc une base naturelle formée des projecteurs E_i . La multiplication, qui est la composition des opérateurs, est décrite par la formule

$$\sum_i c_i E_i \cdot \sum_i d_i E_i = \sum_i c_i d_i E_i.$$

Le spectre Ω de cette algèbre est l'ensemble $\text{Hom}_{\text{alg}}(A, \mathbb{C})$ des homomorphismes d'algèbres de A dans le corps des nombres complexes. C'est une famille à n éléments χ_i qui correspondent par dualité aux projecteurs, puisque $\chi_i(E_j) = \delta_{ij}$. Le spectre Ω est contenu dans le dual de A vu comme espace vectoriel, et c'est une base de cet espace dual, la base duale de celle des E_i . Résumons la situation :

$$\Omega = \{\chi_1, \dots, \chi_n\}$$

$$\chi_i \in \Omega \quad \text{est défini par} \quad \chi_i(f(T)) = f(\lambda_i)$$

$$\chi_i(E_j) = \delta_{ij}.$$

On a donc deux notions différentes de spectre : le *spectre de l'opérateur* T est l'ensemble S des valeurs propres de T ; le *spectre Ω de l'algèbre* A est l'ensemble des caractères de A , c'est-à-dire les homomorphismes d'algèbres

$$\chi : A \rightarrow \mathbb{C}.$$

On peut résumer la théorie spectrale en disant qu'il y a une équivalence entre le spectre de l'algèbre et le spectre de l'opérateur. C'est une formulation un peu pédante pour des matrices finies, mais qui nous fournira la clef de la généralisation.

$$\Omega \leftrightarrow S, \quad \Omega \text{ spectre de } A, \quad S \text{ spectre de } T, \quad \chi_i \leftrightarrow \lambda_i$$

$$\Omega = \{\chi_1, \dots, \chi_n\}$$

$$S = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}.$$

3.2 Espaces de Hilbert

Dans un espace de dimension infinie, on doit définir une norme et le supposer complet ("espace de Hilbert") ; on doit soumettre les opérateurs à une hypothèse de continuité et, pour simplifier, nous les prendrons bornés. Sur les opérateurs bornés, il y a une notion de *norme*. Si, au lieu de prendre pour A l'ensemble des polynômes en T , on prend l'ensemble des limites en norme des $f(T)$, la fermeture de cet ensemble de polynômes, on a l'algèbre qui nous intéresse, associée à l'opérateur T . Tout cela est d'une certaine manière un sous-produit de la caractérisation axiomatique donnée par Gelfand d'une classe d'algèbres qu'on appelle maintenant les C^* -algèbres. En résumé, A est l'ensemble des limites en norme des $f(T)$, f étant un polynôme.

A partir de A , on fabrique Ω comme précédemment :

$$\Omega = \text{Hom}_{\text{alg}}(A, \mathbb{C}),$$

et Σ est l'ensemble des idéaux maximaux de A (qui sont automatiquement fermés). Les homomorphismes de A dans \mathbb{C} sont automatiquement continus. Le spectre S de l'opérateur T est l'ensemble des λ dans \mathbb{C} tels que $T - \lambda$ soit non-inversible.

La théorie spectrale de Gelfand peut se résumer de la manière suivante :

$$S \leftrightarrow \Omega \leftrightarrow \Sigma,$$

où S est le spectre de T , Ω et Σ les spectres de A . Ces trois objets que l'on peut tous appeler le spectre se correspondent, et S est un ensemble de valeurs réelles. L'algèbre A que l'on a définie au moyen de l'opérateur T s'interprète comme l'ensemble des fonctions continues sur le spectre. La nouveauté apportée par Gelfand est d'avoir remarqué qu'on pouvait fabriquer une algèbre à partir de l'opérateur. Il prouve une série de propriétés de cette algèbre, les prend comme axiomes, et, à partir de ces axiomes, il démontre que *l'algèbre en question est nécessairement l'algèbre des fonctions continues sur un certain espace compact* :

