Noyaux du transfert automorphe de Langlands et formules de Poisson non linéaires: Notes de cours

Laurent LAFFORGUE

Institut des Hautes Études Scientifiques
35, route de Chartres
91440 – Bures-sur-Yvette (France)

Février 2013

IHES/M/13/06

Noyaux du transfert automorphe de Langlands et formules de Poisson non linéaires :

Notes de cours*

par Laurent Lafforgue

Dans tout le cours, on considère un groupe réductif connexe quasi-déployé G sur un corps global F, le groupe réductif complexe $\widehat{G}$ dual de G muni de l'action naturelle du groupe de Galois Γ_F de F, et une représentation de transfert continue

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})\,.$$

On traite le cas où le corps global F est le corps des fonctions rationnelles d'une courbe projective lisse géométriquement connexe sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ à q éléments. On note $|F|$ l'ensemble des places de F, F_x le corps localisé de F en chaque place $x \in |F|$, O_x son anneau des entiers, $q_x = q^{\deg(x)}$ le nombre d'éléments de son corps résiduel et

$$|\bullet|_x = q_x^{-v_x(\bullet)} : F_x \to q_x^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$$

la norme de F_x. On note également

$$\mathbb{A} = \prod_{x \in |F|} F_x$$

l'anneau des adèles de F, $\mathbb{A}^\times$ son groupe multiplicatif et

$$|\bullet| = \prod_{x \in |F|} |\bullet|_x : \mathbb{A}^\times \to q^{\mathbb{Z}}$$

la norme globale, qui vérifie la "formule du produit"

$$|\gamma| = 1\,, \quad \forall\, \gamma \in F^\times \subset \mathbb{A}^\times\,.$$

Comme toutes les constructions et démonstrations ne font appel qu'à de l'analyse harmonique sur les groupes réductifs locaux $G(F_x)$, $x \in |F|$, et adéliques $G(\mathbb{A})$, le cas où le corps global F est un corps de nombres se traiterait de la même façon.

* Je remercie notre secrétaire Cécile Gourgues qui a réalisé la frappe de ces notes à la perfection et avec une incroyable rapidité.

Sommaire

Appendice

I. Notion de noyaux du transfert et construction de leur partie principale

Le groupe réductif quasi-déployé G sur F est dit non ramifié en une place $x \in |F|$ si l'action du groupe de Galois local $\Gamma_{F_x} \subset \Gamma_F$ sur la donnée radicielle $(X_T, \Delta_B, X_T^\vee, \Delta_B^\vee)$ ou, ce qui revient au même, sur le groupe dual $\widehat{G}$ se factorise à travers son quotient non ramifié $\Gamma_{F_x}^{\mathrm{nr}} \cong \widehat{\mathbb{Z}}$ dont un générateur topologique est l'élément de Frobenius σ_x. Dans ce cas, le groupe réductif G sur F_x se prolonge en un schéma en groupes réductifs lisse sur O_x et on dispose du sous-groupe ouvert compact maximal $G(O_x)$ de $G(F_x)$.

En une telle place x, la représentation de transfert $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ est dite non ramifiée si l'homomorphisme induit $\Gamma_{F_x} \to \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ se factorise à travers le quotient non ramifié $\Gamma_{F_x}^{\mathrm{nr}} = \langle \sigma_x \rangle$ de Γ_{F_x}. On sait qu'alors ρ induit un homomorphisme

$$\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r \to \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$$

de l'algèbre de Hecke sphérique

$$\mathcal{H}_{x,\emptyset}^r = C_c(\mathrm{GL}_r(O_x)\backslash \mathrm{GL}_r(F_x)/\mathrm{GL}_r(O_x))$$

de $\mathrm{GL}_r(F_x)$ vers celle

$$\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G = C_c(G(O_x)\backslash G(F_x)/G(O_x))$$

de $G(F_x)$. Ces algèbres sont commutatives, et l'homomorphisme ρ_x^* transforme tout caractère $z_x : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G \to \mathbb{C}$ de la seconde en un caractère $(\rho_x)_*(z_x) = z_x \circ \rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r \to \mathbb{C}$ de la première.

On sait que le groupe réductif quasi-déployé G sur F et la représentation de transfert $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ sont non ramifiés en toutes les places $x \in |F|$ sauf un ensemble fini que l'on note S_ρ.

Posons :

Définition I.1. –

Soit un sous-ensemble fini S de $|F|$ contenant S_ρ.

(i) *Étant donnée une famille de caractères*

$$z_x : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G \to \mathbb{C} \qquad \text{[resp. } z'_x : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r \to \mathbb{C}\text{]}$$

indexés par les places $x \in |F| - S$, une fonction automorphe non nulle

$$\varphi : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C} \qquad \text{[resp. } \varphi' : \mathrm{GL}_r(F)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\text{]}$$

est dite vecteur propre de valeurs propres les z_x [resp. z'_x] pour l'action par convolution des algèbres de Hecke sphériques $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ [resp. $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^r$] si, en toute place $x \in |F| - S$, φ [resp. φ'] est invariante à droite par $G(O_x)$ [resp. $\mathrm{GL}_r(O_x)$] et vérifie

$$\varphi * \varphi_x = z_x(\varphi_x) \cdot \varphi\,, \quad \forall\, \varphi_x \in \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G\,,$$

$$\text{[resp. } \varphi' * \varphi'_x = z'_x(\varphi'_x) \cdot \varphi'\,, \quad \forall\, \varphi'_x \in \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r\text{]}.$$

(ii) *Une fonction automorphe non nulle*

$$\varphi : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C} \qquad \textit{[resp. } \varphi' : \mathrm{GL}_r(F)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\textit{]}$$

est dite "S-propre" si elle satisfait les conditions de (i) *relativement à une certaine famille de caractères*

$$z_x : \mathcal{H}^G_{x,\emptyset} \to \mathbb{C} \quad \textit{[resp. } z'_x : \mathcal{H}^r_{x,\emptyset} \to \mathbb{C}\textit{]}, \quad x \in |F| - S\,.$$

(iii) *Une famille de caractères*

$$z_x : \mathcal{H}^G_{x,\emptyset} \to \mathbb{C} \quad \textit{[resp. } z'_x : \mathcal{H}^r_{x,\emptyset} \to \mathbb{C}\textit{]}$$

indexés par les places $x \in |F| - S$ est dite automorphe si elle satisfait les conditions de (i) *relativement à une certaine fonction automorphe "S-propre" $\varphi : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ [resp. $\varphi' : \mathrm{GL}_r(F)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$].*

□

Le principe de fonctorialité de Langlands peut être formulé de la manière suivante :

Conjecture I.2 (conjecture de transfert par ρ). –

Pour toute partie finie S de $|F|$ contenant S_ρ, et pour toute famille de caractères $(z_x : \mathcal{H}^G_{x,\emptyset} \to \mathbb{C})_{x\in|F|-S}$ qui est automorphe, sa transformée $(z_x \circ \rho^*_x : \mathcal{H}^r_{x,\emptyset} \to \mathbb{C})_{x\in|F|-S}$ par ρ est encore automorphe.

On introduit la notion de noyau du transfert :

Définition I.3. –

Soit une partie finie S de $|F|$ contenant S_ρ.

On appelle "noyau" (ou "S-noyau") du transfert automorphe par ρ toute fonction automorphe en 3 variables $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$ et $g \in G(\mathbb{A})$

$$K : (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(F)\backslash (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

qui satisfait les conditions suivantes :

(i) *En toute place $x \in |F| - S$, K est invariante à droite par $G(O_x) \times G(O_x) \times \mathrm{GL}_r(O_x)$. En notant $*_1, *_2$ et $*_3$ les produits de convolution en les 3 variables $g_1, g_2 \in G(F_x)$ et $g \in \mathrm{GL}_r(F_x)$, K est compatible avec $\rho^*_x : \mathcal{H}^r_{x,\emptyset} \to \mathcal{H}^G_{x,\emptyset}$ au sens que*

$$K *_3 \varphi'_x = K *_2 \rho^*_x(\varphi'_x)\,, \quad \forall\, \varphi'_x \in \mathcal{H}^r_{x,\emptyset}\,,$$

et elle est compatible avec l'automorphisme $\varphi_x \mapsto \varphi^\vee_x$ de $\mathcal{H}^G_{x,\emptyset}$ défini par le changement de variable $g_1 \mapsto g_1^{-1}$ au sens que

$$K *_2 \varphi_x = K *_1 \varphi^\vee_x\,, \quad \forall\, \varphi_x \in \mathcal{H}^G_{x,\emptyset}\,.$$

(ii) *Pour toute fonction automorphe S-propre*

$$\varphi : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,,$$

l'intégrale

$$(g_2, g) \mapsto \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})} dg_1 \cdot \varphi(g_1) \cdot K(g_1, g_2, g)$$

est absolument convergente quels que soient les éléments $g_2 \in G(\mathbb{A})$, $g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, et définit une fonction automorphe $(G \times \mathrm{GL}_r)(F)\backslash (G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$.

□

On remarque :

Lemme I.4. –

Pour démontrer la conjecture de transfert I.2 *ci-dessus, il suffit de prouver que, pour toute fonction automorphe S-propre*

$$\varphi : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,,$$

il existe un S-noyau du transfert

$$K : (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(F)\backslash(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

tel que l'intégrale

$$(g_2, g) \mapsto \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A}))} dg_1 \cdot \varphi_1(g_1) \cdot K(g_1, g_2, g)$$

ne soit pas uniformément nulle. □

On choisit une fois pour toutes un caractère additif non trivial

$$\psi : \mathbb{A}/F \to \mathbb{C}^\times\,.$$

On sait que les caractères additifs continus $\mathbb{A}/F \to \mathbb{C}^\times$ sont exactement les

$$\psi_\gamma : u \mapsto \psi(\gamma \cdot u)$$

associés aux éléments $\gamma \in F$.

Notant $N_r \subset \mathrm{GL}_r$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures unipotentes, on s'intéresse aux caractères de $N_r(\mathbb{A})$ qui sont triviaux sur $N_r(F)$. Ce sont exactement les composés

$$\psi_\ell : N_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^\times$$

de l'homomorphisme de groupes algébriques

$$\begin{array}{rcl} N_r & \to & N_r/[N_r, N_r] = (\mathbb{A}^1)^{r-1} \\ u = (u_{i,j})_{1\leq i,j\leq r} & \mapsto & (u_{i,i+1})_{1\leq i<r}\,, \end{array}$$

d'une forme linéaire définie sur F

$$\ell : (\mathbb{A}^1)^{r-1} \to \mathbb{A}^1$$

et du caractère $\psi : \mathbb{A}/F \to \mathbb{C}^\times$. Un tel caractère ψ_ℓ est dit régulier lorsque les $r-1$ coordonnées de ℓ sont non nulles, et irrégulier dans le cas contraire. On note $\psi_{(r)}$ le caractère régulier dont les $r-1$ coordonnées valent 1.

Une fonction localement constante

$$W : \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C} \quad [\text{resp. } \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C}\,,\ x \in |F|]$$

est dite "de $\psi_{(r)}$-type de Whittaker" si

$$W(ug) = \psi_{(r)}(u) \cdot W(g)\,, \quad \forall\, g\,, \forall\, u \in N_r(\mathbb{A}) \quad [\text{resp. } N_r(F_x)]\,.$$

Notant

$$Q_r = \mathrm{GL}_{r-1} \cdot N_r = N_r \cdot \mathrm{GL}_{r-1} = \left\{ \begin{pmatrix} * & \dots & * & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & \dots & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

le sous-groupe "mirabolique" supérieur, on rappelle le résultat suivant de Shalika :

Proposition I.5. –

(i) *L'opérateur*

$$H \mapsto W^{\psi}_{(r)} H = \left[g \mapsto \int_{N_r(F)\backslash N_r(\mathbb{A})} du \cdot \psi^{-1}_{(r)}(u) \cdot H(ug) \right]$$

définit une projection de l'espace des fonctions localement constantes

$$H : Q_r(F)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

sur l'espace des fonctions de $\psi_{(r)}$-type de Whittaker $W : \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$.

(ii) *Cet opérateur $W^{\psi}_{(r)}$ admet pour section, c'est-à-dire pour inverse à droite, l'opérateur*

$$W \mapsto \left[g \mapsto \sum_{\delta \in N_{r-1}(F)\backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)} W(\delta g) \right] .$$

(iii) *L'image de cette section est le sous-espace des fonctions $H : Q_r(F)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ qui sont cuspidales au sens que leurs coefficients unipotents*

$$g \mapsto \int_{N_r(F)\backslash N_r(\mathbb{A})} du \cdot \psi_{\ell}^{-1}(u) \cdot H(ug)$$

associés aux caractères irréguliers $\psi_{\ell} : N_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^{\times}$ sont uniformément nuls.

Remarque :

Il résulte de cette proposition que toute fonction localement constante

$$H : Q_r(F)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

s'écrit de manière unique comme la somme

$$H = H^c + H^{nc}$$

d'une fonction $H^c : Q_r(F)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ qui est cuspidale et d'une fonction $H^{nc} : Q_r(F)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ non cuspidale au sens que

$$W^{\psi}_{(r)} H^{nc} = 0 .$$

Cela s'applique en particulier aux fonctions $H : \mathrm{GL}_r(F)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ mais leurs composantes $H^c, H^{nc} : Q_r(F)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ ne sont en général pas invariantes par $\mathrm{GL}_r(F)$.

□

On cherche à construire des noyaux

$$K : (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(F)\backslash (G \times G \times \mathrm{GL}_r)((\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

comme sommes de leur composante cuspidale

$$K^c : (G \times G \times Q_r)(F)\backslash (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

et de leur composante non cuspidale

$$K^{nc} : (G \times G \times Q_r)(F)\backslash (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C} .$$

De plus, construire K^c équivaut à construire le $\psi_{(r)}$-coefficient unipotent

$$W_{(r)}^{\psi} K = W_{(r)}^{\psi} K^c : (G \times G \times N_r)(F) \backslash (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C} \,.$$

Étant données une partie finie S de $|F|$ contenant S_ρ et une fonction automorphe S-propre $\varphi : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$, il suffit que l'intégrale $(g_2, g) \mapsto \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})} dg_1 \cdot \varphi(g_1) \cdot W_{(r)}^{\psi} K(g_1, g_2, g)$ ne soit pas uniformément nulle pour qu'il en soit de même de l'intégrale $(g_2, g) \mapsto \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})} dg_1 \cdot \varphi(g_1) \cdot K(g_1, g_2, g)$. Cette condition sera facile à réaliser si, dans le but de construire des noyaux $K : (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(F) \backslash (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$, on commence par construire leur coefficient $W_{(r)}^{\psi} K$ de la manière suivante :

Définition I.6. –

Soit S une partie finie de $|F|$ contenant S_ρ.

On définit les $\psi_{(r)}$-coefficients unipotents

$$W_{(r)}^{\psi} K : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \times G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \times \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

des noyaux cherchés K comme des sommes localement finies de la forme

$$W_{(r)}^{\psi} K(g_1, g_2, g) = \sum_{\gamma \in G(F)} \left(\prod_{x \in |F|} K_{\psi_x}^{G,\rho} \right) (g_1^{-1} \gamma \, g_2, g) \,,$$

où les facteurs locaux

$$K_{\psi_x}^{G,\rho} \,, \quad x \in |F| \,,$$

sont des fonctions localement constantes

$$\begin{array}{rcl} G(F_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x) & \to & \mathbb{C} \\ (g, g') & \mapsto & K_{\psi_x}^{G,\rho}(g, g') \end{array}$$

telles que

- *en toute place $x \in |F|$, les fonctions $K_{\psi_x}^{G,\rho}(\bullet, g')$ sont à support compact dans $G(F_x)$ et les fonctions $K_{\psi_x}^{G,\rho}(g, \bullet)$ sur $\mathrm{GL}_r(F_x)$ sont de $\psi_{(r)}$-type de Whittaker,*
- *en toute place $x \in |F| - S \subset |F| - S_\rho$, $K_{\psi_x}^{G,\rho}$ est un "noyau local" du transfert non ramifié par ρ : cela signifie que $K_{\psi_x}^{G,\rho}$ est invariante à gauche et à droite par $G(O_x)$ en la variable $g \in G(F_x)$, invariante à droite par $\mathrm{GL}_r(O_x)$ en la variable $g' \in \mathrm{GL}_r(F_x)$ et compatible avec l'homomorphisme*

  $$\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r \to \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$$

  au sens que

  $$K_{\psi_x}^{G,\rho} *_2 \varphi_x' = K_{\psi_x}^{G,\rho} *_1 \rho_x^*(\varphi_x') \,, \quad \forall \, \varphi_x' \in \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r \,.$$

Remarque :

La dernière condition sur $K_{\psi_x}^{G,\rho}$ équivaut à demander que sa décomposition spectrale sous la double action par convolution à droite de $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ et $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^r$ ne fasse apparaître que des paires de caractères ($z_x : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G \to \mathbb{C}$, $z_x' : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r \to \mathbb{C}$) reliés par la condition

$$z_x' = z_x \circ \rho_x^* = (\rho_x)_*(z_x) \,.$$

□

Afin de construire des noyaux locaux du transfert non ramifié

$$K^{G,\rho}_{\psi_x} : G(F_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C}$$

vérifiant les conditions de la définition I.6 ci-dessus en les places $x \in |F| - S \subset |F| - S_\rho$, on a besoin de préciser la forme des homomorphismes

$$\rho_x^* : \mathcal{H}^r_{x,\emptyset} \to \mathcal{H}^G_{x,\emptyset}\,, \quad x \in |F| - S_\rho\,,$$

et pour cela de rappeler l'isomorphisme de Satake :

Proposition I.7. –

Soit x une place en laquelle le groupe quasi-déployé G est non ramifié, et soit $\mathfrak{S}^x_G = \{w \in \mathfrak{S}_G \mid \sigma_x(w) = w\}$ le groupe de Weyl F_x-rationnel de G.

Soient T^d_x le plus grand sous-tore de T qui est déployé sur F_x, $\widehat{T}^d_x$ son tore complexe dual muni de l'action de $\mathfrak{S}^x_G$, et $\mathrm{Im}\,\widehat{T}^d_x$ le plus grand sous-tore réel compact de $\widehat{T}^d_x$.

Alors :

(i) *Il existe un isomorphisme, appelé isomorphisme de Satake,*

$$S^G_x : \mathcal{H}^G_x \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}\,[\widehat{T}^d_x]^{\mathfrak{S}^x_G}$$

si bien que les caractères de l'algèbre commutative $\mathcal{H}^G_x$ sont associés aux éléments de $\widehat{T}^d_x$, modulo l'action du groupe fini $\mathfrak{S}^x_G$.

(ii) *Pour tout élément $\lambda \in \widehat{T}^d_x$, il existe une unique fonction*

$$\varphi^G_{x,\lambda} : G(O_x)\backslash G(F_x)/G(O_x) \to \mathbb{C}$$

telle que

$$\varphi^G_{x,\lambda} * \varphi_x = \varphi_x * \varphi^G_{x,\lambda} = S^G_x(\varphi_x)(\lambda) \cdot \varphi^G_{x,\lambda}\,, \quad \forall\, \varphi_x \in \mathcal{H}^G_{x,\emptyset}$$

et

$$\varphi^G_{x,\lambda}(1) = 1\,.$$

(iii) *Il existe une unique mesure $d\lambda$ sur $\mathrm{Im}\,\widehat{T}^d_x$, appelée la mesure de Plancherel, telle que pour tout $\varphi_x \in \mathcal{H}^G_{x,\emptyset}$, on ait*

$$\varphi_x(g) = \int_{\mathrm{Im}\,\widehat{T}^d_x} d\lambda \cdot S^G_x(\varphi_x)(\lambda) \cdot \varphi^G_{x,\lambda}(g)\,, \quad \forall\, g \in G(F_x)\,.$$

□

Si $T_r = \mathbb{G}^r_m$ désigne le tore maximal de GL_r et $\widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$ son tore dual, on dispose de même en toute place $x \in |F|$ de l'isomorphisme de Satake sur $\mathrm{GL}_r(F_x)$

$$S^r_x : \mathcal{H}^r_{x,\emptyset} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}\,[\widehat{T}_r]^{\mathfrak{S}_r}\,.$$

Passons maintenant aux homomorphismes ρ_x^* en les places $x \in |F| - S_\rho$:

Lemme I.8. –

Quitte à remplacer la représentation de transfert $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ par une représentation conjuguée, supposons – ce que nous ferons toujours désormais – qu'elle induit un homomorphisme entre tores maximaux

$$\rho_T : \widehat{T} \to \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r\,.$$

En une place non ramifiée arbitraire $x \in |F| - S_\rho$, notons e_x l'ordre de l'élément de Frobenius σ_x agissant sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$. Alors :

(i) *Le dual* $\widehat{T}_x^d$ *de* T_x^d *s'identifie au quotient de* $\widehat{T}$ *par le sous-tore* $\{\lambda \cdot \sigma_x(\lambda^{-1}) \mid \lambda \in \widehat{T}\}$*, si bien que l'homomorphisme*

$$\begin{array}{ccc} \widehat{T} & \to & \widehat{T}_r \\ \lambda & \mapsto & \rho_T(\lambda \cdot \sigma_x(\lambda) \dots \sigma_x^{e_x - 1}(\lambda)) \end{array}$$

définit un homomorphisme

$$\rho_{T,x} : \widehat{T}_x^d \to \widehat{T}_r \,.$$

(ii) *Il est possible d'ordonner la famille*

$$\varepsilon_x = (\varepsilon_x^1, \dots, \varepsilon_x^r) \in (\mathbb{C}^\times)^r$$

des r *valeurs propres de* σ_x *agissant sur* $\mathbb{C}^r$*, de telle façon que l'homomorphisme d'algèbres*

$$\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r \to \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G \,,$$

vu comme un homomorphisme

$$\rho_x^* : \mathbb{C}\,[\widehat{T}_r]^{\mathfrak{S}_r} \to \mathbb{C}\,[\widehat{T}_x^d]^{\mathfrak{S}_G^x}$$

vérifie

$$\rho_x^*(p_x)(\lambda^{e_x}) = p_x(\varepsilon_x \cdot \rho_{T,x}(\lambda))\,, \quad \forall\, \lambda \in \widehat{T}_x^d\,, \quad \forall\, p_x \in \mathbb{C}\,[\widehat{T}_r]^{\mathfrak{S}_r} \,.$$

□

En toute place $x \in |F|$ et pour tout caractère $\lambda' \in \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$, il existe une unique fonction de $\psi_{(r)}$-type de Whittaker

$$W_{x,\lambda'}^{r,\psi_x} : \mathrm{GL}_r(F_x)/\mathrm{GL}_r(O_x) \to \mathbb{C}$$

telle que

$$W_{x,\lambda'}^{r,\psi_x} * \varphi'_x = S_x^r(\varphi'_x)(\lambda') \cdot W_{x,\lambda'}^{r,\psi_x}$$

et

$$W_{x,\lambda'}^{r,\psi_x} \left(\begin{pmatrix} \gamma_x^{r-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \gamma_x & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 1$$

pour n'importe quel élément $\gamma_x \in F_x^\times$ de valuation $v_x(\gamma_x)$ égale au conducteur N_{ψ_x} de la composante ψ_x de ψ en x.

On a :

Proposition I.9. –

En toute place $x \in |F| - S \subset |F| - S_\rho$*, les noyaux locaux du transfert non ramifié au sens de la définition* I.6

$$K_{\psi_x}^{G,\rho} : G(O_x)\backslash G(F_x)/G(O_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x)/\mathrm{GL}_r(O_x) \to \mathbb{C}$$

sont exactement les fonctions de la forme

$$K_{\psi_x}^{G,\rho}(g,g') = \int_{\mathrm{Im}\,\widehat{T}_x^d} d\lambda^{e_x} \cdot p_x(\lambda^{e_x}) \cdot \varphi_{x,\lambda^{e_x}}^G(g) \cdot W_{x,\varepsilon_x \cdot \rho_{T,x}(\lambda)}^{r,\psi_x}(g')$$

pour un certain polynôme symétrique $p_x \in \mathbb{C}\,[\widehat{T}_x^d]^{\mathfrak{S}_G^x}$.

Remarque :

Pour que le produit infini $\prod_{x\in|F|} K^{G,\rho}_{\psi_x}$ ait un sens comme fonction sur $(G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A})$, on demande que $p_x = 1$ en presque toute place $x \in |F| - S$. $\square$

Notons $\mu_G : \mathbb{G}_m \to Z_G \subset G$ le cocaractère central de G bien défini sur F qui correspond au caractère $\widehat{\mu}_G : \widehat{G} \to \mathbb{C}^\times$ composé de $\widehat{G} \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ et du déterminant.

On remarque :

Corollaire I.10. –

Soit

$$\omega_\rho : \mathbb{A}^\times/F^\times \to \mathbb{C}^\times$$

le caractère automorphe d'ordre fini qui correspond, via la théorie du corps de classes, au caractère

$$\Gamma_F \to \mathbb{C}^\times$$

composé de $\Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ *et du déterminant.*

Alors, en toute place $x \in |F| - S \subset |F| - S_\rho$*, les noyaux locaux du transfert non ramifié*

$$K^{G,\rho}_{\psi_x} : G(F_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C}$$

vérifient la condition

$$K^{G,\rho}_{\psi_x}(g, z\, g') = K^{G,\rho}_{\psi_x}(\mu_G(z)\, g, g') \cdot \omega_\rho(z)\,, \quad \forall\, z \in F_x^\times\,.$$

Remarque :

Il est naturel de demander à la suite de ce corollaire – et nous le ferons toujours désormais – que, en toutes les places $x \in |F|$ sans exception, les facteurs $K^{G,\rho}_{\psi_x}$ de la définition I.6 vérifient la même condition

$$K^{G,\rho}_{\psi_x}(g, z\, g') = K^{G,\rho}_{\psi_x}(\mu_G(z)\, g, g') \cdot \omega_\rho(z)\,, \quad \forall\, z \in F_x^\times\,.$$

Démonstration du corollaire :

La conclusion résulte de ce que, en toute place $x \in |F| - S_\rho$, le produit $\varepsilon_x^1 \dots \varepsilon_x^r$ des r composantes de $\varepsilon_x = (\varepsilon_x^1, \dots, \varepsilon_x^r)$ est égal au déterminant de σ_x agissant sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$. En effet, $\varepsilon_x = (\varepsilon_x^1, \dots, \varepsilon_x^r)$ est la famille des r valeurs propres de cette action.

$\square$

Étant donnée une famille de fonctions locales

$$K^{G,\rho}_{\psi_x} : G(F_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C}\,, \quad x \in |F|\,,$$

vérifiant toutes les conditions que nous avons énoncées, le $\psi_{(r)}$-coefficient unipotent

$$\begin{array}{rcl} W^\psi_{(r)} K : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \times G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \times \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) & \to & \mathbb{C} \\ (g_1, g_2, g) & \mapsto & \displaystyle\sum_{\gamma \in G(F)} \left(\prod_{x\in|F|} K^{G,\rho}_{\psi_x} \right) (g_1^{-1} \gamma\, g_2, g) \end{array}$$

correspond à une fonction cuspidale

$$\begin{array}{rcl} K^c = K_\psi^{G,\rho} : (G \times G \times Q_r)(F)\backslash(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) & \to & \mathbb{C} \\ (g_1, g_2, g) & \mapsto & \displaystyle\sum_{\delta \in N_{r-1}(F)\backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)} W_{(r)}^\psi K(g_1, g_2, \delta g) \end{array}$$

qui, en toute place $x \in |F| - S \subset |F| - S_\rho$, est compatible avec $\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r \to \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ et avec l'involution $\varphi_x \mapsto \varphi_x^\vee$ de $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$.

Conjecture I.11. –
Si en chaque place $x \in S$, la fonction locale

$$K_{\psi_x}^{G,\rho} : G(F_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C}$$

vérifient certaines conditions qui dépendent de la restriction de ρ en $\widehat{G} \rtimes \Gamma_{F_x} \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, il est possible de construire une fonction

$$K^{nc} = K_\psi^{\overline{G},\rho} : (G \times G \times Q_r)(F)\backslash(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

qui est non cuspidale au sens que

$$W_{(r)}^\psi K^{nc} = 0\,,$$

est compatible avec $\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r \to \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ et avec l'involution $\varphi_x \mapsto \varphi_x^\vee$ de $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ en toute place $x \in |F| - S$, et telle que la somme

$$K^{G,\rho} = K = K^c + K^{nc} = K_\psi^{G,\rho} + K_\psi^{\overline{G},\rho}$$

soit invariante à gauche par $\mathrm{GL}_r(F)$ et définisse un S-noyau du transfert par ρ. □

Dans le but d'essayer de prouver cette conjecture, on introduit comme dans la théorie des "théorèmes réciproques" (voir [Cogdell, Piatetski-Shapiro]) les matrices de permutation en rang r

$$w_r = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad w_{r-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 & \vdots \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_r = w_r\, w_{r-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et le sous-groupe mirabolique inférieur

$$Q_r^{\mathrm{op}} = (\alpha_r^{-1} N_r\, \alpha_r) \cdot \mathrm{GL}_{r-1} = \mathrm{GL}_{r-1} \cdot (\alpha_r^{-1} N_r\, \alpha_r) = \left\{ \begin{pmatrix} * & \dots & * & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & \dots & * & 0 \\ * & \dots & * & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Remarquant que

$$(\alpha_r^{-1} N_r\, \alpha_r) \cap \mathrm{GL}_{r-1} = N_{r-1}\,,$$

on forme la somme

$$\widetilde{K}_\psi^{G,\rho}(g_1, g_2, g) = \sum_{\delta \in N_{(r-1)}(F)\backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)} W_{(r)}^\psi K(g_1, g_2, \alpha_r\, \delta g)\,.$$

La fonction ainsi définie sur $(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A})$ est compatible avec $\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r \to \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ et avec l'involution $\varphi_x \mapsto \varphi_x^\vee$ de $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ en toute place $x \in |F| - S$, et elle est invariante à gauche par $(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(F)$.

