

Du transfert automorphe de Langlands aux formules de Poisson non linéaires

Laurent LAFFORGUE



Institut des Hautes Études Scientifiques
35, route de Chartres
91440 – Bures-sur-Yvette (France)

Janvier 2014

IHES/M/14/05

Du transfert automorphe de Langlands
aux formules de Poisson non linéaires*

par Laurent Lafforgue

* Je remercie notre secrétaire Cécile Gourgues pour la frappe entière et parfaite du manuscrit.

Dans ce texte, on se place sur un corps de fonctions F muni de son anneau des adèles \mathbb{A} .

Considérant un groupe réductif connexe (pas nécessairement déployé ni même quasi-déployé) G sur F et le groupe réductif complexe \widehat{G} dual de G muni de l'action naturelle du groupe de Galois Γ_F de F , on s'intéresse aux représentations de transfert continues

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}).$$

On montre que le transfert automorphe de G à GL_r via ρ permet de définir un espace de fonctions sur $G(\mathbb{A})$, appelées les ρ -fonctions, muni d'un automorphisme de ρ -transformation de Fourier $f \mapsto \widehat{f}$ puis d'établir une formule de Poisson associée : celle-ci consiste à construire une fonctionnelle linéaire de l'espace des ρ -fonctions qui coïncide avec $f \mapsto \sum_{\gamma \in G(F)} f(\gamma)$ sur les ρ -fonctions à support compact et qui est laissée invariante par la ρ -transformation de Fourier.

La possibilité de définir un tel espace de fonctions muni d'une transformation de Fourier associé à ρ et une fonctionnelle linéaire de cet espace qui étende $f \mapsto \sum_{\gamma \in G(F)} f(\gamma)$ et satisfasse la formule de Poisson avait été conjecturée par A. Braverman et D. Kazhdan.

Comme le transfert automorphe de G à GL_r via une telle représentation de transfert ρ est maintenant connu sur les corps de fonctions F (grâce à [Laurent Lafforgue, 2002] et [Vincent Lafforgue, 2013]), la formule de Poisson sur $G(\mathbb{A})$ associée à toute telle représentation ρ est un théorème.

Le présent texte complète les parties de la prépublication [L. Lafforgue, 2012] (dont il corrige une erreur) et de l'article [L. Lafforgue, 2013] (à paraître au Japanese Journal of Mathematics) consacrées à déduire des "formules de Poisson non linéaires" du transfert automorphe des groupes réductifs G vers les groupes linéaires GL_r .

On a aussi montré dans la prépublication [L. Lafforgue, 2012] que, en sens inverse, les "formules de Poisson non linéaires" sur les groupes réductifs sur un corps de fonctions permettent de construire des "noyaux du transfert" et donc de réaliser le transfert automorphe des groupes réductifs vers les groupes linéaires.

On montrera dans un article en préparation que cette implication en sens inverse vaut aussi sur les corps de nombres.

Décrivons maintenant le contenu du présent texte.

Les paragraphes I à IV sont constitués de rappels.

Le paragraphe I commence par rappeler la structure algébrique de l'ensemble $\{\pi\}_x^G$ des représentations lisses admissibles irréductibles d'un groupe réductif $G(F_x)$ sur le corps localisé F_x de F en une place x . Elle est caractérisée par le fait que les fonctions traces $\pi \mapsto \mathrm{Tr}_\pi(h_x)$ des éléments h_x de l'algèbre \mathcal{H}_x^G des fonctions localement constantes à support compact sur $G(F_x)$ sont des polynômes. Puis, introduisant la mesure de Plancherel $d\pi$, le paragraphe I caractérise les éléments $h_x \in \mathcal{H}_x^G$ par leur décomposition spectrale

$$h_x(\bullet) = \int d\pi \cdot h_{x,\pi}(\bullet)$$

dont les coefficients $h_{x,\pi}(\bullet)$ doivent être des polynômes en π .

Le paragraphe II rappelle le théorème de décomposition spectrale de Langlands appliqué aux fonctions

$$G(F) \backslash G(\mathbb{A}) \ni g_1, g_2 \mapsto \sum_{\gamma \in G(F)} h(g_1^{-1} \gamma g_2)$$

associées à des éléments h de l'algèbre \mathcal{H}^G des fonctions localement constantes à support compact sur $G(\mathbb{A})$.

Le paragraphe III rappelle la transformation de Fourier linéaire des fonctions sur $\mathrm{GL}_r(F_x)$, appelées fonctions de Schwartz, qui se prolongent en des fonctions localement constantes à support compact sur

$M_r(F_x)$. Ces fonctions sont caractérisées par leur décomposition spectrale

$$f_x(\bullet) = |\det(\bullet)|^{-\frac{r}{2}} \cdot \int d\pi \cdot f_{x,\pi}(\bullet) \cdot L_x\left(\pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

dont les coefficients doivent être des fractions rationnelles en π admettant un certain dénominateur commun $L_x\left(\pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$ qui ne dépend que de π . La transformée de Fourier \widehat{f}_x d'une telle fonction f_x est donnée spectralement comme

$$\widehat{f}_x(\bullet) = |\det(\bullet)|^{-\frac{r}{2}} \cdot \int d\pi \cdot f_{x,\pi}((\bullet)^{-1}) \cdot L_x\left(\pi, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \varepsilon_x\left(\pi, \psi_x, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

où les valeurs propres $\varepsilon_x\left(\pi, \psi_x, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$ sont des polynômes inversibles en π .

Le paragraphe IV rappelle la transformation de Fourier globale $f \mapsto \widehat{f}$ des fonctions de Schwartz sur $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \hookrightarrow M_r(\mathbb{A})$ et la formule de Poisson

$$\sum_{\gamma \in M_r(F)} f(\gamma) = \sum_{\gamma \in M_r(F)} \widehat{f}(\gamma)$$

puis sa décomposition spectrale due à Tate dans le cas $r = 1$, et à Godement et Jacquet dans le cas $r \geq 2$. Cette décomposition spectrale s'exprime par le fait que, pour toute représentation automorphe $\pi = \bigotimes_x \pi_x$ de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, la série formelle

$$L(\pi, Z) = \prod_x L_x\left(\pi_x, Z^{\deg(x)}\right)$$

est une fraction rationnelle et satisfait l'équation fonctionnelle

$$L\left(\pi^\vee, \frac{q}{Z}\right) = L(\pi, Z) \cdot \varepsilon(\pi, \psi, Z)$$

avec

$$\varepsilon(\pi, \psi, Z) = \prod_x \varepsilon_x\left(\pi_x, \psi_x, Z^{\deg(x)}\right).$$

Le paragraphe V donne de la fonctionnelle de Poisson

$$f \mapsto \sum_{\gamma \in M_r(F)} f(\gamma)$$

une expression purement multiplicative, c'est-à-dire qui s'exprime uniquement en termes de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ et de son sous-groupe discret $\mathrm{GL}_r(F)$. On choisit pour cela n'importe quelle place x_0 de F en laquelle f admette une factorisation

$$f = f_{x_0} \otimes f^{x_0}$$

par un facteur non ramifié $f_{x_0} : \mathrm{GL}_r(O_{x_0}) \backslash \mathrm{GL}_r(F_{x_0}) / \mathrm{GL}_r(O_{x_0}) \rightarrow \mathbb{C}$, et on écrit f_{x_0} comme la somme d'une série

$$f_{x_0} = \sum_{N, N' \in \mathbb{N}} f_{x_0}^{N, N'}$$

de fonctions $f_{x_0}^{N, N'}$ qui ne dépendent que de la décomposition spectrale de f_{x_0} et qui sont à support compact ainsi que leurs transformées de Fourier. On montre alors, en se fondant sur les propriétés globales des fonctions $L(\pi, Z)$ des représentations automorphes π , que la série formelle

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in \mathrm{GL}_r(F)} \left(f_{x_0}^{N, N'} \otimes f^{x_0} \right)(\gamma)$$

est une fraction rationnelle dont la “valeur régularisée” en $Z = 1$ est égale à

$$S(f) = \sum_{\gamma \in \mathrm{GL}_r(F)} f(\gamma) + \sum_{\gamma \in \mathrm{GL}_r(F)} \widehat{f}(\gamma) - \sum_{\gamma \in M_r(F)} f(\gamma)$$

et vérifie donc la formule de Poisson

$$S(f) = S(\widehat{f}).$$

Le paragraphe VI s’appuie sur les caractérisations spectrales du paragraphe III pour proposer une définition spectrale très générale d’un espace de ρ -fonctions sur $G(F_x)$ muni d’un automorphisme de ρ -transformation de Fourier, en supposant donnés des dénominateurs

$$L_x(\rho, \pi, Z), \quad \pi \in \{\pi\}_x^G,$$

qui sont les inverses de polynômes en π et Z , et des valeurs propres

$$\varepsilon_x(\rho, \pi, Z), \quad \pi \in \{\pi\}_x^G,$$

qui sont des polynômes inversibles en π et $Z^{\pm 1}$.

Ayant choisi un caractère $\det_\rho : G \rightarrow \mathbb{G}_m$, les ρ -fonctions sur $G(F_x)$ sont définies par leur décomposition spectrale

$$f_x(\bullet) = |\det_\rho(\bullet)|^{-\frac{1}{2}} \cdot \int d\pi \cdot f_{x,\pi}(\bullet) \cdot L_x\left(\rho, \pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

dont les coefficients doivent être des fractions rationnelles en π admettant $L_x\left(\rho, \pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$ pour dénominateur commun, et leurs ρ -transformées de Fourier sont définies spectralement par

$$\widehat{f}_x(\bullet) = |\det_\rho(\bullet)|^{-\frac{1}{2}} \cdot \int d\pi \cdot f_{x,\pi}((\bullet)^{-1}) \cdot L_x\left(\rho, \pi, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \varepsilon_x\left(\rho, \pi, q_x^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Le paragraphe VII définit l’espace des ρ -fonctions sur $G(\mathbb{A})$ et son automorphisme de ρ -transformation de Fourier en formant simplement le produit sur toutes les places de F des espaces de ρ -fonctions locales munis de leur automorphisme de ρ -transformation de Fourier locale. On écrit toute ρ -fonction locale non ramifiée

$$f_{x_0} : G(O_{x_0}) \backslash G(F_{x_0}) / G(O_{x_0}) \rightarrow \mathbb{C}$$

comme la somme d’une série

$$f_{x_0} = \sum_{N, N' \in \mathbb{N}} f_{x_0}^{N, N'}$$

de fonctions $f_{x_0}^{N, N'}$ qui ne dépendent que de la décomposition spectrale de f_{x_0} et qui sont à support compact dans $G(F_{x_0})$ ainsi que leur ρ -transformée de Fourier. On dit alors que la formule de Poisson est satisfaite si, pour toute ρ -fonction f sur $G(\mathbb{A})$ factorisée en

$$f = f_{x_0} \otimes f^{x_0},$$

la série formelle

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \left(f_{x_0}^{N, N'} \otimes f^{x_0} \right)(\gamma)$$

est une fraction rationnelle dont la “valeur régularisée” $S(f)$ en $Z = 1$ ne dépend pas du choix de la place x_0 et vérifie

$$S(f) = S(\widehat{f}).$$

Le paragraphe VIII considère le cas où $G = T$ est un tore et où la représentation de transfert $\rho = \rho_T : \widehat{T} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ envoie \widehat{T} dans le tore diagonal $(\mathbb{C}^\times)^r$ et fait agir Γ_F sur \mathbb{C}^r par permutation de ses r vecteurs de base. Cela permet de définir en toute place x de F des facteurs

$$L_x(\rho_T, \chi, Z) \quad \text{et} \quad \varepsilon_x(\rho_T, \chi, Z), \quad \chi \in \{\pi\}_x^T,$$

puis de montrer que l'espace des ρ_T -fonctions sur $T(\mathbb{A})$ muni de sa ρ_T -transformation de Fourier satisfait la formule de Poisson au sens du paragraphe précédent. Dans ce cas, les séries

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} \sum_{\gamma \in G(F)} \left(f_{x_0}^{N, N'} \otimes f^{x_0} \right) (\gamma)$$

sont même absolument convergentes et égales à $S(f)$.

Le paragraphe IX considère le cas d'un groupe réductif G quasi-déployé sur F , donc muni d'une paire de Borel $(T, B = T \cdot N_B)$, dont le tore maximal T est muni d'une représentation de transfert $\rho_T : \widehat{T} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ comme au paragraphe VIII. On suppose donnée en chaque place $x \in |F|$ une famille de facteurs

$$L_x(\rho, \pi, Z) \quad \text{et} \quad \varepsilon_x(\rho, \pi, Z), \quad \pi \in \{\pi\}_x^G,$$

qui coïncident avec les

$$L_x(\rho_T, \chi, Z) \quad \text{et} \quad \varepsilon_x(\rho_T, \chi, Z), \quad \chi \in \{\pi\}_x^T,$$

en les représentations $\pi \in \{\pi\}_x^G$ induites par des caractères $\chi \in \{\pi\}_x^T$. On montre alors que la ρ_T -formule de Poisson pour les ρ_T -fonctions sur $T(\mathbb{A})$ induit pour les ρ -fonctions sur $G(\mathbb{A})$ une forme faible de formule de Poisson obtenue après moyennisation par l'opérateur

$$\int_{N_B(F) \backslash N_B(\mathbb{A})} du.$$

Enfin, le paragraphe X considère un groupe réductif G sur F et une représentation de transfert $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, sous la seule hypothèse d'existence d'un caractère

$$\det_G : G \rightarrow \mathbb{G}_m$$

dont le cocaractère central dual $\widehat{\det}_G : \mathbb{C}^\times \rightarrow \widehat{G}$ agisse sur \mathbb{C}^r par $z \mapsto z$. On montre que le transfert automorphe de G à GL_r via ρ permet de définir en toute place x de F des facteurs

$$L_x(\rho, \pi, Z) \quad \text{et} \quad \varepsilon_x(\rho, \pi, Z), \quad \pi \in \{\pi\}_x^G,$$

puis d'établir que l'espace associé des ρ -fonctions sur $G(\mathbb{A})$ muni de la ρ -transformation de Fourier satisfait la formule de Poisson au sens du paragraphe VII.

De plus, la fonctionnelle

$$f \mapsto \sum_{\gamma \in G(F)} f(\gamma) + \sum_{\gamma \in G(F)} \widehat{f}(\gamma) - S(f),$$

qui satisfait elle-même la formule de Poisson, coïncide avec l'évaluation

$$f \mapsto \sum_{\gamma \in G(F)} f(\gamma)$$

en toutes les ρ -fonctions produits $f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x$ dont au moins un facteur local non ramifié f_x est supporté par une partie compacte de $G(F_x)$.

Sommaire

- I. Décomposition spectrale locale en une place ultramétrique : rappels
- II. Décomposition spectrale globale : rappels
- III. Transformation de Fourier linéaire locale : rappels
- IV. Transformation de Fourier linéaire globale et formule de Poisson associée : derniers rappels
- V. Expression multiplicative de la fonctionnelle de Poisson linéaire
- VI. Transformations de Fourier locales non linéaires
- VII. Transformations de Fourier globales et formules de Poisson non linéaires
- VIII. Le cas des tores
- IX. Conséquences du cas des tores pour les groupes réductifs quasi-déployés
- X. Transfert automorphe et formules de Poisson non linéaires

Références bibliographiques

I. Décomposition spectrale locale en une place ultramétrique : rappels

Dans ce paragraphe, on considère un groupe réductif G sur un corps local ultramétrique F_x .
On note O_x l'anneau des entiers de F_x , q_x le cardinal fini du corps résiduel κ_x de F_x et

$$|\bullet|_x : F_x \rightarrow q_x^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$$

la norme ultramétrique par laquelle F_x^\times agit sur les mesures additives de F_x .

On suppose que G est connexe mais pas nécessairement déployé ni même quasi-déployé sur F_x .

Définition I.1. –

Une représentation complexe π de $G(F_x)$ est dite “lisse admissible” si

- pour tout sous-groupe ouvert compact K de $G(F_x)$,

$$\pi_K = \{v \in \pi \mid K \cdot v = v\}$$

est de dimension finie sur \mathbb{C} ,

- π est la réunion filtrante de ses sous-espaces π_K .

□

Le groupe topologique localement compact $G(F_x)$ est unimodulaire et peut être muni d'une mesure bi-invariante dg_x . Soient alors \mathcal{H}_x^G l'algèbre de convolution des fonctions localement constantes à support compact

$$h_x : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

et, pour tout $K \subset G(F_x)$, $\mathcal{H}_{x,K}^G$ sa sous-algèbre des fonctions à support compact

$$K \backslash G(F_x) / K \rightarrow \mathbb{C}.$$

Pour toute représentation lisse admissible π de $G(F_x)$, chaque π_K est une représentation de dimension finie de $\mathcal{H}_{x,K}^G$, et $\pi = \varinjlim \pi_K$ peut être vue comme une représentation de $\mathcal{H}_x^G = \varinjlim \mathcal{H}_{x,K}^G$.

Notons $\{\pi\}_x^G$ l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations lisses admissibles irréductibles de $G(F_x)$ et, pour tout $K \subset G(F_x)$, $\{\pi\}_{x,K}^G$ le sous-ensemble des π telles que $\pi_K \neq 0$.

On a :

Lemme I.2. –

Pour tout sous-groupe ouvert compact $K \subset G(F_x)$ et toute représentation irréductible $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^G$, la représentation de dimension finie $\pi_K \neq 0$ de $\mathcal{H}_{x,K}^G$ est irréductible.

Réciproquement, toute représentation de dimension finie irréductible de $\mathcal{H}_{x,K}^G$ provient d'une représentation irréductible $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^G$, unique à unique isomorphisme près. □

Il résulte de ce lemme que les fonctionnelles linéaires

$$\mathcal{H}_{x,K}^G \ni h_x \mapsto \text{Tr}_\pi(h_x) = \text{Tr}_{\pi_K}(h_x)$$

associées aux représentations $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^G$ sont linéairement indépendantes les unes des autres. En particulier, elles caractérisent les éléments $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^G$.

Pour tout $K \subset G(F_x)$, on notera $A_{x,K}^G$ l'algèbre de fonctions

$$\{\pi\}_{x,K}^G \rightarrow \mathbb{C}$$

engendrée par les fonctions traces

$$\{\pi\}_{x,K}^G \ni \pi \mapsto \text{Tr}_\pi(h_x)$$

associées aux éléments $h_x \in \mathcal{H}_{x,K}^G$.

On a :

Théorème I.3. –

- (i) Pour tout $K \subset G(F_x)$, l'algèbre $A_{x,K}^G$ est un produit fini d'algèbres de type fini et intègres sur \mathbb{C} . Autrement dit, $\text{Spec } A_{x,K}^G$ est réunion disjointe finie de variétés algébriques affines intègres sur \mathbb{C} .
- (ii) Chaque $\{\pi\}_{x,K}^G$ s'identifie à un ouvert de Zariski du spectre maximal de $A_{x,K}^G$.
- (iii) La réunion filtrante $\{\pi\}_x^G = \varinjlim \{\pi\}_{x,K}^G$ s'écrit comme une réunion disjointe de variétés algébriques intègres sur \mathbb{C} , de telle façon que chaque $\{\pi\}_{x,K}^G$ est une réunion finie de composantes connexes.

□

On notera $[\pi]$ le schéma intègre de type fini sur \mathbb{C} qui est la composante connexe de n'importe quelle $\pi \in \{\pi\}_x^G$, et $A_{[\pi]}^G$ l'algèbre de fonctions $[\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ image des $A_{x,K}^G$.

Soit Λ_x^G le groupe des caractères continus

$$G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

qui sont triviaux sur tout sous-groupe compact de $G(F_x)$. Comme le plus grand quotient abélien $G^{\text{ab}} = G/G^{\text{der}}$ de G est un tore, que $G^{\text{ab}}(F_x)$ admet un plus grand sous-groupe compact et que son quotient par celui-ci est un réseau (isomorphe à une puissance finie de \mathbb{Z}), le groupe Λ_x^G est un tore complexe (isomorphe à une puissance finie de \mathbb{C}^\times) et son sous-groupe $\text{Im } \Lambda_x^G$ des caractères unitaires est un tore réel compact (isomorphe à la puissance correspondante du cercle unité).

Le tore complexe Λ_x^G s'identifie à une composante connexe de $\{\pi\}_x^G$.

D'autre part, il agit par le produit tensoriel

$$(\chi, \pi) \mapsto \pi \otimes \chi$$

sur chaque composante connexe de $\{\pi\}_x^G$.

On dit qu'une représentation lisse admissible irréductible $\pi \in \{\pi\}_x^G$ est "discrète" si sa composante connexe $[\pi]$ se réduit à son orbite $\Lambda_x^G \cdot \pi$ sous l'action du tore Λ_x^G . On peut montrer que toute représentation discrète π est unitaire à multiplication près par un caractère de Λ_x^G .

Si P est un sous-groupe parabolique de G défini sur F_x et M un sous-groupe de Levy de P , le tore Λ_x^M contient en particulier le caractère modulaire

$$|\delta_P(\bullet)|_x : M(F_x) \rightarrow q_x^{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}^\times$$

par lequel $M(F_x)$ agit sur les mesures invariantes du radical unipotent $N_P(F_x)$ de $P(F_x)$.

Si π est une représentation lisse admissible de $M(F_x)$, on note

$$\text{Ind}_P^G(\pi) \quad \text{ou} \quad \text{Ind}_P^G(M, \pi)$$

la représentation lisse admissible de $G(F_x)$ induite de

$$\pi \otimes |\delta_P(\bullet)|_x^{1/2}$$

considérée comme une représentation de $P(F_x)$. La représentation $\text{Ind}_P^G(\pi)$ admet une suite de composition finie par des représentations lisses admissibles irréductibles s'il en est ainsi de π . De même, la présence du facteur $|\delta_P(\bullet)|_x^{1/2}$ dans la définition assure que $\text{Ind}_P^G(\pi)$ est unitaire si π est unitaire et, dans ce cas, $\text{Ind}_P^G(\pi)$ est irréductible si et seulement si π est irréductible.