$$A \approx C^0(S) \approx C^0(\Omega).$$

4 Spectres des anneaux

Soit A un anneau commutatif. Il y a deux sortes de spectres pour un tel anneau, chacun étant un ensemble d'idéaux : le *spectre maximal* et le *spectre premier*. Le spectre maximal est l'ensemble des idéaux maximaux de A , le spectre premier est celui de ses idéaux premiers. Ces notions ont été dégagées vers 1955 par Serre (cas maximal) et Chevalley (cas premier). De là est venue l'impulsion qui a permis à Grothendieck de révolutionner la géométrie algébrique. Un des enjeux actuels est de trouver comment *transférer toutes ces notions au cas d'algèbres non-commutatives*. On a réussi à créer un langage géométrique pour les algèbres commutatives et on aimerait bien faire la même chose dans le cas d'algèbres non-commutatives.

Exemple géométrique :

Soit Γ une courbe algébrique définie par l'équation algébrique $f(x, y) = 0$ dans \mathbb{C}^2 . Il faut, à cette courbe, associer des points et, plus algébriquement, introduire un certain anneau qui représente les fonctions sur la courbe qui peuvent s'exprimer comme un polynôme en fonction des coordonnées. L'anneau cherché est $A = \mathbb{C}[X, Y]/(f)$. On montre alors que le *spectre maximal de A correspond aux points de Γ* .

Cela se généralise immédiatement aux espaces de dimension supérieure, c'est-à-dire aux variétés algébriques V dans \mathbb{C}^n . L'anneau est

$$A = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]/J, \quad J \text{ idéal}$$

et là aussi *le spectre maximal de A correspond aux points complexes de la variété $V \subset \mathbb{C}^n$ associée à J* .

C'est pour cela que, au début, dans la géométrie algébrique rénovée des années 1950, on se limitait au cas d'un corps de base algébriquement clos et tout d'abord aux idéaux maximaux

Spectre maximal de $A \leftrightarrow$ ensemble $V(\mathbb{C})$ des points complexes de V .

Le spectre premier de A définit le *schéma* de V . Le schéma est l'échafaudage, ce n'est pas la variété, c'est ce qui lui sert de squelette, de support. Chevalley qui a inventé ce terme insistait beaucoup sur cette signification. *Le schéma n'est pas l'ensemble des points de la variété, mais l'ensemble de ses sous-variétés irréductibles* (dans le cas particulier des courbes, une sous-variété irréductible est, soit un point, soit la courbe tout entière, et l'on ne se rend donc pas compte de la nécessité d'introduire ces sous-variétés irréductibles). Cette considération des sous-variétés irréductibles et des anneaux locaux correspondants est le résultat de vingt années de travail de Zariski sur les transformations birationnelles et la désingularisation des surfaces. C'est une nécessité profonde qui provient de la géométrie algébrique.

En géométrie, la notion de produit cartésien $V \times W$ de deux variétés est cruciale. Au niveau des points, on a $(V \times W)(\mathbb{C}) = V(\mathbb{C}) \times W(\mathbb{C})$. La transposition de cette notion au cas des schémas est plus subtile, car une sous-variété irréductible T d'un produit n'est pas un produit de sous-variétés irréductibles. Voici un exemple simple : V et W sont des droites, donc $V \times W$ est un plan. Une droite T dans ce plan ne peut se représenter comme un produit que si elle est parallèle à l'un des axes de coordonnées V, W .

Exemple arithmétique :

$A = \mathbb{Z}$, anneau des entiers rationnels.

Le spectre premier correspond aux nombres premiers, chaque nombre premier engendrant un idéal premier. Il y a aussi l'idéal nul qui est un idéal premier et qui joue un rôle particulier³.

Un nombre premier p est aussi associé à une valuation v_p définie par

$$v_p \left(p^n \frac{a}{b} \right) = n \quad \text{si} \quad (a, p) = (b, p) = 1,$$

et l'on a aussi $v_\infty(x) = \log |x|$.

L'unification de ces deux situations est un succès majeur de Grothendieck. Elle se réalise en oubliant le corps de base, formé des constantes (le plus souvent les nombres complexes), omniprésent chez Zariski, Weil, Chevalley, Serre. . .