La conjecture suivante implique la précédente :

Conjecture I.12. –

Sous les hypothèses de la conjecture I.11*, il est possible de construire deux fonctions complémentaires*

$$K_\psi^{\overline{G},\rho} : (G \times G \times Q_r)(F)\backslash(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,,$$

$$\widetilde{K}_\psi^{\overline{G},\rho} : (G \times G \times Q_r^{\mathrm{op}})(F)\backslash(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,,$$

toutes deux compatibles avec $\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r \to \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ et avec l'involution $\varphi_x \mapsto \varphi_x^\vee$ de $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ en toute place $x \in |F| - S$, et telles que $K_\psi^{\overline{G},\rho}$ soit non cuspidale, et

$$K_\psi^{G,\rho} + K_\psi^{\overline{G},\rho} = \widetilde{K}_\psi^{G,\rho} + \widetilde{K}_\psi^{\overline{G},\rho}\,.$$

Remarque :

L'implication résulte de ce que $\mathrm{GL}_r(F)$ est engendré par ses sous-groupes $Q_r(F)$ et $Q_r^{\mathrm{op}}(F)$. □

II. Intégrales de Rankin-Selberg, facteurs L locaux et transformation de Fourier

Rappelons qu'on part d'une fonction localement constante

$$W_{(r)}^{\psi} K : (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

de la forme

$$(g_1, g_2, g) \mapsto W_{(r)}^{\psi}(g_1, g_2, g) = \sum_{\gamma \in G(F)} \left(\prod_{x \in |F|} K_{\psi_x}^{G,\rho} \right) (g_1^{-1} \gamma \, g_2, g) \, .$$

Les facteurs locaux $K_{\psi_x}^{G,\rho}$ en les places $x \in |F| - S \subset |F| - S_\rho$ sont des noyaux du transfert non ramifié. Le produit $\left(\prod\limits_{x \in |F|} K_{\psi_x}^{G,\rho} \right) (\bullet, \bullet)$ est à supports compacts dans $G(\mathbb{A})$ en la première variable et de $\psi_{(r)}$-type de Whittaker sur $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ en la seconde variable, et il vérifie

$$\left(\prod_{x \in |F|} K_{\psi_x}^{G,\rho} \right) (g, zg') = \left(\prod_{x \in |F|} K_{\psi_x}^{G,\rho} \right) (\mu_G(z) g, g') \cdot \omega_\rho(z) \, , \quad \forall \, z \in \mathbb{A}^\times \, .$$

On cherche à comparer les deux fonctions sommes sur $(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A})$

$$K_{\psi}^{G,\rho}(g_1, g_2, g) = \sum_{\delta \in N_{r-1}(F) \backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)} W_{(r)}^{\psi} K(g_1, g_2, \delta g) \, ,$$

$$\widetilde{K}_{\psi}^{G,\rho}(g_1, g_2, g) = \sum_{\delta \in N_{r-1}(F) \backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)} W_{(r)}^{\psi} K(g_1, g_2, \alpha_r \, \delta g) \, ,$$

et, si possible, à construire deux fonctions complémentaires

$$K_{\psi}^{\overline{G},\rho} : (G \times G \times Q_r)(F) \backslash (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C} \, ,$$

$$\widetilde{K}_{\psi}^{\overline{G},\rho} : (G \times G \times Q_r^{\mathrm{op}})(F) \backslash (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C} \, ,$$

vérifiant l'égalité $K_{\psi}^{G,\rho} + K_{\psi}^{\overline{G},\rho} = \widetilde{K}_{\psi}^{G,\rho} + \widetilde{K}_{\psi}^{\overline{G},\rho}$.

Dans ce but, on considère une fonction test localement constante à support compact arbitraire

$$h = \bigotimes_{x \in |F|} h_x : \mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

et on forme les produits scalaires

$$K_{\psi}^{G,\rho,h}(g_1, g_2, g) = \int_{\mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A})} dg' \cdot K_{\psi}^{G,\rho}(g_1, g_2, g' g) \cdot h(g') \, ,$$

$$\widetilde{K}_\psi^{G,\rho,h}(g_1,g_2,g) = \int_{\mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A})} dg' \cdot \widetilde{K}_\psi^{G,\rho}(g_1,g_2,g'g)\cdot h(g')\,.$$

Lemme II.1. –

Les produits scalaires $K_\psi^{G,\rho,h}(g_1,g_2,g)$ et $\widetilde{K}_\psi^{G,\rho,h}(g_1,g_2,g)$ se développent en

$$K_\psi^{G,\rho,h}(g_1,g_2,g) = \sum_{\gamma\in G(F)} \sum_{\delta\in N_{r-1}(F)\backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)} W_{\psi,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h}(\gamma,\delta)\,,$$

$$\widetilde{K}_\psi^{G,\rho,h}(g_1,g_2,g) = \sum_{\gamma\in G(F)} \sum_{\delta\in \mathrm{GL}_{r-1}(F)/N_{r-1}(F)} \widetilde{W}_{\psi,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h}(\gamma,\delta)\,,$$

où

$$W_{\psi,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h} = \bigotimes_{x\in|F|} W_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x}$$

et

$$\widetilde{W}_{\psi,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h} = \bigotimes_{x\in|F|} \widetilde{W}_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x}$$

sont les produits des fonctions locales

$$G(F_x)\times \mathrm{GL}_{r-1}(F_x)\to\mathbb{C}\,,$$

respectivement définies en chaque place $x\in|F|$ par les intégrales

$$W_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x}(m_x,m'_x) = \int_{\mathrm{GL}_{r-1}(F_x)} dg'_x\cdot K_{\psi_x}^{G,\rho}(g_1^{-1}m_x^{-1}g_2, g'_x\,g)\cdot h_x(m_x'^{-1}\,g'_x)$$

et

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x}(m_x,m'_x) &= \int_{\mathrm{GL}_{r-1}(F_x)} dg'_x\cdot K_{\psi_x}^{G,\rho}(g_1^{-1}m_x\,g_2, \alpha_r\,g'_x\,g)\cdot h_x(m'_x\,g'_x)\\ &= \int_{\mathrm{GL}_{r-1}(F_x)} dg'_x\cdot K_{\psi_x}^{G,\rho}(g_1^{-1}m_x\,g_2, w_r\,{}^t g_x'^{-1}g)\cdot h_x(m'_x\,w_{r-1}\,{}^t g_x'^{-1})\,.\end{aligned}$$

□

En toute place $x\in|F|-S\subset|F|-S_\rho$, le noyau $K_{\psi_x}^{G,\rho}$ se décompose spectralement sous la forme

$$K_{\psi_x}^{G,\rho}(g,g') = \int_{\mathrm{Im}\,\widehat{T}_x^d} d\lambda\cdot K_{\psi_x,\lambda}^{G,\rho}(g,g')$$

où, pour tout caractère unitaire $\lambda\in\mathrm{Im}\,\widehat{T}_x^d$ de $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$, $K_{\psi_x,\lambda}^{G,\rho}(\bullet,\bullet)$ est le produit de la fonction sphérique propre normalisée $\varphi_{x,\lambda}^G : G(F_x)\to\mathbb{C}$ et d'une fonction $W_\lambda:\mathrm{GL}_r(F_x)/\mathrm{GL}_r(O_x)\to\mathbb{C}$ de type $\psi_{(r)}$-type de Whittaker qui vérifie

$$W_\lambda * \varphi'_x = ((\rho_x)_*(\lambda))(\varphi'_x)\cdot W_\lambda\,,\quad \forall\,\varphi'_x\in\mathcal{H}_{x,\emptyset}^r\,,$$

autrement dit qui appartient au $\psi_{(r)}$-modèle de Whittaker du caractère unitaire $(\rho_x)_*(\lambda)$ de $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^r$.

Si le facteur local h_x en une telle place x de la fonction test h est sphérique, il admet quant à lui une décomposition spectrale de la forme

$$h_x(g') = \int_{\mathrm{Im}\,\widehat{T}_{r-1}=U(1)^{r-1}} dz\cdot S_x^{r-1}(h_x)(z)\cdot\varphi_{x,z}^{r-1}(g')\,,\quad g'\in\mathrm{GL}_{r-1}(F_x)\,.$$

Un résultat fondamental de Jacquet, Piatetski-Shapiro et Shalika – l'équation fonctionnelle locale des intégrales de Rankin-Selberg – permet de donner des décompositions spectrales de $W^{G,\rho,h_x}_{\psi_x,g_1,g_2,g}$ et $\widetilde{W}^{G,\rho,h_x}_{\psi_x,g_1,g_2,g}$ à partir de celles de $K^{G,\rho}_{\psi_x}$ et h_x, et de les relier par une équation fonctionnelle :

Théorème II.2. –

Soit $x \in |F| - S \subset |F| - S_\rho$ une place en laquelle le facteur h_x de la fonction test h est sphérique. Alors :

(i) *Les deux fonctions $W^{G,\rho,h_x}_{\psi_x,g_1,g_2,g}$ et $\widetilde{W}^{G,\rho,h_x}_{\psi_x,g_1,g_2,g}$ sur $(G \times \mathrm{GL}_{r-1})(F_x)$ admettent des décompositions spectrales de la forme*

$$W^{G,\rho,h_x}_{\psi,g_1,g_2,g}(m_x, m'_x) = \int_{\mathrm{Im}\,\widehat{T}^d_x} d\lambda \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\widehat{T}_{r-1}} dz \cdot L_x\left(\rho, \lambda^{-1}, z^{-1}, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot W^{G,\rho,h_x,\lambda,z}_{\psi_x,g_1,g_2,g}(m_x, m'_x)\,,$$

$$\widetilde{W}^{G,\rho,h_x}_{\psi,g_1,g_2,g}(m_x, m'_x) = \int_{\mathrm{Im}\,\widehat{T}^d_x} d\lambda \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\widehat{T}_{r-1}} dz \cdot L_x\left(\rho, \lambda^{-1}, z^{-1}, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \widetilde{W}^{G,\rho,h_x,\lambda,z}_{\psi_x,g_1,g_2,g}(m_x, m'_x)\,,$$

où

- *chaque fonction $W^{G,\rho,h_x,\lambda,z}_{\psi_x,g_1,g_2,g}$ [resp. $\widetilde{W}^{G,\rho,h_x,\lambda,z}_{\psi_x,g_1,g_2,g}$] sur $G(F_x) \times \mathrm{GL}_{r-1}(F_x)$ est élément de l'espace propre associé à la paire (λ, z) de représentations lisses admissibles irréductibles unitaires de $G(F_x)$ et $\mathrm{GL}_{r-1}(F_x)$,*
- *la dépendance des $W^{G,\rho,h_x,\lambda,z}_{\psi_x,g_1,g_2,g}(m_x, m'_x)$ et $\widetilde{W}^{G,\rho,h_x,\lambda,z}_{\psi_x,g_1,g_2,g}(m_x, m'_x)$, $m_x \in G(F_x)$, $m'_x \in \mathrm{GL}_{r-1}(F_x)$, en les valeurs propres $\lambda \in \widehat{T}^d_x$ et $z \in \widehat{T}_{r-1} = (\mathbb{C}^\times)^{r-1}$ est polynomiale,*
- *si les $(\rho_x)^i_*(\lambda)$, $1 \le i \le r$, désignent les r valeurs propres de Hecke du caractère $(\rho_x)_*(\lambda)$ de $\mathcal{H}^r_{x,\emptyset}$, et les z_j, $1 \le j \le r-1$, désignent les $r-1$ valeurs propres de Hecke du caractère z de $\mathcal{H}^{r-1}_{x,\emptyset}$, $L_x(\rho, \lambda, z, Z)$ est le dénominateur*

$$L_x(\rho, \lambda, z, Z) = \prod_{\substack{1 \le i \le r \\ 1 \le j \le r-1}} \frac{1}{1 - (\rho_x)^i_*(\lambda) \cdot z_j \cdot Z}\,.$$

(ii) *On a les équations fonctionnelles*

$$\widetilde{W}^{G,\rho,h_x,\lambda^{-1},z^{-1}}_{\psi_x,g_1,g_2,g}(m_x, m'_x) = W^{G,\rho,h_x,\lambda,z}_{\psi_x,g_1,g_2,g}(m_x^{-1}, m'^{-1}_x) \cdot \varepsilon_x\left(\rho, \lambda, z, \psi_x, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

où

$$\varepsilon_x(\rho, \lambda, z, \psi_x, Z) = \prod_{\substack{1 \le i \le r \\ 1 \le j \le r-1}} \varepsilon_x((\rho_x)^i_*(\lambda) \cdot z_j, \psi_x, Z)\,.$$

□

Afin de généraliser ce résultat au cas d'une fonction test localement constante à support compact arbitraire

$$h_x : \mathrm{GL}_{r-1}(F_x) \to \mathbb{C}\,,$$

on doit la décomposer spectralement.

On rappelle :

Proposition II.3. –

En n'importe quel rang $r \ge 1$, on a :

(i) *L'espace des représentations lisses admissibles irréductibles unitaires π de $\mathrm{GL}_r(F_x)$ se décompose comme une réunion disjointe de variétés algébriques réelles*

$$\mathrm{Im}\,[\pi_0]/\mathrm{Fixe}\,(\underline{r},\pi_0)$$

indexées par des paires $(\underline{r},\pi_0)$ où

- *$\underline{r}$ désigne une partition $r = r_1 + \ldots + r_k$ du rang r,*
- *π_0 est une représentation lisse admissible irréductible unitaire et de carré intégrable de $\mathrm{GL}_{\underline{r}}(F_x) = \mathrm{GL}_{r_1}(F_x) \times \ldots \times \mathrm{GL}_{r_k}(F_x)$,*
- *$[\pi_0]$ est une variété algébrique complexe sur laquelle le tore complexe $(\mathbb{C}^\times)^k$ agit simplement transitivement,*
- *$\mathrm{Im}\,[\pi_0]$ est une sous-variété algébrique réelle compacte de $[\pi_0]$ sur laquelle le sous-tore $U(1)^k$ agit simplement transitivement,*
- *$\mathrm{Fixe}\,(\underline{r},\pi_0)$ est un groupe fini qui agit sur $[\pi_0]$ en respectant $\mathrm{Im}\,[\pi_0]$.*

Cela permet de parler de fonctions polynomiales sur cet espace : ce sont les fonctions nulles en dehors d'un nombre fini de composantes et dont la restriction à chaque composante $\mathrm{Im}\,[\pi_0]/\mathrm{Fixe}\,(\underline{r},\pi_0)$ est polynomiale et se prolonge donc en un polynôme sur la variété complexe $[\pi_0]$ invariant par $\mathrm{Fixe}\,(\underline{r},\pi_0)$.

(ii) *Cet espace est muni d'une mesure $d\pi$, dite "mesure de Plancherel", telle que toute fonction localement constante à support compact*

$$h_x : \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C}$$

se décompose spectralement sous la forme

$$h_x(g) = \int d\pi \cdot h_{x,\pi}(g)\,, \quad g \in \mathrm{GL}_r(F_x)\,,$$

où

- *chaque $h_{x,\pi} : \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C}$ est élément du sous-espace propre associé à π, c'est-à-dire est une combinaison linéaire de coefficients matriciels de π,*
- *chaque fonction $\pi \mapsto h_{x,\pi}(g)$, $g \in \mathrm{GL}_r(F_x)$, est un polynôme.*

$\square$

Ce rappel étant fait, on peut déduire de l'équation fonctionnelle locale de Jacquet, Piatetski-Shapiro et Shalika :

Théorème II.4. –

En n'importe quelle place $x \in |F| - S \subset |F| - S_\rho$, considérons la décomposition spectrale

$$h_x(\bullet) = \int d\pi \cdot h_{x,\pi}(\bullet)$$

de la fonction test localement constante à support compact $h_x : \mathrm{GL}_{r-1}(F_x) \to \mathbb{C}$. Alors :

(i) *Les deux fonctions $W^{G,\rho,h_x}_{\psi_x,g_1,g_2,g}$ et $\widetilde{W}^{G,\rho,h_x}_{\psi_x,g_1,g_2,g}$ sur $(G \times \mathrm{GL}_{r-1})(F_x)$ admettent des décompositions spectrales de la forme*

$$W^{G,\rho,h_x}_{\psi,g_1,g_2,g}(m_x,m'_x) = \int_{\mathrm{Im}\,\widehat{T}^d_x} d\lambda \cdot \int d\pi \cdot L_x\left(\rho,\lambda^{-1},\pi^\vee,q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot W^{G,\rho,h_x,\lambda,\pi}_{\psi_x,g_1,g_2,g}(m_x,m'_x)\,,$$

$$\widetilde{W}^{G,\rho,h_x}_{\psi,g_1,g_2,g}(m_x,m'_x) = \int_{\mathrm{Im}\,\widehat{T}^d_x} d\lambda \cdot \int d\pi \cdot L_x\left(\rho,\lambda^{-1},\pi^\vee,q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \widetilde{W}^{G,\rho,h_x,\lambda,\pi}_{\psi_x,g_1,g_2,g}(m_x,m'_x)\,,$$

où

- *chaque fonction* $W^{G,\rho,h_x,\lambda,\pi}_{\psi_x,g_1,g_2,g}$ *[resp.* $\widetilde{W}^{G,\rho,h_x,\lambda,\pi}_{\psi_x,g_1,g_2,g}$*] sur* $G(F_x)\times \mathrm{GL}_{r-1}(F_x)$ *est élément de l'espace propre associé à la paire* (λ,π) *de représentations lisses admissibles irréductibles unitaires de* $G(F_x)$ *et* $\mathrm{GL}_{r-1}(F_x)$*,*
- *la dépendance de* $W^{G,\rho,h_x,\lambda,\pi}_{\psi_x,g_1,g_2,g}(m_x,m'_x)$ *et* $\widetilde{W}^{G,\rho,h_x,\lambda,\pi}_{\psi_x,g_1,g_2,g}(m_x,m'_x)$*,* $m_x\in G(F_x)$*,* $m'_x\in \mathrm{GL}_{r-1}(F_x)$*, en* $\lambda\in\widehat{T}^d_x$ *et* π *est polynomiale,*
- $L_x(\rho,\lambda,\pi,Z)$ *est le dénominateur*

$$L_x(\rho,\lambda,\pi,Z)=\prod_{1\le i\le r} L_x(\pi,(\rho_x)^i_*(\lambda)\cdot Z)\,.$$

(ii) *On a les équations fonctionnelles*

$$\widetilde{W}^{G,\rho,h_x,\lambda^{-1},\pi^\vee}_{\psi_x,g_1,g_2,g}(m_x,m'_x)=W^{G,\rho,h_x,\lambda,\pi}_{\psi_x,g_1,g_2,g}(m_x^{-1},m_x'^{-1})\cdot\varepsilon_x\left(\rho,\lambda,\pi,\psi_x,q_x^{-\frac12}\right)\cdot\chi_\pi(-1)^{r-1}$$

où

$$\varepsilon_x(\rho,\lambda,\pi,\psi_x,Z)=\prod_{1\le i\le r}\varepsilon_x(\pi,\psi_x,(\rho_x)^i_*(\lambda)\cdot Z)\,.$$

L'apparition des facteurs linéaires locaux $L_x(\pi,Z)$ et $\varepsilon_x(\pi,\psi_x,Z)$ dans les équations fonctionnelles de Jacquet, Piatetski-Shapiro et Shalika, et donc dans notre recherche de "noyaux" du transfert automorphe, incite à revoir rapidement la théorie de ces facteurs L_x et ε_x classiques associés, en tout rang $r\ge 1$, aux représentations lisses admissibles irréductibles unitaires de $\mathrm{GL}_r(F_x)$.

Les $L_x(\pi,Z)$ sont définis par la proposition suivante, au moyen du plongement de $\mathrm{GL}_r(F_x)$ dans l'algèbre matricielle $M_r(F_x)$:

Proposition II.5. –

En n'importe quel rang $r\ge 1$*, on a :*

(i) *Toute fonction localement constante à support compact*

$$f_x: M_r(F_x)\to\mathbb{C}$$

se décompose spectralement sous la forme

$$f_x(g)=|\det(g)|_x^{-\frac r2}\cdot\int_\pi d\pi\cdot L_x\left(\pi^\vee,q_x^{-\frac12}\right)\cdot f_{x,\pi}(g)\,,\quad g\in\mathrm{GL}_r(F_x)\,,$$

où

- *chaque* $f_{x,\pi}:\mathrm{GL}_r(F_x)\to\mathbb{C}$ *est élément du sous-espace propre associé à* π*,*
- *chaque fonction* $\pi\mapsto f_{x,\pi}(g)$*,* $g\in\mathrm{GL}_r(F_x)$*, est un polynôme,*
- *sur chaque composante de l'espace des* π*,* $L_x(\pi,Z)$ *est l'inverse d'un polynôme* $L_x(\pi,Z)^{-1}$ *en* π *et* Z*, et vérifie*

$$\begin{aligned}&L_x(\pi,0)^{-1}=1\,,\quad\forall\,\pi\,,\\&L_x(\pi\otimes|\det(\bullet)|^s,Z)=L_x(\pi,q_x^{-s}\cdot Z)\,,\quad\forall\,s\in\mathbb{C}\,,\quad\forall\,\pi\,.\end{aligned}$$

(ii) *Pour toute famille de polynômes* $L'_x(\pi,Z)^{-1}$ *en* π *et* Z *qui vérifie les propriétés de* (i)*, les polynômes* $L_x(\pi,Z)^{-1}$ *divisent les polynômes* $L'_x(\pi,Z)^{-1}$*.* □

Le choix du caractère additif continu non trivial $\psi_x : F_x \to \mathbb{C}^\times$ définit un opérateur

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x = \left[m' \mapsto \widehat{f}_x(m') = \int_{M_r(F_x)} dm \cdot f_x(m) \cdot \psi_x \left(\mathrm{Tr}\,(m\, m') \right) \right]$$

de ψ_x-transformation de Fourier dans l'espace des fonctions localement constantes à support compact $f_x : M_r(F_x) \to \mathbb{C}$.

Modulo multiplication par le caractère $g \mapsto |\det(g)|_x^r$ et changement de variable $g \mapsto g^{-1}$, cet opérateur commute avec les translations à gauche ou à droite par tout élément de $\mathrm{GL}_r(F_x)$. Il doit donc agir par multiplication par un scalaire sur l'espace des coefficients matriciels de toute représentation lisse admissible irréductible unitaire de $\mathrm{GL}_r(F_x)$. Tate dans le cas $r = 1$, puis Godement et Jacquet dans le cas $r \geq 2$, ont montré que ce scalaire a la forme

$$\frac{L_x \left(\pi, q_x^{-\frac{1}{2}} \right)}{L_x \left(\pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}} \right)} \cdot \varepsilon_x \left(\pi, \psi_x, q_x^{-\frac{1}{2}} \right)$$

où, dans toute composante de l'espace des π,

$$\pi \mapsto \varepsilon_x(\pi, \psi_x, Z)$$

est un polynôme inversible, autrement dit un monôme, en π et Z. Ce monôme est égal à 1 si π est non ramifiée et que le conducteur N_{ψ_x} de ψ_x est 0, et il vérifie

$$\varepsilon_x(\pi \otimes |\det(\bullet)|^s, \psi_x, Z) = \varepsilon_x(\pi, \psi_x, q_x^{-s} \cdot Z)\,, \quad \forall\, s \in \mathbb{C}\,, \quad \forall\, \pi\,.$$

Ainsi on a :

Proposition II.6. –

Pour toute fonction localement constante à support compact

$$f_x : M_r(F_x) \to \mathbb{C}$$

décomposée spectralement en

$$f_x(g) = |\det(g)|_x^{-\frac{r}{2}} \cdot \int d\pi \cdot L_x \left(\pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}} \right) \cdot f_{x,\pi}(g)\,, \quad g \in \mathrm{GL}_r(F_x)$$

comme dans la proposition II.5(i)*, sa ψ_x-transformée de Fourier $\widehat{f}_x$ admet la décomposition spectrale*

$$\widehat{f}_x(g) = |\det(g)|_x^{-\frac{r}{2}} \cdot \int d\pi \cdot L_x \left(\pi, q_x^{-\frac{1}{2}} \right) \cdot \varepsilon_x \left(\pi, \psi_x, q_x^{-\frac{1}{2}} \right) \cdot f_{x,\pi}(g^{-1})\,.$$

□

Revenons maintenant au groupe réductif quasi-déployé G sur F et à la représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})\,.$$

Le conjecture I.2 de transfert par ρ peut être reformulée en la partie (i) de la conjecture suivante que l'on complète habituellement par la partie (ii) :

Conjecture II.7. –

(i) *Pour toute représentation automorphe* $\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$ *de* $G(\mathbb{A})$ *non ramifiée en dehors du sous-ensemble fini* $S \supset S_\rho$ *de* $|F|$*, il existe une représentation automorphe* $\pi' = \bigotimes_{x \in |F|} \pi'_x$ *de* $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ *telle que, en toute place* $x \in |F| - S$*, le facteur* π'_x *est non ramifié et s'identifie au caractère de* $\mathcal{H}^r_{x,\emptyset}$ *image par* $(\rho_x)_*$ *du caractère* π_x *de* $\mathcal{H}^G_{x,\emptyset}$.

(ii) *De plus, même en les places éventuellement ramifiées* $x \in S$*, le facteur* π'_x *de* π' *ne dépend que de* ρ *et du facteur* π_x *de* π*, si bien que, en toute place* $x \in |F|$*, on devrait pouvoir associer aux représentations locales* π_x *des facteurs* L_x *et* ε_x *non linéaires*

$$L_x(\rho, \pi_x, Z) = L_x(\pi'_x, Z)\,,$$

$$\varepsilon_x(\rho, \pi_x, \psi_x, Z) = \varepsilon_x(\pi'_x, \psi_x, Z)\,.$$

□

Les facteurs $L_x(\rho, \pi_x, Z)$ et $\varepsilon_x(\rho, \pi_x, \psi_x, Z)$ ne sont pas faciles à définir a priori sur l'espace des représentations lisses admissibles irréductibles unitaires π_x de $G(F_x)$. Rappelons que, comme dans le cas linéaire, cet espace se décompose naturellement comme la réunion disjointe de variétés algébriques, quotients de tores par l'action de groupes finis. On s'attend certainement à ce que, sur chaque composante, $L_x(\rho, \pi_x, Z)^{-1}$ soit un polynôme en π_x et Z qui vaut 1 en $Z = 0$, et que $\varepsilon_x(\rho, \pi_x, \psi_x, Z)$ soit un monôme en π_x et Z égal à 1 si $x \notin S_\rho$, π_x est non ramifié et $N_{\psi_x} = 0$.

Il n'est pas restrictif de supposer, comme nous le ferons toujours, que le groupe réductif G est muni d'un caractère bien défini sur F

$$\det_G : G \to \mathbb{G}_m$$

dont le cocaractère central correspondant du groupe dual

$$\widehat{\det}_G : \mathbb{C}^\times \to Z_{\widehat{G}} \subset \widehat{G}\,,$$

composé avec $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, est égal à

$$z \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & z \end{pmatrix}.$$

Alors les facteurs locaux non linéaires $L_x(\rho, \pi_x, Z)$ et $\varepsilon_x(\rho, \pi_x, \psi_x, Z)$ devront nécessairement vérifier

$$\begin{aligned} &L_x(\rho, \pi_x \otimes |\det_G(\bullet)|^s, Z) = L_x(\rho, \pi_x, q_x^{-s} \cdot Z)\,, \\ &\varepsilon_x(\rho, \pi_x \otimes |\det_G(\bullet)|^s, \psi_x, Z) = \varepsilon_x(\rho, \pi_x, \psi_x, q_x^{-s} \cdot Z)\,, \quad \forall\, s \in \mathbb{C}\,, \quad \forall\, \pi_x\,. \end{aligned}$$

Proposons la définition de travail suivante :

Définition II.8. –

En n'importe quelle place $x \in |F|$*, appelons ensemble des "représentations de type L (relatif à* ρ*) de* $G(F_x)$*" une réunion de composantes de l'espace des représentations lisses admissibles* π_x *de* $G(F_x)$ *sur lesquelles on sait définir a priori les facteurs non linéaires* $L_x(\rho, \pi_x, Z)$ *et* $\varepsilon_x(\rho, \pi_x, \psi_x, Z)$*. On demande que cet ensemble soit stable par le passage aux représentations contragrédientes* $\pi_x \mapsto \pi_x^\vee$.

Remarque :

La règle de transfert de Langlands impose de ranger parmi les représentations de type L, en toute place non ramifiée $x \in |F| - S_\rho$, les représentations de $G(F_x)$ qui sont sphériques, c'est-à-dire correspondent à un caractère z_x de l'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$. Via l'homomorphisme $\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r \to \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ induit par ρ, tout tel caractère z_x induit un caractère $(\rho_x)_*(z_x)$ de $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^r$, de valeurs propres de Hecke les $(\rho_x)_*^i(z_x)$, $1 \leq i \leq r$, et on pose naturellement

$$L_x(\rho, \pi_x, Z) = L_x(\rho, z_x, Z) = L_x((\rho_x)_*(z_x), Z) = \prod_{1 \leq i \leq r} L_x((\rho_x)_*^i(z_x), Z)\,,$$

$$\varepsilon_x(\rho, \pi_x, \varepsilon_x, Z) = \varepsilon_x(\rho, z_x, \psi_x, Z) = \varepsilon_x((\rho_x)_*(z_x), \psi_x, Z) = \prod_{1 \leq i \leq r} \varepsilon_x((\rho_x)_*^i(z_x), \psi_x, Z)\,.$$

□

En dehors du cas central des représentations sphériques de $G(F_x)$ en les places non ramifiées $x \in |F| - S_\rho$, donnons d'autres exemples de types de représentations locales qu'il est possible de classer comme “représentations de type L”.

Voyons d'abord les cas où le groupe de Galois Γ_F de F agit sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ par permutation de ses r vecteurs de base. Cette action définit une F-algèbre E séparable de degré r dont le dual $\widehat{T}_E$ du tore multiplicatif $T_E = \mathrm{Res}_{E/F}\, \mathbb{G}_m$ s'identifie à $\prod_{1 \leq i \leq r} \mathbb{C}^\times = \widehat{T}_r$. L'homomorphisme Γ_F-équivariant induit par ρ

$$\rho_T : \widehat{T} \to \widehat{T}_r = \prod_{1 \leq i \leq r} \mathbb{C}^\times = \widehat{T}_E$$

admet un homomorphisme dual bien défini sur F

$$\rho_T^\vee : T_E \to T$$

qui induit en toute place $x \in |F|$ un homomorphisme

$$T_E(F_x) \to T(F_x)$$

du groupe multiplicatif $T_E(F_x) = E_x^\times$ de la F_x-algèbre séparable $E_x = E \otimes_F F_x$ vers $T(F_x)$. On note enfin qu'en toute telle place $x \in |F|$, l'algèbre E_x est munie de la ψ_x-transformation de Fourier définie par le caractère $E_x \to \mathbb{C}^\times$ composé de $\psi_x : F_x \to \mathbb{C}^\times$ et de l'homomorphisme de trace $\mathrm{Tr} : E_x \to F_x$. Cela permet de définir les facteurs $L_x(\chi_x', Z)$ et $\varepsilon_x(\chi_x', \psi_x, Z)$ de tout caractère continu $\chi_x' : E_x^\times \to \mathbb{C}^\times$.

Lemme II.9. –

Supposons comme ci-dessus que Γ_F agit sur $\mathbb{C}^r$ par permutation de ses r vecteurs de base, définissant ainsi une F-algèbre E et un homomorphisme $\rho_T^\vee : T_E = \mathrm{Res}_{E/F}\, \mathbb{G}_m \to T$.

Alors :

(i) *En toute place $x \in |F|$, tout caractère continu $\chi_x : T(F_x) \to \mathbb{C}^\times$ peut être considéré comme “de type L” relativement à la représentation de transfert $\rho_T : \widehat{T} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, en posant*

$$L_x(\rho_T, \chi_x, Z) = L_x(\chi_x', Z)\,,$$

$$\varepsilon_x(\rho_T, \chi_x, \psi_x, Z) = \varepsilon_x(\chi_x', \psi_x, Z)\,,$$

si $\chi_x' : T_E(F_x) = E_x^\times \to \mathbb{C}^\times$ désigne le composé de χ_x avec $T_E(F_x) \to T(F_x)$.

(ii) *En toute place $x \in |F|$, toute représentation lisse admissible π_x de $G(F_x)$ qui est l'induite normalisée d'un caractère χ_x du tore maximal $T(F_x)$, peut être considérée comme "de type L" relativement à ρ, en posant*

$$L_x(\rho, \pi_x, Z) = L_x(\rho_T, \chi_x, Z)\,,$$

$$\varepsilon_x(\rho, \pi_x, \psi_x, Z) = \varepsilon_x(\rho_T, \chi_x, \psi_x, Z)\,.$$

Pour l'exemple suivant, on a besoin de remplacer G par ses "groupes croisés" de degré $r' \geq 2$ que permet de définir le caractère $\det_G : G \to \mathbb{G}_m$ déjà introduit.