La proposition suivante précise la structure algébrique des composantes connexes $[\pi]$ des $\pi \in \{\pi\}_x^G$:

Proposition I.4. –

- (i) Pour P, M et $\pi \in \{\pi\}_x^M$ comme ci-dessus, la suite de composition de la représentation $\text{Ind}_P^G(\pi)$ ne dépend que de la classe de conjugaison de (M, π) par $G(F_x)$.

En particulier, elle ne dépend pas de P et elle est invariante par l'action sur $\{\pi\}_x^M$ du groupe fini

$$W_M^G = \{g \in G(F_x) \mid g \cdot M \cdot g^{-1} = M\} / M(F_x).$$

- (ii) Réciproquement, pour toute $\pi \in \{\pi\}_x^G$, il existe P, M comme ci-dessus et une représentation discrète $\pi_0 \in \{\pi\}_x^M$ telle que $\pi \cong \text{Ind}_P^G(\pi_0)$. La paire (M, π_0) est unique à conjugaison près par $G(F_x)$ et peut être appelée le support discret de π .

Si $\text{Fixe}(M, \pi_0)$ désigne le stabilisateur de π_0 dans le groupe $\Lambda_x^M \rtimes W_M^G$, on a

$$A_{[\pi]}^G = \left(A_{[\pi_0]}^M \right)^{\text{Fixe}(M, \pi_0)},$$

si bien que $[\pi]$ s'identifie à un ouvert de Zariski du quotient de $[\pi_0]$ par l'action du groupe fini $\text{Fixe}(M, \pi_0)$.

- (iii) Une représentation $\pi \in \{\pi\}_x^G$ est unitaire si son support discret (M, π_0) est unitaire.

Alors la sous-variété algébrique réelle

$$\text{Im}[\pi] \subset [\pi]$$

des représentations unitaires contient le quotient de

$$\text{Im}[\pi_0] = \text{Im} \Lambda_x^M \cdot \pi_0$$

par l'action du groupe fini $\text{Fixe}(M, \pi_0)$.

□

Pour toute représentation lisse admissible π de $G(F_x)$, on appelle “représentation contragrédiente de π ” et on note π^\vee la représentation lisse admissible de $G(F_x)$ constituée des formes linéaires

$$v^\vee : \pi \mapsto \mathbb{C}$$

qui sont invariantes par un sous-groupe ouvert compact de $G(F_x)$. On vérifie que pour toute paire (P, M) comme plus haut, le foncteur

$$\pi \mapsto \text{Ind}_P^G(\pi)$$

commute avec la formation des représentations contragrédientes.

Pour toute représentation lisse admissible π de $G(F_x)$, on appelle “coefficients matriciels de π ” les fonctions sur $G(F_x)$ de la forme

$$G(F_x) \ni g \mapsto \langle v^\vee, g \cdot v \rangle = \langle g^{-1} \cdot v^\vee, v \rangle, \quad v \in \pi, \quad v^\vee \in \pi^\vee,$$

ou, plus généralement, les combinaisons linéaires de telles fonctions. On note qu'une fonction $g \mapsto \varphi(g)$ est un coefficient matriciel de π si et seulement si la fonction $g \mapsto \varphi(g^{-1})$ est un coefficient matriciel de π^\vee .

Toute représentation irréductible $\pi \in \{\pi\}_x^G$ possède un caractère central

$$\chi_\pi : Z_G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

par lequel le centre $Z_G(F_x)$ de $G(F_x)$ agit sur l'espace de π , si bien que les coefficients matriciels φ de π vérifient tous

$$\varphi(z \cdot g) = \chi_\pi(z) \cdot \varphi(g), \quad \forall z \in Z_G(F_x), \quad \forall g \in G(F_x).$$

Une telle représentation π est dite "supercuspidale" si ses coefficients matriciels sont à support compact modulo $Z_G(F_x)$. Elle est dite "de carré intégrable" si ses coefficients matriciels sont de carré intégrable modulo $Z_G(F_x)$.

Les représentations supercuspidales sont de carré intégrable mais il existe en général des représentations de carré intégrable qui ne sont pas supercuspidales.

De même, on montre que les représentations de carré intégrable sont discrètes mais il existe en général des représentations discrètes qui ne sont pas de carré intégrable.

On a cependant :

Proposition I.5. –

Pour toute représentation $\pi \in \{\pi\}_x^G$, il existe un sous-groupe parabolique P de G défini sur F_x , un sous-groupe de Levy M de P et une représentation supercuspidale π_0 de $M(F_x)$ telle que π soit isomorphe à l'un des sous-quotients irréductibles de $\text{Ind}_P^G(\pi_0)$.

La paire (M, π_0) est unique à conjugaison près par $G(F_x)$ et peut être appelée le support supercuspidal de π .

□

Si G est quasi-déployé sur F_x , c'est-à-dire possède une paire de Borel (T_x, B_x) définie sur F_x , on peut appeler "de type torique" les représentations irréductibles $\pi \in \{\pi\}_x^G$ dont le support supercuspidal est constitué de T_x et d'un caractère $\chi : T_x(F_x) \rightarrow \mathbb{C}^\times$. Le caractère χ de support est alors uniquement déterminé modulo l'action du groupe de Weyl F_x -rationnel W_x^G constitué des éléments du groupe de Weyl W^G de G fixés par l'action du groupe de Galois Γ_{F_x} de F_x .

On rappelle que G est dit "non ramifié" sur F_x s'il est quasi-déployé sur F_x et si l'action de Γ_{F_x} sur la donnée radicielle de G ou, ce qui revient au même, sur le groupe réductif complexe \widehat{G} dual de G , se factorise à travers son quotient non ramifié $\Gamma_{F_x}^{\text{nr}}$ engendré topologiquement par l'élément de Frobenius σ_x . Dans ce cas, G s'étend canoniquement en un schéma en groupes réductifs au-dessus de $\text{Spec}(O_x)$ et on peut introduire le sous-groupe $G(O_x)$ de $G(F_x)$; c'est un sous-groupe compact ouvert maximal. On appelle alors "sphériques" les fonctions sur $G(F_x)$ bi-invariantes par $G(O_x)$ et, normalisant la mesure de Haar dg_x de $G(F_x)$ par la condition $\text{vol}(G(O_x)) = 1$, on note $\mathcal{H}_{x, \emptyset}^G = \mathcal{H}_{x, G(O_x)}^G$ l'algèbre de convolution des fonctions sphériques à support compact. Enfin, on appelle "non ramifiées" les représentations éléments de $\{\pi\}_{x, \emptyset}^G = \{\pi\}_{x, G(O_x)}^G$ qui admettent des vecteurs non nuls invariants par $G(O_x)$.

On a le théorème de Satake :

Théorème I.6. –

Supposons que G est non ramifié sur F_x et considérons une paire de Borel (T_x, B_x) de G définie sur F_x . Alors :

- (i) *L'algèbre sphérique $\mathcal{H}_{x, \emptyset}^G$ admet un isomorphisme naturel*

$$S_x^G : \mathcal{H}_{x, \emptyset}^G \xrightarrow{\sim} (\mathcal{H}_{x, \emptyset}^{T_x})^{W_x^G}$$

vers l'algèbre des fonctions sphériques sur $T_x(F_x)$ invariantes par le groupe de Weyl F_x -rationnel W_x^G .
En particulier, $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ est commutative et s'identifie à l'algèbre $A_{x,\emptyset}^G = A_{x,G(O_x)}^G$ des fonctions traces des fonctions sphériques.

- (ii) Se donner une représentation non ramifiée $\pi \in \{\pi\}_{x,\emptyset}^G$ équivaut à se donner un caractère

$$(\mathcal{H}_{x,\emptyset}^{T_x})^{W_x^G} \rightarrow \mathbb{C}$$

ou, ce qui revient au même, un caractère non ramifié

$$z_\pi : T_x(F_x)/T_x(O_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

uniquement déterminé modulo l'action de W_x^G .

Dans cette correspondance, (T_x, z_π) est le support supercuspidal de π .

Il est son support discret, soit $\pi \cong \text{Ind}_{B_x}^G(z_\pi)$, si et seulement si z_π appartient à un ouvert de Zariski du tore complexe $[z_\pi] = \Lambda_x^{T_x}$ qui contient le sous-tore réel compact $\text{Im } \Lambda_x^{T_x}$ des caractères unitaires.

- (iii) Notant \widehat{G}_x la fibre du produit semi-direct

$$\widehat{G} \rtimes \Gamma_{F_x}^{\text{nr}}$$

au-dessus de l'élément de Frobenius $\sigma_x \in \Gamma_{F_x}^{\text{nr}}$, munie de l'action par conjugaison de \widehat{G} , l'isomorphisme de Satake S_x^G de (i) s'écrit aussi comme un isomorphisme

$$S_x^G : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G \rightarrow \mathbb{C}[\widehat{G}_x]^{\widehat{G}}$$

vers l'algèbre des fonctions polynomiales sur \widehat{G}_x qui sont invariantes par conjugaison par \widehat{G} .

Remarque :

Il résulte de (ii) que les représentations non ramifiées $\pi \in \{\pi\}_{x,\emptyset}^G$ sont “de type torique”. □

Revenons à un groupe réductif arbitraire G sur F_x .

On note $\text{Im } \{\pi\}_x^G$ la sous-variété algébrique réelle des représentations $\pi \in \{\pi\}_x^G$ qui sont unitaires. Pour tout sous-groupe ouvert compact $K \subset G(F_x)$, la sous-variété algébrique réelle $\text{Im } \{\pi\}_{x,K}^G$ des représentations unitaires de $\{\pi\}_{x,K}^G$ est une réunion finie de composantes connexes de $\text{Im } \{\pi\}_x^G$. Pour toute $\pi \in \text{Im } \{\pi\}_x^G$, et si (M, π_0) désigne son support discret, sa composante connexe $\text{Im } [\pi]$ contient le quotient de

$$\text{Im } [\pi_0] = \text{Im } \Lambda_x^M \cdot \pi_0$$

par l'action du groupe fini W_M^G .

On a le théorème de Plancherel :

Théorème I.7. –

- (i) Il existe sur $\text{Im } \{\pi\}_x^G$ une unique mesure $d\pi$, appelée mesure de Plancherel, telle que, pour tout $K \subset G(F_x)$ et toute $h_x \in \mathcal{H}_{x,K}^G$, on ait

$$h_x(1) = \int_{\text{Im } \{\pi\}_{x,K}^G} d\pi \cdot \text{Tr}_\pi(h_x).$$

- (ii) La mesure de Plancherel $d\pi$ est supportée par les représentations unitaires $\pi \in \{\pi\}_x^G$ qui sont “tempérées” au sens que leur support discret (M, π_0) est “de carré intégrable” et unitaire.

(iii) Si $\pi \in \text{Im} \{\pi\}_x^G$ est une représentation tempérée de support discret (M, π_0) , la restriction de la mesure de Plancherel $d\pi$ à

$$\text{Im} [\pi_0]/W_M^G \subset \text{Im} [\pi]$$

est de la forme

$$d\pi = R_{\pi_0}(\bullet) \cdot d\pi_0$$

où :

- $d\pi_0$ désigne une mesure sur $\text{Im} [\pi_0] = \text{Im} \Lambda_x^M \cdot \pi_0$ invariante par $\text{Im} \Lambda_x^M$ et donc aussi par W_M^G ,
- $R_{\pi_0}(\bullet)$ est une fonction rationnelle sur $[\pi_0] = \Lambda_x^M \cdot \pi_0$ qui est invariante par W_M^G et dont les pôles sont simples et ne rencontrent pas $\text{Im} [\pi_0]$,
- la variété complexe $[\pi]$ s'identifie à l'ouvert de Zariski de $[\pi_0]/W_M^G$ complémentaire des pôles de la fraction rationnelle $R_{\pi_0}(\bullet)$.

□

Disons qu'une fonction sur une composante connexe $[\pi_1]$ de $\{\pi\}_x^G$ est "polynomiale" si elle est élément de l'algèbre engendrée par les fonctions traces $\pi \mapsto \text{Tr}_\pi(h_x)$, $h_x \in \mathcal{H}_x^G$.

Si $\pi_0 \in \{\pi\}_x^M$ est une représentation supercuspidale d'un sous-groupe de Levy M de G et $[\pi_1] \subset \{\pi\}_x^G$ est l'unique classe des représentations dont le support discret est contenu dans $[\pi_0]$, $[\pi_1]$ s'identifie à un ouvert de Zariski de $[\pi_0]/W_M^G$ et toute fonction polynomiale sur $[\pi_1]$ se prolonge à $[\pi_0]/W_M^G$ tout entier. Si $[\pi_2] \subset \{\pi\}_x^G$ est n'importe quelle autre classe de représentations dont le support supercuspidal est contenu dans $[\pi_0]$, l'application de passage à ce support définit une immersion localement fermée de $[\pi_2]$ dans $[\pi_0]/W_M^G$. Cela permet de parler des spécialisations en les points de $[\pi_2]$ des fonctions polynomiales sur $[\pi_1]$.

En remplaçant les fonctions h_x par leurs translatées $h_x^g = h_x(\bullet g)$ ou ${}^g h_x = h_x(g \bullet)$, on démontre à partir du théorème ci-dessus :

Théorème I.8. –

Pour tout $K \subset G(F_x)$ et si $d\pi$ désigne toujours la mesure de Plancherel sur $\text{Im} \{\pi\}_x^G$, on a :

(i) Toute fonction $h_x \in \mathcal{H}_{x,K}^G$ s'écrit sous la forme

$$h_x(g) = \int_{\text{Im} \{\pi\}_{x,K}^G} d\pi \cdot h_{x,\pi}(g), \quad \forall g \in G(F_x),$$

où :

- pour tout $g \in G(F_x)$,

$$\pi \mapsto h_{x,\pi}(g)$$

est une fonction polynomiale sur $\{\pi\}_{x,K}^G$,

- pour toute $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^G$, la fonction sur $G(F_x)$

$$g \mapsto h_{x,\pi}(g)$$

est élément de l'espace $\pi_K^\vee \boxtimes \pi_K$ des "coefficients matriciels" de π bi-invariants par K ,

- si $\pi_2 \in \{\pi\}_{x,K}^G$, (M, π_0) est le support supercuspidal de π_2 et $[\pi_1] \subset \{\pi\}_{x,K}^G$ est l'unique classe des représentations dont le support discret est contenu dans $[\pi_0]$, la fonction

$$G(F_x) \ni g \mapsto h_{x,\pi_2}(g)$$

est l'image de la famille des spécialisations en π_2 des fonctions polynomiales

$$[\pi_1] \ni \pi \mapsto h_{x,\pi}(g), \quad g \in G(F_x),$$

par l'opérateur linéaire de restriction de l'action de \mathcal{H}_x^G au sous-quotient π_2 de $\text{Ind}_P^G(\pi_0)$.

(ii) Cette décomposition spectrale de toute fonction $h_x \in \mathcal{H}_{x,K}^G$ est unique, et on a nécessairement

$$h_{x,\pi}(g) = \mathrm{Tr}_\pi(h_x^g) = \mathrm{Tr}_\pi({}^g h_x), \quad \forall \pi, \quad \forall g.$$

(iii) Réciproquement, pour toute famille de fonctions

$$g \mapsto h_{x,\pi}(g), \quad \pi \in \{\pi\}_{x,K}^G,$$

qui vérifie les conditions de (i), l'intégrale

$$g \mapsto \int_{\mathrm{Im}\{\pi\}_{x,K}^G} d\pi \cdot h_{x,\pi}(g)$$

définit un élément de $\mathcal{H}_{x,K}^G$, c'est-à-dire une fonction bi-invariante

$$h_x : K \backslash G(F_x) / K \rightarrow \mathbb{C}$$

dont le support est compact. □

On déduit de ce théorème :

Corollaire I.9. –

Considérons un sous-groupe ouvert compact $K \subset G(F_x)$ et une fonction polynomiale

$$\{\pi\}_{x,K}^G \ni \pi \mapsto \gamma(\pi)$$

dont les valeurs $\gamma(\pi)$ ne dépendent que du support supercuspidal de π .

Alors, pour toute fonction $h_x \in \mathcal{H}_{x,K}^G$ décomposée spectralement sous la forme

$$h_x(g) = \int_{\mathrm{Im}\{\pi\}_{x,K}^G} d\pi \cdot h_{x,\pi}(g), \quad g \in G(F_x),$$

l'intégrale

$$g \mapsto \int_{\mathrm{Im}\{\pi\}_{x,K}^G} d\pi \cdot \gamma(\pi) \cdot h_{x,\pi}(g), \quad g \in G(F_x),$$

définit un élément de $\mathcal{H}_{x,K}^G$, autrement dit a un support compact. □

II. Décomposition spectrale globale : rappels

Dans ce paragraphe, on considère un groupe réductif G sur un corps de fonctions F dont le sous-corps des constantes est un corps fini \mathbb{F}_q à q éléments.

On note $|F|$ l'ensemble des places de F , F_x le corps local ultramétrique complété de F en chaque place $x \in |F|$, O_x son anneau des entiers, $q_x = q^{\deg(x)}$ le cardinal du corps résiduel κ_x de O_x , et

$$|\bullet|_x : F_x \rightarrow q_x^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$$

la norme ultramétrique par laquelle F_x^\times agit sur les mesures additives de F_x . Enfin, on note

$$\mathbb{A} = \prod_{x \in |F|} F_x$$

l'anneau topologique des adèles de F ,

$$O_{\mathbb{A}} = \prod_{x \in |F|} O_x$$

son sous-anneau des entiers, et

$$|\bullet| = \prod_{x \in |F|} |\bullet|_x : \mathbb{A}^\times \rightarrow q^{\mathbb{Z}}$$

la norme produit qui vérifie

$$|\gamma| = 1, \quad \forall \gamma \in F^\times.$$

Comme au paragraphe précédent, le groupe réductif G est supposé connexe mais pas nécessairement déployé ni même quasi-déployé sur le corps de base F . On choisit une paire (T, B) constituée d'un sous-tore T de G , défini sur F et maximal pour cette propriété, et d'un sous-groupe parabolique B contenant T de G , défini sur F et minimal pour cette propriété. Le centralisateur de T dans G est un sous-groupe de Levy M_B de B . Les sous-groupes paraboliques P [de Levy M] de G définis sur F et contenant B [resp. M_B] sont appelés standard. On sait que tout sous-groupe parabolique de G défini sur F est conjugué par $G(F)$ à un unique sous-groupe parabolique standard, et que tout sous-groupe parabolique standard P possède un unique sous-groupe de Levy standard M_P .

Le groupe réductif G devient quasi-déployé et même non ramifié sur le corps localisé F_x en presque toute place $x \in |F|$; autrement dit, l'ensemble S_G des places $x \in |F|$ en lesquelles G est ramifié est fini. En toute place $x \in |F| - S_G$, on choisit une paire de Borel (T_x, B_x) de G définie sur F_x et telle que $T \subset T_x$, $B_x \subset B$. Le groupe G sur F_x muni de la paire de Borel (T_x, B_x) se prolonge canoniquement en un schéma en groupes réductifs sur O_x , si bien que l'on dispose du sous-groupe ouvert compact maximal

$$K_{x, \emptyset} = G(O_x) \subset G(F_x).$$

Il vérifie la propriété d'Iwasawa

$$G(F_x) = B_x(F_x) \cdot G(O_x)$$

et a fortiori

$$G(F_x) = B(F_x) \cdot K_{x, \emptyset}.$$

En les places restantes $x \in S_G$, il est également possible de choisir un sous-groupe ouvert compact maximal

$$K_{x, \emptyset} \subset G(F_x)$$

tel que

$$G(F_x) = B(F_x) \cdot K_{x, \emptyset}.$$

En toute place $x \in |F|$, on munit $G(F_x)$ de la mesure de Haar dg_x qui attribue le volume 1 à $K_{x,\emptyset}$, et on note \mathcal{H}_x^G l'algèbre de convolution des fonctions localement constantes à support compact sur $G(F_x)$. De même, on note

$$\mathcal{H}^G = \bigotimes_{x \in |F|} \mathcal{H}_x^G$$

l'algèbre de convolution des fonctions localement constantes à support compact sur le groupe topologique $G(\mathbb{A})$ muni de la mesure produit $dg = \bigotimes_{x \in |F|} dg_x$.

Pour tout sous-groupe ouvert compact produit

$$K = \prod_{x \in |F|} K_x$$

de $G(\mathbb{A})$, dont les facteurs $K_x \subset G(F_x)$ sont nécessairement égaux à $K_{x,\emptyset}$ en presque toute place $x \in |F|$, on note

$$\mathcal{H}_K^G = \bigotimes_{x \in |F|} \mathcal{H}_{x,K_x}^G$$

la sous-algèbre de convolution des fonctions à support compact dans $G(\mathbb{A})$ bi-invariantes par K .

Comme dans le cas local, une représentation complexe π de $G(\mathbb{A})$ est dite "lisse admissible" si

- pour tout $K \subset G(\mathbb{A})$ comme ci-dessus

$$\pi_K = \{v \in \pi \mid K \cdot v = v\}$$

est de dimension finie sur \mathbb{C} ,

- π est la réunion filtrante de ses sous-espaces π_K .

Alors chaque π_K est une représentation de dimension finie de \mathcal{H}_K^G , et $\pi = \varinjlim \pi_K$ peut être vue comme une représentation de $\mathcal{H}^G = \varinjlim \mathcal{H}_K^G$.

Les représentations lisses admissibles irréductibles sont les produits

$$\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$$

de représentations lisses admissibles irréductibles π_x des groupes locaux $G(F_x)$, qui sont non ramifiées en presque toute place $x \in |F| - S_G$. Elles possèdent des caractères centraux

$$\chi_\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \chi_{\pi_x} : Z_G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

par lesquels le centre $Z_G(\mathbb{A}) = \prod_{x \in |F|} Z_G(F_x)$ de $G(\mathbb{A})$ agit sur les espaces π .