Le problème est de faire du spectre un espace, et ici la topologie de Zariski convient. Elle a été introduite d'abord dans le cas non-commutatif par Jacobson, et a été définie par Zariski dans une situation un peu différente. Dans le cas particulier de la théorie de Gelfand, où l'on prend comme anneau l'algèbre des fonctions continues sur un espace compact, la topologie de Zariski définie au moyen de cette algèbre est la topologie usuelle d'un espace compact.

³Le spectre maximal comprend les nombres premiers, mais pas 0.

5 Conclusion

La notion de spectre unifie donc des disciplines largement différentes ; en partant de problèmes physiques liés, soit à la spectroscopie, soit à l'optique, ou encore la physique atomique, on arrive à des problèmes d'analyse fonctionnelle. Ceux-ci ont encore un lien assez net avec la physique, mais à l'autre bout de la chaîne, on arrive à des applications arithmétiques.

Il y a dans l'œuvre de Grothendieck une première partie que l'on a tendance à oublier, à tort, sa thèse consacrée à l'analyse fonctionnelle. Grothendieck était à l'époque totalement familier avec la théorie de Gelfand, qui est une des premières introductions de la notion mathématique de spectre vu comme espace. Ce n'est pas par hasard, je crois, que Grothendieck est passé de cette théorie d'analyse fonctionnelle à la géométrie algébrique et il vaudrait la peine d'analyser plus en détail cette transition.

Un des développements récents les plus fascinants est l'impact grandissant des idées de Grothendieck dans les problèmes de physique mathématique. Les intégrales compliquées de Feynman pour la théorie quantique des champs trouvent leur niche dans la partie la plus avancée de la géométrie algébrique, celle des *motifs* qui réalisent un des rêves les plus grandioses de Grothendieck. Pourtant, à partir de présupposés moraux, il avait le plus grande défiance pour la physique et la technologie, civile et militaire, qu'elle a engendrée.

Appendice : Dynamique des spectres

Les lois de la spectroscopie, rappelées ci-dessus, concernent l'émission lumineuse d'un atome au repos par rapport à l'observateur. Lorsque la source est en mouvement par rapport à l'observateur, on a affaire à un effet Doppler qui divise toutes les fréquences d'un spectre par un facteur noté z .

A.1. Théorie de l'effet Doppler

Rappelons la version relativiste établie par Einstein en 1905. Une source immobile émet une radiation de longueur d'onde λ et de fréquence ν , liées par la relation $\lambda\nu = c$, où c est la vitesse de la lumière. Dans le spectre de la lumière visible, les grandes longueurs d'onde correspondent au rouge, et les petites au violet. Pour simplifier, nous ne considérons qu'une coordonnée x d'espace, à joindre au temps t . Dans la théorie de Minkowski, on pose

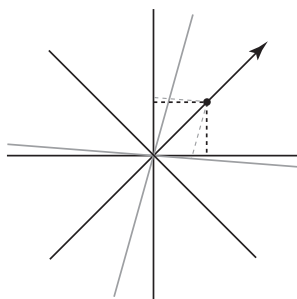
$$x^0 = ct, \quad x^1 = x,$$

et la forme quadratique $c^2 t^2 - x^2$ de Minkowski est un invariant. Il s'écrit sous la forme

$$c^2 t^2 - x^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 = x_+ x_-$$

en posant $x_{\pm} = ct \pm x$.

Une onde stationnaire de longueur d'onde λ est de la forme $a e^{2\pi i x/\lambda}$. Si l'on tient compte de la propagation de la lumière, et si l'atome émetteur est à l'origine $x = 0$ des coordonnées, on a deux ondes se déplaçant à la vitesse c , selon le schéma



Celle de droite a pour expression

$$a e^{2\pi i(x-ct)/\lambda},$$

soit $a e^{-2\pi i x_-/\lambda}$, et celle de gauche est $a e^{2\pi i x_+/\lambda}$.