Définition II.10. –

Soit un entier $r' \geq 2$.

(i) *Le "groupe croisé" de degré r' de G est défini comme le sous-groupe algébrique*

$$G_{r'} = \{(g, g') \in G \times \mathrm{GL}'_r \mid \det_G(g) = \det(g')\}\,.$$

C'est un groupe réductif dont le dual s'identifie au quotient

$$\widehat{G}_{r'} = (\widehat{G} \times \mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{C}))/\mathbb{C}^\times$$

de $\widehat{G} \times \mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{C})$ par le cocaractère central

$$\mathbb{C}^\times \ni z \mapsto (\widehat{\det}_G(z), z^{-1})\,.$$

(ii) *Le dual $\widehat{G}_{r'}$ de $G_{r'}$ est muni de la "représentation croisée"*

$$\rho_{r'} : \widehat{G}_{r'} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_{rr'}(\mathbb{C})$$

produit tensoriel de $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ et de la représentation standard de $\mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{C}) = \widehat{\mathrm{GL}}_{r'}$.

□

Nous pouvons énoncer :

Lemme II.11. –

Considérons un degré $r' \geq 2$ comme dans la définition II.10 *ci-dessus.*

(i) *En toute place $x \in |F|$, les représentations lisses admissibles irréductibles de $G_{r'}(F_x)$ sont les produits $\pi_x \boxtimes \pi'_x$ d'une représentation lisse admissible irréductible π_x de $G(F_x)$ et d'une représentation lisse admissible irréductible π'_x de $\mathrm{GL}_{r'}(F_x)$.*

(ii) *Si $x \in |F| - S_\rho$ est une place non ramifiée, et que π_x est sphérique et correspond donc à un caractère z_x de $\mathcal{H}^G_{x,\emptyset}$ dont le transfert $(\rho_x)_*(z_x)$ admet pour valeurs propres de Hecke les $(\rho_x)^i_*(z_x) \in \mathbb{C}^\times$, $1 \leq i \leq r$, on peut classer $\pi_x \boxtimes \pi'_x$ parmi les représentations "de type L" relativement à $\rho_{r'} : \widehat{G}_{r'} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_{rr'}(\mathbb{C})$, en posant*

$$L_x(\rho_{r'}, \pi_x \boxtimes \pi'_x, Z) = \prod_{1 \leq i \leq r} L_x(\pi'_x, (\rho_x)^i_*(z_x) \cdot Z)\,,$$

$$\varepsilon_x(\rho_{r'}, \pi_x \boxtimes \pi'_x, \psi_x, Z) = \prod_{1 \leq i \leq r} \varepsilon_x(\pi'_x, \psi_x, (\rho_x)^i_*(z_x) \cdot Z)\,.$$

Remarque :

Cet exemple est particulièrement important lorsque $r' = r - 1$. Dans ce cas en effet, les facteurs L_x et ε_x simples introduits ci-dessus coïncident avec les facteurs L_x et ε_x de paires

$$L_x(\rho, z_x, \pi'_x, Z)\,,$$

$$\varepsilon_x(\rho, z_x, \pi'_x, \psi_x, Z)\,,$$

qui apparaissent d'après Jacquet, Piatetski-Shapiro et Shalika dans les équations fonctionnelles locales du théorème II.4.

□

Le lemme II.11 ci-dessus est naturellement complété par le lemme suivant :

Lemme II.12. –

Supposons comme dans le lemme II.9 *que* Γ_F *agit sur* $\mathbb{C}^r$ *par permutation de ses* r *vecteurs de base.*

Et considérons, en une place arbitraire $x \in |F|$*, les représentations lisses admissibles irréductibles* $\pi_x \boxtimes \pi'_x$ *de* $G_{r'}(F_x)$ *telles que* π_x *est l'induite normalisée d'un caractère* χ_x *du tore maximal* $T(F_x)$*, et que la représentation* π'_x *de* $\mathrm{GL}_{r'}(F_x)$ *est sphérique, avec pour valeurs propres de Hecke* $z'_1, \ldots, z'_r \in \mathbb{C}^\times$*.*

Alors on peut classer ces représentations $\pi_x \boxtimes \pi'_x$ *parmi les représentations "de type* L*" relativement à* $\rho_{r'} : \widehat{G}_{r'} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_{rr'}(\mathbb{C})$ *en posant*

$$L_x(\rho_{r'}, \pi_x \boxtimes \pi'_x, Z) = \prod_{1 \le j \le r'} L_x(\rho_T, \chi_x, z'_j \cdot Z)\,,$$

$$\varepsilon_x(\rho_{r'}, \pi_x \boxtimes \pi'_x, \psi_x, Z) = \prod_{1 \le j \le r'} \varepsilon_x(\rho_T, \chi_x, \psi_x, z'_j \cdot Z)\,.$$

□

Nous allons donner une dernière série importante de représentations lisses admissibles irréductibles de $G(F_x)$ (ou $G_{r'}(F_x)$, $r' \geq 2$), $x \in |F|$, qu'il est possible de classer a priori parmi les représentations "de type L" relativement à ρ (ou $\rho_{r'}$).

Pour cela, rappelons le résultat local fondamental suivant de Jacquet et Shalika :

Proposition II.13. –

Pour toute représentation lisse admissible irréductible π'_x *de* $\mathrm{GL}_r(F_x)$*, de caractère central* $\chi_{\pi'_x} : F_x^\times \to \mathbb{C}^\times$*, et pour tout caractère* $\omega_x : F_x^\times \to \mathbb{C}^\times$ *suffisamment ramifié en fonction de la ramification de* π'_x*, on a*

$$L_x(\pi'_x \otimes (\omega_x \circ \det), Z) = 1\,,$$
$$\varepsilon_x(\pi'_x \otimes (\omega_x \circ \det), \psi_x, Z) = \varepsilon_x(\chi_{\pi'_x}\, \omega_x, \psi_x, Z) \cdot \varepsilon_x(\omega_x, \psi_x, Z)^{r-1}\,.$$

□

Rappelons que nous avons noté $\mu_G : \mathbb{G}_m \to Z_G \hookrightarrow G$ le cocaractère central de G dont le dual est le caractère composé

$$\widehat{\mu}_G : \widehat{G} \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) \xrightarrow{\det} \mathbb{C}^\times\,,$$

et $\omega_\rho : \mathbb{A}^\times / F^\times \to \mathbb{C}^\times$ le caractère automorphe qui correspond, via la théorie du corps de classes, au déterminant de l'action par ρ du groupe de Galois Γ_F sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$.

Pour toute représentation lisse admissible irréductible π_x de $G(F_x)$, notons $\chi_{\pi_x} : F_x^\times \to \mathbb{C}^\times$ le caractère induit par π_x via le cocaractère central $\mu_G : F_x^\times \to G(F_x)$.

Selon la conjecture II.7(ii), on devrait pouvoir transférer par ρ toute telle représentation locale π_x de $G(F_x)$ en une représentation lisse admissible irréductible π'_x de $\mathrm{GL}_r(F_x)$. Si $x \in |F| - S_\rho$ et que π_x est non ramifiée, π'_x est déjà définie comme la représentation non ramifiée image de π_x par $\rho_x^* : \mathcal{H}^r_{x,\emptyset} \to \mathcal{H}^G_{x,\emptyset}$, et on connaît d'après le corollaire I.10 la formule

$$\chi_{\pi'_x} = \chi_{\pi_x} \cdot \omega_\rho \, .$$

Par compatibilité avec le transfert global de la conjecture II.7(i), l'hypothétique transfert local π'_x de toute représentation lisse admissible irréductible π_x de $G(F_x)$ en n'importe quelle place $x \in |F|$ doit nécessairement vérifier la même formule

$$\chi_{\pi'_x} = \chi_{\pi_x} \cdot \omega_\rho \, .$$

Enfin, la ramification de π'_x devrait être bornée en fonction de celle de π_x.

On parvient ainsi à l'énoncé suivant :

Corollaire II.14. –

Pour toute représentation lisse admissible irréductible π_x de $G(F_x)$ en une place arbitraire $x \in |F|$, et pour tout caractère $\omega_x : F_x^\times \to \mathbb{C}^\times$ suffisamment ramifié en fonction de la ramification de π_x, on peut classer le produit

$$\pi_x \otimes \omega_x = \pi_x \otimes (\omega_x \circ \det_G)$$

parmi les représentations "de type L" relativement à ρ, en posant

$$\begin{aligned} &L_x(\rho, \pi_x \otimes \omega_x, Z) = 1 \, , \\ &\varepsilon_x(\rho, \pi_x \otimes \omega_x, \psi_x, Z) = \varepsilon_x(\chi_{\pi_x} \, \omega_\rho \, \omega_x, \psi_x, Z) \cdot \varepsilon_x(\omega_x, \psi_x, Z)^{r-1} \, . \end{aligned}$$

Remarque :

Tout comme la remarque qui suit la définition II.8 et comme le lemme II.9, le corollaire II.14 ci-dessus s'applique aux groupes croisés $G_{r'}$, $r' \geq 2$, aussi bien qu'à G.

□

Une fois que l'on a précisé en chaque place $x \in |F|$ ce que l'on entendra par "représentation de type L relativement à ρ [resp. $\rho_{r'}$, $r' \geq 2$] sur $G(F_x)$ [resp. $G_{r'}(F_x)$, $r' \geq 2$]", on est en mesure de définir une ψ_x-transformation de Fourier locale relative à ρ [resp. $\rho_{r'}$] en chaque telle place x :

Définition II.15. –

Considérons un caractère algébrique bien défini sur F

$$\det_\rho : G \to \mathbb{G}_m \, .$$

En n'importe quelle place $x \in |F|$, on pose :

(i) *Appelons fonction "de type L" (relatif à ρ) sur $G(F_x)$ toute fonction*

$$h_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

telle que :

(1) *h_x est invariante à gauche et à droite par un sous-groupe ouvert compact de $G(F_x)$,*

(2) *la restriction de h_x à*

$$\{g \in G(F_x) \mid v_x(\det_G(g)) = N\}$$

est à support compact pour tout $N \in \mathbb{Z}$, et elle est nulle si $N \ll 0$,

(3) *h_x admet une décomposition spectrale de la forme*

$$h_x(g) = |\det_G(g)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det_\rho(g)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int d\pi \cdot L_x\left(\rho, \pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot h_{x,\pi}(g)\,, \quad g \in G(F_x)\,,$$

où

- *π décrit l'espace des représentations lisses admissibles irréductibles unitaires de $G(F_x)$ qui sont "de type L" (relativement à ρ) et admettent donc des facteurs $L_x(\rho, \pi, Z)$ et $\varepsilon_x(\rho, \pi, \psi_x, Z)$ bien définis a priori,*
- *cet espace est muni de la mesure de Plancherel $d\pi$,*
- *pour toute π, la fonction $h_{x,\pi} : G(F_x) \to \mathbb{C}$ est élément de l'espace propre associé à π, autrement dit, c'est une combinaison linéaire de coefficients matriciels de π,*
- *pour tout $g \in G(F_x)$, la fonction $\pi \mapsto h_{x,\pi}(g)$ est polynomiale sur l'espace des représentations π.*

(ii) *Pour toute fonction h_x de type L comme dans* (i)*,*

$$h_x(g) = |\det_G(g)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det_\rho(g)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int d\pi \cdot L_x\left(\rho, \pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot h_{x,\pi}(g)\,, \quad g \in G(F_x)\,,$$

on appelle ψ_x-transformée de Fourier de h_x (relativement à ρ) la fonction

$$\widehat{h}_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

définie par la décomposition spectrale

$$\widehat{h}_x(g) = |\det_G(g)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det_\rho(g)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int d\pi \cdot L_x\left(\rho, \pi, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \varepsilon_x\left(\rho, \pi, \psi_x, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot h_{x,\pi}(g^{-1})\,, \quad g \in G(F_x)\,.$$

(iii) *Si $x \in |F| - S_\rho$ est une place non ramifiée, on appelle "fonction de type L standard (relatif à ρ) sur $G(F_x)$" l'unique fonction sphérique*

$$G(O_x)\backslash G(F_x)/G(O_x) \to \mathbb{C}$$

définie par la décomposition spectrale

$$g \mapsto |\det_G(g)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det_\rho(g)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\widehat{T}_x^d} d\lambda \cdot L_x\left(\rho, \lambda^{-1}, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \varphi_{x,\lambda}^G(g)\,.$$

Elle est sa propre ψ_x-transformée de Fourier si le conducteur N_{ψ_x} de ψ_x est 0.

Remarques :

(i) La ψ_x-transformée de Fourier $\widehat{h}_x$ d'une fonction "de type L" h_x vérifie par définition les propriétés (1) et (3) de (i). On peut montrer qu'elle vérifie aussi la propriété (2), ce qui signifie qu'elle est elle-même "de type L".

(ii) Le caractère $\det_\rho : G \to \mathbb{G}_m$ sera choisi plus tard en fonction de $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$.

Dans le cas où $G = \mathrm{GL}_r$ et ρ est la représentation standard de $\widehat{\mathrm{GL}}_r = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, il faut prendre

$$\det_\rho = (\det)^{r-1}$$

pour que les fonctions localement constantes à support compact

$$f_x : M_r(F_x) \to \mathbb{C}$$

soient les fonctions "de type L" au sens de (i) et que leur ψ_x-transformation de Fourier linéaire coïncide avec la ψ_x-transformation de Fourier de (ii). La "fonction de type L standard" au sens de (iii) n'est alors autre que la fonction caractéristique de $M_r(O_x)$.

(iii) La présente définition II.15 s'applique aux groupes croisés $G_{r'}$, $r' \geq 2$, aussi bien qu'à G. On prendra

$$\det_{\rho_{r'}}(g, g') = \det_\rho(g) \cdot \det(g')^{r'-1}\,, \quad \forall\,(g, g') \in G_{r'}(F_x) \subset G(F_x) \times \mathrm{GL}_{r'}(F_x)\,.$$

III. Principe de fonctorialité et formules de Poisson non linéaires

Commençons par rappeler la formule de Poisson linéaire sur l'espace matriciel adélique $M_r(\mathbb{A})$, $r \geq 1$, et ses conséquences pour les fonctions L linéaires globales des représentations automorphes de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$.

Le choix du caractère additif continu non trivial

$$\psi = \prod_{x \in |F|} \psi_x : \mathbb{A}/F \to \mathbb{C}^\times$$

a permis de définir en toute place $x \in |F|$ l'automorphisme de ψ_x-transformation de Fourier

$$f_x \mapsto \widehat{f_x}$$

de l'espace des fonctions localement constantes à support compact sur $M_r(F_x)$.

Le produit de ces transformations

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x \mapsto \widehat{f} = \bigotimes_{x \in |F|} \widehat{f_x}$$

définit l'automorphisme de ψ-transformation de Fourier des fonctions localement constantes à support compact sur $M_r(\mathbb{A})$.

La propriété globale essentielle de cet opérateur est qu'il laisse invariante la "fonctionnelle de Poisson"

$$f \mapsto \sum_{\gamma \in M_r(F)} f(\gamma)\,.$$

Autrement dit, on a :

Proposition III.1. –

Toute fonction localement constante à support compact

$$f : M_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

satisfait la "formule de Poisson"

$$\sum_{\gamma \in M_r(F)} f(\gamma) = \sum_{\gamma \in M_r(F)} \widehat{f}(\gamma)\,.$$

□

Pour toute représentation lisse admissible irréductible

$$\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$$

de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, on pose

$$L(\pi, Z) = \prod_{x \in |F|} L_x(\pi_x, Z^{\deg(x)})$$

qui est bien définie a priori en tant que série formelle en Z. En presque toute place x, le facteur local π_x de π est une représentation non ramifiée et on a $\varepsilon_x(\pi_x,\psi_x,Z)=1$. Il en résulte que le produit

$$\varepsilon(\pi,\psi,Z)=\prod_{x\in|F|}\varepsilon_x(\pi_x,\psi_x,Z^{\deg(x)})$$

est bien défini en tant que monôme en Z.

Cette théorie des facteurs L et ε globaux s'applique en particulier aux représentations automorphes irréductibles de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$.

Tate en rang $r=1$, puis Godement et Jacquet en rang $r\geq 2$, ont montré que la formule de Poisson sur $M_r(\mathbb{A})$ implique :

Théorème III.2. –

Pour toute représentation automorphe irréductible cuspidale $\pi=\bigotimes_{x\in|F|}\pi_x$ *de* $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$*, on a :*

(i) *Le produit*

$$L(\pi,q^{-s})=\prod_{x\in|F|}L_x(\pi_x,q_x^{-s})$$

est absolument convergent dès que la partie réelle $\mathrm{Re}\,(s)$ *de* $s\in\mathbb{C}$ *est assez grande.*

(ii) *La fonction holomorphe que ce produit définit dans sa zone de convergence se prolonge analytiquement à* $\mathbb{C}$ *tout entier. Dans le cas présent où* F *est un corps de fonctions, c'est même une fraction rationnelle en* q^{-s}.

(iii) *Cette fonction analytique satisfait l'équation fonctionnelle*

$$L(\pi^\vee,q^{-(1-s)})=L(\pi,q^{-s})\cdot\varepsilon(\pi,\psi,q^{-s})\,.$$

(iv) *Cette fonction analytique ne peut admettre de pôles que si* $r=1$ *et* π *est un caractère automorphe*

$$\mathbb{A}^\times/F^\times\to\mathbb{C}^\times$$

qui se factorise à travers l'homomorphisme de degré

$$\deg : a=(a_x)_{x\in|F|}\mapsto\sum_{x\in|F|}\deg(x)\cdot v_x(a_x)\,,$$

autrement dit qui est de la forme

$$a\mapsto|a|^{s_0}\,.$$

Les pôles d'un tel caractère sont simples.

□

Pour passer des représentations automorphes cuspidales de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ aux représentations automorphes arbitraires, on a besoin de la proposition suivante :

Proposition III.3. –

(i) (Langlands) *Pour toute représentation automorphe irréductible* $\pi=\bigotimes_{x\in|F|}\pi_x$ *de* $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$*, il existe une partition* $r=r_1+\ldots+r_k$ *du rang* r *et des représentations automorphes irréductibles cuspidales* $\pi_1=\bigotimes_{x\in|F|}\pi_{1,x},\ldots,\pi_k=\bigotimes_{x\in|F|}\pi_{k,x}$ *de* $\mathrm{GL}_{r_1}(\mathbb{A}),\ldots,\mathrm{GL}_{r_k}(\mathbb{A})$ *telles que* π *soit un sous-quotient de l'induite normalisée de la représentation automorphe* $\pi_1\boxtimes\ldots\boxtimes\pi_k$ *de* $(\mathrm{GL}_{r_1}\times\ldots\times\mathrm{GL}_{r_k})(\mathbb{A})$.

De plus, la ramification de $\pi_{1,x},\ldots,\pi_{k,x}$ *en n'importe quelle place* $x\in|F|$ *est bornée en fonction de celle de* π_x *et, en particulier,* $\pi_{1,x},\ldots,\pi_{k,x}$ *sont non ramifiées si* π_x *est non ramifiée.*

(ii) (Godement, Jacquet) *Dans la situation de* (i), *la fraction rationnelle en n'importe quelle place* $x \in |F|$

$$L_x(\pi_x, Z)$$

est le produit de la fraction rationnelle

$$\prod_{1 \le i \le k} L_x(\pi_{i,x}, Z)$$

et d'un polynôme en Z *qui vaut* 1 *lorsque* π_x *et donc aussi les* $\pi_{i,x}$, $1 \le i \le k$, *sont non ramifiées. De plus, le quotient*

$$\frac{L_x(\pi_x, Z) \cdot \varepsilon_x(\pi_x, \psi_x, Z)}{L_x\left(\pi_x^\vee, \frac{1}{q_x Z}\right)}$$

est toujours égal au produit de quotients

$$\prod_{1 \le i \le k} \frac{L_x(\pi_{i,x}, Z) \cdot \varepsilon_x(\pi_{i,x}, \psi_x, Z)}{L_x\left(\pi_{i,x}^\vee, \frac{1}{q_x Z}\right)} .$$

□

On déduit de cette proposition et du théorème III.2 :

Corollaire III.4. –

Toute représentation automorphe irréductible $\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$ *de* $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ *vérifie les propriétés* (i), (ii) *et* (iii) *du théorème* III.2.

Si de plus le facteur π_x *de* π *en au moins une place* x *est le produit*

$$\pi_x = \pi'_x \otimes (\omega_x \circ \det)$$

d'une représentation lisse admissible irréductible de $\mathrm{GL}_r(F_x)$ *de ramification bornée et d'un caractère* $\mathrm{GL}_r(F_x) \xrightarrow{\det} F_x^\times \xrightarrow{\omega_x} \mathbb{C}^\times$ *suffisamment ramifié en fonction de cette borne, la fonction* L *globale de* π

$$\mathbb{C} \ni s \mapsto L(\pi, q^{-s})$$

n'a pas de pôle. □

Revenons maintenant au groupe réductif quasi-déployé G sur F et à la représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) .$$

Pour toute représentation lisse admissible irréductible

$$\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$$

de $G(\mathbb{A})$ dont tous les facteurs locaux π_x, $x \in |F|$, sont "de type L" relativement à ρ, on pose

$$L(\rho, \pi, Z) = \prod_{x \in |F|} L_x(\rho, \pi_x, Z^{\deg(x)})$$

qui est bien définie a priori en tant que série formelle en Z. En presque toute place x, le facteur local π_x de π est une représentation non ramifiée et on a $\varepsilon_x(\rho, \pi_x, \psi_x, Z) = 1$. Il en résulte que le produit

$$\varepsilon(\rho, \pi, \psi, Z) = \prod_{x \in |F|} \varepsilon_x(\rho, \pi_x, \psi_x, Z^{\deg(x)})$$

est bien défini en tant que monôme en Z.

Cette théorie des facteurs L et ε globaux relatifs à ρ s'applique en particulier aux représentations automorphes irréductibles de $G(\mathbb{A})$ dont tous les facteurs locaux sont "de type L" relativement à ρ.

Le corollaire III.4 ci-dessus implique :

Corollaire III.5. –

Supposons que la conjecture II.7 *de transfert automorphe global par ρ et de compatibilité avec les transferts locaux en toutes les places soit connue.*

On en déduit alors que, pour toute représentation automorphe irréductible $\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$ de $G(\mathbb{A})$ dont tous les facteurs locaux π_x sont "de type L" relativement à ρ, on a :

(i) *Le produit*

$$L(\rho, \pi, q^{-s}) = \prod_{x \in |F|} L_x(\rho, \pi_x, q_x^{-s})$$

est absolument convergent dès que la partie réelle $\mathrm{Re}\,(s)$ *de* $s \in \mathbb{C}$ *est assez grande.*

(ii) *La fonction holomorphe que ce produit définit dans sa zone de convergence se prolonge analytiquement à $\mathbb{C}$ tout entier. Dans le cas présent où F est un corps de fonctions, c'est même une fraction rationnelle en q^{-s}.*

(iii) *Cette fonction analytique satisfait l'équation fonctionnelle*

$$L(\rho, \pi^\vee, q^{-(1-s)}) = L(\rho, \pi, q^{-s}) \cdot \varepsilon(\rho, \pi, \psi, q^{-s})\,.$$

(iv) *Si de plus le facteur π_x de π en au moins une place x est le produit*

$$\pi_x = \pi'_x \otimes (\omega_x \circ \det_G)$$

d'une représentation lisse admissible irréductible de $G(F_x)$ de ramification bornée et d'un caractère $G(F_x) \xrightarrow{\det_G} F_x^\times \xrightarrow{\omega_x} \mathbb{C}^\times$ suffisamment ramifié en fonction de cette borne, la fonction L globale relative à ρ de π

$$\mathbb{C} \ni s \mapsto L(\rho, \pi, q^{-s})$$

n'a pas de pôle.

□

Le but principal de ce paragraphe est de montrer, via le corollaire III.5 ci-dessus, que la conjecture II.7 de transfert automorphe par ρ implique une sorte de "formule de Poisson non linéaire relative à ρ sur $G(\mathbb{A})$" qui généralise au moins partiellement la formule de Poisson linéaire classique de la proposition III.1.

Pour cela, nous devons d'abord introduire la notion de "fonction de type L global (relatif à ρ) sur $G(\mathbb{A})$" et la ψ-transformation de Fourier de ces fonctions.

Définition III.6. –

Considérant un caractère algébrique bien défini sur F

$$\det_\rho : G \to \mathbb{G}_m$$

comme dans la définition II.15*, on pose :*

(i) *On appelle fonction "de type L" (relatif à ρ) sur $G(\mathbb{A})$ toute combinaison linéaire de fonctions produits*

$$h = \bigotimes_{x \in |F|} h_x : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

dont tous les facteurs locaux $h_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$ sont "de type L" (relatif à ρ) sur $G(F_x)$ au sens de la définition II.15(i) *et dont presque tous les facteurs h_x, $x \in |F| - S_\rho$, sont égaux à "la fonction de type L standard" de la définition* II.15(iii).

(ii) *On appelle ψ-transformation de Fourier relative à ρ l'unique opérateur linéaire de l'espace des fonctions de type L global, qui transforme toute fonction produit élément de cet espace*

$$h = \bigotimes_{x \in |F|} h_x$$

en le produit des ψ_x-transformées de Fourier (relativement à ρ) de ses facteurs h_x, au sens de la définition II.15(ii),

$$\widehat{h} = \bigotimes_{x \in |F|} \widehat{h}_x \, .$$

Remarque :

Il résulte de la définition II.15 que toute fonction de type L global

$$h = G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

est invariante à gauche et à droite par un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A})$.

Sa restriction à

$$\{g \in G(\mathbb{A}) \mid \deg(\det_G(g)) = N\}$$

est à support compact pour tout $N \in \mathbb{Z}$, et elle est nulle si $N \ll 0$.

Enfin, la ψ-transformée de Fourier (relative à ρ) $\widehat{h}$ de h est elle-même de type L global.

$\square$

D'après cette remarque, les sommes $\sum\limits_{\gamma \in G(F)} h(\gamma)$ et $\sum\limits_{\gamma \in G(F)} \widehat{h}(\gamma)$ associées à toute fonction de type L global sur $G(\mathbb{A})$ sont finies. Dans le but de les relier, nous avons besoin de rappeler l'expression spectrale de la somme

$$\sum_{\gamma \in G(F)} h(\gamma)$$

qu'implique, pour toute fonction localement constante à support compact $h : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$, le théorème de décomposition spectrale de Langlands.

Le groupe réductif quasi-déployé G est muni d'une paire de Borel (T, B) bien définie sur F. Un sous-groupe parabolique P de G défini sur F est dit "standard" s'il contient B ; il possède un unique sous-groupe de Levy $M = M_P$ contenant T. Les sous-groupes de Levy $M \supset T$ obtenus de cette façon sont dits "standard" ; chacun est le sous-groupe de Levy M_P d'un unique sous-groupe parabolique standard $P = P_M$.

La décomposition spectrale de Langlands sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ est paramétrée par les "paires discrètes" (M, π) constituées de

- un sous-groupe de Levy standard M,

- une représentation automorphe irréductible unitaire "discrète" π de $M(\mathbb{A})$, c'est-à-dire une représentation lisse admissible irréductible de $M(\mathbb{A})$ dont le caractère central

$$\chi_\pi : Z_M(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^\times$$

est unitaire, et qui apparaît comme facteur direct de l'espace de Hilbert

$$L^2_{\chi_\pi}(M(F)\backslash M(\mathbb{A}))$$

des fonctions

$$\varphi : M(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

invariantes à gauche par le sous-groupe discret $M(F)$ et qui vérifient

$$\varphi(\mu g) = \chi_\pi(\mu) \cdot \varphi(g)\,, \quad \forall\, \mu \in Z_M(\mathbb{A})\,, \quad \forall\, g \in M(\mathbb{A})\,.$$

Pour une telle paire discrète (M,π), la représentation π apparaît avec une multiplicité finie dans l'espace $L^2_{\chi_\pi}(M(F)\backslash M(\mathbb{A}))$. On note $L^2_\pi(M(F)\backslash M(\mathbb{A}))$ le sous-espace correspondant.

Si $P = P_M$ est le sous-groupe parabolique standard associé à M, si

$$\delta_P : P \to P/N_P \cong M_P = M \to \mathbb{G}_m$$

désigne le caractère modulaire par lequel P ou M agissent sur la puissance extérieure maximale de l'espace $\mathrm{Lie}\,(N_P)$, et si $K = \prod\limits_{x\in|F|} K_x$ est un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A})$, on note encore

$$L^2_\pi(M(F)\cdot N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/K)$$

l'espace des fonctions de carré intégrable

$$\varphi : M(F)\cdot N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/K \to \mathbb{C}$$

telles que, pour tout $g \in G(\mathbb{A})$, la fonction induite

$$M(F)\backslash M(\mathbb{A}) \ni m \mapsto |\delta_P(m)|^{-\frac{1}{2}} \cdot \varphi(mg)$$

soit élément de l'espace $L^2_\pi(M(F)\backslash M(\mathbb{A}))$.

Cet espace

$$L^2_\pi(M(F)\cdot N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/K)$$

est nécessairement de dimension finie. On peut le munir d'une base orthonormée $\mathcal{B}_K(M,\pi)$.

Pour tout sous-groupe de Levy standard M, on note Λ_M le réseau des caractères algébriques bien définis sur F

$$M \to \mathbb{G}_m\,,$$

$\Lambda_M^\vee$ son réseau dual et $\widehat{\Lambda}_M$ le tore complexe dont le réseau des caractères est égal à $\Lambda_M^\vee$.

Il existe un unique homomorphisme

$$\deg_M : M(\mathbb{A}) \to \Lambda_M^\vee$$

tel que, pour tout élément $\chi : M \to \mathbb{G}_m$ de Λ_M, on ait

$$\langle \chi, \deg_M(m)\rangle = \deg\,(\chi(m))\,, \quad \forall\, m \in M(\mathbb{A})\,.$$

L'image de $\deg_M$ est d'indice fini dans $\Lambda_M^\vee$ et son noyau contient le sous-groupe discret $M(F)$ de $M(\mathbb{A})$.

On note $\mathrm{Im}\,\widehat{\Lambda}_M$ le plus grand sous-tore réel compact de $\widehat{\Lambda}_M$. Il est constitué des éléments $z \in \widehat{\Lambda}_M$ qui sont unitaires au sens que

$$|\mu(z)| = 1\,, \quad \forall\, \mu \in \Lambda_M^\vee\,.$$

En toute place $x \in |F|$ où G est non ramifié, notons

$$K_x^0 = G(O_x)\,.$$

En les places x où G est ramifié, choisissons un sous-groupe ouvert compact K_x^0 de $G(F_x)$ tel que

$$G(F_x) = B(F_x) \cdot K_x^0\,,$$

puis notons $K^0 = \prod_{x \in |F|} K_x^0$.

Tout élément $z \in \widehat{\Lambda}_M$ définit un caractère composé

$$M(\mathbb{A}) \xrightarrow{\deg_M} \Lambda_M^\vee \xrightarrow{z} \mathbb{C}^\times$$

invariant à la fois par ls sous-groupe discret $M(F)$ et par n'importe quel sous-groupe ouvert compact de $M(\mathbb{A})$.

Comme $G(\mathbb{A}) = B(\mathbb{A}) \cdot K^0 = P_M(\mathbb{A}) \cdot K^0$, il se prolonge de manière unique en une fonction

$$N_{P_M}(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A}) / K^0 \to \mathbb{C}$$

que l'on notera encore z. Cette fonction est invariante à gauche par $M(F)$.