Le sous-groupe $G(F)$ du groupe topologique $G(\mathbb{A})$ est discret. Cela permet de considérer l'espace topologique quotient $G(F) \backslash G(\mathbb{A})$ muni de l'action à droite de $G(\mathbb{A})$, puis l'espace des fonctions automorphes lisses (c'est-à-dire invariantes à droite par un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A})$)

$$G(F) \backslash G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C},$$

muni de l'action de $G(\mathbb{A})$ par translation à droite ou, ce qui revient au même, de l'action de \mathcal{H}^G par convolution à droite. On rappelle :

Définition II.1. –

- (i) Une représentation lisse admissible irréductible π de $G(\mathbb{A})$ est dite “automorphe” si elle admet une réalisation dans l’espace des fonctions automorphes lisses

$$G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}.$$

- (ii) Une représentation automorphe π de $G(\mathbb{A})$ est dite “cuspidale” si elle admet une réalisation dans le sous-espace des fonctions automorphes lisses

$$\varphi : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

qui sont “cuspidales” au sens que, pour tout sous-groupe parabolique non-trivial P de G défini sur F , de radical unipotent N_P , on a

$$\int_{N_P(F)\backslash N_P(\mathbb{A})} du_P \cdot \varphi(u_P \cdot g) = 0, \quad \forall g \in G(\mathbb{A}),$$

où du_P désigne une mesure invariante par $N_P(\mathbb{A})$ sur le quotient compact $N_P(F)\backslash N_P(\mathbb{A})$.

- (iii) Une représentation automorphe π de $G(\mathbb{A})$, de caractère central $\chi_\pi : Z_G(F)\backslash Z_G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}^\times$, est dite “de carré intégrable” si elle apparaît comme facteur direct de l’espace $L_{\chi_\pi}^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ des fonctions automorphes lisses

$$\varphi : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

telles que

$$\varphi(z \cdot g) = \chi_\pi(z) \cdot \varphi(g), \quad \forall z \in Z_G(\mathbb{A}), \quad \forall g \in G(\mathbb{A}),$$

et qui sont de carré intégrable modulo $Z_G(\mathbb{A})$.

Remarques :

- (i) On notera $\{\pi\}_{\text{aut}}^G$ [resp. $\{\pi\}_{\text{cusp}}^G$, resp. $\{\pi\}_{\text{int}}^G$] l’ensemble des classes d’isomorphie de représentations automorphes [resp. cuspidales, resp. de carré intégrable] de $G(\mathbb{A})$, et $\text{Im}\{\pi\}_{\text{aut}}^G$, $\text{Im}\{\pi\}_{\text{cusp}}^G$, $\text{Im}\{\pi\}_{\text{int}}^G$ les sous-ensembles des représentations unitaires.
- (ii) On montre que toute fonction automorphe lisse cuspidale $G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ est à support compact modulo $Z_G(\mathbb{A})$. Il en résulte que toute représentation automorphe cuspidale est de carré intégrable.
- (iii) Une représentation automorphe de carré intégrable π est unitaire si et seulement si son caractère central χ_π est unitaire.

□

On note Λ^G le groupe des caractères de $G(\mathbb{A})$ qui sont triviaux sur $G(F)$ et sur tout sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A})$. Le plus grand quotient abélien $G^{\text{ab}} = G/G^{\text{der}}$ de G est un tore sur F , et Λ^G s’identifie au groupe des caractères de $G^{\text{ab}}(F)\backslash G^{\text{ab}}(\mathbb{A})$ qui sont triviaux sur son plus grand sous-groupe ouvert compact. Or le quotient de $G^{\text{ab}}(F)\backslash G^{\text{ab}}(\mathbb{A})$ par ce sous-groupe est un réseau, isomorphe à une puissance finie de \mathbb{Z} . Donc Λ^G a la structure d’un tore complexe, isomorphe à une puissance finie de \mathbb{C}^\times , et son sous-groupe $\text{Im}\Lambda^G$ des caractères unitaires a la structure d’une sous-variété réelle compacte, isomorphe à la puissance correspondante du cercle unité.

Les caractères $\lambda \in \Lambda^G$ agissent sur $\{\pi\}_{\text{aut}}^G$ et ses sous-ensembles $\{\pi\}_{\text{cusp}}^G$, $\{\pi\}_{\text{int}}^G$ par

$$(\lambda, \pi) \mapsto \pi \otimes \lambda = \pi_\lambda.$$

Si P est un sous-groupe parabolique de G défini sur F , de radical unipotent N_P et de sous-groupe de Levy M_P , on note

$$\delta_P : P \rightarrow P/N_P \cong M_P \rightarrow \mathbb{G}_m$$

le caractère modulaire par lequel P ou M_P agissent sur la puissance extérieure maximale de l'espace Lie N_P .

Si de plus π est une représentation lisse admissible de $M_P(\mathbb{A})$, on note

$$\mathrm{Ind}_P^G(\pi)$$

la représentation lisse admissible de $G(\mathbb{A})$ induite par

$$\pi \otimes |\delta_P(\bullet)|^{1/2}$$

considérée comme une représentation de $P(\mathbb{A})$. Si π admet une suite de composition finie par des représentations lisses admissibles irréductibles, il en est de même de $\mathrm{Ind}_P^G(\pi)$. La présence du facteur $|\delta_P(\bullet)|^{1/2}$ dans la définition assure que $\mathrm{Ind}_P^G(\pi)$ est unitaire si π est unitaire et, dans ce cas, $\mathrm{Ind}_P^G(\pi)$ est irréductible si π est irréductible.

La théorie des séries d'Eisenstein a permis à Langlands de démontrer :

Théorème II.2. –

- (i) *Pour tout sous-groupe parabolique $P = M_P \cdot N_P$ de G défini sur F et pour toute représentation automorphe π de $M_P(\mathbb{A})$, l'un au moins des sous-quotients irréductibles de la représentation $\mathrm{Ind}_P^G(\pi)$ est une représentation automorphe de $G(\mathbb{A})$.*
- (ii) *Pour toute représentation automorphe π de $G(\mathbb{A})$, il existe un sous-groupe parabolique standard $P = M_P \cdot N_P$ de G et une représentation automorphe cuspidale π_0 de $M_P(\mathbb{A})$ telle que π soit un sous-quotient de la représentation $\mathrm{Ind}_P^G(\pi_0)$. La paire (M_P, π_0) est uniquement déterminée à conjugaison près par un élément de $G(F)$ et s'appelle le support cuspidal de π .*

□

Langlands a démontré que la décomposition spectrale de l'espace des fonctions automorphes

$$G(F) \backslash G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

de carré intégrable fait apparaître les représentations automorphes de la forme

$$\pi = \mathrm{Ind}_P^G(\pi_0)$$

pour un sous-groupe parabolique standard $P = M_P \cdot N_P$ de G et une représentation automorphe unitaire de carré intégrable π_0 de $M_P(\mathbb{A})$. Pour cette raison, les représentations de cette forme peuvent être appelées “spectrales” et on peut noter $\{\pi\}_{\mathrm{sp}}^G$ l'ensemble de leurs classes d'isomorphie. Pour toute représentation spectrale π , la paire de carré intégrable (M_P, π_0) qui la définit est uniquement déterminée à conjugaison près par un élément de $G(F)$ et peut être appelée le support de carré intégrable de π .

Pour tout sous-groupe parabolique standard P de G et toute représentation $\pi_0 \in \{\pi\}_{\mathrm{int}}^{M_P}$, π_0 apparaît avec une multiplicité finie comme facteur direct de l'espace $L_{\chi_{\pi_0}}^2(M_P(F) \backslash M_P(\mathbb{A}))$ des fonctions automorphes lisses

$$\varphi : M_P(F) \backslash M_P(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

telles que

$$\varphi(z \cdot m) = \chi_{\pi_0}(z) \cdot \varphi(g), \quad \forall z \in Z_{M_P}(\mathbb{A}), \quad \forall g \in G(\mathbb{A}),$$

et qui sont de carré intégrable modulo le centre $Z_{M_P}(\mathbb{A})$. On note

$$L_{\pi_0}^2(M_P(F) \backslash M_P(\mathbb{A}))$$

le sous-espace de $L_{\chi_{\pi_0}}^2(M_P(F) \backslash M_P(\mathbb{A}))$ somme de ces facteurs directs isomorphes à π_0 .

Si $K = \prod_{x \in |F|} K_x$ est un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A})$, on note encore

$$L_{\pi_0}^2(M_P(F) \cdot N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})/K)$$

l'espace des fonctions

$$\varphi : M_P(F) \cdot N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})/K \rightarrow \mathbb{C}$$

telles que, pour tout $g \in G(\mathbb{A})$, la fonction

$$M_P(F) \backslash M_P(\mathbb{A}) \ni m \mapsto |\delta_P(m)|^{-1/2} \cdot \varphi(mg)$$

soit élément de l'espace $L_{\pi_0}^2(M_P(F) \backslash M_P(\mathbb{A}))$.

Cet espace

$$L_{\pi_0}^2(M_P(F) \cdot N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})/K)$$

est nécessairement de dimension finie. On peut le munir d'une base orthonormée notée $\mathcal{B}_K(M_P, \pi_0)$.

Tout élément $\lambda \in \Lambda^{M_P}$ peut être vu comme un caractère

$$P(\mathbb{A}) \rightarrow M_P(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

trivial sur $P(F)$ et sur tout sous-groupe ouvert compact de $P(\mathbb{A})$, donc en particulier sur l'intersection $P(\mathbb{A}) \cap K_\emptyset$ de $P(\mathbb{A})$ et du sous-groupe ouvert compact maximal

$$K_\emptyset = \prod_{x \in |F|} K_{x, \emptyset} \subset G(\mathbb{A}).$$

D'après la décomposition

$$G(\mathbb{A}) = P(\mathbb{A}) \cdot K_\emptyset,$$

λ se prolonge de manière unique en une fonction

$$N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})/K_\emptyset \rightarrow \mathbb{C}$$

que l'on notera encore λ et qui est invariante à gauche par $M_P(F)$ et donc $P(F)$.

Si $\pi \in \{\pi\}_{\text{int}}^{M_P}$ est une représentation automorphe de carré intégrable de $M_P(\mathbb{A})$, il en est de même des

$$\pi_\lambda = \pi \otimes \lambda, \quad \lambda \in \Lambda^{M_P},$$

et, si K est un sous-groupe ouvert compact de K_\emptyset , les multiplications

$$\varphi \mapsto \varphi \cdot \lambda$$

définissent des isomorphismes d'espaces vectoriels

$$L_{\pi}^2(M_P(F) \cdot N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})/K) \xrightarrow{\sim} L_{\pi_\lambda}^2(M_P(F) \cdot N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})/K).$$

Si π est unitaire, π_λ est unitaire si et seulement si λ est élément de $\text{Im } \Lambda^{M_P}$.

On note $[\pi]$ la variété complexe, isomorphe à Λ^{M_P} , des représentations de la forme π_λ et $\text{Im } [\pi]$ la sous-variété réelle compacte de $[\pi]$, isomorphe à $\text{Im } \Lambda^{M_P}$, constituée des représentations unitaires.

Deux paires de carré intégrable (M_P, π) et $(M_{P'}, \pi')$ sont dites "équivalentes" si elles sont conjuguées l'une de l'autre par un élément de $G(F)$. Elles sont dites "faiblement équivalentes" s'il existe $\lambda \in \Lambda^{M_P}$ tel que (M_P, π_λ) et $(M_{P'}, \pi')$ soient équivalentes.

Pour tout sous-groupe de Levy standard M de G , on note W_M^G le groupe fini

$$W_M^G = \{\gamma \in G(F) \mid \gamma^{-1} \cdot M \cdot \gamma = M\} / M(F)$$

et, si $\pi \in \{\pi\}_{\text{int}}^M$, on note

$$\text{Fixe}(M, \pi) \subset \Lambda^M \rtimes W_M^G$$

le sous-groupe fini des (λ, w) tels que

$$w(\pi_\lambda) \cong \pi.$$

Pour tout sous-groupe parabolique standard P de G , toute $\pi \in \{\pi\}_{\text{int}}^{M_P}$, tout sous-groupe ouvert compact K de K_\emptyset , toute fonction

$$\varphi \in L_\pi^2(M_P(F) \cdot N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A}) / K)$$

et tout élément $g \in G(\mathbb{A})$, la série d'Eisenstein

$$\sum_{\gamma \in P(F) \backslash G(F)} (\varphi \cdot \lambda)(\gamma \cdot g)$$

converge absolument en tout élément λ d'un ouvert non vide du tore complexe Λ^{M_P} qui ne dépend pas de g . De plus, sa limite

$$E(\varphi \cdot \lambda)(g)$$

est une fraction rationnelle en $\lambda \in \Lambda^{M_P}$ que l'on peut aussi noter

$$E_{\pi_\lambda}(\varphi)(g).$$

Ces séries d'Eisenstein $E_{\pi_\lambda}(\varphi)(g)$ peuvent s'écrire comme le quotient de deux polynômes dont le second, le dénominateur, ne dépend pas de $g \in G(\mathbb{A})$ ni de φ et ne s'annule pas sur la sous-variété réelle compacte $\text{Im}[\pi]$ des représentations unitaires de $[\pi]$.

Nous avons maintenant rappelé tous les ingrédients nécessaires à l'énoncé du théorème suivant qui résulte de la décomposition spectrale de Langlands :

Théorème II.3. –

Soit un sous-groupe ouvert compact $K = \prod_{x \in |F|} K_x$ de $K_\emptyset = \prod_{x \in |F|} K_{x, \emptyset}$.

Alors les paires de carré intégrable (M_P, π) telles que l'espace

$$L_\pi^2(M_P(F) \cdot N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A}) / K)$$

ne soit pas nul forment un ensemble fini de classes d'équivalence faible, si bien que l'on peut choisir un ensemble fini de paires de carré intégrable unitaires (M_P, π_0) qui représentent ces classes.

Pour toute fonction à support compact

$$h : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

bi-invariante par K , et pour tous éléments $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$, on a

$$\sum_{\gamma \in G(F)} h(g_1^{-1} \gamma g_2) = \sum_{(M_P, \pi_0)} \frac{1}{|\text{Fixe}(M_P, \pi_0)|} \cdot \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_K(M_P, \pi_0)} \int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot (h * E_\pi(\varphi))(g_2) \cdot E_{\pi^\vee}(\bar{\varphi})(g_1)$$

où $d\pi$ désigne la mesure de volume 1 sur chaque $\text{Im}[\pi_0]$ qui est invariante par le tore réel compact $\text{Im} \Lambda^{M_P}$. \square

III. Transformation de Fourier linéaire locale : rappels

Dans ce paragraphe, on considère le groupe linéaire GL_r de rang $r \geq 1$ sur le corps local ultramétrique F_x du paragraphe I. Il s'identifie à l'ouvert de Zariski des éléments inversibles de l'algèbre matricielle M_r , image réciproque de $\mathrm{GL}_1 = \mathbb{G}_m$ par l'homomorphisme multiplicatif $\det : M_r \rightarrow M_1 = \mathbb{A}_1$.

Une fonction

$$\mathrm{GL}_r(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

sera appelée “fonction de Schwartz” si et seulement si elle se prolonge, de manière nécessairement unique, en une fonction localement constante à support compact

$$M_r(F_x) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Comme l'espace des fonctions de Schwartz est stable par translation à gauche ou à droite par les éléments de $\mathrm{GL}_r(F_x)$, on s'attend à pouvoir le caractériser en termes spectraux. Pour cela, on a besoin des facteurs $L_x(\bullet, \bullet)$ locaux définis par Tate dans le cas $r \geq 1$, et par Godement et Jacquet dans les cas $r \geq 2$, de la manière suivante :

Théorème III.1. –

Pour toute représentation lisse admissible irréductible $\pi \in \{\pi\}_x^r = \{\pi\}_x^{\mathrm{GL}_r}$, on a :

(i) Les intégrales

$$\int_{\mathrm{GL}_r(F_x)} dg_x \cdot h_x(g_x) \cdot \varphi_x(g_x) \cdot |\det(g_x)|_x^{s + \frac{r-1}{2}}$$

associées aux fonctions de Schwartz

$$h_x : \mathrm{GL}_r(F_x) \hookrightarrow M_r(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

et aux “coefficients matriciels” de π

$$\varphi_x : \mathrm{GL}_r(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

convergent absolument, pour tout $s \in \mathbb{C}$ dont la partie réelle est assez grande, vers une fraction rationnelle en $Z = q_x^{-s}$.

(ii) Ces fractions rationnelles en $Z = q_x^{-s}$ engendrent un idéal fractionnaire qui admet un unique générateur

$$L_x(\pi, Z)$$

dont l'inverse $L_x(\pi, Z)^{-1}$ est un polynôme en Z dont le coefficient constant est égal à 1.

Remarque :

Il résulte de la définition que

$$L_x(\pi \otimes |\det(\bullet)|_x^s, Z) = L_x(\pi, q_x^{-s} \cdot Z), \quad \forall s \in \mathbb{C}.$$

□

Pour le calcul des facteurs L_x locaux, Godement et Jacquet ont prouvé :

Proposition III.2. –

(i) Pour toute représentation $\pi \in \{\pi\}_x^r$ qui est supercuspidale, on a

$$L_x(\pi, Z) = 1$$

sauf si $r = 1$ et π est un caractère non ramifié, nécessairement de la forme

$$F_x^\times \ni a_x \mapsto |a_x|_x^s,$$

auquel cas

$$L_x(\pi, Z) = \frac{1}{1 - q_x^{-s} \cdot Z}.$$

(ii) Si $\pi \in \{\pi\}_x^r$ est un sous-quotient de l'induite normalisée $\text{Ind}^{\text{GL}_r}(\pi_0)$ d'une représentation lisse admissible irréductible

$$\pi_0 = \pi_1 \boxtimes \dots \boxtimes \pi_k$$

d'un sous-groupe de Levy standard $\text{GL}_r = \text{GL}_{r_1} \times \dots \times \text{GL}_{r_k}$ de GL_r , le polynôme

$$L_x(\pi, Z)^{-1}$$

divise le polynôme produit

$$L_x(\pi_0, Z)^{-1} = \prod_{1 \leq i \leq k} L_x(\pi_i, Z)^{-1}.$$

Il y a même égalité si $\pi \cong \text{Ind}^{\text{GL}_r}(\pi_0)$.

□

On déduit aussitôt de cette proposition :

Corollaire III.3. –

Pour tout sous-groupe ouvert compact $K \subset \text{GL}_r(F_x)$, les coefficients du polynôme en Z

$$L_x(\pi, Z)^{-1}$$

sont des fonctions polynomiales de $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^r = \{\pi\}_{x,K}^{\text{GL}_r}$ au sens du paragraphe I.

□

On montre à partir du théorème III.1 la caractérisation spectrale suivante de l'espace des fonctions de Schwartz :

Théorème III.4. –

Pour tout $K \subset \text{GL}_r(F_x)$, une fonction

$$f_x : K \backslash \text{GL}_r(F_x) / K \rightarrow \mathbb{C}$$

est une fonction de Schwartz sur $M_r(F_x)$ si et seulement si ses restrictions aux fibres de l'homomorphisme

$$|\det(\bullet)|_x : \text{GL}_r(F_x) \rightarrow q_x^{\mathbb{Z}}$$

sont à support compact, et qu'elle se décompose spectralement sous la forme

$$f_x(\bullet) = |\det(\bullet)|_x^{-\frac{r}{2}} \cdot \int_{\text{Im}\{\pi\}_{x,K}^r} d\pi \cdot f_{x,\pi}(\bullet) \cdot L_x\left(\pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

où

- $d\pi$ désigne comme au paragraphe I la mesure de Plancherel supportée par les représentations tempérées,
- pour tout $g \in \mathrm{GL}_r(F_x)$,

$$\pi \mapsto f_{x,\pi}(g)$$

est une fonction polynomiale sur $\{\pi\}_{x,K}^r$,

- pour toute $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^r$, la fonction sur $\mathrm{GL}_r(F_x)$

$$g \mapsto f_{x,\pi}(g)$$

est élément de l'espace $\pi_K^\vee \boxtimes \pi_K$ des coefficients matriciels de π bi-invariants par K ,

- $\pi^\vee = \varinjlim \pi_K^\vee$ désigne la représentation contragrédiente de toute $\pi \in \{\pi\}_x^r$.

□

Passons maintenant à la transformation de Fourier des fonctions de Schwartz sur $M_r(F_x)$ associée au choix d'un caractère additif continu unitaire non trivial

$$\psi_x : F_x \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

et d'une mesure additive dm_x de $M_r(F_x)$:

Proposition III.5. –

- (i) La ψ_x -transformation de Fourier

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x = \left[m'_x \mapsto \int_{M_r(F_x)} dm_x \cdot f_x(m_x) \cdot \psi_x(\mathrm{Tr}(m_x m'_x)) \right]$$

définit un automorphisme de l'espace des fonctions de Schwartz.

- (ii) Il existe une unique mesure invariante dm_x (dite autoduale) pour laquelle l'automorphisme réciproque est la $\overline{\psi}_x$ -transformation de Fourier.
- (iii) Pour toute fonction de Schwartz $f_x : M_r(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$ et tout élément $g \in \mathrm{GL}_r(F_x)$, on a

$$\widehat{f}_x^g = |\det(g)|_x^{-r} \cdot g^{-1} \widehat{f}_x;$$

$${}^g \widehat{f}_x = |\det(g)|_x^{-r} \cdot \widehat{f}_x^{g^{-1}}.$$

□

La compatibilité ci-dessus de la ψ_x -transformation de Fourier avec les translations à gauche et à droite entraîne qu'elle admet une décomposition spectrale qui, d'après le théorème III.4 ci-dessus combiné avec le théorème I.8, a nécessairement la forme suivante :

Théorème III.6. –

Il existe une unique façon d'associer à toute représentation lisse admissible irréductible $\pi \in \{\pi\}_x^r$ un monôme en Z (c'est-à-dire le produit d'une constante et d'une puissance positive ou négative de Z)

$$\varepsilon_x(\pi, \psi_x, Z)$$

de sorte que les propriétés suivantes soient vérifiées :

- (1) Pour toute $\pi \in \{\pi\}_x^r$ et tout $s \in \mathbb{C}$, on a

$$\varepsilon_x(\pi \otimes |\det(\bullet)|_x^s, \psi_x, Z) = \varepsilon_x(\pi, \psi_x, q_x^{-s} \cdot Z).$$

(2) Pour tout sous-groupe ouvert compact $K \subset \mathrm{GL}_r(F_x)$, l'unique coefficient du monôme

$$\varepsilon_x(\pi, \psi_x, Z)$$

et son inverse sont des fonctions polynomiales de $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^r$.