Si la source est en mouvement, nous la supposons fuyant l'observateur : on observe la partie droite de l'onde, et la source se déplace vers la gauche à la vitesse v . L'amplitude de l'onde est alors $e^{-2\pi i X_-/\lambda}$, où les coordonnées x, t, x^0, x^1, x_+, x_- se réfèrent à l'observateur et X, T, X^0, X^1, X_+, X_- concernent la source. La transformation de Lorentz s'exprime sous la forme

$$X = \frac{x + vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$T = \frac{t + vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Une expression beaucoup plus simple, et équivalente, est donnée par

$$X_+ = z x_+, \quad X_- = z^{-1} x_-$$

avec

$$z = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}.$$

Si la vitesse de fuite v est petite devant la vitesse de la lumière c , on a l'approximation non-relativiste⁴

$$z \approx 1 + \frac{v}{c}.$$

L'onde $a e^{-2\pi i X_-/\lambda}$ vaut $a e^{-2\pi i x_-/z\lambda}$. Autrement dit, la longueur d'onde λ est multipliée par le facteur $z = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$ plus grand que 1, et l'onde émise par une source fuyant l'observateur subit un décalage vers le rouge.

⁴Ce que nous notons ici z est traditionnellement noté $1 + z$.

A.2. Observations astronomiques

Les observations systématiques des spectres des galaxies, proches ou lointaines, montrent qu'il y a un facteur z associé à chacune de ces galaxies, qui multiplie toutes les longueurs d'onde et provoque un *décalage du spectre vers le rouge*. Ce déplacement est une homothétie et non une translation. Le facteur z est ce que l'on observe expérimentalement. Si l'on convient que cette transformation du spectre provient d'un effet Doppler lié à une vitesse de fuite, on introduit la vitesse correspondante par la formule $z = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$ dans laquelle le facteur z est observable, mais où v devient un produit de la théorie.

La loi de Hubble est une loi expérimentale :

$$z \approx 1 + \frac{dH_0}{c} \text{ pour } d \text{ petit}^5.$$

Si l'on utilise l'approximation non-relativiste $z \approx 1 + \frac{v}{c}$, la loi de Hubble s'exprime sous la forme $v = dH_0$: la vitesse de fuite v est proportionnelle à la distance d .

La constante de Hubble est donnée traditionnellement sous la forme d'une vitesse exprimée en kilomètres par seconde divisée par une distance exprimée en mégaparsecs⁶

$$H_0 = 70 \text{ km/sec/megaparsec},$$

ce qui se traduit par

$$\frac{1}{H_0} \approx 13,7 \times 10^9 \text{ années}.$$

L'observation des galaxies, du décalage vers le rouge, et la loi de Hubble, nous fournissent une donnée numérique qui est une durée, que les modèles courants de cosmologie interprètent comme l'âge de l'univers. La loi de Hubble nous fournit un accès aux très longues durées, c'est son principal intérêt. Dans cette loi, d désigne la distance entre l'observateur et la galaxie ou l'objet céleste considérés. Pour que cette loi ait un sens, il faut qu'il y ait une autre façon d'exprimer d , mais on la prend souvent comme une définition de l'échelle des distances.

La loi de Hubble est généralement interprétée comme une *fuite des galaxies* : chaque galaxie à la distance d s'échappe à une vitesse égale à $v = dH_0$, proportionnelle à la distance. Cette fuite des galaxies peut se comprendre comme une *expansion de l'univers*, mais cela dépend du modèle d'univers choisi. Des observations récentes ont montré que le facteur z peut atteindre des valeurs de l'ordre 7 ou 8. Dans certains modèles cosmologiques, la théorie prévoit des valeurs fantastiques de z , de l'ordre de 1000, ce qui fait changer complètement de nature les longueurs d'onde. (Elles sont habituellement de l'ordre du micromètre.)

⁵Relativement ! La distance d doit être petite devant la distance énorme c/H_0 , de l'ordre de 13 milliards d'années-lumière.

⁶Un mégaparsec est un million de parsecs, et le parsec vaut environ 3,26 années-lumière.