Si (M,π) est une paire discrète, on note

$$\pi_z$$

les représentations obtenues comme produit tensoriel de π et d'un caractère $z \in \widehat{\Lambda}_M$. Les (M,π_z) sont encore des paires discrètes et, si K est un sous-groupe ouvert de K^0, chaque

$$\varphi \mapsto z \cdot \varphi$$

définit un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$L_\pi^2(M(F) \cdot N_{P_M}(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})/K) \xrightarrow{\sim} L_{\pi_z}^2(M(F) \cdot N_{P_M}(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})/K)\,.$$

Si π est unitaire, π_z est unitaire si et seulement si z est élément de $\mathrm{Im}\,\widehat{\Lambda}_M$. On note $[\pi]$ la variété complexe des représentations de la forme π_z et, si π est unitaire, on note $\mathrm{Im}\,[\pi]$ la sous-variété réelle compacte de $[\pi]$ constituée des représentations unitaires.

Deux paires discrètes (M,π) et (M',π') sont dites "équivalentes" si elles sont transformées l'une dans l'autre par un élément du groupe de Weyl F-rationnel $\mathfrak{S}_G^F$ de G.

Elles sont dites "faiblement équivalentes" s'il existe $z \in \widehat{\Lambda}_M$ tel que les paires discrètes (M,π_z) et (M',π') soient équivalentes.

Pour toute paire discrète (M,π), on note

$$\mathrm{Fixe}\,(M,\pi)$$

le groupe fini des paires $(\sigma,z) \in \mathfrak{S}_G^F \times \widehat{\Lambda}_M$ telles que

$$w \cdot M \cdot w^{-1} = M \quad \text{et} \quad \pi_z \cong w(\pi)\,.$$

Rappelons enfin la construction des séries d'Eisenstein.

Si M est un sous-groupe de Levy standard de G, notons $\Delta^\vee_{B,M}$ l'ensemble des éléments non nuls de $\Lambda^\vee_M$, c'est-à-dire des formes linéaires non triviales sur $\Lambda_M \subset X_T$ qui sont induites par une coracine simple $\alpha^\vee \in \Delta^\vee_B$.

Pour toute paire discrète (M,π), tout sous-groupe ouvert K de K^0, toute fonction

$$\varphi \in L^2_\pi(M(F)\cdot N_{P_M}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/K)$$

et tout élément $g \in G(\mathbb{A})$, la série

$$\sum_{\gamma \in P_M(F)\backslash G(F)} (z\cdot\varphi)(\gamma g)$$

converge absolument pour tout élément $z \in \widehat{\Lambda}_M$ tel que les modules

$$|\alpha^\vee(z)|\,, \quad \alpha^\vee \in \Delta^\vee_{B,M}\,,$$

soient assez grands (indépendamment de g).

Elle converge vers une limite

$$E(z\cdot\varphi)(g)$$

qui est une fraction rationnelle en $z \in \widehat{\Lambda}_M$, appelée série d'Eisenstein, que l'on peut aussi noter

$$E_{\pi_z}(\varphi)(g)\,.$$

Ces fractions rationnelles sur $[\pi]$ peuvent s'écrire comme le quotient de deux polynômes dont le second, le dénominateur, ne dépend pas de $g \in G(\mathbb{A})$ et ne s'annule pas sur la sous-variété réelle $\mathrm{Im}\,[\pi]$ de $[\pi]$ constituée des représentations unitaires ni, plus généralement, en les représentations de la forme

$$\pi' \otimes |\det_G(\bullet)|^s\,, \quad \pi' \in \mathrm{Im}\,[\pi]\,, \quad s \in \mathbb{C}\,.$$

Nous avons maintenant rappelé tous les ingrédients nécessaires à l'énoncé du théorème de décomposition spectrale de Langlands :

Théorème III.7. –

Soit un sous-groupe ouvert $K = \prod_{x\in|F|} K_x$ *du sous-groupe ouvert compact* $K^0 = \prod_{x\in|F|} K^0_x$ *de* $G(\mathbb{A})$.

Alors les paires discrètes (M,π) *telles que l'espace*

$$L^2_\pi(M(F)\cdot N_{P_M}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/K)$$

ne soit pas nul forment un ensemble fini de classes d'équivalence faible, et on peut choisir un ensemble fini de paires discrètes unitaires (M,π_0) *qui représentent ces classes.*

Pour toute fonction à support compact

$$h : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

invariante à gauche et à droite par K*, et pour tous éléments* $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$*, on a*

$$\sum_{\gamma\in G(F)} h(g_1^{-1}\gamma\, g_2) = \sum_{(M,\pi_0)} \frac{1}{|\mathrm{Fixe}\,(M,\pi_0)|}\cdot \sum_{\varphi\in\mathcal{B}_K(M,\pi_0)} \int_{\mathrm{Im}\,[\pi_0]} d\pi\cdot(h * E_\pi(\varphi))(g_2)\cdot E_{\pi^\vee}(\overline{\varphi})(g_1)$$

où $d\pi$ *désigne la mesure de volume* 1 *sur chaque* $\mathrm{Im}\,[\pi_0]$ *qui est invariante par le tore réel compact* $\mathrm{Im}\,\widehat{\Lambda}_M$.

Remarque :

Plus synthétiquement, la somme
$$\sum_{\gamma\in G(F)} h(g_1^{-1}\gamma\, g_2)$$
a la forme
$$\sum_{(M,\pi_0)} \int_{\mathrm{Im}\,[\pi_0]} d\pi \cdot h_\pi(g_1,g_2)$$
où chaque $(g_1,g_2)\mapsto h_\pi(g_1,g_2)$ est une somme de produits de séries d'Eisenstein des représentations automorphes $\pi^\vee$ et π, et chaque $\pi\mapsto h_\pi(g_1,g_2)$ est une fraction rationnelle, quotient de deux polynômes dont le second ne dépend pas de g_1 et g_2 et ne s'annule pas en les représentations de la forme
$$\pi'\otimes|\det_G(\bullet)|^s\,,\quad \pi'\in\mathrm{Im}\,[\pi_0]\,,\quad s\in\mathbb{C}\,.$$

□

Si $h : G(\mathbb{A})\to\mathbb{C}$ est une fonction de type L global (relatif à ρ) au sens de la définition III.6, la somme finie
$$\sum_{\gamma\in G(F)} h(\gamma)$$
ne change pas si l'on multiplie la fonction h par le caractère $|\det_G(\bullet)|^s$ pour n'importe quel $s\in\mathbb{C}$.

Pour toute famille d'entiers presque nulle $(N_x\in\mathbb{Z})_{x\in|F|}$, la restriction de la fonction $h\cdot|\det_G(\bullet)|^s$ à
$$\{g\in G(\mathbb{A})\mid v_x(\det_G(g))=N_x,\ \forall\,x\in|F|\}$$
est à support compact, et on peut lui appliquer le théorème III.7 ci-dessus. En faisant la somme sur toutes les familles presque nulles d'entiers $(N_x)_{x\in|F|}$, on obtient différentes séries, qui sont toutes convergentes si $\mathrm{Re}\,(s)$ est assez grande. On démontre ainsi :

Corollaire III.8. –

Soit une fonction de type L global (relatif à ρ)
$$h : G(\mathbb{A})\to\mathbb{C}$$
qui est invariante à gauche et à droite par un sous-groupe ouvert $K=\prod_{x\in|F|}K_x$ de $K^0=\prod_{x\in|F|}K_x^0$.

Faisant décrire à (M,π_0) l'ensemble fini de représentants associé à K dans le théorème III.7*, on a :*

(i) *Pour tous $g_1,g_2\in G(\mathbb{A})$, la somme*
$$|\det_G(g_1^{-1}g_2)|^{\frac12}\cdot|\det_\rho(g_1^{-1}g_2)|^{\frac12}\cdot\sum_{\gamma\in G(F)} h(g_1^{-1}\gamma\, g_2)$$
s'écrit, pour n'importe quel $s\in\mathbb{C}$ de partie réelle $\mathrm{Re}\,(s)$ *assez grande,*
$$\sum_{(M,\pi_0)} \int_{\mathrm{Im}\,[\pi_0]} d\pi\cdot L\left(\rho,\pi^\vee,q^{-\frac12-s}\right)\cdot h_{\pi\otimes|\det_G(\bullet)|^{-s}}(g_1,g_2)$$
où

- *chaque $(g_1,g_2)\mapsto h_\pi(g_1,g_2)$ est une somme de produits de séries d'Eisenstein des représentations automorphes $\pi^\vee$ et π,*

- *chaque* $\pi \mapsto h_\pi(g_1,g_2)$ *est une fraction rationnelle, quotient de deux polynômes dont le second ne dépend pas de* g_1 *et* g_2 *et ne s'annule pas en les représentations de la forme*

$$\pi' \otimes |\det_G(\bullet)|\,, \quad \pi' \in \mathrm{Im}\,[\pi_0]\,, \quad s \in \mathbb{C}\,.$$

(ii) *De même, pour tous* $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$, *la somme*

$$|\det_G(g_2^{-1}g_1)|^{\frac{1}{2}} \cdot |\det_\rho(g_2^{-1}g_1)|^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \widehat{h}(g_2^{-1}\gamma\, g_1)$$

s'écrit, pour n'importe quel $s \in \mathbb{C}$ *de partie réelle* $\mathrm{Re}\,(s)$ *assez petite*

$$\sum_{(M,\pi_0)} \int_{\mathrm{Im}\,[\pi_0]} d\pi \cdot L\left(\rho, \pi, q^{-\frac{1}{2}+s}\right) \cdot \widehat{h}_{\pi^\vee \otimes |\det_G(\bullet)|^s}(g_2,g_1)$$

où

- *chaque* $(g_2,g_1) \mapsto \widehat{h}_{\pi^\vee}(g_2,g_1)$ *est une somme de produits de séries d'Eisenstein des représentations automorphes* π *et* $\pi^\vee$,
- *chaque* $\pi \mapsto \widehat{h}_{\pi^\vee}(g_2,g_1)$ *est une fraction rationnelle, quotient de deux polynômes dont le second ne dépend pas de* g_1 *et* g_2 *et ne s'annule pas en les représentations de la forme*

$$\pi' \otimes |\det_G(\bullet)|\,, \quad \pi' \in \mathrm{Im}\,[\pi_0]\,, \quad s \in \mathbb{C}\,.$$

Remarque :

Il résulte de la définition de la ψ-transformation de Fourier relative à ρ que, pour tous $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$ et tout représentant (M, π_0), les fractions rationnelles sur $[\pi_0]$

$$\pi \mapsto h_\pi(g_1,g_2)$$

et

$$\pi \mapsto \widehat{h}_{\pi^\vee}(g_2,g_1)$$

sont reliées par la formule

$$h_{\pi^\vee}(g_2,g_1) = h_\pi(g_1,g_2) \cdot \varepsilon\left(\rho, \pi, \psi, q^{-\frac{1}{2}}\right)\,.$$

$\square$

On déduit du corollaire III.8 ci-dessus, de la remarque qui le suit et du corollaire III.5, la forme faible suivante de formule de Poisson non linéaire relative à ρ :

Proposition III.9. –

Supposons que la conjecture II.7 *de transfert automorphe global par* ρ *et de compatibilité avec les transferts globaux en toutes les places soit connue.*

On en déduit alors que, pour toute fonction de type L global (relatif à ρ*)*

$$h : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

et sa ψ*-transformée de Fourier relative à* ρ

$$\widehat{h} : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,,$$

on a :

(i) *Avec les notations du corollaire* III.8(i), *la somme*

$$|\det_G(g_1^{-1}g_2)|^{\frac{1}{2}} \cdot |\det_\rho(g_1^{-1}g_2)|^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{\gamma\in G(F)} h(g_1^{-1}\gamma\, g_2)$$

s'écrit

$$\sum_{(M,\pi_0)} \int_{\mathrm{Im}\,[\pi_0]} d\pi \cdot L\left(\rho, \pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}-s}\right) \cdot h_{\pi\otimes|\det_G(\bullet)|^{-s}}(g_1, g_2)$$

pour n'importe quel $s\in\mathbb{C}$ *de partie réelle* $\mathrm{Re}\,(s) \gg 0$*, tandis que la somme*

$$|\det_G(g_2^{-1}g_1)|^{\frac{1}{2}} \cdot |\det_\rho(g_2^{-1}g_1)|^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{\gamma\in G(F)} \widehat{h}(g_2^{-1}\gamma\, g_1)$$

s'écrit

$$\sum_{(M,\pi_0)} \int_{\mathrm{Im}\,[\pi_0]} d\pi \cdot L\left(\rho, \pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}-s}\right) \cdot h_{\pi\otimes|\det_G(\bullet)|^{-s}}(g_1, g_2)$$

pour n'importe quel $s\in\mathbb{C}$ *de partie réelle* $\mathrm{Re}\,(s) \ll 0$.

Autrement dit, on passe de l'une à l'autre somme par un simple déplacement de contours d'intégration, et leur différence est une somme de résidus calculés le long des pôles des fonctions

$$(\pi, s) \mapsto L\left(\rho, \pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}-s}\right) .$$

(ii) *Supposons en outre que, en au moins une place* x*, la fonction* h *ait un facteur local* h_x *qui s'écrive comme le produit*

$$h_x = h'_x \cdot \omega_x \circ \det_G(\bullet)$$

d'une fonction $h'_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$ *de ramification bornée et d'un caractère* $G(F_x) \xrightarrow{\det_G} F_x^\times \xrightarrow{\omega_x} \mathbb{C}^\times$ *suffisamment ramifié en fonction de cette borne.*

Alors les deux sommes de (i) *sont égales, avec en particulier*

$$\sum_{\gamma\in G(F)} h(\gamma) = \sum_{\gamma\in G(F)} \widehat{h}(\gamma)\,.$$

Remarque :

La formule de (ii), qui s'applique aux fonctions de type L global suffisamment ramifiées en au moins une place, sera appelée “formule de Poisson sans terme de bord” (relative à ρ sur $G(\mathbb{A})$).

IV. Formules de Poisson non linéaires et noyaux du transfert automorphe

On considère toujours le groupe réductif quasi-déployé G sur F muni de la représentation de transfert $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ et, pour tout degré $r' \geq 2$, le groupe croisé associé $G_{r'}$ muni de la représentation de transfert croisée $\rho_{r'} : \widehat{G}_{r'} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_{rr'}(\mathbb{C})$.

Le but du présent paragraphe est de montrer, en sens inverse du paragraphe précédent, que la "formule de Poisson sans terme de bord relative à ρ_{r-1} sur $G_{r-1}(\mathbb{A})$" permet de construire, pour toute partie non vide S de $|F|$ contenant S_ρ, suffisamment de "S-noyaux du transfert" pour en déduire le transfert automorphe global par ρ de G à GL_r.

On reprend donc la construction de S-noyaux du transfert par ρ là où nous l'avions laissée aux paragraphes I et II.

On est parti d'une famille de "noyaux locaux du transfert non ramifié par ρ" en les places $x \in |F| - S$,

$$K_{\psi_x}^{G,\rho} : G(F_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C}\,,$$

complétée en les places $x \in S$ par une famille de fonctions

$$K_{\psi_x}^{G,\rho} : G(F_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C}$$

astreintes à certaines conditions automatiquement vérifiées en les places $x \in |F| - S$: En toute place $x \in |F|$, $K_{\psi_x}^{G,\rho}$ est de $\psi_{(r)}$-type de Whittaker en la variable $g' \in \mathrm{GL}_r(F_x)$, elle est à support compact en la variable $g \in G(F_x)$, et elle satisfait l'équation

$$K_{\psi_x}^{G,\rho}(g, z\, g') = K_{\psi_x}^{G,\rho}(\mu_G(z)\, g, g') \cdot \omega_\rho(z)\,, \quad \forall\, z \in F_x^\times\,.$$

Le produit

$$\prod_{x \in |F|} K_{\psi_x}^{G,\rho} : G(\mathbb{A}) \times \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

est donc de $\psi_{(r)}$-type de Whittaker en la variable $g' \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, il est à support compact en la variable $g \in G(\mathbb{A})$, et il satisfait l'équation

$$\left(\prod_{x \in |F|} K_{\psi_x}^{G,\rho}\right)(g, z\, g') = \left(\prod_{x \in |F|} K_{\psi_x}^{G,\rho}\right)(\mu_G(z)\, g, g') \cdot \omega_\rho(z)\,, \quad \forall\, z \in \mathbb{A}^\times\,.$$

On a posé pour tous $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$ et $g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$

$$W_{(r)}^{\psi} K(g_1, g_2, g) = \sum_{\gamma \in G(\mathbb{A})} \left(\prod_{x \in |F|} K_{\psi_x}^{G,\rho}\right)(g_1^{-1} \gamma\, g_2, g)\,,$$

$$K_{\psi}^{G,\rho}(g_1, g_2, g) = \sum_{\delta \in N_{r-1}(F) \backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)} W_{(r)}^{\psi} K(g_1, g_2, \delta g)\,,$$

$$\widetilde{K}_\psi^{G,\rho}(g_1,g_2,g) = \sum_{\delta \in N_{r-1}(F)\backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)} W_{(r)}^\psi K(g_1,g_2,\alpha_r\,\delta g)\,.$$

Les fonctions $K_\psi^{G,\rho}$ et $\widetilde{K}_\psi^{G,\rho}$ sur $(G\times G\times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A})$ sont respectivement invariantes à gauche par les sous-groupes discrets $(G\times G\times Q_r)(F)$ et $(G\times G\times Q_r^{\mathrm{op}})(F)$.

Afin de les comparer, on a introduit une fonction test localement constante à support compact arbitraire

$$h = \bigotimes_{x\in|F|} h_x : \mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,,$$

et formé les produits scalaires

$$K_\psi^{G,\rho,h}(g_1,g_2,g) = \int_{\mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A})} dg'\cdot K_\psi^{G,\rho}(g_1,g_2,g'g)\cdot h(g')\,,$$

$$\widetilde{K}_\psi^{G,\rho,h}(g_1,g_2,g) = \int_{\mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A})} dg'\cdot \widetilde{K}_\psi^{G,\rho}(g_1,g_2,g'g)\cdot h(g')\,.$$

Ceux-ci s'écrivent

$$K_\psi^{G,\rho,h}(g_1,g_2,g) = \sum_{\gamma\in G(F)} \sum_{\delta\in N_{r-1}(F)\backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)} W_{\psi,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h}(\gamma,\delta)\,,$$

$$\widetilde{K}_\psi^{G,\rho,h}(g_1,g_2,g) = \sum_{\gamma\in G(F)} \sum_{\delta\in \mathrm{GL}_{r-1}(F)/N_{r-1}(F)} \widetilde{W}_{\psi,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h}(\gamma,\delta)$$

où

$$W_{\psi,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h} = \bigotimes_{x\in|F|} W_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x} : (G\times \mathrm{GL}_{r-1})(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,,$$

$$\widetilde{W}_{\psi,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h} = \bigotimes_{x\in|F|} \widetilde{W}_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x} : (G\times \mathrm{GL}_{r-1})(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

sont deux fonctions produits dont les facteurs locaux $W_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x}$ et $\widetilde{W}_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x}$ en les places $x\in|F|-S\subset |F|-S_\rho$ sont analysés spectralement dans les théorèmes II.2 et II.4.

Afin de reformuler le lien entre fonctions $W_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x}$ et $\widetilde{W}_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x}$ que ces théorèmes établissent en toutes les places $x\in|F|-S$, on pose la définition suivante :

Définition IV.1. –

Considérons un degré arbitraire $r'\geq 2$.

Une fonction locale en une place $x\in|F|$ [resp. globale]

$$W_x : G_{r'}(F_x)\to\mathbb{C} \quad \textit{[resp. } W : G_{r'}(\mathbb{A})\to\mathbb{C}\textit{]}$$

qui est de $\psi_{(r')}$-type de Whittaker, sera dite "de type L local sur $G_{r'}(F_x)$ [resp. global sur $G_{r'}(\mathbb{A})$] relativement à $\rho_{r'}$" s'il existe une fonction "de type L local [resp. global] relatif à ρ" au sens de la définition II.15(i) *[resp.* III.6(i)*]*

$$H_x : G_{r'}(F_x)\to\mathbb{C} \quad \textit{[resp. } H : G_{r'}(\mathbb{A})\to\mathbb{C}\textit{]}$$

telle que

$$W_x = W_{(r')}^\psi H_x \quad \textit{[resp. } W = W_{(r')}^\psi H\textit{]}.$$

On appelle alors ψ_x-transformée de Fourier de W_x [resp. ψ-transformée de Fourier de W] relativement à ρ la fonction

$$\begin{array}{rrcl} & \widehat{W}_x : (g,g') & \mapsto & \displaystyle\int_{N_{r'}(F_x)} du'_x \cdot \psi^{-1}_{(r')}(u'_x) \cdot \widehat{H}_x(g, g' u'^{-1}_x) \\ \text{[resp.} & \widehat{W} : (g,g') & \mapsto & \displaystyle\int_{N_{r'}(\mathbb{A})} du' \cdot \psi^{-1}_{(r')}(u') \cdot \widehat{H}(g, g' u'^{-1})]. \end{array}$$

Elle ne dépend pas du choix du relèvement H_x [resp. H] de W_x [resp. W].

Remarque :

En toute place $x \in |F| - S_\rho$, on appelle "fonction de $\psi_{(r')}$-type de Whittaker de type L standard" (relatif à ρ) le $\psi_{(r')}$-coefficient unipotent

$$W_x = W^{\psi}_{(r')} H_x$$

de la "fonction de type L standard" (relatif à ρ)

$$H_x : G_{r'}(F_x) \to \mathbb{C}$$

au sens de la définition II.15(iii).

Une fonction produit de $\psi_{(r')}$-type de Whittaker

$$W = \bigotimes_{x \in |F|} W_x : G_{r'}(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

est de type L global relatif à ρ lorsque tous ses facteurs W_x, $x \in |F|$, sont de type L local relatif à ρ et que presque tous sont la fonction standard.

□

On déduit immédiatement de cette définition :

Lemme IV.2. –

Étant donné un degré $r' \geq 2$, supposons que la "formule de Poisson sans terme de bord relative à $\rho_{r'}$ sur $G_{r'}(\mathbb{A})$" est connue.

Cela signifie que pour toute fonction produit de type L global relatif à $\rho_{r'}$

$$H = \bigotimes_{x \in |F|} H_x : G_{r'}(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

dont un facteur local H_x au moins est le produit

$$G_{r'}(F_x) \ni (g,g') \mapsto H_x(g,g') = H'_x(g,g') \cdot \omega_x(\det_G(g))$$

d'une fonction $H'_x : G_{r'}(F_x) \to \mathbb{C}$ de ramification bornée et d'un caractère $\omega_x \circ \det_G = \omega_x \circ \det$ suffisamment ramifié en fonction de cette borne, on connaît la formule

$$\sum_{(\gamma,\gamma') \in G_{r'}(F)} H(\gamma,\gamma') = \sum_{(\gamma,\gamma') \in G_{r'}(F)} \widehat{H}(\gamma,\gamma') .$$

Alors, pour toute fonction produit de type de Whittaker de type L global relatif à $\rho_{r'}$

$$W = \bigotimes_{x \in |F|} W_x : G_{r'}(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

dont un facteur local W_x au moins est le produit

$$W_x = W'_x \cdot \omega_x \circ \det_G$$

d'une fonction $W'_x : G_{r'}(F_x) \to \mathbb{C}$ de ramification bornée et d'un caractère $\omega_x \circ \det_G = \omega_x \circ \det$ suffisamment ramifié en fonction de cette borne, on connaît la formule

$$\sum_{(\gamma,\gamma') \in N_{r'}(F) \backslash G_{r'}(F)} W(\gamma,\gamma') = \sum_{(\gamma,\gamma') \in G_{r'}(F)/N_{r'}(F)} \widehat{W}(\gamma,\gamma') \,.$$

$\square$

Revenant aux noyaux locaux du transfert non ramifié par ρ en les places $x \in |F| - S \subset |F| - S_\rho$

$$K_{\psi_x}^{G,\rho} : G(O_x) \backslash G(F_x)/G(O_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x)/\mathrm{GL}_r(O_x) \to \mathbb{C} \,,$$

et aux fonctions $W^{G,\rho,h_x}_{\psi_x,g_1,g_2,g}$, $\widetilde{W}^{G,\rho,h_x}_{\psi_x,g_1,g_2,g}$ sur $G(F_x) \times \mathrm{GL}_{r-1}(F_x) \supset G_{r-1}(F_x)$ qui s'en déduisent par intégration contre des fonctions tests arbitraires $h_x : \mathrm{GL}_{r-1}(F_x) \to \mathbb{C}$, les théorèmes II.2 et II.4 impliquent :

Théorème IV.3. –

Modulo multiplication par le caractère $(m,m') \mapsto |\det_G(m)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det_\rho(m)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det(m')|_x^{-\frac{r-2}{2}}$, la restriction à

$$G_{r-1}(F_x) \subset G(F_x) \times \mathrm{GL}_{r-1}(F_x)$$

de la fonction de $\psi_{(r-1)}$-type de Whittaker

$$W^{G,\rho,h_x}_{\psi_x,g_1,g_2,g} : (G \times \mathrm{GL}_{r-1})(F_x) \to \mathbb{C}$$

est "de type L local relatif à ρ_{r-1}" en toute place $x \in |F| - S \subset |F| - S_\rho$, et elle se confond avec la fonction standard en presque toute telle place.

De plus, sa ψ_x-transformée de Fourier relative à ρ_{r-1} n'est autre que la restriction à

$$G_{r-1}(F_x) \subset G(F_x) \times \mathrm{GL}_{r-1}(F_x) \,,$$

multipliée par le même caractère $|\det_G(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det_\rho(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det(\bullet)|_x^{-\frac{r-2}{2}}$, de la fonction

$$G(F_x) \times \mathrm{GL}_{r-1}(F_x) \ni (m,m') \mapsto \widetilde{W}^{G,\rho,h_x}_{\psi_x,g_1,g_2,g}(m, (-1)^{r-1}\, m')$$

en toute place $x \in |F| - S \subset |F| - S_\rho$.

$\square$

Considérons maintenant les places $x \in S$.

Jusqu'à présent, on n'a demandé aux fonctions de $\psi_{(r)}$-type de Whittaker $K_{\psi_x}^{G,\rho} : G(F_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C}$ en ces places $x \in S$ que de satisfaire l'équation

$$K_{\psi_x}^{G,\rho}(g, z\, g') = K_{\psi_x}^{G,\rho}(\mu_G(z)\, g, g') \cdot \omega_\rho(z) \,, \quad \forall\, z \in F_x^\times \,.$$

Autrement dit, la décomposition spectrale de ces fonctions $K_{\psi_x}^{G,\rho}$ ne doit faire apparaître que des paires (π_x, π'_x) de représentations lisses admissibles irréductibles unitaires de $G(F_x)$ et $\mathrm{GL}_r(F_x)$ telles que

$$\chi_{\pi'_x} = \chi_{\pi_x} \cdot \omega_\rho \,.$$

Un lemme inspiré de [Cogdell, Piatetski-Shapiro] permet d'imposer aux fonctions $K_{\psi_x}^{G,\rho}$ des conditions supplémentaires qui seront suffisantes pour étendre partiellement la conclusion du théorème IV.3 ci-dessus aux places $x \in S$:

Lemme IV.4. –

En une place $x \in S$, considérons l'ensemble $\{(\pi_x, \pi'_x)\}$ des paires de représentations lisses admissibles irréductibles unitaires de $G(F_x)$ et $\mathrm{GL}_r(F_x)$ qui vérifient

$$\chi_{\pi'_x} = \chi_{\pi_x} \cdot \omega_\rho$$

et dont la ramification n'excède pas une borne donnée.

Soit $\omega_x : F_x^\times \to \mathbb{C}^\times$ un caractère unitaire suffisamment ramifié pour que tout élément (π_x, π'_x) de l'ensemble $\{(\pi_x, \pi'_x)\}$ vérifie les conditions suivantes :

- *D'une part, la représentation $\pi'_x \otimes (\omega_x \circ \det) = \pi'_x \, \omega_x$ de $\mathrm{GL}_r(F_x)$ satisfait la double conclusion de la proposition* II.13

$$\begin{aligned} &L_x(\pi'_x \, \omega_x, Z) = 1\,, \\ &\varepsilon_x(\pi'_x \, \omega_x, \psi_x, Z) = \varepsilon_x(\chi_{\pi'_x} \, \omega_x, \psi_x, Z) \cdot \varepsilon_x(\omega_x, \psi_x, Z)^{r-1}\,. \end{aligned}$$

- *D'autre part, pour toute représentation non ramifiée irréductible z de $\mathrm{GL}_{r-1}(F_x)$ de valeurs propres de Hecke $z_1, \dots, z_{r-1}$, la représentation $(\pi_x \boxtimes z) \otimes (\omega_x \circ \det_G) = (\pi_x \boxtimes z) \otimes (\omega_x \circ \det) = (\pi_x \boxtimes z) \cdot \omega_x$ de $G_{r-1}(F_x)$ satisfait la conclusion du corollaire* II.14, *au sens qu'elle est "de type L" relativement à ρ_{r-1} avec*

$$\begin{aligned} &L_x(\rho_{r-1}, (\pi_x \boxtimes z) \cdot \omega_x, Z) = 1\,, \\ &\varepsilon_x(\rho_{r-1}, (\pi_x \boxtimes z) \cdot \omega_x, \psi_x, 1) = \prod_{1 \le j \le r-1} \varepsilon_x(\chi_{\pi_x} \, \omega_\rho \, \omega_x, \psi_x, z_j \, Z) \cdot \varepsilon_x(\omega_x, \psi_x, z_j \, Z)^{r-1}\,. \end{aligned}$$

Alors, si $N_x \in \mathbb{N}$ est un entier assez grand en fonction de l'ensemble $\{(\pi_x, \pi'_x)\}$ et du caractère très ramifié $\omega_x : F_x^\times \to \mathbb{C}^\times$, il est possible de construire une fonction de $\psi_{(r)}$-type de Whittaker

$$K_{\psi_x}^{G,\rho} : G(F_x) \times \mathrm{GL}_{r-1}(F_x) \to \mathbb{C}$$

telle que :

- $K_{\psi_x}^{G,\rho}(g, z\, g') = K_{\psi_x}^{G,\rho}(\mu_G(z)\, g, g')\,, \quad \forall\, z \in F_x^\times,$
- *chaque $K_{\psi_x}^{G,\rho}(\bullet, g')$, $g' \in \mathrm{GL}_r(F_x)$, est à support compact dans $G(F_x)$,*
- *en la première variable $g \in G(F_x)$, $K_{\psi_x}^{G,\rho}$ est invariante à gauche et à droite par un certain sous-groupe ouvert compact de $G(F_x)$,*
- *en la seconde variable $g' \in \mathrm{GL}_r(F_x)$, $K_{\psi_x}^{G,\rho}$ est invariante à droite par le sous-groupe ouvert compact*

$$\mathrm{GL}_r(O_x)_{N_x} \subset \mathrm{GL}_r(O_x) \subset \mathrm{GL}_r(F_x)$$

des matrices entières inversibles dont la réduction modulo $\varpi_x^{N_x}$ a la forme

$$\begin{pmatrix} * & \dots & * & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & \dots & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

- *la décomposition spectrale de $K_{\psi_x}^{G,\rho}$ ne fait apparaître que des paires de représentations lisses admissibles irréductibles de $G(F_x)$ et $\mathrm{GL}_r(F_x)$ de la forme*

$$(\pi_x\,\omega_x, \pi'_x\,\omega_x) \quad \textit{avec} \quad (\pi_x, \pi'_x) \in \{(\pi_x, \pi'_x)\}\,,$$

et la composante de $K_{\psi_x}^{G,\rho}$ dans l'espace propre associé à toute première projection $\pi_x\,\omega_x$ d'une telle paire ne s'annule pas uniformément sur $G(F_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x)_{N_x}$.