(3) Le facteur

$$\gamma_x(\pi, \psi_x, Z) = \frac{L_x(\pi, Z) \cdot \varepsilon_x(\pi, \psi_x, Z)}{L_x\left(\pi^\vee, \frac{q}{Z}\right)}$$

ne dépend que du support supercuspidal de π .

Plus précisément, si celui-ci consiste en une représentation supercuspidale $\pi_0 = \pi_1 \boxtimes \dots \boxtimes \pi_k$ d'un sous-groupe de Levy $\mathrm{GL}_{\underline{r}} = \mathrm{GL}_{r_1} \times \dots \times \mathrm{GL}_{r_k}$ de GL_r , le facteur

$$\gamma_x(\pi, \psi_x, Z)$$

est égal au produit

$$\gamma_x(\pi_0, \psi_x, Z) = \prod_{1 \leq i \leq k} \gamma_x(\pi_i, \psi_x, Z).$$

(4) Pour tout $K \subset \mathrm{GL}_r(F_x)$ et toute fonction de Schwartz sur $M_r(F_x)$

$$f_x : K \backslash \mathrm{GL}_r(F_x) / K \rightarrow \mathbb{C}$$

décomposée spectralement sous la forme du théorème III.4

$$f_x(g) = |\det(g)|_x^{-\frac{r}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\{\pi\}_{x,K}^r} d\pi \cdot f_{x,\pi}(g) \cdot L_x\left(\pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right), \quad \forall g \in \mathrm{GL}_r(F_x),$$

sa ψ_x -transformée de Fourier \widehat{f}_x est donnée par la décomposition spectrale

$$\widehat{f}_x(g) = |\det(g)|_x^{-\frac{r}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\{\pi\}_{x,K}^r} d\pi \cdot f_{x,\pi}(g^{-1}) \cdot L_x\left(\pi, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \varepsilon_x\left(\pi, \psi_x, q_x^{-\frac{1}{2}}\right), \quad \forall g.$$

Remarque :

On rappelle que si $f_{x,\pi} : K \backslash \mathrm{GL}_r(F_x) / K \rightarrow \mathbb{C}$ est élément de l'espace $\pi_K^\vee \boxtimes \pi_K$ des coefficients matriciels de π , alors $g \mapsto f_{x,\pi}(g^{-1})$ est élément de l'espace $\pi_K \boxtimes \pi_K^\vee$ des coefficients matriciels de π^\vee . □

La propriété (3) du théorème III.6 ci-dessus ramène le calcul des facteurs

$$\gamma_x(\pi, \psi_x, Z) = \frac{L_x(\pi, Z) \cdot \varepsilon_x(\pi, \psi_x, Z)}{L_x\left(\pi^\vee, \frac{q}{Z}\right)}$$

des représentations lisses admissibles irréductibles $\pi \in \{\pi\}_x^r$ des groupes linéaires $\mathrm{GL}_r(F_x)$ au cas des représentations supercuspidales. Dans ce cas, les facteurs $L_x(\pi, Z)$ sont donnés par la proposition III.2(i). Le calcul des facteurs $\varepsilon_x(\pi, \psi_x, Z)$ est plus subtil en général. On a cependant une formule simple dans le cas des caractères non ramifiés de F_x^\times :

Lemme III.7. –

Pour tout caractère non ramifié $\chi : F_x^\times / O_x^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$, nécessairement de la forme

$$F_x^\times \ni a_x \mapsto |a_x|_x^s,$$

on a

$$\varepsilon_x(\chi, \psi_x, Z) = (q_x^{-s} Z)^{N_{\psi_x}}$$

où

$$N_{\psi_x} = \min \{N \in \mathbb{Z} \mid \psi_x \text{ trivial sur } \{a_x \in F_x \mid |a_x|_x \leq q_x^{-N}\}\}$$

désigne le “conducteur” du caractère non trivial $\psi_x : F_x \rightarrow \mathbb{C}^\times$. □

Nous allons enfin donner deux classes de cas où le calcul des facteurs $\varepsilon_x(\pi, \psi_x, Z)$ et $L_x(\pi, Z)$ des représentations $\pi \in \{\pi\}_x^r$ se ramène simplement au cas du rang $r = 1$: le cas des représentations non ramifiées $\pi \in \{\pi\}_{x, \emptyset}^r$, et celui des représentations “très ramifiées” $\pi \cdot \omega = \pi \otimes (\omega \circ \det)$ produits d’une représentation de ramification bornée et d’un caractère $\omega : F_x^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ assez ramifié en fonction de cette borne.

Le groupe déployé GL_r admet pour tore maximal le tore diagonal $T_r = \mathbb{G}_m^r$, et son groupe de Weyl $W^G = W_x^G$ est le groupe \mathfrak{S}_r des permutations de $\{1, 2, \dots, r\}$. Il résulte du théorème I.6(ii) que se donner une représentation non ramifiée $\pi \in \{\pi\}_{x, \emptyset}^r$ équivaut à se donner une famille de r caractères non ramifiés

$$\chi_\pi^i : F_x^\times / O_x^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times, \quad 1 \leq i \leq r,$$

bien définis à l’ordre près.

On peut maintenant énoncer :

Théorème III.8. –

(i) (Godement, Jacquet) *Pour toute représentation non ramifiée $\pi \in \{\pi\}_{x, \emptyset}^r$, on a*

$$L_x(\pi, Z) = \prod_{1 \leq i \leq r} L_x(\chi_\pi^i, Z)$$

et

$$\varepsilon_x(\pi, \psi_x, Z) = \prod_{1 \leq i \leq r} \varepsilon_x(\chi_\pi^i, \psi_x, Z).$$

(ii) (Jacquet, Shalika) *Si $\pi \in \{\pi\}_{x, K}^r$ pour un certain $K \subset \mathrm{GL}_r(F_x)$ et $\omega : F_x^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ est un caractère continu assez ramifié en fonction de K , on a*

$$L_x(\pi \cdot \omega, Z) = 1$$

et

$$\varepsilon_x(\pi \cdot \omega, \psi_x, Z) = \varepsilon_x(\chi_\pi \cdot \omega, \psi_x, Z) \cdot \varepsilon_x(\omega, \psi_x, Z)^{r-1}$$

où $\chi_\pi : F_x^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ désigne le caractère central de π . □

IV. Transformation de Fourier linéaire globale et formule de Poisson associée : derniers rappels

Dans ce paragraphe, on considère le groupe linéaire GL_r de rang $r \geq 1$, ainsi que l'espace matriciel M_r qui le contient, sur le corps de fonctions F de corps des constantes \mathbb{F}_q du paragraphe II.

Notant toujours $\mathbb{A} = \prod_{x \in |F|} F_x$ l'anneau topologique des adèles de F , une fonction globale

$$GL_r(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

sera appelée “fonction de Schwartz” si et seulement si elle se prolonge, de manière nécessairement unique, en une fonction localement constante à support compact

$$M_r(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Les fonctions de Schwartz globales sont exactement les combinaisons linéaires de produits

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x$$

de fonctions de Schwartz locales

$$f_x : GL_r(F_x) \hookrightarrow M_r(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

presque toutes égales aux fonctions caractéristiques $\mathbb{1}_{M_r(O_x)}$ des parties ouvertes compactes $M_r(O_x) \subset M_r(F_x)$, qu'on peut appeler les fonctions de Schwartz locales standard.

On rappelle que le plongement diagonal $F \hookrightarrow \mathbb{A}$ fait de F un sous-groupe discret de \mathbb{A} et que le quotient \mathbb{A}/F est compact.

Choisissons une fois pour toutes un caractère additif continu non trivial

$$\psi = \prod_{x \in |F|} \psi_x : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

qui est trivial sur le sous-groupe discret cocompact F . Ce caractère est nécessairement unitaire, ainsi que ses composantes

$$\psi_x : F_x \rightarrow \mathbb{C}^\times.$$

En toute place $x \in |F|$, munissons $M_r(F_x)$ de la mesure “autoduale” dm_x de la proposition III.5(ii), pour laquelle l'automorphisme réciproque de la ψ_x -transformation de Fourier des fonctions de Schwartz sur $M_r(F_x)$ est la $\bar{\psi}_x$ -transformation de Fourier. Puis munissons $M_r(\mathbb{A})$ de la mesure additive produit

$$dm = \bigotimes_{x \in |F|} dm_x.$$

La ψ -transformation de Fourier des fonctions de Schwartz globales

$$f \mapsto \widehat{f} = \left[m' \mapsto \int_{M_r(\mathbb{A})} dm \cdot f(m) \cdot \psi(\text{Tr}(mm')) \right]$$

envoie chaque $\bigotimes_{x \in |F|} f_x$ sur $\bigotimes_{x \in |F|} \widehat{f}_x$. Elle définit donc un automorphisme de l'espace des fonctions de Schwartz globales, et son automorphisme réciproque est la $\bar{\psi}$ -transformation de Fourier.

On montre que les caractères

$$\mathbb{A}/F \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

sont exactement les

$$\mathbb{A} \ni a \mapsto \psi(\gamma \cdot a), \quad \gamma \in F,$$

et que le volume du quotient compact \mathbb{A}/F pour la mesure “autoduale” dm est 1.

On en déduit la formule de Poisson adélique de Tate :

Théorème IV.1. –

Pour toute fonction de Schwartz globale

$$f : M_r(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C},$$

on a

$$\sum_{\gamma \in M_r(F)} f(\gamma) = \sum_{\gamma \in M_r(F)} \widehat{f}(\gamma).$$

□

Pour toute représentation lisse admissible irréductible

$$\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$$

de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, on pose

$$L(\pi, Z) = \prod_{x \in |F|} L_x(\pi_x, Z^{\deg(x)})$$

qui est bien définie a priori en tant que série formelle en Z . En presque toute place $x \in |F|$, le facteur local π_x de π est une représentation non ramifiée et le conducteur N_{ψ_x} de la composante locale ψ_x de ψ vaut 0 si bien que, d’après le théorème III.8(i) et le lemme III.7, on a $\varepsilon_x(\pi_x, \psi_x, Z) = 1$. Il en résulte que le produit

$$\varepsilon(\pi, \psi, Z) = \prod_{x \in |F|} \varepsilon_x(\pi_x, \psi_x, Z^{\deg(x)})$$

est bien défini en tant que monôme en Z .

Tate en rang $r = 1$, puis Godement et Jacquet en rang $r \geq 2$, ont montré que la formule de Poisson du théorème IV.1 ci-dessus implique :

Théorème IV.2. –

Pour toute représentation automorphe cuspidale $\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$ de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, on a :

(i) *Le produit*

$$L(\pi, q^{-s}) = \prod_{x \in |F|} L_x(\pi_x, q_x^{-s})$$

est absolument convergent dès que la partie réelle $\mathrm{Re}(s)$ de $s \in \mathbb{C}$ est assez grande.

(ii) *La fonction holomorphe que ce produit définit dans sa zone de convergence se prolonge analytiquement à \mathbb{C} tout entier. C’est même une fraction rationnelle en q^{-s} .*

(iii) *Cette fraction rationnelle satisfait l’équation fonctionnelle*

$$L(\pi^\vee, q^{-(1-s)}) = L(\pi, q^{-s}) \cdot \varepsilon(\pi, \psi, q^{-s}).$$

(iv) Elle n'admet de pôles que si $r = 1$ et π est un caractère automorphe

$$\mathbb{A}^\times / F^\times \rightarrow \mathbb{C}$$

de la forme

$$a \mapsto |a|^{s_0}, \quad \text{avec } s_0 \in \mathbb{C},$$

et, dans ce cas, elle a exactement deux pôles simples en les points q^{s_0} et q^{s_0-1} . □

Pour toute représentation automorphe irréductible $\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$ de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, il existe d'après le théorème II.2(ii) de Langlands une partition $r = r_1 + \dots + r_k$ du rang r et des représentations automorphes cuspidales $\pi_1 = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_{1,x}, \dots, \pi_k = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_{k,x}$ de $\mathrm{GL}_{r_1}(\mathbb{A}), \dots, \mathrm{GL}_{r_k}(\mathbb{A})$ telles que π se réalise comme un sous-quotient de l'induite normalisée $\mathrm{Ind}^{\mathrm{GL}_r}(\pi_1 \boxtimes \dots \boxtimes \pi_k)$. De plus, la ramification de $\pi_{1,x}, \dots, \pi_{k,x}$ en n'importe quelle place $x \in |F|$ est bornée en fonction de celle de π_x et, en particulier, $\pi_{1,x}, \dots, \pi_{k,x}$ sont non ramifiées si π_x est non ramifiée.

D'après la proposition III.2(ii) et le théorème III.8(i), la fraction rationnelle en n'importe quelle place $x \in |F|$

$$L_x(\pi_x, Z)$$

est le produit de la fraction rationnelle

$$\prod_{1 \leq i \leq k} L_x(\pi_{i,x}, Z)$$

et d'un polynôme en Z qui vaut 1 lorsque π_x et donc aussi les $\pi_{i,x}$, $1 \leq i \leq k$, sont non ramifiées.

De plus, d'après la propriété (3) du théorème III.6, on a en toute place $x \in |F|$

$$L_x(\pi_x, Z) \cdot \varepsilon_x(\pi_x, \psi_x, Z) = L_x\left(\pi_x^\vee, \frac{q}{Z}\right) \cdot \prod_{1 \leq i \leq k} \gamma_x(\pi_{i,x}, \psi_x, Z)$$

où, pour $1 \leq i \leq k$,

$$L_x(\pi_{i,x}, Z) \cdot \varepsilon_x(\pi_{i,x}, \psi_x, Z) = \gamma_x(\pi_{i,x}, \psi_x, Z) \cdot L_x\left(\pi_{i,x}^\vee, \frac{q}{Z}\right).$$

Si enfin le facteur π_x de π en au moins une place x est le produit

$$\pi_x = \pi'_x \cdot \omega_x = \pi'_x \otimes (\omega_x \circ \det)$$

d'une représentation $\pi'_x \in \{\pi\}_{x, K_x}^r$ de ramification bornée par un $K_x \subset \mathrm{GL}_r(F_x)$ et d'un caractère $\omega_x : F_x^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ assez ramifié en fonction de la borne K_x , alors les $\pi_{i,x}$, $1 \leq i \leq k$, sont elles-mêmes les produits

$$\pi_{i,x} = \pi'_{i,x} \cdot \omega_x$$

d'une représentation $\pi'_{i,x} \in \{\pi\}_x^r$ de ramification bornée en fonction de K_x et du caractère ω_x . Cela exclut qu'aucune des représentations automorphes π_i , $1 \leq i \leq k$, soit un caractère de $\mathbb{A}^\times / F^\times$ de la forme $a \mapsto |a|^{s_0}$ avec $s_0 \in \mathbb{C}$.

On déduit de ces considérations le corollaire suivant du théorème IV.2 :

Corollaire IV.3. –

Toute représentation automorphe irréductible $\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$ de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ vérifie les propriétés (i), (ii) et (iii) du théorème IV.2.

Si de plus le facteur π_x de π en au moins une place x est le produit

$$\pi_x = \pi'_x \cdot \omega_x$$

d'une représentation $\pi'_x \in \{\pi\}_x^r$ de ramification bornée et d'un caractère $\omega_x : F_x^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ assez ramifié en fonction de cette borne, la fonction L globale de π

$$\mathbb{C} \ni s \mapsto L(\pi, q^{-s})$$

n'a pas de pôle.

□

V. Expression multiplicative de la fonctionnelle de Poisson linéaire

Dans ce paragraphe comme dans le précédent, on considère le groupe linéaire GL_r de rang $r \geq 1$ sur le corps de fonctions F muni d'un caractère additif continu non trivial

$$\psi = \prod_{x \in |F|} \psi_x : \mathbb{A}/F \rightarrow \mathbb{C}^\times .$$

Les théorèmes III.4 et III.6 ont donné en toute place $x \in |F|$ une expression purement multiplicative – c'est-à-dire qui ne fait apparaître que $\mathrm{GL}_r(F_x)$ et sa loi de groupe, en oubliant le plongement de $\mathrm{GL}_r(F_x)$ dans l'espace linéaire $M_r(F_x)$ – de l'espace des fonctions de Schwartz

$$\mathrm{GL}_r(F_x) \hookrightarrow M_r(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

et de la ψ_x -transformation de Fourier dans cet espace.

On en déduit aussitôt une expression purement multiplicative de l'espace des fonctions de Schwartz globales

$$\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \hookrightarrow M_r(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

et de la ψ -transformation de Fourier dans cet espace.

Le but du présent paragraphe est de donner une expression purement multiplicative de la fonctionnelle de Poisson de l'espace des fonctions de Schwartz globales $f : \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \hookrightarrow M_r(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ introduite dans le théorème IV.1

$$f \mapsto \sum_{\gamma \in M_r(F)} f(\gamma) .$$

Autrement dit, nous voudrions exprimer cette fonctionnelle sous une forme qui fasse intervenir seulement $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, sa loi de groupe et son sous-groupe discret $\mathrm{GL}_r(F)$.

Commençons par remarquer qu'il n'y a rien à faire lorsque $f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x$ est un produit dont l'un au moins des facteurs $f_x : \mathrm{GL}_r(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$ est très ramifié comme dans le lemme ci-dessous :

Lemme V.1. –

En une place $x \in |F|$, considérons une fonction de Schwartz

$$f_x : \mathrm{GL}_r(F_x) \hookrightarrow M_r(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

dont la décomposition spectrale

$$f_x(\bullet) = |\det(\bullet)|_x^{-\frac{r}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\{\pi\}_x^r} d\pi \cdot f_{x,\pi}(\bullet) \cdot L_x\left(\pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

ne fait intervenir non trivialement que des représentations de la forme

$$\pi = \pi' \cdot \omega = \pi' \otimes (\omega \circ \det)$$

où $\pi' \in \{\pi\}_{x,K}^r$ pour un certain sous-groupe ouvert compact $K \subset \mathrm{GL}_r(F_x)$ et $\omega : F_x^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ est un caractère assez ramifié en fonction de K .

Alors la fonction f_x est supportée par une partie compacte de $\mathrm{GL}_r(F_x)$ et il en est de même de sa transformée de Fourier \widehat{f}_x .

Remarque :

L'hypothèse est vérifiée en particulier si $f_x : \mathrm{GL}_r(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$ est le produit

$$f_x = f'_x \cdot \omega = f'_x \cdot (\omega \circ \det)$$

d'une fonction $f'_x : \mathrm{GL}_r(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$ invariante à gauche ou à droite par K et d'un caractère $\omega : F_x^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ assez ramifié en fonction de K .

Démonstration :

Cela résulte du théorème III.8(ii) de Jacquet et Shalika qui assure que toute les représentations $\pi \in \mathrm{Im}\{\pi\}_x^r$ qui apparaissent non trivialement dans la décomposition spectrale de f_x , et donc aussi de \widehat{f}_x , vérifient

$$L_x(\pi, Z) = 1 \quad \text{et} \quad L_x(\pi^\vee, Z) = 1.$$

□

On déduit de ce lemme :

Corollaire V.2. –

Pour toute fonction de Schwartz produit

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x : \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

dont un facteur $f_x : \mathrm{GL}_r(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$ au moins vérifie l'hypothèse du lemme V.1 ci-dessus, la formule de Poisson du théorème IV.1 se réduit à

$$\sum_{\gamma \in \mathrm{GL}_r(F)} f(\gamma) = \sum_{\gamma \in \mathrm{GL}_r(F)} \widehat{f}(\gamma).$$

□

Dans le cas général d'une fonction de Schwartz arbitraire

$$f : \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \hookrightarrow M_r(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C},$$

on a besoin de la définition suivante :

Définition V.3. –

Soit x_0 une place de F .

Soit $f_{x_0} : \mathrm{GL}_r(F_{x_0}) \hookrightarrow M_r(F_{x_0}) \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de Schwartz sphérique, c'est-à-dire bi-invariante par $\mathrm{GL}_r(O_{x_0})$, et dont la décomposition spectrale s'écrit

$$f_{x_0}(\bullet) = |\det(\bullet)|_{x_0}^{-\frac{r}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\{\pi\}_{x_0, \emptyset}^r} d\pi \cdot f_{x_0, \pi}(\bullet) \cdot L_{x_0}(\pi^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}).$$

Alors, pour tous $N, N' \in \mathbb{N}$, on note

$$f_{x_0}^{N, N'} : \mathrm{GL}_r(F_{x_0}) \rightarrow \mathbb{C}$$

la fonction de Schwartz définie par l'expression spectrale

$$f_{x_0}^{N, N'}(\bullet) = |\det(\bullet)|_{x_0}^{-\frac{r}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\{\pi\}_{x_0, \emptyset}^r} d\pi \cdot f_{x_0, \pi}(\bullet) \cdot L_{x_0}(\pi^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}) \cdot I_{x_0}^N(\pi, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}) \cdot I_{x_0}^{N'}(\pi^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}})$$

où $I_{x_0}^N(\pi, Z)$ désigne le polynôme en Z et $\pi \in \{\pi\}_{x, \emptyset}^r$ produit de

$$L_{x_0}(\pi, Z)^{-1}$$

et du monôme de degré N qui apparaît dans le développement en série formelle en Z de l'inverse

$$L_{x_0}(\pi, Z).$$

Remarques :

(i) Comme le polynôme $L_{x_0}(\pi, Z)^{-1}$ divise les $I_{x_0}^N(\pi, Z)$ par construction, les fonctions $f_{x_0}^{N, N'}$, $N, N' \in \mathbb{N}$, et leurs transformées de Fourier $\widehat{f_{x_0}^{N, N'}}$ sont éléments de l'algèbre $\mathcal{H}_{x, \emptyset}^r$. Autrement dit, elles sont supportées par des parties compactes de $\mathrm{GL}_r(F_{x_0})$.