Remarque :

Le sous-groupe ouvert compact $\mathrm{GL}_r(O_x)_{N_x}$ de $\mathrm{GL}_r(F_x)$ introduit ci-dessus contient comme sous-groupe $\mathrm{GL}_{r-1}(O_x)$.

□

L'équation fonctionnelle locale de Jacquet, Piatetski-Shapiro et Shalika permet de compléter le théorème IV.3 ci-dessus de la manière suivante :

Théorème IV.5. –

En n'importe quelle place $x \in S$, supposons que la fonction

$$K_{\psi_x}^{G,\rho} : G(F_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C}$$

satisfait toutes les conditions du lemme IV.4 *ci-dessus relativement à la famille donnée $\{(\pi_x, \pi'_x)\}$, à un caractère unitaire $\omega_x : F_x^\times \to \mathbb{C}^\times$ assez ramifié en fonction de cette famille, et à un entier $N_x \in \mathbb{N}$ assez grand en fonction de cette famille et de ω_x.*

Soit une fonction test localement constante à support compact

$$h_x : \mathrm{GL}_{r-1}(F_x) \to \mathbb{C}$$

qui est sphérique ou, plus généralement, dont la décomposition spectrale ne fait apparaître que des représentations non ramifiées z.

Alors, modulo multiplication par le caractère

$$(m, m') \mapsto |\det_G(m)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det_\rho(m)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det(m')|_x^{-\frac{r-2}{2}}\,,$$

la restriction à $G_{r-1}(F_x)$ de la fonction de $\psi_{(r-1)}$-type de Whittaker

$$W_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x} : (G \times \mathrm{GL}_{r-1})(F_x) \to \mathbb{C}$$

est "de type L local relatif à ρ_{r-1}", et sa ψ_x-transformée de Fourier relative à ρ_{r-1} n'est autre que la restriction à $G_{r-1}(F_x)$ de la fonction

$$G(F_x) \times \mathrm{GL}_{r-1}(F_x) \ni (m, m') \mapsto \widetilde{W}_{\psi_x,g_1,g_2,g}^{G,\rho,h_x}(m, (-1)^{r-1}\,m')\,,$$

multipliée par le même caractère $|\det_G(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det_\rho(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det(\bullet)|_x^{-\frac{r-2}{2}}$.

De plus, sa décomposition spectrale ne fait apparaître que des représentations lisses admissibles irréductibles unitaires de $G_{r-1}(F_x)$ de la forme

$$(\pi_x \boxtimes z) \cdot \omega_x\,,$$

où π_x est la première projection d'un élément (π_x, π'_x) de l'ensemble $\{(\pi_x, \pi'_x)\}$ et z est une représentation non ramifiée de $\mathrm{GL}_{r-1}(F_x)$.

□

Si la partie finie $S \supset S_\rho$ de $|F|$ n'est pas vide et que les fonctions $K^{G,\rho}_{\psi_x} : G(F_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C}$, $x \in S$, satisfont les propriétés du lemme IV.4, toutes les conditions nécessaires pour appliquer la "formule de Poisson sans terme de bord" relative à ρ_{r-1} sur $G_{r-1}(\mathbb{A})$ sont satisfaites. On obtient d'après le lemme IV.2 :

Corollaire IV.6. –

Supposons que la "formule de Poisson sans terme de bord relative à ρ_{r-1} sur $G_{r-1}(\mathbb{A})$" est connue.

Étant donnée une partie finie non vide S de $|F|$ qui contient S_ρ, complétons la famille de noyaux du transfert non ramifié par ρ en les places $x \in |F| - S$

$$K^{G,\rho}_{\psi_x} : G(O_x)\backslash G(F_x)/G(O_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x)/\mathrm{GL}_r(O_x) \to \mathbb{C}\,,$$

par une famille de fonctions en les places $x \in S$

$$K^{G,\rho}_{\psi_x} : G(F_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x)/\mathrm{GL}_r(O_x)_{N_x} \to \mathbb{C}$$

qui satisfont les conditions du lemme IV.4.

Soient des éléments $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$ et $g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$.

Soit enfin une fonction test localement constante à support compact

$$h = \bigotimes_{x\in|F|} h_x : \mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

dont les facteurs h_x en les places $x \in S$ sont sphériques ou, plus généralement, ne font apparaître dans leur décomposition spectrale que des représentations non ramifiées.

Alors on a

$$\sum_{(\gamma,\delta)\in N_{r-1}(F)\backslash G_{r-1}(F)} W^{G,\rho,h}_{\psi,g_1,g_2,g}(\gamma,\delta) = \sum_{(\gamma,\delta)\in G_{r-1}(F)/N_{r-1}(F)} \widetilde{W}^{G,\rho,h}_{\psi,g_1,g_2,g}(\gamma,(-1)^{r-1}\,\delta)\,.$$

Remarque :

La conclusion du corollaire s'applique également aux translatées à gauche ${}^{\delta'_0}h$ de h par tous les éléments $\delta'_0 \in \mathrm{GL}_{r-1}(F)$.

En faisant la somme sur toutes les classes $\delta'_0 \in \mathrm{GL}_{r-1}(F)/\mathrm{SL}_{r-1}(F)$, on obtient

$$\sum_{\gamma\in G(F)} \sum_{\delta\in N_{r-1}(F)\backslash \mathrm{GL}_{r-1}(F)} W^{G,\rho,h}_{\psi,g_1,g_2,g}(\gamma,\delta) = \sum_{\gamma\in G(F)} \sum_{\delta\in \mathrm{GL}_{r-1}(F)/N_{r-1}(F)} \widetilde{W}^{G,\rho,h}_{\psi,g_1,g_2,g}(\gamma,\delta)\,.$$

□

De la remarque qui suit ce corollaire, combinée avec le lemme II.1, on déduit :

Corollaire IV.7. –

Étant donnée une partie finie non vide S de $|F|$ contenant S_ρ, considérons une famille de fonctions

$$K^{G,\rho}_{\psi_x} : (G \times \mathrm{GL}_r)(F_x) \to \mathbb{C}\,, \quad x \in |F|\,,$$

qui sont des noyaux locaux du transfert non ramifié par ρ en les places $x \in |F| - S$, et satisfont les conditions du lemme IV.4 *en les places $x \in S$.*

Alors :

(i) *Pour tous éléments $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$, $g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, et pour toute fonction test localement constante à support compact*

$$h = \bigotimes_{x \in |F|} h_x : \mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

qui est invariante à gauche et à droite par $\mathrm{GL}_{r-1}(O_x)$ en toute place $x \in S$, le produit scalaire

$$K_\psi^{G,\rho,h}(g_1, g_2, g) = \int_{\mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A})} dg' \cdot K_\psi^{G,\rho}(g_1, g_2, g'g) \cdot h(g')$$

est égal au produit scalaire

$$\widetilde{K}_\psi^{G,\rho,h}(g_1, g_2, g) = \int_{\mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A})} dg' \cdot \widetilde{K}_h^{G,\rho}(g_1, g_2, g'g) \cdot h(g') \, .$$

(ii) *Si $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S}$ désigne le sous-groupe ouvert de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ image réciproque du sous-groupe ouvert*

$$\prod_{x \in S} \mathrm{GL}_r(O_x)_{N_x} \subset \prod_{x \in S} \mathrm{GL}_r(F_x) \, ,$$

les fonctions $K_\psi^{G,\rho}$ et $\widetilde{K}_\psi^{G,\rho}$ ont même restriction à $G(\mathbb{A}) \times G(\mathbb{A}) \times \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S}$.

(iii) *La restriction commune de $K_\psi^{G,\rho}$ et $\widetilde{K}_\psi^{G,\rho}$ à $G(\mathbb{A}) \times G(\mathbb{A}) \times \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S}$ est invariante à gauche par le sous-groupe discret*

$$G(F) \times G(F) \times \mathrm{GL}_r(F)_{N_S}$$

si l'on note $\mathrm{GL}_r(F)_{N_S} = \mathrm{GL}_r(F) \cap \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S}$.

Démonstration :

(ii) résulte de (i) puisque, pour tous éléments $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$ et $g \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S}$, les fonctions

$$\begin{array}{rrcl} & \mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A}) \ni g' & \mapsto & K_\psi^{G,\rho}(g_1, g_2, g'g) \\ \text{et} & g' & \mapsto & \widetilde{K}_\psi^{G,\rho}(g_1, g_2, g'g) \end{array}$$

sont invariantes à droite par $\prod_{x \in S} \mathrm{GL}_{r-1}(O_x)$.

(iii) Par construction, $K_\psi^{G,\rho}$ est invariante à gauche par $G(F) \times G(F) \times Q_r(F)$ et $\widetilde{K}_\psi^{G,\rho}$ est invariante à gauche par $G(F) \times G(F) \times Q_r^{\mathrm{op}}(F)$.

La conclusion résulte du lemme suivant tiré de [Cogdell, Piatetski-Shapiro] :

Lemme IV.8. –

Le sous-groupe discret

$$\mathrm{GL}_r(F)_{N_S} = \mathrm{GL}_r(F) \cap \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S}$$

de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S}$ est engendré par ses sous-groupes

$$Q_r(F)_{N_S} = Q_r(F) \cap \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S}$$

et

$$Q_r^{\mathrm{op}}(F)_{N_S} = Q_r^{\mathrm{op}}(F) \cap \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S} \, .$$

□

De plus, on a :

Lemme IV.9. –

Le sous-groupe $\mathrm{GL}_r(F)$ *est dense dans le produit fini* $\prod\limits_{x\in S}\mathrm{GL}_r(F_x)$.

Par conséquent, l'image réciproque $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S}$ *dans* $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ *du sous-groupe ouvert* $\prod\limits_{x\in S}\mathrm{GL}_r(O_x)_{N_x}$ *de* $\prod\limits_{x\in S}\mathrm{GL}_r(F_x)$ *vérifie*

$$\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) = \mathrm{GL}_r(F)\cdot \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S}\,,$$

et l'inclusion

$$\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S} \subset \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$$

définit un isomorphisme

$$\mathrm{GL}_r(F)_{N_S}\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S} \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_r(F)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})\,.$$

Cet isomorphisme est compatible avec les actions à droite des $\mathrm{GL}_r(F_x)$ *en toutes les places* $x\in|F|-S$, *et avec celles des sous-groupes* $\mathrm{GL}_r(O_x)_{N_x}$ *en les places* $x\in S$.

□

On déduit de ce lemme et du corollaire IV.7 :

Corollaire IV.10. –

Dans les conditions du corollaire IV.7, *la restriction commune à* $G(\mathbb{A})\times G(\mathbb{A})\times \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S}$ *des fonctions* $K_\psi^{G,\rho}$ *et* $\widetilde{K}_\psi^{G,\rho}$ *peut être vue comme une fonction*

$$K : (G\times G\times \mathrm{GL}_r)(F)\backslash (G\times G\times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,.$$

Cette fonction est un "S-noyau du transfert automorphe par ρ" au sens de la définition I.3.

De plus, on a pour tous éléments $g_1, g_2\in G(\mathbb{A})$ *et* $g\in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S}$ *la formule*

$$W_{(r)}^{\psi}K(g_1,g_2,g) = \sum_{\gamma\in G(F)} \left(\prod_{x\in|F|} K_{\psi_x}^{G,\rho}\right)(g_1^{-1}\gamma\, g_2, g)\,.$$

Démonstration :

La dernière formule résulte de ce qu'il est possible de relever le quotient compact

$$N_r(F)\backslash N_r(\mathbb{A})$$

en une partie compacte de $N_r(\mathbb{A})$ dont la projection dans $\prod\limits_{x\in|F|} N_r(F_x)$ est contenue dans $\prod\limits_{x\in|F|}\mathrm{GL}_r(O_x)_{N_x}$.

□

On a enfin :

Théorème IV.11. –

Supposons toujours que la "formule de Poisson sans terme de bord relative à ρ_{r-1} *sur* $G_{r-1}(\mathbb{A})$*" est connue.*

Alors la construction des corollaires IV.7 *et* IV.10 *ci-dessus fournit suffisamment de "S-noyaux du transfert automorphe par ρ"*

$$K : (G\times G\times \mathrm{GL}_r)(F)\backslash (G\times G\times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

pour réaliser le transfert automorphe global de G *à* GL_r *par* ρ.

Démonstration :

Considérons une représentation automorphe irréductible $\pi = \bigotimes_{x\in|F|} \pi_x$ de $G(\mathbb{A})$ et une partie finie non vide S de $|F|$ contenant S_ρ et les places x où π_x est ramifiée.

Il existe des caractères automorphes unitaires

$$\omega = \bigotimes_{x\in|F|} \omega_x : \mathbb{A}^\times/F^\times \to \mathbb{C}^\times$$

qui sont non ramifiés en les places $x \in |F| - S$ et arbitrairement ramifiés en les places $x \in S$.

Si les facteurs $\omega_x : F_x^\times \to \mathbb{C}^\times$, $x \in S$, sont suffisamment ramifiés, on peut réaliser les conditions du lemme IV.4 de telle façon que la composante dans l'espace propre de $\pi \otimes \omega$ de la fonction

$$(g_1, g_2, g) \mapsto \sum_{\gamma\in G(F)} \left(\prod_{x\in|F|} K_{\psi_x}^{G,\rho} \right) (g_1^{-1}\gamma\, g_2, g)$$

ne s'annule par uniformément sur $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})_{N_S}$.

On conclut d'après le corollaire IV.10. $\square$

V. Nouvelle construction de la fonctionnelle de Poisson linéaire et généralisation non linéaire conjecturale

Il est intéressant de chercher à raffiner la construction du paragraphe précédent et à définir des termes complémentaires "non cuspidaux"

$$K_\psi^{\overline{G},\rho} : (G \times G \times Q_r)(F)\backslash(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

et

$$\widetilde{K}_\psi^{\overline{G},\rho} : (G \times G \times Q_r^{\mathrm{op}})(F)\backslash(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

permettant de réaliser l'égalité

$$K_\psi^{G,\rho} + K_\psi^{\overline{G},\rho} = \widetilde{K}_\psi^{G,\rho} + \widetilde{K}_\psi^{\overline{G},\rho}$$

sur $(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A})$ tout entier, et donc de définir directement un noyau automorphe

$$(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(F)\backslash(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

comme prévu dans la conjecture I.11.

On doit impérativement trouver un tel raffinement si l'on cherche à construire des noyaux du transfert global par ρ qui soient compatibles avec le transfert local en toute place $x \in |F|$ sans exception. On part alors d'une famille de fonctions locales de $\psi_{(r)}$-type de Whittaker

$$K_\psi^{G,\rho} : G(F_x) \times \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C}$$

qui sont des "noyaux locaux" du transfert par ρ en toute place $x \in |F|$: cela signifie que leur décomposition spectrale ne fait apparaître que des paires (π_x, π'_x) de représentations lisses admissibles irréductibles unitaires de $G(F_x)$ et $\mathrm{GL}_r(F_x)$ telles que π'_x soit le transfert local de π_x par ρ en un sens déjà connu sans ambiguïté.

Afin de réaliser ce programme, on a besoin d'une "formule de Poisson non linéaire avec termes de bord" relative à ρ (ou $\rho_{r'}$, $r' \geq 2$) qui s'applique à toutes les fonctions "de type L global" sur $G(\mathbb{A})$ (ou $G_{r'}(\mathbb{A})$). Autrement dit, on a besoin de définir sur l'espace des fonctions de type L global une fonctionnelle linéaire, complémentaire de l'évaluation

$$h \mapsto \sum_{\gamma \in G(F)} h(\gamma)\,,$$

telle que leur somme, notée par convention

$$h \mapsto \text{“}\sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} h(\gamma)\text{”}\,,$$

vérifie la formule de Poisson

$$\text{“}\sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} h(\gamma)\text{”} = \text{“}\sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} \widehat{h}(\gamma)\text{”}\,, \quad \forall\, h\,.$$

Dans le but de proposer une définition conjecturale d'une telle "fonctionnelle de Poisson non linéaire relative à ρ (ou $\rho_{r'}$, $r' \geq 2$)", on pose la définition suivante :

Définition V.1. –

En n'importe quelle place $x \in |F| - S_\rho$, considérons une fonction sphérique

$$h_x : G(O_x)\backslash G(F_x)/G(O_x) \to \mathbb{C}$$

qui est "de type L local" relativement à $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$.

Autrement dit, elle se décompose spectralement sous la forme

$$h_x(g) = |\det_G(g)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det_\rho(g)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\widehat{T}_x^d} d\lambda \cdot L_x\left(\rho, \lambda^{-1}, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot h_{x,\lambda}(g)\,, \quad g \in G(F_x)\,,$$

où $d\lambda$ désigne toujours la mesure de Plancherel sur l'espace $\mathrm{Im}\,\widehat{T}_x^d/\mathfrak{S}_G^x$ des caractères unitaires λ de l'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ de $G(F_x)$, et chaque $g \mapsto h_{x,\lambda}(g)$ est une fonction sphérique, vecteur propre de valeur propre λ, et dont la dépendance en $\lambda \in \widehat{T}_x^d$ est polynomiale.

Alors, pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, on note h_x^N la fonction sur $G(F_x)$ définie par la décomposition spectrale

$$h_x^N(g) = |\det_G(g)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det_\rho(g)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\widehat{T}_x^d} d\lambda \cdot L_x\left(\rho, \lambda^{-1}, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_x^N\left(\rho, \lambda, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot h_{x,\lambda}(g)\,, \quad g \in G(F_x)\,,$$

où $I_x^N(\rho, \lambda, Z)$ désigne le polynôme en $\lambda \in \widehat{T}_x^d$ et Z qui est le produit du polynôme

$$L_x(\rho, \lambda, Z)^{-1}$$

et du monôme de degré N qui figure dans le développement en série formelle de l'inverse

$$L_x(\rho, \lambda, Z)\,.$$

Remarques :

(i) On note l'égalité

$$\sum_{N \in \mathbb{N}} I_x^N(\rho, \lambda, Z) = 1$$

dans l'anneau des séries formelles en Z à coefficients dans $\mathbb{C}\,[\widehat{T}_x^d]^{\mathfrak{S}_G^x}$.

Elle implique que, pour tout $g \in G(F_x)$, la série

$$\sum_{N \in \mathbb{N}} h_x^N(g)$$

converge vers $h_x(g)$.

(ii) Pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, la ψ_x-transformée de Fourier $\widehat{h_x^N}$ de h_x^N relativement à ρ est à support compact dans $G(F_x)$.

(iii) Il est possible de généraliser la définition ci-dessus à toutes les fonctions de type L sur $G(F_x)$ en n'importe quelle place $x \in |F|$, mais nous n'en aurons pas besoin.

□

Cette définition permet de formuler la conjecture suivante :

Conjecture V.2. –

(i) *Pour toute fonction produit*

$$h = \bigotimes_{x\in|F|} h_x : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

qui est de type L global relatif à ρ, et pour toute place $x_0 \in |F| - S_\rho$ en laquelle le facteur local h_{x_0} de h est sphérique, la série

$$\sum_{N\in\mathbb{N}} \sum_{\gamma\in G(F)} \left(h_{x_0}^N \otimes \left(\bigotimes_{x\neq x_0} h_x\right)\right)(\gamma)$$

est convergente, et sa somme $S(h)$ ne dépend pas du choix de la place x_0.

(ii) *La fonctionnelle linéaire induite sur l'espace des fonctions de type L global relatif à ρ sur $G(\mathbb{A})$*

$$h \mapsto S(h)$$

est laissée invariante par la ψ-transformation de Fourier relative à ρ, et il en est donc de même de la fonctionnelle

$$h \mapsto \left(\sum_{\gamma\in G(F)} h(\gamma)\right) + \left(\sum_{\gamma\in G(F)} \widehat{h}(\gamma)\right) - S(h) = \text{“} \sum_{\gamma\in\overline{G}(F)} h(\gamma)\text{”}\,.$$

Remarque :

Dès lors que la partie (i) de la conjecture implique qu'elle est bien définie, la fonctionnelle

$$h \mapsto S(h)$$

est invariante par translation à gauche ou à droite par $G(F)$, et il en est donc de même de la fonctionnelle

$$h \mapsto \text{“} \sum_{\gamma\in\overline{G}(F)} h(\gamma)\text{”}\,.$$

□

On prouve facilement :

Proposition V.3. –

Si E est une algèbre finie séparable de degré r sur F, qui correspond à une action du groupe de Galois Γ_F sur l'intervalle $\{1, 2, \ldots, r\}$, le tore “linéaire”

$$T_E = \mathrm{Res}_{E/F}\,\mathbb{G}_m\,,$$

muni de la représentation standard

$$\rho_E : \widehat{T}_E \rtimes \Gamma_F = \left(\prod_{1\leq i\leq r} \mathbb{C}^\times\right) \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

de son dual $\widehat{T}_E = \prod\limits_{1\leq i\leq r} \mathbb{C}^\times$, vérifie la conjecture V.2 *ci-dessus.*

Plus précisément, les fonctions localement constantes à support compact sur $\mathbb{A}_E = \mathbb{A} \otimes_F E$ sont les fonctions de type L global relatif à ρ_E sur $T_E(\mathbb{A}) = \mathbb{A}_E^\times$, et la fonctionnelle de Poisson standard

$$h \mapsto \sum_{\gamma \in E} h(\gamma)$$

coïncide avec la fonctionnelle de la conjecture V.2

$$h \mapsto \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{T}_E(F)} h(\gamma)\text{”} \,.$$

Remarque :

Cette proposition s'applique en particulier au tore linéaire déployé $\mathbb{G}_m^r$. On retrouve alors la fonctionnelle de Poisson

$$h \mapsto \sum_{\gamma \in F^r} h(\gamma)$$

sur $\mathbb{A}^r$. □

Avec plus de travail, on démontre au paragraphe VII.2 de [Lafforgue, 2012] :

Théorème V.4. –

Le groupe linéaire

$$\mathrm{GL}_r \,,$$

muni de la représentation standard de $\widehat{\mathrm{GL}}_r = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, *vérifie la conjecture* V.2 *ci-dessus.*

Plus précisément, les fonctions localement constantes à support compact sur $M_r(\mathbb{A})$ sont les fonctions “de type L global” relatif à la représentation standard de $\widehat{\mathrm{GL}}_r$ sur $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, et la fonctionnelle de Poisson standard

$$h \mapsto \sum_{\gamma \in M^r(F)} h(\gamma)$$

coïncide avec la fonctionnelle de la conjecture V.2

$$h \mapsto \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{\mathrm{GL}}_r(\mathbb{A})} h(\gamma)\text{”} \,.$$

Remarques :

(i) La démonstration de ce théorème utilise
- le théorème de décomposition spectrale de Langlands,
- la description par Moeglin et Waldspurger du spectre automorphe discret de GL_r,
- les propriétés des fonctions L linéaires globales rappelées dans le théorème III.2,
- les estimées de Jacquet et Shalika pour les modules des valeurs propres de Hecke des facteurs locaux non ramifiés des représentations automorphes cuspidales unitaires de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$.

(ii) Bien que nous ne l'ayons pas vérifié par écrit, on devrait pouvoir généraliser la démonstration de ce théorème jusqu'à montrer que la conjecture de transfert automorphe global par ρ de G à GL_r implique la conjecture V.2 pour le groupe réductif G muni de $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$. □

On rappelle que, par hypothèse, la représentation de transfert $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ induit un homomorphisme
$$\rho_T : \widehat{T} \to \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$$
du tore maximal $\widehat{T}$ de $\widehat{G}$, dual du tore maximal T de G, dans le tore maximal $\widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$ de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$.

Si Γ_F agit dans $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ par permutation des r vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^r$, cette action définit une F-algèbre séparable E de degré r. Le dual $\widehat{T}_E$ du tore $T_E = \mathrm{Res}_{E/F}\,\mathbb{G}_m$ s'identifie à $\prod\limits_{1\le i\le r} \mathbb{C}^\times$ muni de l'action par permutation de Γ_F, et l'homomorphisme
$$\rho_T : \widehat{T} \to \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r = \widehat{T}_E$$
devient Γ_F-équivariant, donc admet un homomorphisme dual bien défini sur F
$$\rho_T^\vee : T_E \to T\,.$$
Cet homomorphisme identifie T au tore quotient du tore "linéaire" $T_E = \mathrm{Res}_{E/F}\,\mathbb{G}_m$ par le sous-tore T_ρ dual du conoyau $\widehat{T}_\rho$ de ρ_T.

Par intégration le long des fibres de
$$T_E(\mathbb{A}) \to T(\mathbb{A})\,,$$
on déduit de la proposition V.3 :

Corollaire V.5. –

Supposons comme ci-dessus que Γ_F agit sur $\mathbb{C}^r$ par permutation de ses r vecteurs de base, définissant une F-algèbre séparable E de degré r.

Et supposons de plus que les homomorphismes
$$\begin{array}{rrcl} & T_E(F_x) & \to & T(F_x)\,, \quad x\in|F|\,,\\ & T_E(\mathbb{A}) & \to & T(\mathbb{A})\,,\\ \textit{et} & T_E(F) & \to & T(F) \end{array}$$
induits par $\rho_T^\vee : T_E \to T$ soient surjectifs.

Alors, associant à la représentation $\rho_T : \widehat{T} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ le caractère $\det_{\rho_T} : T \to \mathbb{G}_m$ trivial, on a :

(i) *Les fonctions "de type L" local [resp. global] sur $T(F_x)$ [resp. $T(\mathbb{A})$] sont les fonctions*
$$\overline{h}_x : t_x \mapsto \int_{T_\rho(F_x)} dt_\rho \cdot h_x(t_x\,t_\rho) \qquad \textit{[resp. } \overline{h} : t \mapsto \int_{T_\rho(\mathbb{A})} dt_\rho \cdot h(t\,t_\rho)\textit{]}$$
déduites par intégration des fonctions h_x [resp. h] localement constantes à support compact sur $E_x = E \otimes_F F_x$ [resp. $\mathbb{A}_E = E \otimes_F \mathbb{A}$].

(ii) *Les fonctions de type L global sur $T(\mathbb{A})$ vérifient la conjecture* V.2.

Remarque :

Pour que les hypothèses de surjectivité de ce corollaire soient vérifiées, il suffit d'après le "théorème 90" de Hilbert que le noyau T_ρ de l'épimorphisme $\rho_T^\vee : T_E \to T$ soit de la forme
$$T_\rho \cong \mathrm{Res}_{E'/F}\,\mathbb{G}_m$$
pour une certaine F-algèbre séparable E'. $\square$

À partir de ce corollaire, on démontre dans le paragraphe VII.5 de [Lafforgue, 2012] :

Théorème V.6. –

Sous les hypothèses du corollaire V.5 *ci-dessus, le groupe réductif* G *muni de* $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ *vérifie la conjecture* V.2 *après moyennisation par les opérateurs de coefficients unipotents constants*

$$\int_{N_B(F)\backslash N_B(\mathbb{A})} du\,.$$

Autrement dit, pour toute fonction produit

$$h = \bigotimes_{x\in|F|} h_x : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

qui est "de type L global relatif à ρ*", et pour sa* ψ*-transformée de Fourier relative à* ρ

$$\widehat{h} = \bigotimes_{x\in|F|} \widehat{h}_x : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,,$$

on a :

(i) *Pour toute place* $x_0 \in |F| - S_\rho$ *en laquelle le facteur local* h_x *[resp.* $\widehat{h}_x$*] de* h *[resp.* $\widehat{h}$*] est sphérique, la série*

$$\sum_{N\in\mathbb{N}} \int_{N_B(F)\backslash N_B(\mathbb{A})} du \cdot \sum_{\gamma\in G(F)} \left(h_{x_0}^N \otimes \left(\bigotimes_{x\neq x_0} h_x \right) \right) (\gamma u)$$

$$\text{[resp.} \quad \sum_{N\in\mathbb{N}} \int_{N_B(F)\backslash N_B(\mathbb{A})} du \cdot \sum_{\gamma\in G(F)} \left(\widehat{h}_{x_0}^N \otimes \left(\bigotimes_{x\neq x_0} \widehat{h}_x \right) \right) (u^{-1}\gamma)\text{]}$$

est convergente, et sa somme ne dépend pas du choix de la place x_0*.*

(ii) *Les deux sommes associées dans* (i) *à* h *et* $\widehat{h}$ *sont égales.*

□

Rappelons que l'on cherche à construire à partir de la fonction "cuspidale"

$$K_\psi^{G,\rho} : (G\times G\times Q_r)(F)\backslash(G\times G\times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

une fonction complémentaire "non cuspidale"

$$K_\psi^{\overline{G},\rho} : (G\times G\times Q_r)(F)\backslash(G\times G\times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

telle que la somme

$$K_\psi^{G,\rho} + K_\psi^{\overline{G},\rho} : (G\times G\times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

soit invariante à gauche par $(G\times G\times \mathrm{GL}_r)(F)$ tout entier.

Une telle construction est réalisée dans le chapitre VIII de [Lafforgue, 2012] dans le cas du transfert partout non ramifié, c'est-à-dire lorsque $S_\rho = \emptyset$ et que $K_{\psi_x}^{G,\rho} : G(F_x)\times \mathrm{GL}_r(F_x) \to \mathbb{C}$ est un noyau local du transfert local non ramifié par ρ en toute place $x\in|F|$.

Dans cette construction, la fonction complémentaire

$$K_\psi^{\overline{G},\rho} : (G\times G\times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

est définie à partir des "termes de bord" de la "formule de Poisson non linéaire relative à ρ" pour les fonctions de type L global sur le groupe croisé $G_{r-1}(\mathbb{A})$.

Afin de montrer que cette fonction complémentaire est invariante à gauche par $Q_r(F)$ et "non cuspidale", on a besoin d'en savoir en peu plus sur le support de la fonctionnelle de Poisson "de bord"

$$h \mapsto \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} h(\gamma)\text{”} - \left(\sum_{\gamma \in G(F)} h(\gamma) \right) = \left(\sum_{\gamma \in G(F)} \widehat{h}(\gamma) \right) - S(h)\,.$$

La formulation de cette propriété géométrique nécessaire à la construction demande d'introduire un objet géométrique auxiliaire, déjà introduit par Braverman et Kazhdan, le "semi-groupe dual" de la représentation de transfert $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$.

On rappelle d'abord la définition des semi-groupes :

Définition V.7. –

Étant donné un groupe réductif G sur un corps k, un semi-groupe $\overline{G}$ de groupe G est une variété affine intègre qui contient G comme ouvert dense et telle que le morphisme de multiplication $G \times G \to G$ se prolonge en

$$\overline{G} \times \overline{G} \to \overline{G}\,.$$

Si G est un groupe réductif quasi-déployé sur un corps k, muni d'un tore maximal T défini sur k, l'adhérence schématique $\overline{T}$ de T dans un semi-groupe normal $\overline{G}$ de groupe G est une variété torique affine normale de tore T sur laquelle agit le groupe de Weyl $\mathfrak{S}_G$. On montre que, réciproquement, toute variété torique affine normale $\overline{T}$ de tore T sur laquelle agit $\mathfrak{S}_G$ provient d'un semi-groupe normal $\overline{G}$ de groupe G, unique à unique isomorphisme près. Par combinaison avec la théorie des variétés toriques, on a donc :

Proposition V.8. –

Soit un groupe réductif G quasi-déployé sur un corps k, muni d'un tore maximal T défini sur k.

Se donner un semi-groupe normal $\overline{G}$ de groupe G sur k équivaut à se donner, dans le réseau X_T des caractères de T, un cône polyédral saturé $X_{\overline{T}}$ stable par l'action du groupe de Weyl $\mathfrak{S}_G$ et par celle du groupe de Galois Γ_k ou, ce qui revient au même, son cône dual $X_{\overline{T}}^\vee$ dans le réseau $X_T^\vee$ des cocaractères de T.

□

Revenons maintenant à notre groupe réductif G quasi-déployé sur le corps de fonctions F, et à notre représentation de tranfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

qui induit un homomorphisme

$$\rho_T = (\rho_T^1, \ldots, \rho_T^r) : \widehat{T} \to \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r\,.$$

On peut poser :

Définition V.9. –

On appelle "semi-groupe dual de la représentation ρ" le semi-groupe normal $\overline{G}$ de groupe G associé au cône saturé $X_{\overline{T}}^\vee$ de $X_T^\vee = X_{\widehat{T}}$ engendré par les poids $\rho_T^1, \ldots, \rho_T^r : \widehat{T} \to \mathbb{C}^\times$ de la représentation ρ ou, ce qui revient au même, par les $\mathfrak{S}_G$-orbites des plus hauts poids des facteurs irréductibles de $\rho : \widehat{G} \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$.

Remarque :

Cette notion avait déjà été introduite par Braverman et Kazhdan, en des termes différents mais équivalents.

□

On note aussitôt :

Lemme V.10. –

(i) *Lorsque* $G = \mathrm{GL}_r$ *et* ρ *est la représentation standard de* $\widehat{G} = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$*, le semi-groupe* $\overline{G}$ *dual de* ρ *n'est autre que le semi-groupe matriciel* M_r*.*

(ii) *Dans le cas général, et pour tout degré* $r' \geq 2$*, le semi-groupe* $\overline{G}_{r'}$ *dual de la représentation croisée*

$$\rho_{r'} : \widehat{G}_{r'} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_{rr'}(\mathbb{C})$$

s'identifie à la normalisation du sous-schéma fermé

$$\{(g, g') \in \overline{G} \times M_{r'} \mid \det_G(g) = \det(g')\}\,.$$

□

Intéressons-nous d'abord à la variété torique affine normale $\overline{T}$ de tore T qui définit le semi-groupe normal $\overline{G}$ de groupe G. On a :

Lemme V.11. –

Supposons comme plus haut que Γ_F *agit sur l'espace* $\mathbb{C}^r$ *de* $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ *par permutation de ses* r *vecteurs de base, définissant une* F*-algèbre séparable* E *de degré* r*.*

Alors l'homomorphisme de tores

$$\rho_T^\vee : T_E = \mathrm{Res}_{E/F}\, \mathbb{G}_m \to T\,,$$

dual de $\rho_T : \widehat{T} \to \prod\limits_{1 \leq i \leq r} \mathbb{C}^\times = \widehat{T}_E$*, se prolonge en un homomorphisme de variétés toriques*

$$\overline{T}_E = \mathrm{Res}_{E/F}\, \mathbb{A}^1 \to \overline{T}$$

qui identifie $\overline{T}$ *au quotient de* $\overline{T}_E$ *par le sous-tore* T_ρ *de* T_E *dual de* $\widehat{T}_\rho = \mathrm{Coker}\left(\widehat{T} \xrightarrow{\rho_T} \widehat{T}_E\right)$*.*

Remarque :

L'énoncé signifie que les caractères bien définis sur $\overline{T}$ sont exactement les caractères bien définis sur $\overline{T}_E$ que le sous-tore T_ρ de T_E laisse invariants.

Il implique que tout point géométrique de $\overline{T}$ est image d'au moins un point géométrique de $\overline{T}_E$, et que deux points géométriques de $\overline{T}_E$ ont même image dans $\overline{T}$ si et seulement si les adhérences de leurs orbites sous l'action de T_ρ se rencontrent.

□

On déduit de ce lemme et du corollaire V.5 :

Corollaire V.12. –

Sous les hypothèses du corollaire V.5*, considérons toujours le tore* T *muni de la représentation* ρ_T : $\widehat{T} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ *à laquelle on associe le caractère* $\det_{\rho_T} : T \to \mathbb{G}_m$ *trivial.*

Alors, si $\overline{T}^{\leq 1}$ *désigne l'ouvert de* $\overline{T}$ *réunion de* T *et des orbites de codimension* 1*, les fonctions "de type* L*" local [resp. global] relatif à* ρ_T

$$\begin{array}{rrcl} & T(F_x) & \to & \mathbb{C}\,, \quad x \in |F|\,, \\ \text{[resp.} & T(\mathbb{A}) & \to & \mathbb{C}] \end{array}$$

se prolongent par continuité à $\overline{T}^{\leq 1}(F_x)$ [resp. $\overline{T}^{\leq 1}(\mathbb{A})$].

Remarque :

En fait, ces fonctions se prolongent par continuité à $\overline{T}^{\mathrm{reg}}(F_x)$ [resp. $\overline{T}^{\mathrm{reg}}(\mathbb{A})$] si $\overline{T}^{\mathrm{reg}} \supset \overline{T}^{\leq 1}$ désigne le plus grand ouvert de $\overline{T}$ au-dessus duquel le sous-tore T_ρ de T_E agit librement dans $\overline{T}_E$.

$\square$

On sait d'après la théorie générale des semi-groupes normaux que les orbites de $\overline{G}$ sous la double action de G à gauche et à droite sont en nombre fini, et toutes localement fermées.

Elles sont engendrées par les orbites de $\overline{T}$ sous l'action de T.

Deux orbites de $\overline{T}$ engendrent la même orbite de $\overline{G}$ si et seulement si elles sont images l'une de l'autre par l'action du groupe de Weyl $\mathfrak{S}_G$.

En particulier, les orbites de codimension 1 de $\overline{G}$ correspondent aux orbites de codimension 1 de $\overline{T}$, modulo l'action de $\mathfrak{S}_G$.

Utilisant ce fait, on peut démontrer à partir du corollaire V.12 :

Proposition V.13. –

Sous les hypothèses du corollaire V.5 *ou du corollaire* V.12, *supposons en outre que*

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

induit un isomorphisme

$$Z_{\widehat{G}}^F \xrightarrow{\sim} \widehat{Z}_\rho$$

de $Z_{\widehat{G}}^F = \{z \in Z_{\widehat{G}} \mid \sigma(z) = z\,,\ \forall\, \sigma \in \Gamma_F\}$ dans le commutateur $\widehat{Z}_\rho \subset \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ de la représentation ρ.

Choisissons pour

$$\det_\rho : G \to \mathbb{G}_m$$

l'unique caractère défini sur F tel que, pour toute composante ρ_T^i de $\rho_T = (\rho_T^1, \dots, \rho_T^r) : \widehat{T} \to \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$ qui est le plus haut poids de l'une des composantes irréductibles de $\widehat{G} \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, on ait

$$\langle \det_\rho, \rho_T^i \rangle = \langle \delta_B, \rho_T^i \rangle$$

où $\delta_B : B \to B/N_B = T \to \mathbb{G}_m$ désigne le caractère modulaire.

Alors, si $\overline{G}^{\leq 1}$ désigne l'ouvert de $\overline{G}$ réunion de G et des orbites de codimension 1, *on a :*

(i) *Les fonctions "de type L" local [resp. global] relatif à ρ*

$$\begin{array}{rcl} G(F_x) & \to & \mathbb{C}\,, \quad x \in |F|\,, \\ \text{[resp. } G(\mathbb{A}) & \to & \mathbb{C}] \end{array}$$

se prolongent par continuité à $G^{\leq 1}(F_x)$ [resp. $G^{\leq 1}(\mathbb{A})$].

(ii) *Pour tout degré $r' \geq 2$, les fonctions "de type L" local [resp. global] sur $G_{r'}(F_x)$, $x \in |F|$, [resp. $G_{r'}(\mathbb{A})$] se prolongent par continuité à l'ouvert de*

$$\begin{array}{rcl} \overline{G}_{r'}(F_x) & \subset & \overline{G}(F_x) \times M_{r'}(F_x) \\ \text{[resp. } \overline{G}_{r'}(\mathbb{A}) & \subset & \overline{G}(\mathbb{A}) \times M_{r'}(\mathbb{A})] \end{array}$$

image réciproque de $\overline{G}^{\leq 1}(F_x)$ [resp. $\overline{G}^{\leq 1}(\mathbb{A})$].

Remarque :

Le fait que l'homomorphisme $Z_{\widehat{G}}^{F} \to \widehat{Z}_\rho$ induit par ρ soit un isomorphisme implique que les facteurs irréductibles de la représentation $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ apparaissent tous avec la multiplicité 1.

$\square$

Cette proposition permet de compléter la conjecture V.2 par la conjecture suivante :

Conjecture V.14. –

Sous les hypothèses de la proposition V.13 *ci-dessus, on a :*

(i) *Pour toute fonction produit de type L global relatif à ρ sur $G(\mathbb{A})$,*

$$h = \bigotimes_{x\in|F|} h_x : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,,$$

la différence

$$\text{“}\sum_{\gamma\in\overline{G}(F)} h(\gamma)\text{”} - \sum_{\gamma\in G(F)} h(\gamma)$$

dépend linéairement des seules restrictions de chaque facteur h_x, $x \in |F|$, aux orbites de codimension 1 de $\overline{G}(F_x)$.

(ii) *Pour tout degré $r' \geq 2$, et pour toute fonction de type L global relatif à $\rho_{r'}$ sur $G_{r'}(\mathbb{A})$,*

$$h : G_{r'}(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,,$$

la différence

$$\text{“}\sum_{\gamma\in\overline{G}_{r'}(F)} h(\gamma)\text{”} - \sum_{\gamma\in G_{r'}(F)} h(\gamma)$$

dépend linéairement des seules restrictions de h aux points de

$$\overline{G}_{r'}(\mathbb{A}) \subset \overline{G}(\mathbb{A}) \times M_{r'}(\mathbb{A})$$

de la forme

$$(m, \delta)$$

avec $m \in \overline{G}^{\leq 1}(\mathbb{A})$ et $\delta \in M_{r'}(F) - \mathrm{GL}_{r'}(F)$.

$\square$

Le cas $r' = r-1$ de la conjecture V.14(ii) ci-dessus est ce que l'on a besoin de connaître sur la fonctionnelle de Poisson de bord

$$h \mapsto \text{“}\sum_{\gamma\in\overline{G}_{r-1}(F)} h(\gamma)\text{”} - \sum_{\gamma\in G_{r-1}(F)} h(\gamma)\,,$$

outre la formule de Poisson sur $G_{r-1}(\mathbb{A})$

$$\text{“}\sum_{\gamma\in\overline{G}_{r-1}(F)} h(\gamma)\text{”} = \text{“}\sum_{\gamma\in\overline{G}_{r-1}(F)} \widehat{h}(\gamma)\text{”}$$

pour construire des termes complémentaires “non cuspidaux”

$$K_\psi^{\overline{G},\rho} : (G \times G \times Q_r)(F)\backslash(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,,$$

$$\widetilde{K}_\psi^{\overline{G},\rho} : (G \times G \times Q_r^{\mathrm{op}})(F)\backslash(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,,$$

qui réalisent l'égalité

$$K_\psi^{G,\rho} + K_\psi^{\overline{G},\rho} = \widetilde{K}_\psi^{G,\rho} + \widetilde{K}_\psi^{\overline{G},\rho}$$

et définissent des noyaux du transfert par ρ de la forme

$$K^{G,\rho} = K_\psi^{G,\rho} + K_\psi^{\overline{G},\rho} : (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(F)\backslash(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,.$$

Cette construction est réalisée, dans le cas partout non ramifié, au chapitre VIII de [Lafforgue, 2012].

Appendice :

Introduction à la théorie des fonctions automorphes et au principe de fonctorialité de Langlands

A. Corps globaux et anneaux d'adèles

On peut introduire les "corps globaux" de la manière axiomatique suivante :

Définition A.1. –

Un "corps global" F est le corps des fractions d'un anneau commutatif (unitaire) A qui possède les propriétés suivantes :

- *A est intègre ($\forall\, a,b \in A$, $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$), autrement dit il est plongé dans son corps des fractions F*
$$A \hookrightarrow F\,,$$
- *A est normal, ce qui signifie*
$$\forall\, k \in \mathbb{N}\,, \quad \forall\, a_0, a_1, \ldots, a_k \in A, \quad \forall\, \gamma \in F\,,$$
$$\gamma^{k+1} + a_k \cdot \gamma^k + \ldots + a_1 \cdot \gamma + a_0 = 0 \Rightarrow \gamma \in A\,,$$
- *A est engendré (sur $\mathbb{Z}$) par un nombre fini d'éléments,*
- *A est infini,*
- *pour tout $a \in A - \{0\}$, le quotient $A/(a)$ est fini.*

$\square$

On peut préciser la nature des "corps globaux" :

Proposition A.2. –

Un corps global F est nécessairement de l'un des deux types suivants :

(i) *Si F est de caractéristique 0, c'est un "corps de nombres", c'est-à-dire une extension finie de $\mathbb{Q}$: autrement dit, F contient $\mathbb{Q}$ comme sous-corps, et il est de dimension finie comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$.*

(ii) *Si F est de caractéristique $p \neq 0$, c'est un "corps de fonctions", c'est-à-dire le corps des fonctions rationnelles d'une courbe projective, lisse et connexe X_F sur le corps fini $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z}$. Cette courbe X_F est uniquement déterminée par F.*

L'anneau $\Gamma(X_F, O_{X_F})$ des fonctions partout définies sur X_F est un corps fini $\mathbb{F}_q$ qui contient $\mathbb{F}_p$. Son nombre d'éléments q est une puissance de p. C'est le plus grand corps fini contenu dans F.

Remarques :

(i) Si F est un corps de nombres, il existe, parmi tous les sous-anneaux A de F qui vérifient les propriétés de la définition A.1, un sous-anneau A_F qui est contenu dans tous les autres. C'est le sous-anneau des éléments entiers de F, défini comme

$$A_F = \{\gamma \in F \mid \exists\, n_0, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}\,,\ \gamma^{k+1} + n_k \cdot \gamma^k + \ldots + n_1 \cdot \gamma_1 + n_0 = 0\}\,.$$

Les sous-anneaux A de F vérifiant les propriétés de la définition A.1 correspondent aux ouverts de Zariski $\mathrm{Spec}\,(A)$ de $\mathrm{Spec}\,(A_F)$. Comme le schéma affine $\mathrm{Spec}\,(A_F)$ est de dimension 1, la différence $\mathrm{Spec}\,(A_F) - \mathrm{Spec}\,(A)$ consiste toujours en un ensemble fini de points fermés.

(ii) Si F est le corps des fonctions d'une courbe projective, lisse et connexe X_F sur $\mathbb{F}_p$, les sous-anneaux A de F qui vérifient les propriétés de la définition A.1 correspondent aux ouverts de Zariski affines $\mathrm{Spec}\,(A)$ de la courbe X_F. La différence $X_F - \mathrm{Spec}\,(A)$ consiste toujours en un ensemble fini non vide de points fermés.

La famille de ces ouverts affines $\mathrm{Spec}\,(A)$ recouvre la courbe projective X_F tout entière, ce qui implique que l'intersection de tous ces sous-anneaux A de F est égale au corps fini $\mathbb{F}_q = \Gamma(X_F, O_{X_F})$ des "constantes" de F.

$\square$

Nous allons maintenant introduite les "places finies" d'un corps global F et les complétions de F qui leur sont associées.

Si (A, F) est un couple vérifiant les propriétés de la définition A.1, on note

$$|F|_A$$

l'ensemble infini dénombrable des points fermés de $\mathrm{Spec}\,(A)$, c'est-à-dire des idéaux maximaux de A.

Pour tout point $x \in |F|_A$, on note

- A_x l'anneau local de $\mathrm{Spec}\,(A)$ au point x,
- (x) l'idéal maximal de cet anneau local,
- $O_x = \varprojlim\limits_{n \geq 1} A_x/(x)^n$ la complétion profinie de l'anneau local A_x, qui est un anneau local topologique compact,
- m_x l'idéal maximal de O_x, engendré par (x),
- $\mathbb{F}_x = O_x/m_x = A_x/(x)$ le corps résiduel en x, qui est un corps fini,
- q_x le nombre d'éléments du corps résiduel $\mathbb{F}_x$,
- F_x le corps des fractions de l'anneau local complété O_x (qui est nécessairement intègre).

Pour tout point $x \in |F|_A$, F_x est un corps topologique localement compact. Il possède une mesure da_x invariante par l'addition ; cette mesure est uniquement déterminée à multiplication près par un scalaire réel positif.

Pour tout élément $\gamma_x \in F_x^\times = F_x - \{0\}$, la multiplication par γ_x transforme la mesure additive da_x en une autre mesure additive qui est nécessairement le produit de da_x et d'un scalaire réel positif noté

$$|\gamma_x|_x\,.$$

On complète la définition de cette application

$$|\bullet|_x : F_x \to \mathbb{R}_+$$

en décidant que
$$|0|_x = 0\,.$$
Il est clair que l'on a
$$|1|_x = 1$$
et
$$|\gamma_x \cdot \gamma'_x|_x = |\gamma_x|_x \cdot |\gamma'_x|_x\,, \quad \forall\, \gamma_x, \gamma'_x \in F_x\,.$$
On démontre d'autre part :

Lemme A.3. –

Pour tout $x \in |F|_A$ comme ci-dessus, on a :

(i)
$$\forall\, \gamma_x \in O_x - m_x\,, \quad |\gamma_x|_x = 1\,,$$
$$\forall\, \gamma_x \in m_x - m_x^2\,, \quad |\gamma_x|_x = q_x^{-1}\,,$$
et plus généralement
$$\forall\, n \geq 1\,, \quad \forall\, \gamma_x \in m_x^n - m_x^{n+1}\,, \quad |\gamma_x|_x = q_x^{-n}\,.$$

(ii) *L'application*
$$|\bullet|_x : F_x \to \mathbb{R}_+$$
prend ses valeurs dans
$$\{0\} \cup q_x^{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Q}\,.$$

(iii) *Cette application vérifie l'inégalité "ultramétrique"*
$$\forall\, \gamma_x, \gamma'_x \in F_x\,, \quad |\gamma_x + \gamma'_x|_x \leq \max\{|\gamma_x|_x, |\gamma'_x|_x\}\,.$$

Remarque :

- Les parties (ii) et (iii) de ce lemme résultent de (i).
- La partie (i) s'exprime aussi en disant que
$$O_x = \{\gamma_x \in F_x \mid |\gamma_x|_x \leq 1\}$$
et, pour tout $n \geq 1$,
$$m_x^n = \{\gamma_x \in F_x \mid |\gamma_x|_x \leq q_x^{-n}\}\,.$$

□

On déduit de ce lemme :

Corollaire A.4. –

Pour tout $x \in |F|_A$ comme ci-dessus, l'application
$$|\bullet|_x : F_x \to \mathbb{Q}_+$$
définit une norme (et même une norme "ultramétrique") sur F_x.

Le corps topologique F_x s'identifie à la complétion du corps global F pour la norme $|\bullet|_x$.

□

On pose :

Définition A.5. –

Étant donné un "corps global" F, on note

$$|F|_f$$

et on appelle "ensemble des places finies de F" la réunion des ensembles

$$|F|_A$$

lorsque A décrit la famille des sous-anneaux de F qui vérifient les propriétés de la définition A.1.

Remarque :

- Si F est un "corps de nombres",
$$|F|_f = |F|_{A_F}\,,$$
est l'ensemble des points fermés du schéma affine maximal $\mathrm{Spec}\,(A_F)$ de point générique $\mathrm{Spec}\,(F)$.
- Si F est le corps des fonctions rationnelles de la courbe projective, lisse et connexe X_F sur un corps fini,
$$|F|_f$$
s'identifie à l'ensemble des points fermés de X_F.

$\square$

Après les places finies, introduisons maintenant l'ensemble des places "infinies" ou "archimédiennes" d'un corps global :

Définition A.6. –

Si F est un corps global, on note :

- *$|F|_r$ l'ensemble des "places réelles" de F, c'est-à-dire des homomorphismes (nécessairement injectifs et d'image dense)*
$$F \to \mathbb{R}\,,$$
- *$|F|_c$ l'ensemble des "places complexes" de F, c'est-à-dire des homomorphismes (nécessairement injectifs) d'image dense*
$$F \to \mathbb{C}\,,$$
modulo la conjugaison complexe,
- *$|F|_\infty = |F|_r \coprod |F|_c$ la réunion disjointe des ensembles des places réelles et des places complexes, appelée ensemble des places "infinies" ou "archimédiennes".*

Remarque :

- Si F est un corps de fonctions, on a
$$|F|_\infty = \emptyset\,.$$
- Si F est un corps de nombres, on a
$$F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong \left(\bigoplus_{x\in|F|_r} \mathbb{R}\right) \oplus \left(\bigoplus_{x\in|F|_c} \mathbb{C}\right)$$
ce qui signifie en particulier que l'ensemble $|F|_\infty$ est fini, avec
$$\#\,|F|_r + 2\cdot\#\,|F|_c = \dim_{\mathbb{Q}} F\,.$$

$\square$

Le corps complet localement compact $\mathbb{R}$ [resp. $\mathbb{C}$] est muni de la mesure additive de Lebesgue da_∞.

Pour tout élément $\gamma_\infty \in \mathbb{R}$ [resp. $\mathbb{C}$] non nul, la multiplication par γ_∞ transforme da_∞ en une autre mesure additive qui est le produit de da_∞ et de la valeur absolue [resp. du module]

$$|\gamma_\infty|$$

au sens habituel de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si $x \in |F|_\infty = |F|_r \coprod |F|_c$, on note $|\bullet|_x : F \to \mathbb{R}_+$ la norme de F qui se déduit de la valeur absolue de $\mathbb{R}$ [resp. du module de $\mathbb{C}$] par le plongement

$$\begin{array}{rccl} & F & \hookrightarrow & \mathbb{R} \\ \text{[resp.} & F & \hookrightarrow & \mathbb{C}\,, \text{ à conjugaison près].} \end{array}$$

On notera F_x la complétion de F pour la norme $|\bullet|_x$ associée à une place archimédienne $x \in |F|_\infty$. C'est un corps topologique isomorphe à $\mathbb{R}$ si $x \in |F|_r$ et à $\mathbb{C}$ si $x \in |F|_c$.

On peut maintenant introduire l'ensemble de toutes les places d'un corps global :

Définition A.7. –

Si F est un corps global, on appelle ensemble des places de F la réunion disjointe

$$|F| = |F|_f \coprod |F|_\infty = |F|_f \coprod |F|_r \coprod |F|_c\,.$$

Remarque :

- Si F est un corps de fonctions,
$$|F| = |F|_f$$
s'identifie à l'ensemble des points fermés de la courbe projective X_F.
- Si F est un corps de nombres,
$$\begin{aligned} |F| &= |F|_f \coprod |F|_\infty \\ &= |F|_f \coprod |F|_r \coprod |F|_c \end{aligned}$$
s'identifie à la réunion disjointe de
  - l'ensemble infini dénombrable des points fermés du schéma affine maximal $\mathrm{Spec}\,(A_F)$,
  - l'ensemble fini des complétions de F isomorphes à $\mathbb{R}$,
  - l'ensemble fini des complétions de F isomorphes à $\mathbb{C}$.

$\square$

L'expression "pour presque toutes les places de F" – que nous emploierons souvent dans la suite – signifiera toujours : "pour toutes les places de F sauf un nombre fini".

Ayant défini toutes les normes $|\bullet|_x$ associées aux places $x \in |F|$ d'un corps global F, nous pouvons énoncer la "formule du produit" :

Proposition A.8. –

Pour tout corps global F, et pour tout élément

$$\gamma \in F^\times = F - \{0\}\,,$$

on a :

(i) *Pour presque toute place* $x \in |F|$,

$$|\gamma|_x = 1\,.$$

(ii) *Le produit essentiellement fini*

$$\prod_{x \in |F|} |\gamma|_x$$

est égal à 1.

Remarque :

La formule n'est évidemment plus vérifiée si l'on oublie au moins une des places $x \in |F|$.

$\square$

Nous allons maintenant introduire "l'anneau des adèles" d'un corps global F comme sous-anneau topologique de l'anneau topologique localement compact produit

$$\prod_{x \in |F|} F_x\,.$$

Définition A.9. –

Étant donné un corps global F*, son "anneau des adèles"* $\mathbb{A} = \mathbb{A}_F$ *est le sous-anneau*

$$\mathbb{A}_F \subset \prod_{x \in |F|} F_x$$

constitué des familles

$$(a_x)_{x \in |F|}$$

d'éléments $a_x \in F_x$*,* $x \in |F|$*, telles que*

$$|a_x|_x \leq 1 \quad \text{en presque toute place} \quad x \in |F|$$

ou, ce qui revient au même,

$$\gamma_x \in O_x \quad \text{en presque toute place finie} \quad x \in |F|_f\,.$$

$\square$

L'anneau des adèles $\mathbb{A} = \mathbb{A}_F$ est un anneau topologique localement compact : il est muni de la topologie induite par celle du produit $\prod\limits_{x \in |F|} F_x$ dans lequel il est plongé.

Supposons que, en presque toute place finie $x \in |F|_f$, la mesure additive choisie da_x de F_x attribue le volume 1 au sous-groupe ouvert compact O_x. Alors $\mathbb{A} = \mathbb{A}_F$ est muni de la mesure additive

$$da = \bigotimes_{x \in |F|} da_x$$

produit des mesures additives da_x des facteurs F_x, $x \in |F|$.

On note d'autre part que, d'après la proposition A.8(i), le plongement diagonal

$$F \hookrightarrow \prod_{x \in |F|} F_x$$

se factorise à travers le sous-anneau des adèles en un plongement

$$F \hookrightarrow \mathbb{A}_F \,.$$

Voici les premières propriétés importantes de ce plongement :

Proposition A.10. –

Pour tout corps global F, on a :

(i) *Le plongement*

$$F \hookrightarrow \mathbb{A}_F$$

identifie F à un sous-groupe discret du groupe topologique additif $\mathbb{A}_F$.

(ii) *Le quotient*

$$\mathbb{A}_F/F$$

du groupe topologique localement compact $\mathbb{A}_F$ par son sous-groupe discret F est compact.

Remarque :

(i) résulte de la formule du produit.

En sens inverse, considérons la mesure invariante

$$da = \bigotimes_{x\in|F|} da_x$$

sur $\mathbb{A}_F$ et sur son quotient $\mathbb{A}_F/F$.

La multiplication par n'importe quel élément

$$\gamma \in F^\times$$

transforme cette mesure invariante par le facteur

$$\prod_{x\in|F|} |\gamma|_x \,.$$

Or cette mesure invariante attribue nécessairement au quotient compact $\mathbb{A}_F/F$ un volume fini strictement positif.

Comme la multiplication par $\gamma \in F^\times$ définit un automorphisme de $\mathbb{A}_F/F$, on retrouve la formule du produit

$$\prod_{x\in|F|} |\gamma|_x = 1 \,.$$

$\square$

Nous voulons enfin définir une transformation de Fourier sur chaque facteur F_x, $x \in |F|$, et sur $\mathbb{A}$.

Pour cela, on choisit une fois pour toutes un caractère additif continu non trivial

$$\psi : \mathbb{A}/F \to \mathbb{C}^\times \,,$$

c'est-à-dire un caractère additif non trivial de $\mathbb{A}$ qui est invariant par le sous-groupe discret F.

Comme le quotient $\mathbb{A}/F$ est compact, ce caractère ψ est nécessairement unitaire.

En tant que caractère continu de $\mathbb{A}$, il est de la forme

$$\psi = \prod_{x \in |F|} \psi_x$$

où chaque

$$\psi_x : F_x \to \mathbb{C}$$

est un caractère continu unitaire non trivial du groupe additif F_x.

Définissons d'abord la ψ_x-transformation de Fourier locale sur F_x, en chaque place $x \in |F|$:

Définition A.11. –

Soit F un corps global.

Pour toute place $x \in |F|_f$ [resp. $x \in |F|_\infty$], et pour toute fonction localement constante à support compact [resp. de classe C^∞ à décroissance rapide]

$$f_x : F_x \to \mathbb{C}\,,$$

on appelle "ψ_x-transformée de Fourier" de f_x, et on note

$$\widehat{f_x} : F_x \to \mathbb{C}\,,$$

la fonction définie par la formule intégrale

$$\widehat{f_x}(b_x) = \int_{F_x} da_x \cdot \psi_x(a_x\, b_x) \cdot f_x(a_x)\,.$$

Voici la première propriété essentielle des transformations de Fourier locales ainsi définies :

Proposition A.12. –

Pour toute place $x \in |F|_f$ [resp. $x \in |F|_\infty$], la ψ_x-transformation de Fourier définit un automorphisme de l'espace des fonctions localement constantes à support compact [resp. de classe C^∞ à décroissance rapide] sur F_x.

De plus, il existe une unique façon de choisir la mesure invariante da_x en fonction de ψ_x, de sorte que l'automorphisme réciproque de la ψ_x-transformation de Fourier soit la $\overline{\psi}_x$-transformation de Fourier associée au caractère conjugué $\overline{\psi}_x = \psi_x^{-1}$.

Remarque :

L'unique mesure additive da_x qui vérifie cette propriété est appelée la "mesure autoduale" de F_x muni du caractère ψ_x.

$\square$

Supposons désormais que, en toute place $x \in |F|$, F_x est muni de la mesure autoduale da_x, et munissons $\mathbb{A} = \mathbb{A}_F$ de la mesure produit

$$da = \bigotimes_{x \in |F|} da_x\,.$$

Considérons l'espace des fonctions

$$h : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$$

combinaisons linéaires de fonctions produits

$$\bigotimes_{x \in |F|} h_x : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$$

dont les facteurs $h_x : F_x \to \mathbb{C}$ vérifient les conditions suivantes :

- les h_x, $x \in |F|_f$, sont des fonctions localement constantes à support compact sur F_x, et presque toutes se confondent avec la fonction caractéristique du sous-groupe ouvert compact O_x,
- les h_x, $x \in |F|_\infty$, sont des fonctions de classes C^∞ à décroissance rapide sur $F_x = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On déduit de la proposition précédente :

Corollaire A.13. –

(i) *Dans l'espace de fonctions*

$$\mathbb{A} \to \mathbb{C}$$

défini ci-dessus, le produit sur toutes les places

$$\bigotimes_{x \in |F|} h_x \mapsto \bigotimes_{x \in |F|} \widehat{h}_x$$

des ψ_x-transformations de Fourier locales s'étend par linéarité en un automorphisme de cet espace, appelé "ψ-transformation de Fourier globale".

(ii) *La ψ-transformation de Fourier globale*

$$h \mapsto \widehat{h}$$

dans cet espace est aussi définie par la formule intégrale

$$\widehat{h}(b) = \int_{\mathbb{A}} da \cdot \psi(ab) \cdot h(a) \,.$$

(iii) *Dans cet espace, la ψ-transformation de Fourier admet pour automorphisme réciproque la $\overline{\psi}$-transformation de Fourier.*

Remarque :

Dans le cas où F est un corps de fonctions, notre espace de fonctions

$$h : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$$

n'est autre que celui des fonctions localement constantes à support compact sur $\mathbb{A}$.