(ii) On a pour toute $\pi \in \{\pi\}_{x, \emptyset}^r$ l'égalité

$$\sum_{N \in \mathbb{N}} I_{x_0}^N(\pi, Z) = 1$$

dans l'anneau des séries formelles en Z . De plus, les sommes

$$\sum_{N \geq N_0} \left| I_{x_0}^N \left(\pi, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}} \right) \right|$$

convergent uniformément vers 0 si $\pi \in \mathrm{Im} \{\pi\}_{x, \emptyset}^r$ et N_0 devient arbitrairement grand. On en déduit que, pour tout $g \in \mathrm{GL}_r(F_{x_0})$, on a

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} f_{x_0}^{N, N'}(g) = f_{x_0}(g).$$

□

Pour tout élément $z_0 \in \mathbb{C}$, toute fraction rationnelle $R \in \mathbb{C}(Z)$ à coefficients complexes s'écrit de manière unique comme une somme

$$R = R_0 + \sum_{1 \leq i \leq k} \frac{a_i}{(Z - z_0)^i}$$

où les a_i , $1 \leq i \leq k$, sont des constantes et R_0 est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas en z_0 . On peut appeler $R_0(z_0)$ la "valeur régularisée" de R au point z_0 .

Cela permet d'énoncer le théorème suivant qui est le résultat principal du présent paragraphe :

Théorème V.4. –

Soit une fonction de Schwartz produit

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x : \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \hookrightarrow M_r(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C},$$

et soit x_0 une place de F en laquelle le facteur local f_{x_0} de f est sphérique.

Alors :

(i) La série formelle

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in \mathrm{GL}_r(F)} \left(f_{x_0}^{N, N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right) (\gamma)$$

est une fraction rationnelle en Z .

- (ii) La “valeur régularisée” $S(f)$ de cette fraction rationnelle au point $Z = 1$ ne dépend pas du choix de la place x_0 .
- (iii) On a

$$\sum_{\gamma \in M_r(F)} f(\gamma) = \left(\sum_{\gamma \in \mathrm{GL}_r(F)} f(\gamma) \right) + \left(\sum_{\gamma \in \mathrm{GL}_r(F)} \widehat{f}(\gamma) \right) - S(f)$$

si bien que la formule de Poisson du théorème IV.1 s’écrit encore

$$S(f) = S(\widehat{f}).$$

Démonstration :

Elle va occuper toute la suite de ce paragraphe.

Elle est fondée sur le théorème de décomposition spectrale de Langlands pour le groupe linéaire GL_r . Celui-ci est muni du sous-groupe de Borel B_r des matrices triangulaires supérieures et du tore maximal $T_r = \mathbb{G}_m^r$ des matrices diagonales. Les sous-groupes paraboliques standard $P = P_{\underline{r}} = \mathrm{GL}_{\underline{r}} \cdot N_{\underline{r}}$ et les sous-groupes de Levy standard $M_P = \mathrm{GL}_{\underline{r}}$ de GL_r correspondent aux partitions $\underline{r} = (r = r_1 + \dots + r_k)$ du rang r . Le tore complexe Λ^{M_P} associé à un tel sous-groupe de Levy standard $M_P = \mathrm{GL}_{\underline{r}} = \mathrm{GL}_{r_1} \times \dots \times \mathrm{GL}_{r_k}$ est canoniquement isomorphe à $(\mathbb{C}^\times)^k$.

Considérant un sous-groupe ouvert compact

$$K = \prod_{x \in |F|} K_x \subset \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_{\mathbb{A}}),$$

on choisit un ensemble fini de représentants (M_P, π_0) des classes d’équivalence faible de paires de carré intégrable unitaires $(\mathrm{GL}_{\underline{r}}, \pi)$ telles que l’espace $L_\pi^2(\mathrm{GL}_{\underline{r}}(F) \cdot N_{\underline{r}}(\mathbb{A}) \backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})/K)$ ne soit pas réduit à 0.

Pour toute fonction à support compact

$$h : K \backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})/K \rightarrow \mathbb{C},$$

tout représentant (M_P, π_0) et tous éléments $\pi \in [\pi_0]$, $g_1, g_2 \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, on note

$$h_\pi(g_1, g_2) = \frac{1}{|\mathrm{Fixe}(M_P, \pi_0)|} \cdot \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_K(M_P, \pi_0)} (h * E_\pi(\varphi))(g_2) \cdot E_{\pi^\vee}(\overline{\varphi})(g_1).$$

Cette expression ne dépend pas du choix de la base orthonormée finie $\mathcal{B}_K(M_P, \pi_0)$ de l’espace $L_{\pi_0}^2(M_P(F) \cdot N_P(\mathbb{A}) \backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})/K)$, et elle est invariante par l’action du groupe fini $\mathrm{Fixe}(M_P, \pi_0)$ sur $[\pi_0]$.

Le théorème II.3 de décomposition spectrale appliqué à une telle fonction h dit que, pour tous $g_1, g_2 \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, on a

$$\sum_{\gamma \in \mathrm{GL}_r(F)} h(g_1^{-1} \gamma g_2) = \sum_{(M_P, \pi_0)} \int_{\mathrm{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_\pi(g_1, g_2).$$

On commence la démonstration du théorème V.4 par le lemme suivant :

Lemme V.5. –

Supposons que la fonction de Schwartz globale produit

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x : \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \hookrightarrow M_r(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

est bi-invariante par $K = \prod_{x \in |F|} K_x$ avec $K_{x_0} = \mathrm{GL}_r(O_{x_0})$.

En chaque place $x \in |F|$, considérons la décomposition spectrale de f_x donnée par le théorème III.4

$$f_x(\bullet) = |\det(\bullet)|_x^{-\frac{r}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\{\pi\}_{x, K_x}^r} d\pi \cdot f_{x, \pi}(\bullet) \cdot L_x\left(\pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

et définissons une fonction

$$h_x : K_x \backslash \mathrm{GL}_r(F_x) / K_x \rightarrow \mathbb{C}$$

par la décomposition spectrale

$$h_x(\bullet) = |\det(\bullet)|_x^{-\frac{r}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\{\pi\}_{x, K_x}^r} d\pi \cdot f_{x, \pi}(\bullet).$$

Alors :

- (i) La fonction h_x est la fonction caractéristique $\mathbb{1}_{\mathrm{GL}_r(O_x)}$ en toute place x où f_x est la fonction de Schwartz standard $\mathbb{1}_{M_r(O_x)}$.

En les autres places, h_x n'est pas nécessairement à support compact mais elle agit sur chaque classe de $\{\pi\}_{x, K_x}^r$ comme un élément de $\mathcal{H}_{x, K}^r$.

Par conséquent, $h = \bigotimes_{x \in |F|} h_x$ agit sur chaque classe $[\pi_0]$ de représentations automorphes comme un élément de \mathcal{H}_K^r .

- (ii) Pour tout réel s assez grand, tous entiers $N, N' \in \mathbb{N}$ et tous éléments $g_1, g_2 \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, on a

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma \in \mathrm{GL}_r(F)} \left(f_{x_0}^{N, N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right) (g_1^{-1} \gamma g_2) \\ &= \sum_{(M_P, \pi_0)} \int_{\mathrm{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_{\pi \otimes |\det(\bullet)|^{-s}}(g_1, g_2) \cdot L\left((\pi \otimes |\det(\bullet)|^{-s})^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right) \\ & \quad \cdot I_{x_0}^N\left(\pi_{x_0} \otimes |\det(\bullet)|_{x_0}^{-s}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^{N'}\left((\pi_{x_0} \otimes |\det(\bullet)|_{x_0}^{-s})^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \end{aligned}$$

où, pour tout représentant (M_P, π_0) et tout $\pi \in [\pi_0]$, on note encore

$$h_\pi(g_1, g_2) = \frac{1}{|\mathrm{Fixe}(M_P, \pi_0)|} \cdot \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_K(M_P, \pi_0)} (h * E_\pi(\varphi))(g_2) \cdot E_{\pi^\vee}(\bar{\varphi})(g_1).$$

Démonstration :

- (i) résulte de ce que les $f_{x, \pi}(\bullet)$ sont des fonctions polynomiales de $\pi \in \{\pi\}_{x, K}^r$.

- (ii) résulte du théorème II.3 et de ce que la restriction de $f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x$ et donc $f_{x_0}^{N, N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right)$ à chaque fibre de l'homomorphisme

$$|\det(\bullet)| : \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \rightarrow q^{\mathbb{Z}}$$

est supportée par une partie compacte. □

Pour tout représentant (M_P, π_0) , les fractions rationnelles

$$[\pi_0] \ni \pi \mapsto E_\pi(\varphi)(g_1), \quad \varphi \in L_{\pi_0}^2(M_P(F) \cdot N_P(\mathbb{A}) \backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})/K),$$

ou

$$\pi \mapsto h * E_\pi(\varphi)(g_2)$$

admettent un dénominateur indépendant de $g_1, g_2 \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, invariant par l'action de Λ^{GL_r} et qui ne s'annule pas sur $\mathrm{Im}[\pi_0]$ ni donc sur $\Lambda^{\mathrm{GL}_r} \cdot \mathrm{Im}[\pi_0] = \{\pi \otimes |\det(\bullet)|^s, \pi \in \mathrm{Im}[\pi_0], s \in \mathbb{C}\}$.

Prouvons maintenant :

Lemme V.6. –

Pour tout représentant (M_P, π_0) et tous entiers $N, N' \in \mathbb{N}$, les produits

$$L\left(\pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^N\left(\pi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^{N'}\left(\pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

sont des polynômes en $\pi \in [\pi_0]$.

A fortiori, et pour tous $g_1, g_2 \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, les pôles des fractions rationnelles

$$h_{\pi \otimes |\det(\bullet)|^{-s}}(g_1, g_2) \cdot L\left((\pi \otimes |\det(\bullet)|^{-s})^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^N\left(\pi_{x_0} \otimes |\det(\bullet)|_{x_0}^{-s}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^{N'}\left((\pi_{x_0} \otimes |\det(\bullet)|_{x_0}^{-s})^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

ne rencontrent pas le fermé $\Lambda^{\mathrm{GL}_r} \cdot \mathrm{Im}[\pi_0]$ de $[\pi_0]$.

Démonstration :

Par construction, les polynômes $I_{x_0}^N\left(\pi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)$ et $I_{x_0}^{N'}\left(\pi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)$ sont des multiples des polynômes $L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}$ et $L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}$. Il suffit donc de vérifier que la multiplication par le produit

$$L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}$$

fait disparaître les pôles de la fraction rationnelle

$$L \cdot \left(\pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Or, si π est un sous-quotient de l'induite normalisée de représentations automorphes cuspidales π_1, \dots, π_k de $\mathrm{GL}_{r_1}(\mathbb{A}), \dots, \mathrm{GL}_{r_k}(\mathbb{A})$ avec $r = r_1 + \dots + r_k$, on a

$$L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) = \prod_{1 \leq i \leq k} L_{x_0}\left((\pi_i)_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right),$$

$$L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) = \prod_{1 \leq i \leq k} L_{x_0}\left((\pi_i)_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right),$$

et $L\left(\pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right)$ est le produit de

$$\prod_{1 \leq i \leq k} L\left(\pi_i^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

et d'un polynôme en π .

On est donc ramené au cas où π_0 et les $\pi \in [\pi_0]$ sont des représentations automorphes cuspidales.

Alors $L\left(\pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right)$ est un polynôme en π , sauf si $r = 1$ et π_0 est un caractère automorphe $\mathbb{A}^\times/F^\times \rightarrow \mathbb{C}$ de la forme $a \mapsto |a|^{s_0}$ avec $s_0 \in \mathbb{C}$. Dans ce dernier cas, il y a deux pôles simples, et ils sont éliminés par le produit $L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}$.

□

On déduit aussitôt de ce lemme :

Corollaire V.7. –

Pour tout représentant (M_P, π_0) , tout réel s , tous entiers $N, N' \in \mathbb{N}$ et tous éléments $g_1, g_2 \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, l'intégrale

$$\int_{\mathrm{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_{\pi \otimes |\det(\bullet)|^{-s}}(g_1, g_2) \cdot L\left((\pi \otimes |\det(\bullet)|^{-s})^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^N\left(\pi_{x_0} \otimes |\det(\bullet)|_{x_0}^{-s}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \\ \cdot I_{x_0}^{N'}\left((\pi_{x_0} \otimes |\det(\bullet)|_{x_0}^{-s})^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

est bien définie et indépendante de s , donc égale à

$$\int_{\mathrm{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_\pi(g_1, g_2) \cdot L\left(\pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^N\left(\pi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^{N'}\left(\pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right).$$

□

Par combinaison avec le lemme V.5(ii), on obtient :

Corollaire V.8. –

Pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ de module $|z|$ assez petit, et pour tous éléments $g_1, g_2 \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, la série

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in \mathrm{GL}_r(F)} \left(f_{x_0}^{N, N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right) (g_1^{-1} \gamma g_2)$$

est convergente.

Elle est égale à la somme sur les représentants (M_P, π_0) des intégrales

$$\int_{\mathrm{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_\pi(g_1, g_2) \cdot L\left(\pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \\ \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right).$$

□

La partie (i) du théorème V.4 résulte alors du lemme suivant :

Lemme V.9. –

Pour tout représentant (M_P, π_0) et pour tous éléments $g_1, g_2 \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, l'intégrale bien définie si $|z|$ est assez petit

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \int_{\mathrm{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_\pi(g_1, g_2) \cdot L\left(\pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \\ \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

est une fraction rationnelle en z .

Démonstration :

Si $M_P = \mathrm{GL}_{r_1} \times \dots \times \mathrm{GL}_{r_k}$, la variété algébrique complexe $[\pi_0]$ s'identifie à un ouvert de Zariski de $(\mathbb{C}^\times)^k$ et sa sous-variété algébrique réelle $\mathrm{Im}[\pi_0]$ s'identifie au sous-tore unitaire $\{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in (\mathbb{C}^\times)^k \mid |\lambda_1| = \dots = |\lambda_k| = 1\}$.

Le produit

$$L\left(\pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}$$

est un polynôme en π , c'est-à-dire en $\lambda_1^{\pm 1}, \dots, \lambda_k^{\pm 1}$.

Il existe des nombres complexes $z_{i,j} \in \mathbb{C}^\times$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq r'_i \leq r_i$, tels que, pour toute $\pi \in [\pi_0]$ paramétrée par $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in (\mathbb{C}^\times)^k$, on ait

$$L_{x_0}(\pi_{x_0}, Z) = \prod_{1 \leq i \leq k} \prod_{1 \leq j \leq r'_i} \frac{1}{1 - \lambda_i^{\deg(x_0)} \cdot Z \cdot z_{i,j}},$$

$$L_{x_0}(\pi_{x_0}^\vee, Z) = \prod_{1 \leq i \leq k} \prod_{1 \leq j \leq r'_i} \frac{1}{1 - \lambda_i^{-\deg(x_0)} \cdot Z \cdot \bar{z}_{i,j}}.$$

L'expression

$$h_\pi(g_1, g_2)$$

est une fraction rationnelle en π , c'est-à-dire en $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, dont le dénominateur est un produit de facteurs de la forme

$$1 - \lambda_i \cdot \lambda_i^{-1} \cdot z_0$$

pour des $z_0 \in \mathbb{C}^\times$ tels que $|z_0| \neq 1$.

Enfin, la mesure $d\pi$ sur $\mathrm{Im}[\pi_0]$ n'est autre que la mesure invariante de volume 1

$$d\lambda_1 \dots d\lambda_k$$

sur le produit des k cercles unités dans $(\mathbb{C}^\times)^k$.

Le lemme s'en déduit par déplacement des contours d'intégration, par exemple dans la direction

$$|\lambda_1| \mapsto 0, \dots, |\lambda_k| \mapsto 0,$$

et calcul des résidus. □

On remarque au passage :

Proposition V.10. –

Soit (M_P, π_0) un représentant tel que π_0 soit une représentation automorphe cuspidale de $M_P(\mathbb{A}) = \mathrm{GL}_{r_1}(\mathbb{A}) \times \dots \times \mathrm{GL}_{r_k}(\mathbb{A})$.

Alors les intégrales

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \int_{\mathrm{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_\pi(g_1, g_2) \cdot L\left(\pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \\ \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

sont partout bien définies dans le demi-tore $|z| \leq 1$.

Les fractions rationnelles en z associées n'ont pas de pôle qui rencontre la zone $|z| \leq 1$, et leur valeur en $z = 1$ est

$$\int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_\pi(g_1, g_2) \cdot L\left(\pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Démonstration :

Avec les notations de la preuve du lemme V.9 ci-dessus, la fraction rationnelle en z et $\pi \in [\pi_0]$ paramétré par $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in (\mathbb{C}^\times)^k$

$$L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

s'écrit

$$\prod_{1 \leq i \leq k} \prod_{1 \leq j \leq r'_i} \frac{1}{\left(1 - \lambda_i^{\deg(x_0)} \cdot z \cdot z_{ij} \cdot q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \left(1 - \lambda_i^{-\deg(x_0)} \cdot z \cdot \bar{z}_{i,j} \cdot q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)}.$$

Or, comme π_0 est une représentation automorphe cuspidale unitaire, on sait d'après Jacquet et Shalika (et sans qu'il soit nécessaire d'invoquer la conjecture de Ramanujan-Petersson) que, pour tous indices i, j ,

$$q_{x_0}^{-\frac{1}{2}} < |z_{ij}| < q_{x_0}^{\frac{1}{2}}.$$

D'où les conclusions de la proposition. □

Considérons maintenant la ψ -transformée de Fourier $\hat{f} = \bigotimes_{x \in |F|} \hat{f}_x$ de $f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x$. En toute place $x \in |F|$, les décompositions spectrales de f_x et \hat{f}_x

$$f_x(\bullet) = |\det(\bullet)|_x^{-\frac{r}{2}} \cdot \int_{\text{Im}\{\pi\}_{x,K}^r} d\pi \cdot f_{x,\pi}(\bullet) \cdot L_x\left(\pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right),$$

$$\hat{f}_x(\bullet) = |\det(\bullet)|_x^{-\frac{r}{2}} \cdot \int_{\text{Im}\{\pi\}_{x,K}^r} d\pi \cdot \hat{f}_{x,\pi}(\bullet) \cdot L_x\left(\pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

sont reliées par les formules

$$\hat{f}_{x,\pi^\vee}(g) = f_{x,\pi}(g^{-1}) \cdot \varepsilon_x\left(\pi, \psi_x, q_x^{-\frac{1}{2}}\right), \quad \forall \pi.$$

On définit en toute place $x \in |F|$ une fonction

$$\hat{h}_x : K_x \backslash \text{GL}_r(F_x) / K_x \rightarrow \mathbb{C}$$

par la décomposition spectrale

$$\hat{h}_x(\bullet) = |\det(\bullet)|_x^{-\frac{r}{2}} \cdot \int_{\text{Im}\{\pi\}_{x,K}^r} d\pi \cdot \hat{f}_{x,\pi}(\bullet),$$

puis on forme le produit global

$$\hat{h} = \bigotimes_{x \in |F|} \hat{h}_x$$

et on pose pour tout représentant (M_P, π_0) , tout $\pi \in [\pi_0^\vee]$ et tous éléments $g_1, g_2 \in \text{GL}_r(\mathbb{A})$

$$\hat{h}_\pi(g_1, g_2) = \frac{1}{|\text{Fixe}(M_P, \pi_0)|} \cdot \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_K(M_P, \pi_0^\vee)} (\hat{h} * E_\pi(\varphi))(g_2) \cdot E_{\pi^\vee}(\bar{\varphi})(g_1).$$

D'après le corollaire V.8 appliqué à $\widehat{f} = \bigotimes_{x \in |F|} \widehat{f}_x$, la série

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in \mathrm{GL}_r(F)} \left(\widehat{f}_{x_0}^{N, N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} \widehat{f}_x \right) \right) (g_1^{-1} \gamma g_2)$$

est convergente si le module $|z|$ de $z \in \mathbb{C}$ est assez petit, et elle est égale à la somme sur les représentants (M_P, π_0) des intégrales

$$\int_{\mathrm{Im}[\pi_0^\vee]} d\pi \cdot \widehat{h}_\pi(g_1, g_2) \cdot L\left(\pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Or, d'après les équations fonctionnelles

$$\widehat{f}_{x, \pi^\vee}(g) = f_{x, \pi}(g^{-1}) \cdot \varepsilon_x\left(\pi, \psi_x, q_x^{-\frac{1}{2}}\right), \quad \forall \pi \in \{\pi\}_{x, K}^r, \quad \forall x \in |F|,$$

on a :

Lemme V.11. –

Pour tout représentant (M_P, π_0) , tout élément $\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$ de $[\pi_0]$ et tous $g_1, g_2 \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, on a

$$|\det(g_2^{-1}g_1)|^{-\frac{r}{2}} \cdot \widehat{h}_{\pi^\vee}(g_2, g_1) = |\det(g_1^{-1}g_2)|^{-\frac{r}{2}} \cdot h_\pi(g_1, g_2) \cdot \varepsilon\left(\pi, \psi, q^{-\frac{1}{2}}\right).$$

□

Puis on déduit de ce lemme :

Corollaire V.12. –

(i) Pour tous éléments $g_1, g_2 \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$, tout représentant (M_P, π_0) et tout $z \in \mathbb{C}$, les intégrales

$$\begin{aligned} & |\det(g_1^{-1}g_2)|^{-\frac{r}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_\pi(g_1, g_2) \cdot L\left(\pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \\ & \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & |\det(g_2^{-1}g_1)|^{-\frac{r}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}[\pi_0^\vee]} d\pi \cdot \widehat{h}_\pi(g_2, g_1) \cdot L\left(\pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \\ & \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \end{aligned}$$

sont égales.

(ii) Les fractions rationnelles développées en séries formelles

$$|\det(g_1^{-1}g_2)|^{-\frac{r}{2}} \cdot \sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in \mathrm{GL}_r(F)} \left(f_{x_0}^{N, N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right) (g_1^{-1} \gamma g_2)$$

et

$$|\det(g_2^{-1}g_1)|^{-\frac{r}{2}} \cdot \sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in \mathrm{GL}_r(F)} \left(\widehat{f}_{x_0}^{N, N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} \widehat{f}_x \right) \right) (g_2^{-1} \gamma g_1)$$

sont égales.

En particulier, elles ont la même valeur régularisée en $Z = 1$.

Démonstration :

(i) résulte du lemme V.11 et des équations fonctionnelles globales

$$L\left(\pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right) = L\left(\pi, q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \varepsilon\left(\pi, \psi, q^{-\frac{1}{2}}\right).$$

(ii) résulte de (i). □

Lorsque $g_1 = g_2 = 1$, on note $S(f)$ et $S(\widehat{f})$ les “valeurs régularisées” en $Z = 1$ des fractions rationnelles du corollaire V.12 (ii) ci-dessus. On a donc montré que

$$S(f) = S(\widehat{f}).$$

Prouvons d’autre part :

Lemme V.13. –

Supposons que la transformée de Fourier \widehat{f}_x de f_x est à support compact en au moins une place $x \in |F|$. Alors :

(i) Pour tout représentant (M_P, π_0) , la “valeur régularisée” en $Z = 1$ de la fraction rationnelle développée en série formelle

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_\pi(g_1, g_2) \cdot L\left(\pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^N\left(\pi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^{N'}\left(\pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

est égale à l’intégrale

$$\int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_{\pi \otimes |\det(\bullet)|^{-s}}(g_1, g_2) \cdot L\left((\pi \otimes |\det(\bullet)|^{-s})^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right)$$

pour n’importe quel réel s assez grand.

(ii) On a

$$S(f) = \sum_{\gamma \in \text{GL}_r(F)} f(\gamma).$$

Démonstration :

(ii) résulte de (i) puisque

$$\sum_{\gamma \in \text{GL}_r(F)} f(g_1^{-1}\gamma g_2) = \sum_{(M_P, \pi_0)} \int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_{\pi \otimes |\det(\bullet)|^{-s}}(g_1, g_2) \cdot L\left((\pi \otimes |\det(\bullet)|^{-s})^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right)$$

pour n’importe quel réel s assez grand.

(i) Choisissons un réel s assez grand.

D’après le lemme V.5 et le corollaire V.7, la fraction rationnelle en z considérée $R(z)$ est égale, si $|z|$ est assez petit, à l’intégrale

$$\begin{aligned} \int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_{\pi \otimes |\det(\bullet)|^{-s}}(g_1, g_2) \cdot L\left(\pi^\vee, q^{-s-\frac{1}{2}}\right) &\cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, q_{x_0}^{s-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-s-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \\ &\cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, zq_{x_0}^{s-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, zq_{x_0}^{-s-\frac{1}{2}}\right). \end{aligned}$$

Cette même intégrale, considérée non plus au voisinage de $z = 0$ mais au voisinage de $z = 1$, définit une autre fraction rationnelle en z que nous noterons $R'(z)$.

Comme R' est bien définie en 1 et y vaut

$$\int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_{\pi \otimes |\det(\bullet)|^{-s}}(g_1, g_2) \cdot L\left(\left(\pi \otimes |\det(\bullet)|^{-s}\right)^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right),$$

il s'agit de prouver que la “valeur régularisée” en $z = 1$ de la fraction rationnelle

$$R'(z) - R(z)$$

et égale à 0.

Or la différence $R'(z) - R(z)$ s'écrit comme une somme de résidus calculés le long des pôles qu'il faut traverser en allant de la zone $|z| \ll 1$ à la zone $|z| = 1$.

Comme s a été choisi très grand, les pôles de

$$L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, zq_{x_0}^{-s-\frac{1}{2}}\right)$$

n'apparaissent pas au cours de cette traversée.

D'autre part, comme la transformée de Fourier \widehat{f}_x est à support compact en au moins une place $x \in |F|$, les pôles de la fonction L globale

$$L\left(\pi^\vee, q^{-s-\frac{1}{2}}\right)$$

disparaissent par multiplication avec le facteur

$$h_{\pi \otimes |\det(\bullet)|^{-s}}(g_1, g_2) \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-s-\frac{1}{2}}\right)^{-1}.$$

Finalement, les seuls pôles qui apparaissent dans le calcul de la différence $R'(z) - R(z)$ sont ceux de

$$L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, zq_{x_0}^{s-\frac{1}{2}}\right) = \prod_{1 \leq i \leq k} \prod_{1 \leq j \leq r'_i} \frac{1}{1 - zq_{x_0}^{s-\frac{1}{2}} z_{i,j} \lambda_i^{\deg(x_0)}}.$$

Ces pôles sont définis par des équations de la forme

$$q_{x_0}^{s-\frac{1}{2}} z_{i_0, j_0} \lambda_{i_0}^{\deg(x_0)} = z^{-1}.$$

Si un tel pôle apparaît avec la multiplicité m_{i_0} , alors le polynôme

$$L_{x_0}\left(\pi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} = \prod_{1 \leq i \leq k} \prod_{1 \leq j \leq r'_i} \left(1 - q_{x_0}^{s-\frac{1}{2}} z_{i,j} \lambda_i^{\deg(x_0)}\right)$$

contient en facteur

$$\left(1 - q_{x_0}^{s-\frac{1}{2}} z_{i_0, j_0} \lambda_{i_0}^{\deg(x_0)}\right)^{m_{i_0}}$$

qui se spécialise sur le pôle considéré en

$$(1 - z^{-1})^{m_{i_0}},$$

et ses dérivées de degrés $\leq m_{i_0} - 1$ conservent au moins un facteur

$$1 - q_{x_0}^{s-\frac{1}{2}}$$

qui se spécialise en

$$1 - z^{-1}.$$

On conclut que la fraction rationnelle $R'(z) - R(z)$ est bien définie au voisinage de $z = 1$ et qu'elle s'annule au point 1.

Cela termine la preuve du lemme. □

On déduit de ce lemme :

Corollaire V.14. –

(i) *La différence des deux fonctionnelles*

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x \mapsto S(f)$$

et

$$f \mapsto \left(\sum_{\gamma \in \mathrm{GL}_r(F)} f(\gamma) \right) + \left(\sum_{\gamma \in \mathrm{GL}_r(F)} \widehat{f}(\gamma) \right) - \sum_{\gamma \in M_r(F)} \widehat{f}(\gamma)$$

ne dépend que de la restriction de chaque \widehat{f}_x , $x \in |F|$, à un voisinage arbitrairement petit du bord $M_r(F_x) - \mathrm{GL}_r(F_x)$ de $M_r(F_x)$.

(ii) *Par conséquent, cette différence est identiquement nulle.*

Démonstration :

(i) Soit $f' = \bigotimes_{x \in |F|} f'_x$ une autre fonction de Schwartz telle que \widehat{f}_x et \widehat{f}'_x coïncident sur un voisinage de $M_r(F_x) - \mathrm{GL}_r(F_x)$ en une certaine place et qu'ils sont égaux en les autres places.

Alors on a

$$\sum_{\gamma \in M_r(F)} (\widehat{f - f'}) (\gamma) = \sum_{\gamma \in \mathrm{GL}_r(F)} (\widehat{f - f'}) (\gamma)$$

et, d'après le lemme V.13,

$$S(f - f') = \sum_{\gamma \in \mathrm{GL}_r(F)} (f - f')(\gamma).$$

D'où la conclusion.

(ii) résulte de (i) puisque ces deux fonctionnelles sont invariantes par la transformation de Fourier

$$f \mapsto \widehat{f}$$

et donc aussi leur différence. □

Ce corollaire achève la démonstration du théorème V.4.

VI. Transformations de Fourier locales non linéaires

Comme dans le paragraphe I, on considère un groupe réductif G , pas nécessairement quasi-déployé, sur un corps local ultramétrique F_x .

On suppose que G est muni d'un caractère non trivial

$$\det_G : G \rightarrow \mathbb{G}_m.$$

Les théorèmes III.4 et III.6 d'expression spectrale des fonctions de Schwartz sur $\mathrm{GL}_r(F_x) \subset M_r(F_x)$ et de leur ψ_x -transformation de Fourier amènent à proposer la définition très générale suivante :

Définition VI.1. –

Soit ρ la donnée d'un caractère

$$\det_\rho : G \rightarrow \mathbb{G}_m,$$

d'une réunion $\{\pi\}_x^{G,\rho}$ de classes $[\pi]$ de $\{\pi\}_x^G$, et d'une manière d'associer à toute $\pi \in \{\pi\}_x^{G,\rho}$ une fraction rationnelle en Z

$$L_x(\rho, \pi, Z)$$

et un monôme en $Z^{\pm 1}$

$$\varepsilon_x(\rho, \pi, Z)$$

tels que

- pour toute $\pi \in \{\pi\}_x^{G,\rho}$, sa contragrédiente π^\vee est dans $\{\pi\}_x^{G,\rho}$ et toute représentation $\pi' \in \{\pi\}_x^G$ qui a le même support supercuspidal que π est dans $\{\pi\}_x^{G,\rho}$,
- pour toute $\pi \in \{\pi\}_x^{G,\rho}$ et tout $s \in \mathbb{C}$, on a

$$L_x(\rho, \pi \otimes |\det_G(\bullet)|^s, Z) = L_x(\rho, \pi, q_x^{-s} \cdot Z),$$

$$\varepsilon_x(\rho, \pi \otimes |\det_G(\bullet)|^s, Z) = \varepsilon_x(\rho, \pi, q_x^{-s} \cdot Z),$$

- la fraction rationnelle quotient

$$\gamma_x(\rho, \pi, Z) = \frac{L_x(\rho, \pi, Z) \cdot \varepsilon_x(\rho, \pi, Z)}{L_x(\rho, \pi^\vee, \frac{q}{Z})}$$

ne dépend que du support supercuspidal de $\pi \in \{\pi\}_x^{G,\rho}$,

- pour tout sous-groupe ouvert compact $K \subset G(F_x)$, l'inverse

$$L_x(\rho, \pi, Z)^{-1}$$

est un polynôme en Z et π sur $\{\pi\}_{x,K}^{G,\rho} = \{\pi\}_x^{G,\rho} \cap \{\pi\}_{x,K}^G$ qui vaut 1 pour $Z = 0$, et le monôme

$$\varepsilon_x(\rho, \pi, Z)$$

est un polynôme inversible en $Z^{\pm 1}$ et π .

Alors :

(i) On appellera ρ -fonctions sur $G(F_x)$ les fonctions

$$f_x : K \backslash G(F_x) / K \rightarrow \mathbb{C}$$

dont les restrictions aux fibres de l'homomorphisme

$$|\det_G(\bullet)|_x : G(F_x) \rightarrow q_x^{\mathbb{Z}}$$

sont à support compact, et qui se décomposent spectralement sous la forme

$$f_x(\bullet) = |\det_\rho(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\text{Im}\{\pi\}_{x,K}^{G,\rho}} d\pi \cdot f_{x,\pi}(\bullet) \cdot L_x\left(\rho, \pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

où

- pour tout $g \in G(F_x)$,

$$x \mapsto f_{x,\pi}(g)$$

est une fonction polynomiale sur $\{\pi\}_{x,K}^{G,\rho}$,

- pour toute $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^{G,\rho}$, la fonction sur $G(F_x)$

$$g \mapsto f_{x,\pi}(g)$$

est élément de l'espace $\pi_K^\vee \boxtimes \pi_K$ des coefficients matriciels de π bi-invariants par K .

(ii) On appellera ρ -transformation de Fourier l'opérateur qui associe à toute ρ -fonction f_x décomposée spectralement comme ci-dessus la fonction

$$\widehat{f}_x(\bullet) = |\det_\rho(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\text{Im}\{\pi\}_{x,K}^{G,\rho}} d\pi \cdot f_{x,\pi}((\bullet)^{-1}) \cdot L\left(\rho, \pi, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \varepsilon_x\left(\rho, \pi, q_x^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Remarques :

(i) Il résulte du corollaire I.9 que pour toute ρ -fonction f_x , les restrictions de sa ρ -transformée de Fourier \widehat{f}_x aux fibres de l'homomorphisme

$$|\det_G(\bullet)|_x : G(F_x) \rightarrow q_x^{\mathbb{Z}}$$

sont à support compact, si bien que \widehat{f}_x est aussi une ρ -fonction.

(ii) Il résulte de la définition que l'espace des ρ -fonctions f_x est invariant par translation à droite ou à gauche par les éléments $g \in G(F_x)$ et que

$$\widehat{f}_x^g = |\det_\rho(g)|_x^{-1} \cdot g^{-1} \widehat{f}_x,$$

$$g \widehat{f}_x = |\det_\rho(g)|_x^{-1} \cdot \widehat{f}_x^{g^{-1}}.$$

(iii) Pour toute $\pi \in \{\pi\}_x^{G,\rho}$, le produit du polynôme

$$L_x(\rho, \pi, Z)^{-1}$$

et de la fraction rationnelle

$$\gamma_x(\rho, \pi, Z)$$

est un polynôme. Autrement dit, $L_x(\rho, \pi, Z)^{-1}$ est un multiple du dénominateur réduit de la fraction rationnelle $\gamma_x(\rho, \pi, Z)$. \square

On déduit aussitôt de la définition :

Lemme VI.2. –

Soit ρ une donnée comme ci-dessus.

Alors on a pour toute représentation $\pi \in \{\pi\}_x^{G,\rho}$:

(i) Les intégrales

$$\int_{G(F_x)} dg \cdot f_x(g) \cdot \varphi_x(g) \cdot |\det_G(g)|_x^{s-\frac{1}{2}} \cdot |\det_\rho(g)|_x^{\frac{1}{2}}$$

associées aux ρ -fonctions

$$f_x : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

et aux “coefficients matriciels” de π

$$\varphi_x : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

convergent absolument, pour tout $s \in \mathbb{C}$ de partie réelle $\operatorname{Re}(s)$ assez grande, vers une fraction rationnelle en $Z = q_x^{-s}$.

(ii) Ces fractions rationnelles en $Z = q_x^{-s}$ engendrent un idéal fractionnaire qui admet un unique générateur

$$L'_x(\rho, \pi, Z)$$

dont l'inverse $L'_x(\rho, \pi, Z)^{-1}$ est un polynôme en Z dont le coefficient constant est égal à 1.

(iii) Le polynôme $L'_x(\rho, \pi, Z)^{-1}$ divise le polynôme $L_x(\rho, \pi, Z)^{-1}$.

□

Rappelons que si $\pi_2 \in \{\pi\}_x^G$, (M, π_0) désigne le support supercuspidal de π_2 et $[\pi_1] \subset \{\pi\}_x^G$ désigne l'unique classe des représentations dont le support discret est contenu dans $[\pi_0]$, alors $[\pi_1]$ s'identifie à un ouvert de Zariski de $[\pi_0]/\operatorname{Fixe}(M, \pi_0)$ et $[\pi_2]$ se plonge comme sous-schéma localement fermé dans $[\pi_0]/\operatorname{Fixe}(M, \pi_0)$. De plus, toute fonction “polynomiale” sur $[\pi_1]$ se prolonge à $[\pi_0]/\operatorname{Fixe}(M, \pi_0)$ et se spécialise donc en une fonction polynomiale sur $[\pi_2]$.

On déduit du théorème I.8 :

Proposition VI.3. –

Soit ρ une donnée comme ci-dessus.

Soient $\pi_2 \in \{\pi\}_x^{G,\rho}$, (M, π_0) son support supercuspidal et $[\pi_1] \subset \{\pi\}_x^{G,\rho}$ la classe qui s'identifie à un ouvert de Zariski de $[\pi_0]/\operatorname{Fixe}(M, \pi_0)$.

Alors :

(i) La fraction rationnelle

$$[\pi_2] \ni \pi \mapsto \gamma_x(\rho, \pi, Z) = \frac{L_x(\rho, \pi, Z) \cdot \varepsilon_x(\rho, \pi, Z)}{L_x\left(\rho, \pi, \frac{q}{Z}\right)}$$

n'est autre que la spécialisation de la fraction rationnelle

$$[\pi_1] \ni \pi \mapsto \gamma_x(\rho, \pi, Z).$$

(ii) Pour tout $\pi \in [\pi_1]$, on a

$$L'_x(\rho, \pi, Z) = L_x(\rho, \pi, Z).$$

(iii) Pour tout $\pi' \in [\pi_2]$, le polynôme

$$L'_x(\rho, \pi', Z)^{-1}$$

divise le polynôme obtenu par spécialisation en π' de la fonction polynomiale

$$[\pi_1] \ni \pi \mapsto L_x(\rho, \pi, Z)^{-1}.$$

□

Cette proposition implique :

Corollaire VI.4. –

Soit ρ' une “donnée incomplète” consistant en un caractère

$$\det_{\rho'} : G \rightarrow \mathbb{G}_m,$$

une réunion $\{\pi\}_x^{G, \rho'}$ de classe $[\pi]$ de $\{\pi\}_x^G$, une manière d'associer à toute $\pi \in \{\pi\}_x^{G, \rho'}$ une fraction rationnelle en Z

$$L_x(\rho', \pi, Z)$$

et un monôme en $Z^{\pm 1}$

$$\varepsilon_x(\rho', \pi, Z)$$

tels que

- $\{\pi\}_x^{G, \rho'}$ est stable par $\pi \mapsto \pi^\vee$,
- le support discret de tout élément $\pi \in \{\pi\}_x^{G, \rho'}$ est supercuspidal,
- pour toute $\pi \in \{\pi\}_x^{G, \rho'}$ et tout $s \in \mathbb{C}$, on a

$$L_x(\rho', \pi \otimes |\det_G(\bullet)|_x^{-s}, Z) = L_x(\rho', \pi, q_x^{-s} \cdot Z),$$

$$\varepsilon_x(\rho', \pi \otimes |\det_G(\bullet)|_x^{-s}, Z) = \varepsilon_x(\rho', \pi, q_x^{-s} \cdot Z),$$

- sur chaque $\{\pi\}_{x, K}^{G, \rho'} = \{\pi\}_x^{G, \rho'} \cap \{\pi\}_{x, K}^G$, l'inverse

$$L_x(\rho', \pi, Z)^{-1}$$

est un polynôme en Z et π qui vaut 1 pour $Z = 0$, et le monôme

$$\varepsilon_x(\rho', \pi, Z)$$

est un polynôme inversible en $Z^{\pm 1}$ et π .

Alors il existe une unique donnée ρ au sens de la définition VI.1 telle que

- $\det_\rho = \det_{\rho'}$,
- $\{\pi\}_x^{G, \rho}$ est l'ensemble des représentations $\pi \in \{\pi\}_x^G$ dont le support supercuspidal est égal au support discret d'un élément de $\{\pi\}_x^{G, \rho'}$,
- pour toute $\pi \in \{\pi\}_x^{G, \rho'} \subset \{\pi\}_x^{G, \rho}$, on a

$$L_x(\rho, \pi, Z) = L_x(\rho', \pi, Z),$$

$$\varepsilon_x(\rho, \pi, Z) = \varepsilon_x(\rho', \pi, Z),$$

- pour toute $\pi \in \{\pi\}_x^{G,\rho}$, on a avec les notations du lemme VI.2

$$L'_x(\rho, \pi, Z) = L_x(\rho, \pi, Z).$$

□

On pose donc :

Définition VI.5. –

Une donnée $\rho = (\det_\rho, \{\pi\}_x^{G,\rho}, L_x(\rho, \bullet, Z), \varepsilon_x(\rho, \bullet, Z))$ comme dans le définition VI.1 sera dite “normalisée” si, avec les notations du lemme VI.2, on a pour toute $\pi \in \{\pi\}_x^{G,\rho}$

$$L'_x(\rho, \pi, Z) = L_x(\rho, \pi, Z).$$

□

Ainsi, le corollaire VI.4 dit qu’une donnée normalisée ρ est entièrement déterminée par sa restriction aux représentations $\pi \in \{\pi\}_\rho^{G,x}$ dont le support discret est supercuspidal.

Dans la suite, on ne considérera plus que des données normalisées.

VII. Transformations de Fourier globales et formules de Poisson non linéaires

Comme dans le paragraphe II, on considère un groupe réductif G , pas nécessairement quasi-déployé, sur un corps de fonctions F de corps des constantes \mathbb{F}_q .

On suppose que G est muni d'un caractère non trivial

$$\det_G : G \rightarrow \mathbb{G}_m.$$

L'expression spectrale de l'espace des fonctions de Schwartz globales sur $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \subset M_r(\mathbb{A})$ et de la ψ -transformation de Fourier dans cet espace amène à proposer la définition très générale suivante :

Définition VII.1. –

Soit ρ la donnée d'un caractère

$$\det_\rho : G \rightarrow \mathbb{G}_m$$

complétée, en chaque place $x \in |F|$, en une donnée locale normalisée

$$(\det_\rho, \{\pi\}_x^{G,\rho}, L_x(\rho, \bullet, Z), \varepsilon_x(\rho, \bullet, Z))$$

au sens des définitions VI.1 et VI.5.

On suppose que, en toute place $x \in |F| - S_G$ où le groupe réductif G est non ramifié, les représentations non ramifiées $\pi \in \{\pi\}_{x,\emptyset}^G$ sont éléments de $\{\pi\}_x^{G,\rho}$.

En une telle place non ramifiée x , on appelle “ ρ -fonction standard” la fonction sphérique

$$G(O_x) \backslash G(F_x) / G(O_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

définie par la décomposition spectrale

$$|\det_\rho(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\{\pi\}_{x,\emptyset}^G} d\pi \cdot \varphi_{x,\pi}(g) \cdot L_x\left(\rho, \pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

où, pour toute $\pi \in \{\pi\}_{x,\emptyset}^G$, $\varphi_{x,\pi}$ est l'unique coefficient matriciel de π qui est sphérique et vérifie $\varphi_{x,\pi}(1) = 1$.

On suppose enfin que, en presque toute place $x \in |F| - S_G$, on a $\varepsilon_x(\rho, \pi, Z) = 1$, $\forall \pi \in \{\pi\}_{x,\emptyset}^G$, si bien que la ρ -fonction standard en une telle place est sa propre ρ -transformée de Fourier.

Alors :

- (i) On appellera ρ -fonctions sur $G(\mathbb{A})$ les combinaisons linéaires de produits

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

de ρ -fonctions locales

$$f_x : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

égales aux “ ρ -fonctions standard” en presque toute place $x \in |F| - S_G$.

- (ii) On appellera ρ -transformation de Fourier des ρ -fonctions globales sur $G(\mathbb{A})$ l'opérateur linéaire qui associe à toute ρ -fonction produit

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x$$

le produit des ρ -transformées de Fourier locales

$$\widehat{f} = \bigotimes_{x \in |F|} \widehat{f}_x.$$

Remarque :

Il résulte de l'hypothèse faite sur les

$$\{\pi\}_{x, \emptyset}^G \ni \pi \mapsto \varepsilon_x(\rho, \pi, Z), \quad x \in |F| - S_G,$$

que la ρ -transformée de Fourier d'une ρ -fonction globale est encore une ρ -fonction globale. \square

Par analogie avec la définition V.5, posons :

Définition VII.2. –

Soit $x_0 \in |F| - S_G$ une place de F en laquelle le groupe réductif G est non ramifié.