□

Voici enfin la propriété globale essentielle de la ψ-transformation de Fourier sur $\mathbb{A}$, la formule de Poisson :

Proposition A.14 (Tate). –

Pour toute fonction

$$h : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$$

comme dans le corollaire A.13 *ci-dessus, et si $\widehat{h}$ désigne sa ψ-transformée de Fourier, on a*

$$\sum_{\gamma \in F} h(\gamma) = \sum_{\gamma \in F} \widehat{h}(\gamma) \,.$$

□

B. Groupes réductifs et groupes duaux de Langlands

Nous voulons d'abord rappeler la théorie des groupes réductifs sur un corps de base k. On notera k_s la clôture séparable de k et $\Gamma_k = \mathrm{Aut}_k(k_s)$ son groupe de Galois.

Définition B.1. –

Parmi les schémas en groupes affines, lisses et géométriquement connexes sur k, on distingue :

(i) *Le "groupe multiplicatif" $\mathbb{G}_m = \mathrm{Spec}\,(k\,[X, X^{-1}])$ qui associe à toute k-algèbre A le groupe $A^\times$ des éléments inversibles de A.*

(ii) *Les "tores" T, définis par la condition qu'ils deviennent isomorphes sur k_s à une puissance finie de $\mathbb{G}_m$.*

(iii) *Le "groupe additif" $\mathbb{A}^1 = \mathrm{Spec}\,(k\,[X])$ qui associe à toute k-algèbre A l'ensemble A muni de l'addition.*

(iv) *Les "groupes unipotents" N, définis par la condition d'admettre sur k_s une suite emboîtée de sous-groupes algébriques distingués*

$$\{0\} = N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset N_{n_0} = N$$

telle que chaque sous-quotient

$$N_{n-1}\backslash N_n\,, \quad 1 \leq n \leq n_0\,,$$

soit isomorphe au groupe additif $\mathbb{A}^1$.

(v) *Les "groupes réductifs" G, définis par la condition de n'admettre, sur k ou k_s, aucun sous-groupe algébrique distingué unipotent non trivial.*

Remarques :

(i) Au fondement de la théorie des groupes réductifs, il y a le fait que n'existe aucun homomorphisme algébrique non trivial $\mathbb{G}_m \to \mathbb{A}^1$ ou $\mathbb{A}^1 \to \mathbb{G}_m$. Il en résulte que les tores T sont des groupes réductifs.

(ii) Pour tout $r \geq 1$, les groupes

$$N_r = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & \ldots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad N_r^{\mathrm{op}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ * & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \ldots & * & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

de matrices triangulaires unipotentes supérieures [resp. inférieures] sont unipotents.

(iii) Les premiers exemples de groupes réductifs – et les plus importants – sont : GL_r, PGL_r, SL_r, Sp_{2r}, SO_{2r+1}, SO_{2r}.

□

On a :

Lemme B.2. –

Tout groupe algébrique P affine, lisse et géométriquement connexe sur un corps k contient un plus grand sous-groupe algébrique unipotent distingué, noté N_P et appelé le radical unipotent de P.

De plus, le groupe algébrique quotient P/N_P est réductif. Tout comme N_P, il est défini sur k.

□

On remarque que les homomorphismes $\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$ sont exactement les $\lambda \mapsto \lambda^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Par conséquent, pour tout tore T sur k, le groupe X_T des caractères définis sur k_s

$$\chi : T \to \mathbb{G}_m$$

et le groupe $X_T^\vee$ des cocaractères définis sur k_s

$$\mu : \mathbb{G}_m \to T$$

sont des réseaux de rang $\dim T$. Ils sont munis d'une action naturelle de Γ_k. De plus, ils sont duaux l'un de l'autre via la forme bilinéaire Γ_k-équivariante

$$\begin{aligned} \langle \bullet, \bullet \rangle : X_T \times X_T^\vee &\to \mathbb{Z} \\ (\chi, \mu) &\mapsto \langle \chi, \mu \rangle \end{aligned}$$

où $\langle \chi, \mu \rangle$ désigne l'exposant de l'homomorphisme composé $\chi \circ \mu : \mathbb{G}_m \to T \to \mathbb{G}_m$.

On a :

Lemme B.3. –

Le foncteur covariant [resp. contravariant]

$$T \mapsto X_T^\vee \quad \textit{[resp. } T \mapsto X_T \textit{]}$$

définit une équivalence de la catégorie des tores algébriques sur k dans la catégorie des réseaux de rang fini munis d'une action continue de Γ_k.

□

Afin d'étudier les groupes réductifs, on pose :

Définition B.4. –

Soit G un groupe réductif sur k.

(i) *Un sous-groupe fermé géométriquement connexe $P \subsetneq G$ est dit "parabolique" si la variété quotient G/P est projective.*

(ii) *Un sous-groupe de Borel $B \subsetneq G$ est un sous-groupe parabolique minimal sur k_s.*

(iii) *Une paire de Borel (T, B) est constituée d'un sous-tore T de G maximal sur k_s et d'un sous-groupe de Borel B de G qui contient T.*

D'après le lemme B.2, tout sous-groupe parabolique P d'un groupe réductif G possède un radical unipotent N_P ; le quotient P/N_P est réductif.

On montre :

Proposition B.5. –

Soit G un groupe réductif sur k.

(i) *Sur k_s, G possède des sous-tores maximaux. Ils sont conjugués les uns des autres par les éléments de $G(k_s)$. Si T est l'un d'eux, le quotient par T de son normalisateur $N_G(T)$ est un groupe fini.*

(ii) *Sur k_s, G possède des sous-groupes de Borel. Ils sont conjugués les uns des autres par les éléments de $G(k_s)$. Chacun est son propre normalisateur.*

(iii) *Sur k_s, G possède des paires de Borel. Elles sont conjuguées les unes des autres par les éléments de $G(k_s)$. Si (T, B) est l'une d'elles, son normalisateur est T.*

(iv) *Un sous-groupe parabolique P est minimal, donc un sous-groupe de Borel, si et seulement si P/N_P est un tore.*

(v) *Le centralisateur $C_G(T)$ de tout sous-tore T de G est un groupe réductif. C'est un tore, nécessairement égal à T, si et seulement si T est maximal.*

(vi) *Pour toute paire de Borel (T, B), l'homomorphisme*

$$T \to B/N_B$$

est un isomorphisme.

Plus généralement, si P est un sous-groupe parabolique et T un sous-tore maximal contenu dans P, il existe un unique sous-tore T' de T tel que l'homomorphisme

$$C_G(T') = M_P \to P/N_P$$

soit un isomorphisme de groupes réductifs.

□

Si (T_1, B_1) et (T_2, B_2) sont deux paires de Borel d'un groupe réductif G sur k_s, il existe donc un élément $g \in G(k_s)$, uniquement déterminé à multiplication près par les éléments de $T(k_s)$, tel que

$$g^{-1} \cdot (T_1, B_1) \cdot g = (T_2, B_2) .$$

Il en résulte que la définition suivante est indépendante du choix d'une paire de Borel :

Définition B.6. –

Étant donné un groupe réductif G sur k_s, on note, pour n'importe quelle paire de Borel (T, B) de G :

- *$X_G = X_T$ le réseau des caractères de T,*
- *$X_G^\vee = X_T^\vee$ le réseau dual des cocaractères de T,*
- *$\mathfrak{S}_G = N_G(T)/T$ le groupe fini, appelé groupe de Weyl de G, défini comme le quotient par T de son normalisateur,*
- *$\Phi_G = \Phi_T \subset X_T - \{0\}$ l'ensemble fini des caractères non triviaux de T qui apparaissent dans l'action par conjugaison de T sur* $\mathrm{Lie}\,(G)$,
- *$\Phi_G^+ = \Phi_B \subset \Phi_G = \Phi_T$ le sous-ensemble fini des caractères non triviaux qui apparaissent dans l'action par conjugaison de T sur* $\mathrm{Lie}\,(B)$ *ou* $\mathrm{Lie}\,(N_B)$,
- *$\Delta_G = \Delta_B \subset \Phi_G^+ = \Phi_B$ le sous-ensemble de Φ_B constitué des éléments qui ne peuvent s'écrire comme la somme de deux éléments de Φ_B.*

Remarques :

- Les éléments des sous-ensembles finis Φ_G, Φ_G^+ et Δ_G du réseau X_G s'appellent respectivement les racines, les racines positives et les racines simples. On montre de Φ_G est la réunion disjointe de Φ_G^+ et $-\Phi_G^+$.
- Le groupe de Weyl $\mathfrak{S}_G$ agit sur X_G et $X_G^\vee$. Cette action préserve l'ensemble Φ_G des racines de G.

□

Considérons toujours une paire de Borel (T, B) du groupe réductif G sur k_s.

Soit $\alpha : T \to \mathbb{G}_m$ une racine, élément de $\Phi_G = \Phi_T$. Soit T_α la composante neutre du noyau de α, qui est un sous-tore de T de codimension 1. Le centralisateur G_α de T_α dans G est un sous-groupe réductif de G qui admet T comme sous-tore maximal.

Le groupe fini $N_{G_\alpha}(T)/T$ agit non trivialement sur $T/T_\alpha \cong \mathbb{G}_m$, donc il compte exactement 2 éléments. On note w_α l'image dans $N_G(T)/T = \mathfrak{S}_G$ de son unique élément non trivial.

Le groupe dérivé $G_\alpha^{\mathrm{der}} = [G, G]$ de G_α (c'est-à-dire l'intersection des noyaux de tous les caractères de G_α) a ses sous-tores maximaux isomorphes à $\mathbb{G}_m$. Donc il est isomorphe à SL_2 ou PGL_2, et il existe un unique homomorphisme

$$\alpha^\vee : \mathbb{G}_m \to G_\alpha^{\mathrm{der}}$$

tel que

$$\begin{cases} \mathrm{Im}\,\alpha^\vee \subset T\,, \\ T = T_\alpha \cdot (\mathrm{Im}\,\alpha^\vee)\,, \\ \langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2\,. \end{cases}$$

On montre :

Lemme B.7. –

Dans la situation ci-dessus, les élément $w_\alpha \in \mathfrak{S}_G$ et $\alpha^\vee \in X_T^\vee$ associés à toute racine $\alpha \in \Phi_G$ vérifient

$$w_\alpha(\chi) = \chi - \langle \chi, \alpha^\vee \rangle \cdot \alpha\,, \quad \forall\, \chi \in X_T\,,$$

$$w_\alpha(\mu) = \mu - \langle \alpha, \mu \rangle \cdot \alpha^\vee\,, \quad \forall\, \mu \in X_T^\vee\,.$$

□

L'application $\Phi_G \ni \alpha \mapsto \alpha^\vee$ ne dépend pas du choix de la paire de Borel (T, B). On peut donc compléter la définition B.6 par :

Définition B.8. –

Si G est un groupe réductif sur k_s, on appelle coracines [resp. coracines positives, resp. coracines simples] les éléments du sous-ensemble $\Phi_G^\vee$ [resp. $\Phi_G^{+\vee}$, resp. $\Delta_B^\vee$] de $X_G^\vee - \{0\}$, image de Φ_G [resp. Φ_G^+, resp. Δ_B] par l'application

$$\alpha \mapsto \alpha^\vee\,.$$

□

La construction des racines et des coracines d'un groupe réductif amène à poser la définition suivante :

Définition B.9. –

(i) *On appelle "donnée radicielle" tout quadruplet $(X, \Phi, X^\vee, \Phi^\vee)$ constitué de*
   - *un réseau X de rang fini,*
   - *son réseau dual $X^\vee$,*
   - *deux sous-ensembles finis Φ et $\Phi^\vee$ de X et $X^\vee$ reliés par une bijection*

$$\begin{array}{ccc} \Phi & \xrightarrow{\sim} & \Phi^\vee \\ \alpha & \mapsto & \alpha^\vee\,, \end{array}$$

et tel que tout élément $\alpha \in \Phi$ satisfait les 2 axiomes suivants :
   - $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$,
   - *les involutions de X et $X^\vee$ définies par*

$$\begin{array}{ccc} \chi & \mapsto & w_\alpha(\chi) = \chi - \langle \chi, \alpha^\vee \rangle \cdot \alpha\,, \\ \mu & \mapsto & w_\alpha(\mu) = \mu - \langle \alpha, \mu \rangle \cdot \alpha^\vee\,, \end{array}$$

   stabilisent les ensembles finis Φ et $\Phi^\vee$.

(ii) *Une donnée radicielle* $(X, \Phi, X^\vee, \Phi^\vee)$ *est dite "réduite" si, pour tout élément* $\alpha \in \Phi$*, les seuls multiples de* α *[resp.* $\alpha^\vee$*] contenus dans* Φ *[resp.* $\Phi^\vee$*] sont* $\pm\,\alpha$ *[resp.* $\pm\,\alpha^\vee$*].*

Remarque :

Si $(X, \Phi, X^\vee, \Phi^\vee)$ est une donnée radicielle (réduite), $(X^\vee, \Phi^\vee, X, \Phi)$ est aussi une donnée radicielle (réduite), appelée sa duale.

□

Cette définition étant posée, on a :

Théorème B.10. –

(i) *Pour tout groupe réductif* G *sur un corps séparablement clos* k_s*, le quadruplet associé* $(X_G, \Phi_G, X_G^\vee, \Phi_G^\vee)$ *est une donnée radicielle réduite.*

(ii) *Réciproquement, pour toute donnée radicielle réduite* $(X, \Phi, X^\vee, \Phi^\vee)$*, et pour tout corps séparablement clos* k_s*, il existe un groupe réductif* G *sur* k_s*, unique à isomorphisme près, tel que* $(X_G, \Phi_G, X_G^\vee, \Phi_G^\vee)$ *soit isomorphe à* $(X, \Phi, X^\vee, \Phi^\vee)$*.*

(iii) *Pour tout groupe réductif* G *sur* k_s*, on a un homomorphisme canonique entre groupes d'automorphismes*

$$\mathrm{Aut}\,(G) \to \mathrm{Aut}\,(X_G, \Delta_G, X_G^\vee, \Delta_G^\vee)\,.$$

Il s'inscrit dans une suite exacte

$$1 \to \mathrm{Int}\,(G) \to \mathrm{Aut}\,(G) \to \mathrm{Aut}\,(X_G, \Delta_G, X_G^\vee, \Delta_G^\vee) \to 1$$

où $\mathrm{Int}\,(G)$ *désigne le sous-groupe des automorphismes intérieurs de* G*.*

Remarque :

Il résulte de ce théorème que les classes d'isomorphie de groupes réductifs sur un corps séparablement clos k_s sont indexées par des données combinatoires indépendantes de k_s, et même de la caractéristique de k_s.

□

Les automorphismes d'un groupe réductif G sur k_s muni d'une paire de Borel (T, B) sont les automorphismes de conjugaison par les éléments de $T(k_s)$. Afin de les fixer tous, on note que, pour toute racine $\alpha \in \Phi_G = \Phi_T$, le sous-espace $\mathrm{Lie}\,(G)_\alpha$ de $\mathrm{Lie}\,(G)$ sur lequel T agit par le caractère α est de dimension 1, et on pose :

Définition B.11. –

On appelle "épinglage" d'un groupe réductif G *sur* k_s *tout triplet* $(T, B, (u_\alpha)_{\alpha\in\Delta_G})$ *constitué d'une paire de Borel* (T, B) *et d'une famille de vecteurs directeurs* $u_\alpha \in \mathrm{Lie}\,(G)_\alpha$*,* $\alpha \in \Delta_G = \Delta_B$*.*

Avec cette définition, on a :

Proposition B.12. –

Soit G *un groupe réductif sur* k_s*. Alors :*

(i) *Deux épinglages de* G *sont transformés l'un dans l'autre par un unique automorphisme intérieur de* G*.*

(ii) *Tout épinglage définit un scindage de la suite exacte*

$$1 \to \mathrm{Int}\,(G) \to \mathrm{Aut}\,(G) \to \mathrm{Aut}\,(X_G, \Delta_G, X_G^\vee, \Delta_G^\vee) \to 1\,.$$

Revenons maintenant au corps arbitraire k de clôture séparable k_s et de groupe de Galois $\Gamma_k = \mathrm{Aut}_k(k_s)$.

Ayant classifié les groupes réductifs sur k_s et fixé leurs automorphismes, on peut chercher à classifier les groupes réductifs sur k. Un groupe algébrique affine, lisse et géométriquement connexe G sur k est réductif si et seulement $G_{k_s} = G \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(k_s)$ est réductif sur k_s.

Deux groupes réductifs connexes G et G' sur k sont appelés des "k-formes" l'un de l'autre s'il existe un isomorphisme $c : G_{k_s} \xrightarrow{\sim} G'_{k_s}$.

Dans ce cas, l'application

$$\begin{array}{rcl} \Gamma_k & \to & \mathrm{Aut}\,(G_{k_s}) \\ \sigma & \mapsto & c^{-1} \circ \sigma(c) = c_\sigma \end{array}$$

est continue, et elle satisfait la condition

$$c_{\sigma\sigma'} = c_\sigma \circ \sigma(c_{\sigma'})\,, \quad \forall\, \sigma, \sigma' \in \Gamma_k\,.$$

Réciproquement, si G est un groupe réductif sur k, toute application continue

$$\begin{array}{rcl} \Gamma_k & \to & \mathrm{Aut}\,(G_{k_s})\,, \\ \sigma & \mapsto & c_\sigma\,, \end{array}$$

qui satisfait la relation ci-dessus définit une "k-forme" de G. Cette k-forme est k-isomorphe à G si et seulement s'il existe un automorphisme $c \in \mathrm{Aut}\,(G_{k_s})$ tel que

$$c_\sigma = c^{-1} \circ \sigma(c)\,, \quad \forall\, \sigma \in \Gamma_k\,.$$

Les "k-formes" de G associées à des applications continues $\Gamma_k \ni \sigma \mapsto c_\sigma$ qui prennent leurs valeurs dans le sous-groupe $\mathrm{Int}\,(G_{k_s}) \subset \mathrm{Aut}\,(G_{k_s})$ des automorphismes intérieurs de G_{k_s}, sont appelées les "k-formes intérieures" de G.

Pour tout groupe réductif G sur k, on note encore $(X_G, \Phi_G, X_G^\vee, \Phi_G^\vee)$, $\mathfrak{S}_G$ et $(\Phi_G^+, \Delta_G, \Phi_G^{+\vee}, \Delta_G^\vee)$ la donnée radicielle, le groupe de Weyl et les ensembles de racines et coracines positives ou simples qui sont associés à G_{k_s}.

Si (T, B) est une paire de Borel de G_{k_s} et σ est un élément de Γ_k, la transformée $(\sigma(T), \sigma(B))$ de (T, B) par σ est une autre paire de Borel de G_{k_s}, et on a un isomorphisme induit par σ

$$(X_T, \Delta_B, X_T^\vee, \Delta_B^\vee) \xrightarrow{\sim} (X_{\sigma(T)}, \Delta_{\sigma(B)}, X_{\sigma(T)}^\vee, \Delta_{\sigma(B)}^\vee)\,.$$

Cet isomorphisme induit par σ peut-être vu comme un automorphisme de $(X_G, \Delta_G, X_G^\vee, \Delta_G^\vee)$; comme tel, il ne dépend pas du choix de la paire de Borel (T, B). On a donc une application canonique

$$\Gamma_k \to \mathrm{Aut}\,(X_G, \Delta_G, X_G^\vee, \Delta_G^\vee)\,.$$

C'est un homomorphisme de groupes. Son noyau est un sous-groupe ouvert de Γ_k, ce qui signifie qu'il est continu.

Ainsi, le réseau X_G et son dual $X_G^\vee$ sont canoniquement munis d'une action du groupe de Galois Γ_k qui préserve les ensembles finis $\Delta_G, \Delta_G^\vee, \Phi_G, \Phi_G^\vee, \Phi_G^+, \Phi_G^{+\vee}$ et induit une action sur le groupe de Weyl $\mathfrak{S}_G$.

On pose :

Définition B.13. –

(i) *Un groupe réductif G sur k est dit "quasi-déployé" s'il possède un épinglage $(T, B, (u_\alpha)_{\alpha \in \Delta_G})$ défini sur k.*

(ii) *Il est dit "déployé" si, de plus, le tore T d'un tel épinglage est déployé, c'est-à-dire isomorphe sur k à une puissance de $\mathbb{G}_m$.*

On déduit du théorème B.10 et de la proposition B.11 :

Corollaire B.14. –

(i) *Deux groupes réductifs G et G' sur k sont des "k-formes" l'un de l'autre si et seulement si leurs données radicielles $(X_G, \Phi_G, X_G^\vee, \Phi_G^\vee)$ et $(X_{G'}, \Phi_{G'}, X_{G'}^\vee, \Phi_{G'}^\vee)$ sont isomorphes.*

De plus, ce sont des "k-formes intérieures" l'un de l'autre si et seulement si leurs données radicielles munies des actions naturelles du groupe de Galois Γ_k sont isomorphes.

(ii) *Toute donnée radicielle $(X, \Phi, X^\vee, \Phi^\vee)$ munie d'une action continue de Γ_k préservant une base $(\Delta, \Delta^\vee)$ définit un groupe réductif quasi-déployé sur k. Celui-ci est unique à unique k-isomorphisme près préservant les épinglages.*

(iii) *Tout groupe réductif sur k possède une forme intérieure quasi-déployée. Celle-ci est unique à unique k-isomorphisme près préservant les épinglages.*

(iv) *Un groupe réductif G, supposé quasi-déployé sur k, est déployé sur k si et seulement si l'action induite de Γ_k sur $(X_G, \Delta_G, X_G^\vee, \Delta_G^\vee)$ est triviale.*

□

À la suite de Langlands, on peut poser la définition suivante :

Définition B.15. –

Soit G un groupe réductif sur k.

On appelle "groupe dual (de Langlands)" de G, et on note $\widehat{G}$, le groupe réductif sur $\mathbb{C}$, muni d'un épinglage $(\widehat{T}, \widehat{B}, (u_\alpha)_{\alpha \in \Delta_{\widehat{G}}})$, qui est associé à la donnée radicielle $(X_G^\vee, \Phi_G^\vee, X_G, \Phi_G)$ duale de la donnée radicielle $(X_G, \Phi_G, X_G^\vee, \Phi_G^\vee)$ de G.

Il est unique à unique isomorphisme près et muni de l'action continue de Γ_k qui relève celle sur $(X_G, \Phi_G, X_G^\vee, \Phi_G^\vee)$ et sa duale.

Remarque :

Si (T, B) est une paire de Borel de G sur k_s, $\widehat{T}$ est dual de T au sens que l'on peut identifier

$$X_{\widehat{T}} = X_G^\vee = X_T^\vee\,, \quad X_{\widehat{T}}^\vee = X_G = X_T\,.$$

Si (T, B) est défini sur k, les identifications $X_{\widehat{T}} = X_T^\vee$ et $X_{\widehat{T}}^\vee = X_T$ sont même compatibles avec les actions de Γ_k.

□

La partie (i) du corollaire B.14 ci-dessus se reformule de la manière suivante :

Corollaire B.16. –

Deux groupes réductifs G et G' sur k sont des "k-formes" l'un de l'autre si et seulement si leurs groupes réductifs duaux $\widehat{G}$ et $\widehat{G}'$ sur $\mathbb{C}$ sont isomorphes.

De plus, ce sont des "k-formes intérieures" l'un de l'autre si et seulement si $\widehat{G}$ et $\widehat{G}'$ munis des actions naturelles de Γ_k sont isomorphes.

□

Considérons enfin le cas où le corps de base k est égal à un corps global F : les groupes réductifs G sur un corps global F sont les objets de base de la théorie des représentations automorphes.

Soit donc F un corps global, et soit G un groupe réductif sur F.

Pour toute place $x \in |F|$, G induit un groupe réductif sur F_x. Si $x \in |F|_f$ est une place finie, $G(F_x)$ est un groupe topologique "totalement discontinu" au sens que sa topologie est engendrée par une famille filtrante de sous-groupes ouverts compacts. Si $x \in |F|_r$ est une place réelle, $G(F_x)$ est un groupe de Lie réel et si $x \in |F|_c$ est une place complexe, $G(F_x)$ et un groupe de Lie complexe.

Choisissons des clôtures séparables F_s et $F_{x,s}$, $x \in |F|$, de F et des F_x, ainsi que des plongements $F_s \hookrightarrow F_{x,s}$ de F_s dans chaque $F_{x,s}$, $x \in |F|$, qui prolongent les plongements $F \hookrightarrow F_x$. Chaque plongement $F_s \hookrightarrow F_{x,s}$ induit un plongement entre groupes de Galois

$$\Gamma_{F_x} \hookrightarrow \Gamma_F \,.$$

Si $x \in |F|_f$, notons $F_{x,s}^{\mathrm{nr}}$ le sous-corps de $F_{x,s}$ qui est la réunion filtrante des extensions finies de F_x contenues dans $F_{x,s}$ qui sont "non ramifiées" au sens qu'elle se prolongent en une extension finie étale de l'anneau O_x des entiers de F_x. Le groupe $\Gamma_{F_x}^{\mathrm{nr}} = \mathrm{Aut}_{F_x}(F_{x,s}^{\mathrm{nr}})$ est appelé "groupe de Galois non ramifié de F_x" ; c'est un quotient du groupe profini Γ_{F_x}. On montre qu'il est isomorphe au groupe de Galois

$$\Gamma_{\mathbb{F}_x} \cong \widehat{\mathbb{Z}}$$

du corps résiduel $\mathbb{F}_x$ de l'anneau local O_x. Il admet pour générateur topologique "l'élément de Frobenius" $\sigma_x \in \Gamma_{F_x}^{\mathrm{nr}}$ qui correspond à l'automorphisme de Frobenius

$$a \mapsto a^{q_x} \qquad (\text{où } q_x = \#\,\mathbb{F}_x)$$

de n'importe quelle clôture séparable de $\mathbb{F}_x$.

On pose :

Définition B.17. –

Soit G un groupe réductif sur un corps global F.

On dit que G est non ramifié en une place finie $x \in |F|_f$ si :

- *G est quasi-déployé sur F_x,*
- *l'action du groupe de Galois local Γ_{F_x} sur la donnée radicielle $(X_G, \Phi_G, X_G^\vee, \Phi_G^\vee)$ ou, ce qui revient au même, sur le groupe dual $\widehat{G}$, se factorise à travers son quotient non ramifié $\Gamma_{F_x}^{\mathrm{nr}}$.*

Remarque :

Si G est non ramifié en $x \in |F|_f$, on peut parler de l'action sur $\widehat{G}$ de l'élément de Frobenius σ_x.

□

On montre :

Lemme B.18. –

Soient G un groupe réductif sur un corps global F et $x \in |F|_f$ une place finie en laquelle G est non ramifié.

Alors G considéré comme un groupe réductif sur F_x se prolonge de manière unique en un schéma en groupes affine lisse sur O_x dont la fibre résiduelle est un groupe réductif sur $\mathbb{F}_x$, de même donnée radicielle que G.

□

On déduit de ce lemme :

Corollaire B.19. –

Sous les hypothèses du lemme B.18 *ci-dessus, on peut parler du sous-groupe $G(O_x)$ des points entiers de $G(F_x)$.*

C'est un sous-groupe ouvert compact maximal de $G(F_x)$.

$\square$

Enfin, on a :

Proposition B.20. –

Soit G un groupe réductif sur un corps global F.

Alors :

(i) *Pour presque toute place $x \in |F|$, le groupe réductif G est quasi-déployé sur F_x.*

(ii) *Mieux encore, G est non ramifié en presque toute place $x \in |F|_f$.*

$\square$

C. Fonctions automorphes, représentations automorphes et principe de fonctorialité

Dans tout ce paragraphe, on fixe un corps global F et son anneau des adèles $\mathbb{A} = \mathbb{A}_F$ qui a la forme

$$\begin{aligned}\mathbb{A} &= \mathbb{A}_f \times \left(\prod_{x\in|F|_\infty} F_x\right) \\ &= \mathbb{A}_f \times \left(\prod_{x\in|F|_r} \mathbb{R}\right) \times \left(\prod_{x\in|F|_c} \mathbb{C}\right).\end{aligned}$$

On s'intéresse aux groupes réductifs G sur F et aux groupes de points

$$G(F) \hookrightarrow G(\mathbb{A})\,.$$

Le groupe topologique $G(\mathbb{A})$ est le produit des groupes de Lie réels

$$G(F_x)\,,\quad x\in|F|_r\,,$$

des groupes de Lie complexes

$$G(F_x)\,,\quad x\in|F|_c\,,$$

et du sous-groupe topologique

$$G(\mathbb{A}_f) \subset \prod_{x\in|F|_f} G(F_x)$$

constitué des familles $(g_x \in G(F_x))_{x\in|F|_f}$ telles que $g_x \in G(O_x)$ en presque toute place $x\in|F|_f$ en laquelle G est non ramifié.

Le groupe $G(\mathbb{A}_f)$ est totalement discontinu : sa topologie est engendrée par ses sous-groupes ouverts compacts produits

$$K_f = \prod_{x\in|F|_f} K_x$$

dont les facteurs K_x sont des sous-groupes ouverts compacts de $G(F_x)$, presque tous égaux à $G(O_x)$.

Le groupe réductif G sur F se plonge comme sous-schéma fermé d'un schéma affine $\mathrm{Spec}\,(F\,[X_1,\ldots,X_d])$. La proposition A.10(i) implique donc :

Lemme C.1. –

Pour tout groupe réductif G sur F, le plongement

$$G(F) \hookrightarrow G(\mathbb{A})$$

identifie $G(F)$ à un sous-groupe discret du groupe topologique $G(\mathbb{A})$.

□

La théorie automorphe consiste à étudier l'espace topologique quotient

$$G(F)\backslash G(\mathbb{A})$$

muni de l'action à droite du groupe topologique $G(\mathbb{A})$ ou, ce qui revient au même, les espaces de fonctions

$$h : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

sur lesquels $G(\mathbb{A})$ opère par translation à droite.

On introduit en particulier :

- l'espace $\mathcal{C}_c(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ des fonctions continues à support compact
$$h : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$
- son sous-espace $\mathcal{C}_\infty(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ réunion filtrante des sous-espaces $\mathcal{C}_{K_f,\infty}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ de fonctions à support compact
$$h : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$
invariantes à droite par un sous-groupe ouvert compact K_f de $G(\mathbb{A}_f)$ et de classe C^∞ en la variable $g_\infty \in \prod_{x\in|F|_\infty} G(F_x)$,
- l'espace $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ des fonctions de carré intégrable
$$h : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$
pour n'importe quelle mesure de Haar sur $G(\mathbb{A})$
$$dg = \bigotimes_{x\in|F|} dg_x$$
produit de mesures de Haar dg_x sur les groupes topologiques localement compacts $G(F_x)$,
- son sous-espace $L^2_\infty(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ réunion filtrante des sous-espaces $L^2_{K_f,\infty}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ de fonctions de carré intégrable
$$h : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$
invariantes à droite par un sous-groupe ouvert compact K_f de $G(\mathbb{A}_f)$ et de classe C^∞ en la variable $g_\infty \in \prod_{x\in|F|_\infty} G(F_x)$.