Soit

$$f_{x_0} : G(F_{x_0}) \rightarrow \mathbb{C}$$

une ρ -fonction sphérique, c'est-à-dire invariante à gauche et à droite par $G(O_x)$, et dont la décomposition spectrale s'écrit

$$f_{x_0}(\bullet) = |\det_\rho(\bullet)|_{x_0}^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\text{Im}\{\pi\}_{x, \emptyset}^G} d\pi \cdot f_{x_0, \pi}(\bullet) \cdot L_{x_0}(\rho, \pi^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}).$$

Alors, pour tous $N, N' \in \mathbb{N}$, on note

$$f_{x_0}^{N, N'} : G(F_{x_0}) \rightarrow \mathbb{C}$$

la ρ -fonction définie par l'expression spectrale

$$f_{x_0}^{N, N'}(\bullet) = |\det_\rho(\bullet)|_{x_0}^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\text{Im}\{\pi\}_{x, \emptyset}^G} d\pi \cdot f_{x_0, \pi}(\bullet) \cdot L_{x_0}(\rho, \pi^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}) \cdot I_{x_0}^N(\rho, \pi, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}) \cdot I_{x_0}^{N'}(\rho, \pi^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}})$$

où $I_{x_0}^N(\rho, \pi, Z)$ désigne le polynôme en Z et π produit de

$$L_{x_0}(\rho, \pi, Z)^{-1}$$

et du monôme de degré N en Z qui apparaît dans le développement en série formelle en Z de l'inverse

$$L_{x_0}(\rho, \pi, Z).$$

Remarques :

- (i) On observe comme dans le cas linéaire que les fonctions $f_{x_0}^{N, N'}$ et leurs ρ -transformées de Fourier $\widehat{f_{x_0}^{N, N'}}$ sont à support compact dans $G(F_{x_0})$.

(ii) Ici encore, on a pour toute $\pi \in \{\pi\}_{x,\emptyset}^G$ l'égalité

$$\sum_{N \in \mathbb{N}} I_{x_0}^N(\rho, \pi, Z) = 1$$

dans l'anneau des séries formelles en Z . De plus, les sommes $\sum_{N \geq N_0} \left| I_{x_0}^N(\rho, \pi, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}) \right|$ convergent uniformément vers 0 si $\pi \in \text{Im} \{\pi\}_{x,\emptyset}^r$ et N_0 devient arbitrairement grand.

Il en résulte que, pour tout $g \in G(F_{x_0})$,

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} f_{x_0}^{N, N'}(g) = f_{x_0}(g).$$

□

Le cas de GL_r et de la transformation de Fourier linéaire sur $M_r(\mathbb{A})$, avec le théorème V.4 et le corollaire V.2, amène à envisager la forme générale suivante pour d'éventuelles autres formules de Poisson :

Définition VII.3. –

Soit ρ une donnée globale comme dans la définition VII.1 pour le groupe réductif G sur F muni du caractère non trivial $\det_G : G \rightarrow \mathbb{G}_m$.

(i) On dira que ρ satisfait la formule de Poisson si, pour toute ρ -fonction produit

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

et pour toute place $x_0 \in |F| - S_G$ en laquelle G est non ramifié et le facteur f_{x_0} est sphérique, la série formelle

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \left(f_{x_0}^{N, N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right) (\gamma)$$

est une fraction rationnelle en Z dont la “valeur régularisée” en $Z = 1$, notée $S(f)$, ne dépend pas du choix de x_0 et vérifie

$$S(f) = S(\widehat{f}).$$

(ii) Supposons que pour toute place $x \in |F|$, tout sous-groupe ouvert compact $K_x \subset G(F_x)$, tout caractère $\omega : F_x^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ assez ramifié en fonction de K_x et toute représentation $\pi' \in \{\pi\}_{x, K_x}^{G, \rho}$, la représentation

$$\pi = \pi' \cdot \omega = \pi' \otimes (\omega \circ \det_G)$$

soit élément de $\{\pi\}_x^{G, \rho}$ et vérifie

$$L_x(\rho, \pi, Z) = 1.$$

Et appelons “très ramifiées” les ρ -fonctions locales

$$f_x : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

dont la décomposition spectrale

$$f_x(\bullet) = |\det_\rho(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\text{Im} \{\pi\}_x^{G, \rho}} d\pi \cdot f_{x, \pi}(\bullet) \cdot L_x(\rho, \pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}})$$

ne fait apparaître que des représentations π de cette forme $\pi' \cdot \omega$.

Alors on dira que ρ satisfait la formule de Poisson très ramifiée si, pour toute ρ -fonction produit

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

dont au moins un facteur f_x est très ramifié, on a

$$\sum_{\gamma \in G(F)} f(\gamma) = \sum_{\gamma \in G(F)} \widehat{f}(\gamma).$$

Remarques :

- (i) La formule de Poisson et la formule de Poisson non ramifiée ne dépendent pas du choix du caractère \det_ρ dans la donnée globale ρ .

En effet, si ρ et ρ' sont deux données globales qui ne diffèrent que par les caractères \det_ρ et $\det_{\rho'}$, l'opérateur

$$f(\bullet) \mapsto |\det_\rho(\bullet)|^{1/2} \cdot |\det_{\rho'}(\bullet)|^{-1/2} \cdot f$$

définit un isomorphisme de l'espace des ρ -fonctions sur celui des ρ' -fonctions qui échange les transformations de Fourier et les fonctionnelles linéaires considérées dans l'énoncé.

- (ii) Dans la situation de (ii), si une ρ -fonction locale

$$f_x : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

est très ramifiée, il en est de même de \widehat{f}_x . De plus, toutes deux sont à support compact.

- (iii) Il n'est pas sûr a priori qu'une donnée ρ qui satisfait la formule de Poisson satisfait nécessairement aussi la formule de Poisson très ramifiée.

□

Il est clair qu'une donnée ρ comme dans la définition VII.1 ne peut satisfaire la formule de Poisson ou la formule de Poisson très ramifiée que si elle vérifie des conditions très restrictives.

Les paragraphes suivants montrent, d'abord dans le cas des tores puis dans le cas général d'un groupe réductif G sur F , que le principe de functorialité de Langlands permet de construire des données ρ qui satisfont les deux formules.

VIII. Le cas des tores

Dans ce paragraphe, on considère un tore T , pas nécessairement déployé, sur un corps de fonctions F de corps des constantes \mathbb{F}_q .

On note X_T le réseau des caractères $T \rightarrow \mathbb{G}_m$ définis sur une clôture séparable \overline{F} de F , et X_T^\vee le réseau dual des cocaractères $\mathbb{G}_m \rightarrow T$. Le réseau X_T et son dual X_T^\vee sont munis d'une action naturelle du groupe de Galois $\Gamma_F = \text{Aut}_F(\overline{F})$ de F .

Rappelons la définition du tore dual de T :

Définition VIII.1. –

On appelle *tore dual* de T , et on note \widehat{T} , le tore algébrique sur \mathbb{C} dont le réseau des caractères est

$$X_{\widehat{T}} = X_T^\vee$$

et le réseau des cocaractères est

$$X_{\widehat{T}}^\vee = X_T.$$

Il est muni d'une action naturelle de Γ_F .

On a le lemme suivant qui résulte de l'équivalence entre la catégorie des ensembles finis munis d'une action continue de Γ_F et celle des extensions finies séparables du corps F :

Lemme VIII.2. –

Considérons une famille de r caractères de \widehat{T}

$$\rho_T^i : \widehat{T} \rightarrow \mathbb{C}^\times, \quad 1 \leq i \leq r,$$

sur laquelle le groupe de Galois Γ_F agit via une action sur l'ensemble $\{1, \dots, r\}$ des indices.

Soit E l'extension séparable de degré r de F qui est associée à l'ensemble $\{1, \dots, r\}$ muni de l'action de Γ_F , et soit

$$T_E = \text{Res}_{E/F} \mathbb{G}_m$$

le tore de rang r sur F déduit de \mathbb{G}_m par restriction des scalaires à la Weil de E à F .

Alors le dual \widehat{T}_E de T_E s'identifie au produit

$$(\mathbb{C}^\times)^r$$

muni de l'action par permutation de Γ_F , et l'homomorphisme de tores complexes Γ_F -équivariant

$$\rho_T = (\rho_T^1, \dots, \rho_T^r) : \widehat{T} \rightarrow (\mathbb{C}^\times)^r = \widehat{T}_E$$

est dual d'un homomorphisme de tores

$$\rho_T^\vee : T_E \rightarrow T$$

bien défini sur F . □

Dans la situation de ce lemme, l'extension E est un produit fini

$$E = \prod_{1 \leq j \leq k} E_j$$

de corps E_j qui sont des extensions finies séparables de F .

Pour $1 \leq j \leq k$, chaque place $y \in |E_j|$ est au-dessus d'une place $x \in |F|$. Alors le corps local $E_{j,y}$ est une extension finie séparable de F_x et son corps résiduel κ_y est une extension finie de K_x si bien que son cardinal $q_y = q^{\deg(y)}$ est une puissance de $q_x = q^{\deg(x)}$.

Pour toute place $x \in |F|$, l'algèbre locale $E_x = E \otimes_F F_x = \prod_{1 \leq j \leq k} (E_j \otimes_F F_x) = \prod_{1 \leq j \leq k} E_{j,x}$ s'identifie au produit

$$\prod_{1 \leq j \leq k} \prod_{\substack{y \in |E_j| \\ y \rightarrow x}} E_{j,y}.$$

En tant qu'algèbre de dimension finie sur F_x , elle est munie d'un homomorphisme de trace

$$\mathrm{Tr}_{E_x/F_x} : E_x \rightarrow F_x$$

qui est la somme des homomorphismes de traces

$$\mathrm{Tr}_{E_{j,y}/F_x} : E_{j,y} \rightarrow F_x.$$

De même l'anneau adélique $\mathbb{A}_E = E \otimes_F \mathbb{A} = \prod_{1 \leq j \leq k} (E_j \otimes_F \mathbb{A})$ s'identifie au produit

$$\prod_{1 \leq j \leq k} \mathbb{A}_{E_j}$$

des anneaux adéliques \mathbb{A}_{E_j} des E_j . Il est muni d'un homomorphisme de trace global

$$\mathrm{Tr}_{\mathbb{A}_E/\mathbb{A}} = \bigoplus_{1 \leq j \leq k} \mathrm{Tr}_{\mathbb{A}_{E_j}/\mathbb{A}} : \mathbb{A}_E = \prod_{1 \leq j \leq k} \mathbb{A}_{E_j} \rightarrow \mathbb{A}$$

qui est la somme des homomorphismes de traces locaux

$$\mathrm{Tr}_{E_x/F_x} = \bigoplus_{1 \leq j \leq k} \mathrm{Tr}_{E_{j,x}/F_x} : E_x = \prod_{1 \leq j \leq k} E_{j,x} \rightarrow F_x.$$

La restriction de $\mathrm{Tr}_{\mathbb{A}_E/\mathbb{A}}$ au sous-groupe discret $E = \prod_{1 \leq j \leq k} E_j$ de $\mathbb{A}_E = \prod_{1 \leq j \leq k} \mathbb{A}_{E_j}$ est la somme

$$\mathrm{Tr}_{E/F} = \bigoplus_{1 \leq j \leq k} \mathrm{Tr}_{E_j/F}$$

des homomorphismes de traces

$$\mathrm{Tr}_{E_j/F} : E_j \rightarrow F.$$

En particulier, elle envoie E dans F .

Supposons maintenant que l'anneau \mathbb{A} des adèles de F est muni d'un caractère additif continu unitaire non trivial

$$\psi = \prod_{x \in |F|} \psi_x : \mathbb{A}/F \rightarrow \mathbb{C}^\times.$$

Alors, pour toute place $x \in |F|$, $E_x = \prod_{1 \leq j \leq k} \prod_{\substack{y \in |E_j| \\ y \rightarrow x}} E_{j,y}$ se trouve muni du caractère composé

$$\psi_{E_x} = \psi_x \circ \mathrm{Tr}_{E_x/F_x} = \prod_{1 \leq j \leq k} \prod_{\substack{y \in |E_j| \\ y \rightarrow x}} (\psi_x \circ \mathrm{Tr}_{E_{j,y}/F_x}).$$

Et $\mathbb{A}_E = \prod_{1 \leq j \leq k} \mathbb{A}_{E_j}$ se trouve muni du caractère produit

$$\prod_{x \in |F|} \psi_{E_x}$$

qui n'est autre que le composé

$$\psi \circ \text{Tr}_{\mathbb{A}_E/\mathbb{A}} = \prod_{1 \leq j \leq k} (\psi \circ \text{Tr}_{\mathbb{A}_{E_j}/\mathbb{A}})$$

et donc est trivial sur $E = \prod_{1 \leq j \leq k} E_j$.

On munit les $E_{j,y}$, $y \in |E_j|$, et \mathbb{A}_{E_j} , $1 \leq j \leq k$, des mesures additives autoduales pour ces caractères. Puis on munit les E_x , $x \in |F|$, et \mathbb{A}_E des mesures produits.

En toute place $x \in |F|$, les caractères

$$\chi \in \{\pi\}_x^{T_E}$$

sont les produits

$$\chi = \prod_{1 \leq j \leq k} \prod_{\substack{y \in |E_j| \\ y \rightarrow x}} \chi_{j,y}$$

de caractères

$$\chi_{j,y} \in \{\pi\}_y^{\mathbb{G}_m}$$

des groupes multiplicatifs $E_{j,y}^\times$.

Alors on peut poser

$$L_x(\chi, Z) = \prod_{1 \leq j \leq k} \prod_{\substack{y \in |E_j| \\ y \rightarrow x}} L_y \left(\chi_{j,y}, Z^{\frac{\deg(y)}{\deg(x)}} \right)$$

et

$$\varepsilon_x(\chi, \psi_x, Z) = \prod_{1 \leq j \leq k} \prod_{\substack{y \in |E_j| \\ y \rightarrow x}} \varepsilon_y \left(\chi_{j,y}, \psi_x \circ \text{Tr}_{E_{j,y}/F_x}, Z^{\frac{\deg(y)}{\deg(x)}} \right).$$

On déduit des résultats du paragraphe III appliqués aux $E_{j,y}$, $y \in |E_j|$, et \mathbb{A}_{E_j} , $1 \leq j \leq k$:

Lemme VIII.3. –

Dans la situation et avec les notations ci-dessus, considérons le tore T_E muni du caractère de norme

$$\det_{T_E} = \text{Nm} : T_E = \text{Res}_{E/F} \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m$$

dual du cocaractère de plongement diagonal

$$\widehat{\mathbb{G}}_m = \mathbb{C}^\times \hookrightarrow (\mathbb{C}^\times)^r = \widehat{T}_E.$$

Alors :

(i) *Les familles de fractions rationnelles*

$$L_x(\chi, Z) \quad \text{et} \quad \varepsilon_x(\chi, \psi_x, Z), \quad \chi \in \{\pi\}_x^{T_E},$$

en chaque place $x \in |F|$, définissent une donnée globale ρ_E sur T_E au sens de la définition VII.1.

(ii) En toute place $x \in |F|$, les ρ_E -fonctions sur $T_E(F_x) = E_x^\times$ sont les fonctions

$$E_x^\times \rightarrow \mathbb{C}$$

qui se prolongent en une fonction localement constante à support compact

$$f_x : E_x \rightarrow \mathbb{C}.$$

De plus, la ρ_E -transformation de Fourier de ces fonctions f_x est donnée par la formule

$$\widehat{f}_x(a') = \int_{E_x} da \cdot f_x(a) \cdot \psi_x \circ \text{Tr}_{E_x/F_x}(aa').$$

(iii) Les ρ_E -fonctions globales sur $T_E(\mathbb{A}) = \mathbb{A}_E^\times$ sont les fonctions

$$\mathbb{A}_E^\times \rightarrow \mathbb{C}$$

qui se prolongent en une fonction localement constante à support compact

$$f : \mathbb{A}_E \rightarrow \mathbb{C}.$$

De plus, la ρ_E -transformation de Fourier globale de ces fonctions f est donnée par la formule

$$\widehat{f}(a') = \int_{\mathbb{A}_E} da \cdot f(a) \cdot \psi \circ \text{Tr}_{\mathbb{A}_E/\mathbb{A}}(aa').$$

□

Plaçons-nous dans la situation du lemme VIII.2 où l'on dispose de l'homomorphisme de tores sur F

$$\rho_T^\vee : T_E \rightarrow T$$

dual de l'homomorphisme Γ_F -équivariant de tores complexes

$$\rho_T = (\rho_T^1, \dots, \rho_T^r) : \widehat{T} \rightarrow (\mathbb{C}^\times)^r = \widehat{T}_E.$$

En toute place $x \in |F|$, les caractères éléments de $\{\pi\}_x^T$

$$\chi : T(F_x) \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

induisent par composition avec ρ_T^\vee des caractères éléments de $\{\pi\}_x^{T_E}$

$$\chi \circ \rho_T^\vee : T_E(F_x) = E_x^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times.$$

Cela permet de poser la définition suivante :

Définition VIII.4. –

Dans la situation du lemme VIII.2, supposons le tore T muni d'un caractère défini sur F

$$\det_T : T \rightarrow \mathbb{G}_m$$

dont le composé avec l'homomorphisme

$$\rho_T^\vee : T_E \rightarrow T$$

est le caractère de norme

$$\det_{T_E} = \text{Nm} : T_E = \text{Res}_{E/F} \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m.$$

Alors on appellera “donnée induite par ρ_T ” la donnée globale sur T muni de \det_T qui consiste, en toute place $x \in |F|$, à associer aux caractères $\chi \in \{\pi\}_x^T$ les fractions rationnelles

$$L_x(\rho_T, \chi, Z) = L_x(\chi \circ \rho_T^\vee, Z)$$

et

$$\varepsilon_x(\rho_T, \chi, Z) = \varepsilon_x(\chi \circ \rho_T^\vee, \psi_x, Z).$$

Remarque :

Le cocaractère

$$\widehat{\det}_T : \mathbb{C}^\times \rightarrow \widehat{T}$$

qui correspond à $\det_T : T \rightarrow \mathbb{G}_m$, composé avec

$$\rho_T = (\rho_T^1, \dots, \rho_T^r) : \widehat{T} \rightarrow (\mathbb{C}^\times)^r,$$

devient le plongement diagonal $\mathbb{C}^\times \hookrightarrow (\mathbb{C}^\times)^r$. □

On déduit du lemme VIII.3 :

Corollaire VIII.5. –

Dans la situation de la définition VIII.4, notons T_ρ le noyau de l’homomorphisme de tores sur F

$$\rho_T^\vee : T_E \rightarrow T.$$

(i) Supposons que, en une place $x \in |F|$, l’homomorphisme

$$\rho_T^\vee : T_E(F_x) \rightarrow T(F_x)$$

est surjectif. Alors :

- la suite

$$1 \rightarrow T_\rho(F_x) \rightarrow T_E(F_x) \rightarrow T(F_x) \rightarrow 1$$

est exacte,

- les ρ_T -fonctions sur $T(F_x)$ sont exactement les fonctions déduites des fonctions localement constantes à support compact

$$E_x = E \otimes_F F_x \rightarrow \mathbb{C}$$

par intégration le long des fibres de l’homomorphisme surjectif

$$E_x^\times = T_E(F_x) \rightarrow T(F_x)$$

pour une mesure invariante de $T_\rho(F_x)$,

- la ρ_T -transformation de Fourier locale sur $T(F_x)$ est induite par la $(\psi_x \circ \text{Tr}_{E_x/F_x})$ -transformation de Fourier sur E_x .

(ii) Supposons que, en toute place $x \in |F|$, l’homomorphisme

$$\rho_T^\vee : T_E(F_x) \rightarrow T(F_x)$$

est surjectif. Alors :

- la suite

$$1 \rightarrow T_\rho(\mathbb{A}) \rightarrow T_E(\mathbb{A}) \rightarrow T(\mathbb{A}) \rightarrow 1$$

est exacte,

- les ρ_T -fonctions globales sur $T(\mathbb{A})$ sont exactement les fonctions déduites des fonctions localement constantes à support compact

$$\mathbb{A}_E = E \otimes_F \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{C}$$

par intégration le long des fibres de l'homomorphisme surjectif

$$\mathbb{A}_E^\times = T_E(\mathbb{A}) \rightarrow T(\mathbb{A})$$

pour une mesure invariante de $T_\rho(\mathbb{A})$,

- la ρ_T -transformation de Fourier globale sur $T(\mathbb{A})$ est induite par la $(\psi \circ \text{Tr}_{\mathbb{A}_E/\mathbb{A}})$ -transformation de Fourier sur \mathbb{A}_E .

Remarques :

- (i) Si l'homomorphisme

$$\rho_T : \widehat{T} \rightarrow (\mathbb{C}^\times)^r = \widehat{T}_E$$

est injectif, T_ρ est nécessairement le tore algébrique sur F dual du tore complexe $\widehat{T}_\rho = \text{Coker}(\rho_T)$ et on a une suite exacte de groupes algébriques sur F

$$1 \rightarrow T_\rho \rightarrow T_E \rightarrow T \rightarrow 1.$$

- (ii) Dans ce cas, l'homomorphisme

$$T_E(F_x) \rightarrow T(F_x)$$

est surjectif si le groupe de cohomologie galoisienne

$$H^1(F_x, T_\rho) = H^1(\Gamma_{F_x}, T_\rho(\overline{F}_x))$$

est trivial. D'après le théorème 90 de Hilbert, cette hypothèse est automatiquement vérifiée si T_ρ est de la forme

$$T_\rho \cong \text{Res}_{E'/E} \mathbb{G}_m$$

pour une certaine extension finie séparable E' de F .