Ces différents espaces sont munis de l'action de $G(\mathbb{A})$ par translation à droite ou, ce qui revient au même, de l'action par convolution à droite
$$(h,\varphi) \mapsto h * \varphi = \left(g' \mapsto \int_{G(\mathbb{A})} dg \cdot h(g'g^{-1}) \cdot \varphi(g)\right)$$
des fonctions $\varphi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ éléments de "l'algèbre de Hecke de $G(\mathbb{A})$"
$$\mathcal{H}^G$$
définie de la manière suivante :

Définition C.2. –

Ayant choisi une mesure de Haar $dg = \bigotimes_{x\in|F|} dg_x$ sur $G(\mathbb{A})$, produit de mesures de Haar dg_x sur les $G(F_x)$, on pose :

(i) *Pour toute place $x \in |F|_f$, on appelle "algèbre de Hecke locale sur $G(F_x)$", et on note $\mathcal{H}^G_x$, l'algèbre de convolution des fonctions localement constantes à support compact*
$$\varphi_x : G(F_x) \to \mathbb{C}\,.$$
C'est la réunion filtrante, sur les sous-groupes ouverts compacts K_x de $G(F_x)$, des sous-algèbres $\mathcal{H}^G_{x,K_x}$ de fonctions à support compact
$$K_x\backslash G(F_x)/K_x \to \mathbb{C}\,.$$

(ii) *Pour toute place $x \in |F|_\infty$, on appelle "algèbre de Hecke locale sur $G(F_x)$", et on note $\mathcal{H}_x^G$, l'algèbre de convolution des fonctions de classe C^∞ à support compact*

$$\varphi_x : G(F_x) \to \mathbb{C}\,.$$

(iii) *On appelle "algèbre de Hecke globale" sur $G(\mathbb{A})$, et on note $\mathcal{H}^G$, le produit tensoriel*

$$\mathcal{H}^G = \bigotimes_{x \in |F|} \mathcal{H}_x^G\,.$$

C'est une algèbre de convolution de fonctions à support compact

$$\varphi : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

qui sont invariantes à gauche et à droite par un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A}_f)$, et de classe C^∞ en la variable $g_\infty \in \prod_{x \in |F|_\infty} G(F_x)$.

Remarque :

En toute place $x \in |F|_f$, chaque algèbre $\mathcal{H}_{x,K_x}^G$ admet un élément unité qui est le quotient

$$\frac{1}{\mathrm{vol}\,(K_x)} \cdot \mathbb{1}_{K_x}(\bullet)$$

de la fonction caractéristique de K_x par son volume.

Si G est non ramifié en x, on normalise la mesure de Haar dg_x sur $G(F_x)$ en demandant qu'elle attribue le volume 1 à $G(O_x)$.

La sous-algèbre $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G = \mathcal{H}_{x,G(O_x)}^G$ des fonctions à support compact

$$G(O_x)\backslash G(F_x)/G(O_x) \to \mathbb{C}$$

est appelée "l'algèbre de Hecke sphérique sur $G(F_x)$". Elle admet pour élément unité la fonction caractéristique de $G(O_x)$.

$\square$

La théorie automorphe consiste d'abord à décomposer spectralement la représentation

$$L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})) \quad \text{ou} \quad L^2_\infty(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$$

de $G(\mathbb{A})$ ou $\mathcal{H}^G$ comme une somme hilbertienne (discrète et continue) de représentations irréductibles qui sont "lisses admissibles" au sens suivant :

Définition C.3. –

(i) *En toute place $x \in |F|_f$, une représentation "lisse admissible" de $G(F_x)$ ou $\mathcal{H}_x^G$ consiste en un espace vectoriel V_{π_x} sur $\mathbb{C}$ muni d'une action π_x de $G(F_x)$ et tel que*

- *pour tout sous-groupe ouvert compact K_x de V_{π_x}, le sous-espace*

$$V_{\pi_x}^{K_x} = \{v \in V_{\pi_x} \mid g_x \cdot v = v\,, \quad \forall\, g_x \in K_x\}$$

est de dimension finie,

- *l'espace V_{π_x} est la réunion filtrante de ses sous-espaces $V_{\pi_x}^{K_x}$.*

(ii) *Dans les conditions de* (i), *la représentation "lisse admissible" (π_x, V_{π_x}) est dite "non ramifiée" si*

- *G est non ramifié en x,*
- *le sous-espace $V_{\pi_x}^{G(O_x)}$ est de dimension 1 et muni d'un vecteur directeur.*

(iii) *En toute place $x \in |F|_\infty$, une représentation "lisse admissible" de $G(F_x)$ et $\mathcal{H}_x^G$ consiste en deux espaces vectoriels V_{π_x} et $V_{\pi_x}^*$ sur $\mathbb{C}$, munis d'actions de $G(F_x)$ et $\mathcal{H}_x^G$ et d'un produit scalaire équivariant non dégénéré*

$$\langle \bullet, \bullet \rangle : V_{\pi_x}^* \otimes V_{\pi_x} \to \mathbb{C}$$

tels que, pour tous vecteurs $v^* \in V_{\pi_x}^*$, $v \in V_{\pi_x}$,

- *la fonction*

$$G(F_x) \ni g \mapsto \langle v^*, g \cdot v \rangle = \langle g^{-1} \cdot v^*, v \rangle$$

est de classe C^∞,

- *le produit scalaire*

$$\langle v^*, \varphi \cdot v \rangle \qquad \text{[resp. } \langle \varphi \cdot v^*, v \rangle \text{]}$$

est égal à l'intégrale

$$\int_{G(F_x)} dg \cdot \varphi(g) \cdot \langle v^*, g \cdot v \rangle \quad \text{[resp. } \int_{G(F_x)} dg \cdot \varphi(g) \cdot \langle g \cdot v^*, v \rangle \text{]}$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{H}_x^G$.

(iv) *Une représentation "lisse admissible" de $G(\mathbb{A})$ ou $\mathcal{H}^G$ est un produit tensoriel*

$$(\pi, V_\pi) = \bigotimes_{x \in |F|} (\pi_x, V_{\pi_x})$$

de représentations lisses admissibles locales qui sont non ramifiées en presque toute place $x \in |F|_f$.

□

Citons tout de suite :

Lemme C.4. –

Soit $x \in |F|_f$ une place finie de F. Alors :

(i) *Pour tout sous-groupe ouvert compact K_x de $G(F_x)$, le foncteur*

$$V_{\pi_x} \mapsto V_{\pi_x}^{K_x}$$

induit une équivalence de la catégorie des représentations lisses admissibles irréductibles (π_x, V_{π_x}) de $G(F_x)$ telles que $V_{\pi_x}^{K_x} \neq 0$ sur la catégorie des représentations irréductibles de dimension finie de l'algèbre $\mathcal{H}_{x,K_x}^G$.

(ii) *Si G est non ramifié en x, l'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G = \mathcal{H}_{x,G(O_x)}^G$ est commutative.*
Par conséquent, ses représentations irréductibles sont de dimension 1, ce sont les caractères.

Remarque :

Il résulte de (i) et (ii) que, si G est non ramifié en x, les représentations non ramifiées irréductibles de $G(F_x)$ correspondent bijectivement aux caractères de l'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$.

□

Il est possible de préciser la structure de l'algèbre commutative $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ en toute place $x \in |F|_f$ où G est non ramifié. C'est un résultat fondamental de Satake, que nous citons dans sa reformulation par Langlands :

Théorème C.5. –

Soit x une place finie de F en laquelle le groupe réductif G sur F est non ramifié.

Considérons le groupe dual $\widehat{G}$ de G, muni de sa paire de Borel $(\widehat{T}, \widehat{B})$ et de l'action du groupe de Galois local non ramifié $\Gamma_{F_x}^{\mathrm{nr}}$ induite par celle de Γ_F.

Soit

$$\widehat{G}_x$$

la fibre du produit semi-direct $\widehat{G} \rtimes \Gamma_{F_x}^{\mathrm{nr}}$ au-dessus de l'élément de Frobenius $\sigma_x \in \Gamma_{F_x}^{\mathrm{nr}}$, munie de l'action de $\widehat{G}$ par conjugaison.

Alors on a un isomorphisme canonique, dit isomorphisme de Satake,

$$S_x^G : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}\,[\widehat{G}_x]^{\widehat{G}}$$

de l'algèbre de Hecke sphérique de G en x vers l'algèbre des polynômes sur $\widehat{G}_x$ qui sont invariants par conjugaison par $\widehat{G}$.

Remarques :

(i) Si $G = \mathrm{GL}_r$, l'isomorphisme de Satake s'écrit encore

$$S_x^r : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r = \mathcal{H}_{x,\emptyset}^{\mathrm{GL}_r} \to \mathbb{C}\,[\widehat{T}_r]^{\mathfrak{S}_r} = \mathbb{C}\,[X_1^{\pm 1}, \dots, X_r^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_r}$$

où $\widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$ désigne le tore maximal de $\widehat{\mathrm{GL}}_r = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ et $\mathfrak{S}_r$ le groupe des permutations de $\{1, 2, \dots, r\}$.

Les représentations non ramifiées de $\mathrm{GL}_r(F_x)$, ou les caractères de l'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$, correspondent aux familles $(z_1, \dots, z_r) \in (\mathbb{C}^\times)^r$, modulo permutation. On appelle les éléments de ces familles les "valeurs propres de Hecke" des représentations non ramifiées.

(ii) Plus généralement, si G est déployé sur F_x, l'isomorphisme de Satake s'écrit encore

$$S_x^G : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G \to \mathbb{C}\,[\widehat{T}]^{\mathfrak{S}_G}$$

où $\mathfrak{S}_G$ désigne le groupe de Weyl de G ou $\widehat{G}$.

Les représentations non ramifiées de $G(F)$, ou les caractères de $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$, correspondent aux éléments $\lambda \in \widehat{T}$, modulo l'action de $\mathfrak{S}_G$.

(iii) Dans le cas général, considérons un sous-tore T_x^d du groupe réductif quasi-déployé G sur F_x, qui est déployé sur F_x et maximal pour cette propriété. Il est muni, ainsi que son tore complexe dual $\widehat{T}_x^d$, d'une action du groupe de Weyl F_x-rationnel

$$\mathfrak{S}_G^x = \{w \in \mathfrak{S}_G \mid \sigma_x(w) = w\}\,.$$

Alors l'isomorphisme de Satake s'écrit encore

$$S_x^G : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G \to \mathbb{C}\,[\widehat{T}_x^d]^{\mathfrak{S}_G^x}\,.$$

Les représentations non ramifiées de $G(F)$, ou les caractères de $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$, correspondent aux éléments $\lambda \in \widehat{T}_x^d$, modulo l'action de $\mathfrak{S}_G^x$. □

Revenons au problème de la décomposition spectrale des fonctions

$$h : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

sous l'action de $G(\mathbb{A})$ par translation à droite.

Voyons d'abord le cas d'un tore T algébrique sur F.

Comme T est commutatif, les représentations lisses admissibles irréductibles de $T(\mathbb{A})$ sont les caractères continus presque partout non ramifiés

$$\chi : T(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^\times .$$

Ceux de ces caractères qui apparaissent dans la décomposition spectrale des fonctions

$$h : T(F)\backslash T(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

sont les caractères "automorphes" au sens de triviaux sur $T(F)$.

Parmi les caractères automorphes, on distingue en particulier ceux de la forme

$$T(\mathbb{A}) \ni t \mapsto |\chi_1(t)|^{s_1} \ldots |\chi_k(t)|^{s_k}$$

pour des caractères algébriques définis sur F

$$\chi_1, \ldots, \chi_k : T \to \mathbb{G}_m$$

et des exposants complexes $s_1, \ldots, s_k \in \mathbb{C}$.

Les caractères $T(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^\times$ de cette forme sont effectivement automorphes d'après la "formule du produit" de la proposition A.8.

Notons $\widehat{\Lambda}_T$ le groupe abélien des caractères automorphes de cette forme, $T(\mathbb{A})^0 \subset T(\mathbb{A})$ le sous-groupe fermé intersection des noyaux des éléments de $\widehat{\Lambda}_T$, et Λ_T le groupe quotient de $T(\mathbb{A})$ par $T(\mathbb{A})^0$.

On a :

Lemme C.6. –

Pour tout tore T algébrique sur F, on a :

(i) *Le groupe abélien $\widehat{\Lambda}_T$ a naturellement la structure d'un groupe de Lie complexe. Sa dimension sur $\mathbb{C}$ est égale au rang du plus grand sous-tore de T déployé sur F.*

(ii) *Si F est un corps de fonctions [resp. un corps de nombres], le groupe topologique quotient $\Lambda_T = T(\mathbb{A})/T(\mathbb{A})^0$ est isomorphe à une puissance de $\mathbb{Z}$ [resp. de $\mathbb{R}$], si bien que son dual $\widehat{\Lambda}_T$ est isomorphe à une puissance du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^\times$ [resp. du groupe additif $\mathbb{C}$].*

(iii) *Le quotient*

$$T(F)\backslash T(\mathbb{A})^0$$

du noyau commun $T(\mathbb{A})^0$ par le sous-groupe discret $T(F)$ est compact.

Remarque :

La partie (iii) implique que, dans le groupe des caractères automorphes de $T(\mathbb{A})$, les orbites sous l'action du sous-groupe $\widehat{\Lambda}_T$ forment une famille discrète.

□

Décrire un caractère automorphe

$$\chi = \bigotimes_{x \in |F|} \chi_x : T(F)\backslash T(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^\times$$

n'est pas facile.

Cependant, un tel caractère est non ramifié en presque toute place finie $x \in |F|_f$ et, d'après la remarque (iii) du théorème C.5, ses composantes non ramifiées χ_x correspondent à des "valeurs propres de Hecke"

$$z_{\chi_x} \in \widehat{T}_x^d = \widehat{T}/\{\sigma_x(\lambda) \cdot \lambda^{-1}, \lambda \in \widehat{T}\} .$$

Or on a :

Proposition C.7. –

Deux caractères automorphes

$$\chi = \bigotimes_{x \in |F|} \chi_x \,, \quad \chi' = \bigotimes_{x \in |F|} \chi'_x : T(F)\backslash T(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

qui ont les mêmes "valeurs propres de Hecke" $z_{\chi_x} = z_{\chi'_x}$ *en presque toutes les places* $x \in |F|_f$*, sont nécessairement égaux.*

□

Ayant examiné le cas des tores, considérons maintenant le problème de décomposition spectrale des fonctions

$$h : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

dans le cas général d'un groupe réductif arbitraire G sur F.

Pour cela, on a besoin de considérer les sous-groupes paraboliques P de G définis sur F. On rappelle que, à conjugaison près par les élément de $G(F)$, il n'y en a qu'un nombre fini. À chaque tel sous-groupe parabolique P sont associés son radical unipotent N_P, qui est un groupe algébrique unipotent sur F, et le quotient $M_P = P/N_P$ qui est un groupe réductif sur F. Les $N_P(F)$ sont des sous-groupes discrets des groupes topologiques $N_P(\mathbb{A})$, et les quotients $N_P(F)\backslash N_P(\mathbb{A})$ sont compacts puisque le quotient $F\backslash\mathbb{A}$ est compact (proposition A.10(ii)).

Le choix d'une mesure de Haar $da = \bigotimes_{x \in |F|} da_x$ du groupe additif $\mathbb{A}$ détermine une mesure de Haar $du = \bigotimes_{x \in |F|} du_x$ de chaque radical unipotent $N_P(\mathbb{A})$. Comme une mesure de Haar $dg = \bigotimes_{x \in |F|} dg_x$ de $G(\mathbb{A})$ est fixée, on peut montrer – en utilisant les décompositions d'Iwasawa ou de Bruhat – que cela détermine aussi une mesure de Haar $dm = \bigotimes_{x \in |F|} dm_x$ de chaque quotient réductif $M_P(\mathbb{A}) = P(\mathbb{A})/N_P(\mathbb{A})$.

Pour tout sous-groupe parabolique P de G sur F, et pour toute fonction localement intégrable

$$h : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C} \quad \text{(ou, plus généralement, } h : P(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\text{)}\,,$$

on notera

$$h_P : M_P(F) \cdot N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

la fonction localement intégrable définie par

$$h_P(g) = \int_{N_P(F)\backslash N_P(\mathbb{A})} du \cdot h(ug) \,, \quad \forall\, g \in G(\mathbb{A}) .$$

Nous pouvons maintenant introduire les notions de fonction automorphe sur $G(\mathbb{A})$ et de représentation automorphe de $G(\mathbb{A})$:

Définition C.8. –

Soit un groupe réductif G *sur* F*.*

(i) *Une fonction "automorphe" sur $G(\mathbb{A})$ est une fonction localement intégrable*

$$h : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

telle que, pour tout sous-groupe parabolique P de G et tout tore $T \subset P$ définis sur F, il existe des caractères

$$N_1, \ldots, N_k \in \mathrm{Re}\,\widehat{\Lambda}_T$$

tels que les fonctions quotients

$$T(F)\backslash T(\mathbb{A}) \ni t \mapsto \frac{|h_P(tg)|}{\max\{N_1(t), \ldots, N_k(t)\}}\,, \quad g \in G(\mathbb{A})\,,$$

soient bornées par une constante (qui dépend continûment de g).

(ii) *Une représentation lisse admissible irréductible*

$$\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$$

de $G(\mathbb{A})$ est dite "automorphe" s'il est possible de la réaliser dans un espace de fonctions automorphes sur $G(\mathbb{A})$, muni de l'action de $G(\mathbb{A})$ par translation à droite.

□

On remarque que le sous-espace des fonctions automorphes

$$h : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

telles que

$$h_P = 0\,, \quad \forall\, P \subsetneq G\,,$$

est stable par translation à droite par les éléments de $G(\mathbb{A})$.

Cela conduit à compléter la définition précédente par :

Définition C.9. –

Soit toujours un groupe réductif G sur F.

(i) *Une fonction automorphe*

$$h : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

est dite "cuspidale" si, pour tout sous-groupe parabolique non trivial $P \subsetneq G$ défini sur F, on a $h_P = 0$.

(ii) *Une représentation automorphe de $G(\mathbb{A})$ est dite "cuspidale" s'il est possible de la réaliser dans un espace de fonctions automorphes cuspidales sur $G(\mathbb{A})$, muni de l'action de $G(\mathbb{A})$ par translation à droite.*

□

Le quotient G^{ab} de G par son sous-groupe des commutateurs est un tore défini sur F. On note $\widehat{\Lambda}_G = \widehat{\Lambda}_{G^{ab}}$ le groupe de Lie complexe associé à G^{ab} au sens du lemme C.6. Les éléments de $\widehat{\Lambda}_G$ définissent des caractères de $G(\mathbb{A})$ qui sont triviaux sur $G(F)$; ils agissent donc par produit tensoriel $(\pi, \lambda) \mapsto \pi \otimes \lambda = \pi_\lambda$ sur l'ensemble des représentations automorphes π de $G(\mathbb{A})$.

L'intersection $G(\mathbb{A})^0$ des noyaux des caractères $z \in \widehat{\Lambda}_G$ est un sous-groupe topologique de $G(\mathbb{A})$ qui contient $G(F)$ comme sous-groupe discret. Il est muni d'une mesure de Haar induite par celle de $G(\mathbb{A})$. On montre que le quotient $G(F)\backslash G(\mathbb{A})^0$ est toujours de volume fini mais, contrairement au cas des tores, il n'est pas compact en général. On a toutefois :

Lemme C.10. –

Soit une fonction automorphe cuspidale

$$h : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

qui est invariante à droite par un sous-groupe ouvert compact $K_f = \prod\limits_{x\in|F|_f} K_x$ *de* $G(\mathbb{A}_f)$*, et de classe* C^∞ *en la variable* $g_\infty \in \prod\limits_{x\in|F|_\infty} G(F_x)$*.*

Alors la restriction de h *à*

$$G(F)\backslash G(\mathbb{A})^0$$

est à support compact [resp. à décroissance rapide] si F *est un corps de fonctions [resp. un corps de nombres].*

□

La composante neutre Z_G^0 du centre Z_G de G est aussi un tore algébrique sur F, et l'homomorphisme composé

$$Z_G^0 \hookrightarrow G \to G^{ab}$$

est un épimorphisme de tore dont le noyau est fini.

Toute représentation lisse admissible irréductible

$$\pi = \bigotimes_{x\in|F|} \pi_x$$

de $G(\mathbb{A})$ possède un caractère central

$$\chi_\pi = \bigotimes_{x\in|F|} \chi_{\pi_x} : Z_G^0(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^\times$$

presque partout non ramifié. Si la représentation π est automorphe, son caractère central est automorphe, c'est-à-dire invariant par $Z_G^0(F)$. Si de plus π est réalisée dans un espace de fonctions automorphes $h : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$, celles-ci vérifient nécessairement

$$h(zg) = \chi_\pi(z)\, h(g)\,, \quad \forall\, z \in Z_G^0(\mathbb{A})\,, \quad \forall\, g \in G(\mathbb{A})\,.$$

Contrôler la croissance de ces fonctions automorphes h équivaut donc à contrôler la croissance de leurs restrictions à $G(F)\backslash G(\mathbb{A})^0$.

C'est pourquoi on pose :

Définition C.11. –

Une représentation automorphe de $G(\mathbb{A})$ *est dite "discrète" s'il est possible de la réaliser dans un espace de fonctions automorphes*

$$h : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

dont la restriction à $G(F)\backslash G(\mathbb{A})^0$ *est de carré intégrable.*

Remarque :

Une représentation automorphe discrète de $G(\mathbb{A})$ est unitaire si et seulement si son caractère central χ_π est unitaire. Elle le devient après tensorisation par un caractère convenable $\lambda \in \widehat{\Lambda}_G$.

□

Le lemme C.10 implique :

Corollaire C.12. –

Toute représentation automorphe cuspidale de $G(\mathbb{A})$ est discrète.

□

Le lemme suivant fait comprendre que l'étude des représentations automorphes de $G(\mathbb{A})$ peut être ramenée à celle des représentations automorphes cuspidales des groupes $M_P(\mathbb{A})$ associés aux sous-groupes paraboliques P de G.

Lemme C.13. –

Considérons une fonction automorphe à support compact

$$h : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,.$$

Supposons que pour tout sous-groupe parabolique $P \subseteq G$ défini sur F, pour toute fonction automorphe cuspidale

$$\varphi : M_P(F)\backslash M_P(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

et pour tout élément $g \in G(\mathbb{A})$, on ait

$$\int_{M_P(F)\backslash M_P(\mathbb{A})} dm \cdot \overline{\varphi(m)} \cdot h_P(m \cdot g) = 0\,.$$

Alors on a

$$h = 0\,.$$

Si π est une représentation automorphe de $G(\mathbb{A})$, notons $\mathrm{Aut}_G(\pi)$ la somme des sous-espaces de fonctions automorphes $G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ dans lesquels la représentation π se réalise.

Puis, si P est un sous-groupe parabolique de G défini sur F, que

$$\delta_P : P \to P/N_P = M_P \to \mathbb{G}_m$$

désigne le caractère modulaire par lequel P ou M_P agissent sur $\mathrm{Lie}\,(N_P)$, et que π est une représentation automorphe de $M_P(\mathbb{A})$, notons

$$\mathrm{Aut}_{G,P}(\pi)$$

le sous-espace des fonctions localement intégrables

$$h : M_P(F) \cdot N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

telles que, pour tout $g \in G(\mathbb{A})$, la fonction

$$M_P(F)\backslash M_P(\mathbb{A}) \ni m \mapsto |\delta_P(m)|^{-\frac{1}{2}} \cdot h(mg)$$

soit élément du sous-espace $\mathrm{Aut}_{M_P}(\pi)$.

Langlands a démontré grâce à la théorie des séries d'Eisenstein :

Théorème C.14. –

Soit un groupe réductif G sur F.

(i) *Pour tout sous-groupe parabolique P de G et toute représentation automorphe π de $M_P(\mathbb{A})$, la représentation* $\mathrm{Aut}_{G,P}(\pi)$ *de* $G(\mathbb{A})$ *est munie d'un homomorphisme équivariant canonique non nul*

$$\text{“}\sum_{G(F)/P(F)}\text{”} : \mathrm{Aut}_{G,P}(\pi) \to \mathrm{Aut}_G$$

vers l'espace Aut_G *des fonctions automorphes* $G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$.

Si π est unitaire, la représentation $\mathrm{Aut}_{G,P}(\pi)$ *est unitaire ainsi donc que son image dans* Aut_G.

(ii) *Pour toute représentation automorphe [resp. et unitaire] π de $G(\mathbb{A})$, il existe un sous-groupe parabolique $P \subseteq G$ et une représentation automorphe cuspidale [resp. discrète unitaire] π_P de $M_P(\mathbb{A})$ telle que* $\mathrm{Aut}_G(\pi)$ *soit contenu dans l'image de l'homomorphisme*

$$\text{“}\sum_{G(F)/P(F)}\text{”} : \mathrm{Aut}_{G,P}(\pi_P) \to \mathrm{Aut}_G\,.$$

Remarque :

Ce théorème fait comprendre que la décomposition spectrale des fonctions automorphes de carré intégrable

$$h : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

doit faire apparaître

- une somme finie sur des représentants des classes de conjugaison de sous-groupes paraboliques P de G,
- une somme discrète sur des représentants des orbites sous l'action de $\mathrm{Im}\,\widehat{\Lambda}_{M_P}$ des représentations automorphes discrètes unitaires π_P des $M_P(\mathbb{A})$,
- une somme continue sur les $\pi_P \otimes \lambda_P$, $\lambda_P \in \mathrm{Im}\,\widehat{\Lambda}_P$.

$\square$

Ayant exploré la théorie spectrale des fonctions automorphes sur les groupes réductifs, nous allons terminer ce paragraphe par l'énoncé du principe de fonctorialité de Langlands.

Commençons par la définition suivante :

Définition C.15. –

Étant donnés deux groupes réductifs G et H sur le corps global F, on appelle “homomorphisme de transfert” tout automorphisme continu

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \widehat{H} \rtimes \Gamma_F$$

qui fait commuter le triangle :

$$\begin{tikzcd} \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \arrow[rr] \arrow[dr] & & \widehat{H} \rtimes \Gamma_F \arrow[dl] \\ & \Gamma_F & \end{tikzcd}$$

On dit qu'un tel homomorphisme ρ est non ramifié en une place $x \in |F|_f$ si G et H sont non ramifiés en x et que la restriction de ρ à $\widehat{G} \rtimes \Gamma_{F_x}$ se factorise en

$$\widehat{G} \rtimes \Gamma_{F_x}^{\mathrm{nr}} \to \widehat{H} \rtimes \Gamma_{F_x}^{\mathrm{nr}}\,.$$

On note S_ρ le lieu de ramification de ρ : c'est le plus petit sous-ensemble de $|F|$ contenant $|F|_\infty$ tel que ρ est non ramifié en toute place $x \in |F| - S_\rho$. C'est toujours un ensemble fini.

Remarque :

Lorsque $H = \mathrm{GL}_r$ et donc $\widehat{H} = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, ρ consiste en un homomorphisme continu

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})\,.$$

On parle alors de “représentation de transfert” de G.

$\square$

L'isomorphisme de Satake du théorème C.5 implique :

Corollaire C.16. –

Soit un homomorphisme de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \widehat{H} \rtimes \Gamma_F$$

entre deux groupes réductifs G et H sur F.

Alors ρ induit en toute place non ramifiée $x \in |F| - S_\rho$ un homomorphisme d'algèbres

$$\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^H \to \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$$

et, par conséquent, une application $(\rho_x)_*$ de l'ensemble des caractères de $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ dans celui de $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^H$ ou, si l'on préfère, de l'ensemble des représentations lisses admissibles irréductibles non ramifiées de $G(F_x)$ dans celui de $H(F_x)$.

Démonstration :

En effet, ρ induit un homomorphisme

$$\widehat{G} \to \widehat{H}$$

et, en toute place $x \in |F| - S_\rho$, un morphisme

$$\widehat{G}_x \to \widehat{H}_x$$

compatible avec les actions par conjugaison de $\widehat{G}$ et $\widehat{H}$.

La conclusion résulte donc de l'existence des isomorphismes de Satake

$$S_x^G : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}\,[\widehat{G}_x]^{\widehat{G}} \quad \text{et} \quad S_x^H : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^H \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}\,[\widehat{H}_x]^{\widehat{H}}\,.$$

$\square$

Nous pouvons énoncer maintenant le principe de fonctorialité de Langlands :

Conjecture C.17. –

Soient F un corps global, G un groupe réductif sur F, H un groupe réductif quasi-déployé sur F et

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \widehat{H} \rtimes \Gamma_F$$

un homomorphisme de transfert.

Alors, pour toute représentation automorphe [resp. et unitaire] de $G(\mathbb{A})$,

$$\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x \,,$$

il existe une représentation automorphe [resp. et unitaire] de $H(\mathbb{A})$,

$$\pi' = \bigotimes_{x \in |F|} \pi'_x \,,$$

telle que, en toute place $x \in |F| - S_\rho$ *où* π_x *est non ramifiée,* π'_x *est non ramifiée et*

$$\pi'_x = (\rho_x)_* \, (\pi_x) \,.$$

Remarques :

(i) Le principe de fonctorialité est évident dans le cas où H est un tore algébrique T sur F.

En effet, l'homomorphisme de transfert ρ est alors dual d'un homomorphisme

$$T \to G$$

qui se factorise à travers la composante neutre Z_G^0 du centre Z_G de G.

Le transfert de Langlands de G vers $H = T$ consiste alors à associer à toute représentation automorphe π de $G(\mathbb{A})$ la restriction à $T(\mathbb{A})$ de son caractère central $\chi_\pi : Z_G^0(F) \backslash Z_G^0(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^\times$.

(ii) Pour notre part, nous nous intéressons au cas où $G = \mathrm{GL}_r$. Il n'est pas inutile de connaître la généralisation suivante de la proposition C.7 aux groupes linéaires $H = \mathrm{GL}_r$:

Une représentation automorphe cuspidale $\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$ de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ est entièrement caractérisée par la donnée de ses facteurs locaux π_x en presque toute place $x \in |F|$.

De plus, une telle représentation automorphe cuspidale π apparaît avec la multiplicité 1 dans l'espace des fonctions automorphes sur $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$. Autrement dit, la sous-représentation $\mathrm{Aut}_{\mathrm{GL}_r}(\pi)$ est irréductible.

□

Bibliographie

• A. Braverman et D. Kazhdan, 2000, "γ-functions of representations and lifting" (avec un appendice par V. Vologodsky), in "Visions in Mathematics", GAFA 2000 Special Volume, Part I, p. 237-278.

• J.W. Cogdell et I.I. Piatetski-Shapiro, 1994, "Converse theorems for GL_n", Publications mathématiques de l'IHES, numéro 79, p. 157-214.

• R. Godement et H. Jacquet, 1972, "Zeta functions of simple algebras", LNM 260, Springer-Verlag.

• H. Jacquet, I.I. Piatetski-Shapiro et J.A. Shalika, 1983, "Rankin-Selberg convolutions", American journal of mathematics 105, p. 367-464.

• H. Jacquet et J.A. Shalika, 1985, "A lemma on highly ramified ϵ-factors", Mathematische Annalen 271, p. 319-332.

• L. Lafforgue, 2012, "Noyaux du transfert automorphe de Langlands et formules de Poisson non linéaires", prépublication de l'IHÉS numéro M/12/28.

• C. Moeglin et J.-L. Waldspurger, 1993, "Décomposition spectrale et séries d'Eisenstein", Progress in mathematics, volume 113, Birkhäuser.

• J. Tate, 1950, "Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta-functions", thèse de doctorat (Princeton) reproduite dans : J.W.S. Cassels et A. Fröhlich (éditeurs), "Algebraic number theory", Academic Press (1967), p. 305-347.