□

Prouvons maintenant en général :

Théorème VIII.6. –

Considérons comme dans la définition VIII.4 un homomorphisme Γ_F -équivariant

$$\rho_T = (\rho_T^1, \dots, \rho_T^r) : \widehat{T} \rightarrow (\mathbb{C}^\times)^r = \widehat{T}_E,$$

son dual

$$\rho_T^\vee : T_E \rightarrow T$$

et un caractère $\det_T : T \rightarrow \mathbb{G}_m$ tel que

$$\det_T \circ \rho_T^\vee = \det_{T_E} = \text{Nm}.$$

Alors :

- (i) La donnée globale sur $T(\mathbb{A})$ induite par ρ_T satisfait la formule de Poisson au sens de la définition VII.3(i).

De plus, pour toute ρ_T -fonction globale produit

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x : T(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

et toute place $x_0 \in |F| - S_T$ en laquelle f_{x_0} est sphérique, la fraction rationnelle

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in T(F)} \left(f_{x_0}^{N, N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right) (\gamma)$$

est invariante par la substitution $f \mapsto \hat{f}$, et elle n'a pas de pôle dans le demi-tore $|Z| \leq 1$. Elle est donc bien définie en $Z = 1$ et sa valeur $S(f) = S(\hat{f})$ en ce point est égale aux sommes absolument convergentes

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} \sum_{\gamma \in T(F)} \left(f_{x_0}^{N, N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right) (\gamma) = \sum_{N, N' \in \mathbb{N}} \sum_{\gamma \in T(F)} \left(\hat{f}_{x_0}^{N, N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} \hat{f}_x \right) \right) (\gamma).$$

- (ii) La donnée globale sur $T(\mathbb{A})$ induite par ρ_T satisfait la formule de Poisson très ramifiée au sens de la définition VII.3(ii).

Démonstration :

Pour tout caractère

$$\chi = \bigotimes_{x \in |F|} \chi_x : T(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

invariant par un sous-groupe ouvert compact $K = \prod_{x \in |F|} K_x$, on peut poser

$$L(\rho_T, \chi, Z) = \prod_{x \in |F|} L_x(\rho_T, \chi_x, Z^{\deg(x)})$$

qui est bien défini a priori en tant que série formelle en Z , et

$$\varepsilon(\rho_T, \chi, Z) = \prod_{x \in |F|} \varepsilon_x(\rho_T, \chi_x, Z^{\deg(x)})$$

qui est bien défini en tant que monôme en Z puisque presque tous les facteurs $\varepsilon_x(\rho_T, \chi_x, Z^{\deg(x)})$ valent 1.

Le théorème va résulter de la proposition suivante :

Proposition VIII.7. –

Soit $\chi = \bigotimes_{x \in |F|} \chi_x$ un caractère automorphe

$$T(\mathbb{A})/T(F) \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

invariant par un sous-groupe ouvert compact $K = \prod_{x \in |F|} K_x$ de $T(\mathbb{A})$.

Alors :

(i) *Le produit*

$$L(\rho_T, \chi, q^{-s}) = \prod_{x \in |F|} L_x(\rho_T, \chi_x, q_x^{-s})$$

converge absolument, si $\operatorname{Re}(s)$ est assez grand [resp. si χ est unitaire et $\operatorname{Re}(s) > 1$], vers une fraction rationnelle en q^{-s} qui satisfait l'équation fonctionnelle

$$L(\rho_T, \chi^{-1}, q^{-(1-s)}) = L(\rho_T, \chi, q^{-s}) \cdot \varepsilon(\rho_T, \chi, q^{-s}).$$

(ii) *Si, en une place $x_0 \in |F|$, $I_{x_0}^N(\rho_T, \chi_{x_0}, Z)$ désigne le produit du polynôme*

$$L_{x_0}(\rho_T, \chi_{x_0}, Z)^{-1}$$

et du monôme de degré N du développement en série formelle en Z de l'inverse

$$L_{x_0}(\rho_T, \chi_{x_0}, Z),$$

le produit

$$L\left(\rho_T, \chi^{-1}, q^{-\frac{1}{2}-s}\right) \cdot I_{x_0}^N\left(\rho_T, \chi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}+s}\right)$$

n'a pas de pôle dans la zone

$$\operatorname{Re}(s) > -\frac{1}{2}$$

si χ est unitaire.

De plus, la série

$$\sum_{N \in \mathbb{N}} L\left(\rho_T, \chi^{-1}, q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^N\left(\rho_T, \chi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

converge uniformément vers

$$L\left(\rho_T, \chi^{-1}, q^{-\frac{1}{2}}\right)$$

dans l'espace compact des caractères automorphes unitaires $\chi : T(\mathbb{A})/T(F)$ invariants par K .

(iii) *Si, en une place $x_0 \in |F|$, le caractère $\chi_{x_0} : T(F_{x_0}) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ est le produit*

$$\chi_{x_0} = \chi'_{x_0} \cdot (\omega \circ \det_T)$$

d'un caractère $\chi'_{x_0} : T(F_{x_0}) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ de ramification bornée, c'est-à-dire invariant par un sous-groupe ouvert compact K'_{x_0} fixé, et d'un caractère $\omega : F_{x_0}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ assez ramifié en fonction de K'_{x_0} composé avec \det_T , la fraction rationnelle

$$L(\rho_T, \chi, Z)$$

est un polynôme : elle n'a pas de pôle.

Démonstration de la proposition :

On a par définition

$$L(\rho_T, \chi, Z) = L(\chi \circ \rho_T, Z)$$

et

$$\varepsilon(\rho_T, \chi, Z) = \varepsilon(\chi \circ \rho_T, \psi, Z)$$

si bien que l'on se retrouve ramené à l'étude des fonctions L et ε des caractères automorphes de $T_E(\mathbb{A}) =$

$$\prod_{1 \leq j \leq k} \mathbb{A}_{E_j}^\times.$$

Toutes les assertions résultent alors du cas particulier $r = 1$ du théorème IV.2 appliqué aux corps de fonctions E_j , $1 \leq j \leq k$, et à leurs anneaux d'adèles \mathbb{A}_{E_j} . \square

Suite de la démonstration du théorème VIII.6 :

Considérons une ρ_T -fonction globale produit

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x : T(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

invariante par un sous-groupe ouvert compact $K = \prod_{x \in |F|} K_x$.

En chaque place $x \in |F|$, la fonction

$$f_x : T(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

se décompose spectralement sous la forme

$$f_x(\bullet) = |\det_T(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\text{Im}\{\pi\}_{x, K_x}^T} d\chi \cdot P_x(\chi) \cdot \chi(\bullet) \cdot L_x\left(\rho_T, \chi^{-1}, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

où P_x désigne une fonction polynomiale sur $\{\pi\}_{x, K_x}^T$.

De plus, en presque toute place $x \in |F|$, le tore T est non ramifié, on a $K_x = T(O_x)$ et le polynôme P_x est uniformément égal à 1 sur $\{\pi\}_{x, K_x}^T = \{\pi\}_{x, \emptyset}^T = \Lambda_x^T$.

Notons $\{\chi_0\}$ une famille finie de représentants unitaires des classes $[\chi_0]$ de caractères automorphes

$$T(\mathbb{A})/T(F) \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

invariants par K .

Si $P : \chi \mapsto P(\chi)$ désigne la restriction aux classes $[\chi_0]$ des polynômes produits $\prod_{x \in |F|} P_x$, on peut écrire

pour tout réel $s > \frac{1}{2}$ la formule

$$\sum_{\gamma \in T(F)} f(\gamma) = \sum_{\chi_0 \in \{\chi_0\}} \int_{\text{Im}[\chi_0]} d\chi \cdot P(\chi \otimes |\det_T(\bullet)|^{-s}) \cdot L\left(\rho_T, \chi^{-1}, q^{-\frac{1}{2}-s}\right).$$

Si le facteur f_{x_0} de f en au moins une place $x_0 \in |F|$ est très ramifié au sens de la définition VII.3(ii), les fonctions

$$L\left(\rho_T, \chi^{-1}, q^{-\frac{1}{2}-s}\right)$$

qui apparaissent dans cette formule n'ont pas de pôle d'après la proposition VIII.7(iii) ci-dessus, et on obtient par déplacement de contours

$$\sum_{\gamma \in T(F)} f(\gamma) = \sum_{\chi_0 \in \{\chi_0\}} \int_{\text{Im}[\chi_0]} d\chi \cdot P(\chi) \cdot L\left(\rho_T, \chi^{-1}, q^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Alors l'équation fonctionnelle de la proposition VIII.7(i) implique

$$\sum_{\gamma \in T(F)} f(\gamma) = \sum_{\gamma \in T(F)} \widehat{f}(\gamma).$$

C'est la partie (ii) du théorème.

Considérons maintenant une place $x_0 \in |F|$ en laquelle T est non ramifié et $K_{x_0} = T(O_{x_0})$.

Pour tous entiers $N, N' \in \mathbb{N}$, on a si $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma \in T(F)} \left(f_{x_0}^{N, N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right) (\gamma) \\ &= \sum_{\chi_0 \in \{\chi_0\}} \int_{\operatorname{Im}[\chi_0]} d\chi \cdot P(\chi \otimes |\det_T(\bullet)|^{-s}) \cdot L\left(\rho_T, \chi^{-1}, q^{-\frac{1}{2}-s}\right) \\ & \quad \cdot I_{x_0}^N\left(\rho_T, \chi, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}+s}\right) \cdot I_{x_0}^{N'}\left(\rho_T, \chi^{-1}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}-s}\right). \end{aligned}$$

D'après la proposition VIII.7(ii), cette expression est encore égale à

$$\sum_{\chi_0 \in \{\chi_0\}} \int_{\operatorname{Im}[\chi_0]} d\chi \cdot P(\chi) \cdot L\left(\rho_T, \chi^{-1}, q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^N\left(\rho_T, \chi, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^{N'}\left(\rho_T, \chi^{-1}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

et, d'après l'équation fonctionnelle de la proposition VIII.7(i), elle est invariante par la substitution $f \mapsto \widehat{f}$.

La série

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in T(F)} \left(f_{x_0}^{N, N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right) (\gamma)$$

est une fraction rationnelle en $z \in \mathbb{C}$. Elle converge absolument si $|z| < q_{x_0}^{\frac{1}{2}}$ et sa valeur en $z = 1$ est

$$\sum_{\chi_0 \in \{\chi_0\}} \int_{\operatorname{Im}[\chi_0]} d\chi \cdot P(\chi) \cdot L\left(\rho_T, \chi^{-1}, q^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Cette expression ne dépend pas du choix de la place x_0 , et elle est invariante par la ρ_T -transformation de Fourier

$$f \mapsto \widehat{f}$$

d'après l'équation fonctionnelle de la proposition VIII.7(i).

Cela prouve la partie (i) du théorème. □

En résumé :

- la formule de Poisson sur \mathbb{A}_E implique les propriétés habituelles des fonctions L des caractères automorphes de $\mathbb{A}_E^\times = T_E(\mathbb{A})$,
- ces propriétés des fonctions L se transportent des caractères automorphes de $T_E(\mathbb{A})$ à ceux de $T(\mathbb{A})$,
- ces propriétés des fonctions L globales des caractères automorphes de $T(\mathbb{A})$ impliquent la formule de Poisson et la formule de Poisson très ramifiée pour la donnée globale ρ_T sur $T(\mathbb{A})$.

IX. Conséquences du cas des tores pour les groupes réductifs quasi-déployés

Dans ce paragraphe, on considère un groupe réductif G quasi-déployé sur le corps de fonctions F de corps des constantes \mathbb{F}_q . Ainsi, G possède une paire de Borel (T, B) définie sur F . Le groupe de Weyl

$$W^G = W_T^G = \{g \in G \mid g^{-1} T g = T\} / T$$

de G est muni d'une action du groupe de Galois Γ_F de F , et le produit semi-direct

$$W^G \rtimes \Gamma_F$$

agit sur le réseau X_T des caractères $T \rightarrow \mathbb{G}_m$ de T , sur le réseau dual X_T^\vee des cocaractères $\mathbb{G}_m \rightarrow T$ de T et sur le tore complexe \widehat{T} dual de T .

On suppose que G est muni d'un caractère non trivial

$$\det_G : G \rightarrow \mathbb{G}_m.$$

Il peut être vu comme un caractère non trivial

$$\det_G = \det_T : T \rightarrow \mathbb{G}_m$$

ou, de manière équivalente, comme un cocaractère non trivial

$$\widehat{\det}_G = \widehat{\det}_T : \widehat{\mathbb{G}}_m = \mathbb{C}^\times \rightarrow \widehat{T}$$

fixé par la double action de W^G et de Γ_F .

Considérons maintenant une famille de r caractères

$$\rho_T^i : \widehat{T} \rightarrow \mathbb{C}^\times, \quad 1 \leq i \leq r,$$

telle que les composés $\rho_T^i \circ \widehat{\det}_G$, $1 \leq i \leq r$, soient tous égaux à l'identité de \mathbb{C}^\times et sur laquelle le produit semi-direct $W^G \rtimes \Gamma_F$ agit via une action sur l'ensemble $\{1, \dots, r\}$ des indices.

Comme au paragraphe précédent, on note E l'extension séparable de degré r de F qui correspond à l'action de Γ_F sur l'ensemble $\{1, \dots, r\}$, $T_E = \text{Res}_{E/F} \mathbb{G}_m$ le tore algébrique sur F dont le dual \widehat{T}_E s'identifie à $(\mathbb{C}^\times)^r$ muni de l'action par permutation de Γ_F , et

$$\rho_T^\vee : T_E \rightarrow T$$

l'homomorphisme dual de l'homomorphisme Γ_F -équivariant

$$\rho_T = (\rho_T^1, \dots, \rho_T^r) : \widehat{T} \rightarrow (\mathbb{C}^\times)^r = \widehat{T}_E.$$

En toute place $x \in |F|$, le choix d'une clôture séparable \overline{F}_x de F_x qui contient la clôture séparable \overline{F} de F définit le groupe de Galois Γ_{F_x} de F_x comme un sous-groupe du groupe de Galois Γ_F de F . Alors le groupe de Weyl F_x -rationnel

$$W_x^G = \{w \in W^G \mid \sigma(w) = w, \quad \forall \sigma \in \Gamma_{F_x}\}$$

agit sur l'ensemble d'indices $\{1, \dots, r\}$ muni de l'action de Γ_{F_x} , ce qui signifie qu'il agit sur l'extension séparable $E_x = E \otimes_F F_x$ de F_x .

Alors les fractions rationnelles

$$L_x(\rho_T, \chi, Z) = L_x(\chi \circ \rho_T, Z),$$

et

$$\varepsilon_x(\rho_T, \chi, Z) = \varepsilon_x(\chi \circ \rho_T, \psi_x, Z),$$

associées dans le paragraphe précédent à tout caractère $\chi \in \{\pi\}_x^T$ sont invariantes par l'action de W_x^G sur $T(F_x)$ et $\{\pi\}_x^T$.

Or, pour toute représentation $\pi \in \{\pi\}_x^G$ qui est “de type torique” au sens du paragraphe I, c'est-à-dire dont le support supercuspidal a la forme (T, χ) avec $\chi \in \{\pi\}_x^T$, ce support est bien défini modulo l'action de W_x^G .

Cela permet de poser la définition suivante :

Définition IX.1. –

Considérons comme ci-dessus une famille de r caractères

$$\rho_T^i : \widehat{T} \rightarrow \mathbb{C}^\times, \quad 1 \leq i \leq r,$$

telle que

$$\rho_T^i \circ \widehat{\det}_G = \text{id}_{\mathbb{C}^\times}, \quad 1 \leq i \leq r,$$

et sur laquelle le produit semi-direct $W^G \rtimes \Gamma_F$ agit via une action sur l'ensemble $\{1, \dots, r\}$ des indices.

Notons toujours ρ_T l'homomorphisme Γ_F -équivariant

$$\rho_T = (\rho_T^1, \dots, \rho_T^r) : \widehat{T} \rightarrow (\mathbb{C}^\times)^r = \widehat{T}_E$$

qui induit un homomorphisme dual de tores algébriques sur F

$$\rho_T^\vee : T_E = \text{Res}_{E/F} \mathbb{G}_m \rightarrow T.$$

Ayant choisi un caractère bien défini sur F

$$\det_{\rho_T} : G \rightarrow \mathbb{G}_m,$$

on notera aussi ρ_T l'unique “donnée globale” (au sens de la définition VII.1) qui consiste, en chaque place $x \in |F|$, à compléter \det_{ρ_T} en une “donnée locale normalisée” (au sens de la définition VI.5)

$$(\det_{\rho_T}, \{\pi\}_{x, \rho_T}^G, L_x(\rho_T, \bullet, Z), \varepsilon_x(\rho_T, \bullet, Z))$$

telle que :

- $\{\pi\}_{x, \rho_T}^G$ est la réunion des classes de représentations $\pi \in \{\pi\}_x^G$ qui sont “de type torique”, c'est-à-dire ont un support supercuspidal de la forme (T, χ) avec $\chi \in \{\pi\}_x^T$,
- pour toute représentation $\pi \in \{\pi\}_{x, \rho_T}^G$ dont le support discret est supercuspidal, donc de la forme (T, χ) , on a

$$L_x(\rho_T, \pi, Z) = L_x(\rho_T, \chi, Z),$$

$$\varepsilon_x(\rho_T, \pi, Z) = \varepsilon_x(\rho_T, \chi, Z).$$

Remarque :

Il résulte du théorème I.6 que, en toute place $x \in |F| - S_G$ où G et donc aussi T sont non ramifiés, toutes les représentations non ramifiées $\pi \in \{\pi\}_{x, \emptyset}^G$ ont un support supercuspidal de la forme (T, χ) , avec $\chi \in \{\pi\}_{x, \emptyset}^T$, et vérifient

$$L_x(\rho_T, \pi, Z) = L_x(\rho_T, \chi, Z),$$

$$\varepsilon_x(\rho_T, \pi, Z) = \varepsilon_x(\rho_T, \chi, Z)$$

même si leur support discret n'est pas supercuspidal. \square

Notant N_B le radical unipotent du sous-groupe de Borel B de G , munissons le quotient compact $N_B(F) \backslash N_B(\mathbb{A})$ de la mesure invariante du de volume 1.

Le but du présent paragraphe est de démontrer le théorème suivant :

Théorème IX.2. –

Considérons une donnée globale ρ sur $G(\mathbb{A})$ qui prolonge la donnée globale ρ_T de la définition IX.1 ci-dessus. Cela signifie que $\det_\rho = \det_{\rho_T}$ et que, en toute place $x \in |F|$, $\{\pi\}_{x,\rho}^G$ contient $\{\pi\}_{x,\rho_T}^G$ avec, pour toute $\pi \in \{\pi\}_{x,\rho_T}^G$,

$$\begin{aligned} L_x(\rho, \pi, Z) &= L_x(\rho_T, \pi, Z), \\ \varepsilon_x(\rho, \pi, Z) &= \varepsilon_x(\rho_T, \pi, Z). \end{aligned}$$

Alors, pour toute ρ -fonction globale produit

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C},$$

on a :

- (i) Pour toute place $x_0 \in |F| - S_G$ en laquelle G est non ramifié et le facteur f_{x_0} est sphérique, les séries formelles

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \int_{N_B(F) \backslash N_B(\mathbb{A})} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \left(f_{x_0}^{N, N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right) (\gamma u)$$

et

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \int_{N_B(F) \backslash N_B(\mathbb{A})} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \left(\widehat{f}_{x_0}^{N, N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} \widehat{f}_x \right) \right) (u^{-1} \gamma)$$

sont des fractions rationnelles égales entre elles. De plus, leurs "valeurs régularisées" en $Z = 1$, notées $S_B(f)$ et $S'_B(\widehat{f})$, ne dépendent pas du choix de x_0 et vérifient

$$S_B(f) = S'_B(\widehat{f}).$$

- (ii) Si un facteur f_x de f est "très ramifié" (au sens de la définition VII.3(ii)) en au moins une place $x \in |F|$, on a nécessairement la formule

$$\int_{N_B(F) \backslash N_B(\mathbb{A})} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} f(\gamma u) = \int_{N_B(F) \backslash N_B(\mathbb{A})} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} f(u^{-1} \cdot \gamma).$$

Démonstration :

Les assertions ne dépendent pas du choix du caractère

$$\det_\rho = \det_{\rho_T} : G \rightarrow \mathbb{G}_m,$$

on pourra supposer que

$$\det_\rho = \det_{\rho_T} = \det_G = \det_T.$$

Pour toute place $x \in |F|$ et toute fonction localement constante

$$h_x : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

dont les restrictions aux fibres de l'homomorphisme

$$|\det_G(\bullet)|_x : G(F_x) \rightarrow q_x^{\mathbb{Z}}$$

sont à support compact, on notera

$$h_{x,B} : B(F_x)/N_B(F_x) = T(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

la fonction

$$t_x \mapsto |\delta_B(t_x)|_x^{1/2} \cdot \int_{N_B(F_x)} du_x \cdot h_x(t_x u_x) = |\delta_B(t_x)|_x^{-1/2} \cdot \int_{N_B(F_x)} du_x \cdot h_x(u_x t_x)$$

où du_x désigne la mesure invariante de $N_B(F_x)$ associée à la mesure autoduale de F_x .

De même, pour toute fonction globale localement constante

$$h : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

dont les restrictions aux fibres de

$$|\det_G(\bullet)| : G(\mathbb{A}) \rightarrow q^{\mathbb{Z}}$$

sont à support compact, on notera

$$h_B : B(\mathbb{A})/N_B(\mathbb{A}) = T(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

la fonction

$$t \mapsto |\delta_B(t)|^{1/2} \cdot \int_{N_B(\mathbb{A})} du \cdot h(tu) = |\delta_B(t)|^{-1/2} \cdot \int_{N_B(\mathbb{A})} du \cdot h(ut).$$

Comme $du = \bigotimes_{x \in |F|} du_x$, on a dans le cas d'une fonction produit $h = \bigotimes_{x \in |F|} h_x$ l'égalité

$$h_B = \bigotimes_{x \in |F|} h_{x,B}.$$

On a :

Lemme IX.3. –

Sous les hypothèses du théorème IX.2 avec de plus

$$\det_\rho = \det_{\rho_T} = \det_G = \det_T,$$

et pour toute ρ -fonction globale

$$f : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C},$$

les fonctions f_B et \widehat{f}_B sont des ρ_T -fonctions globales sur $T(\mathbb{A})$.

De plus, la fonction \widehat{f}_B est la ρ_T -transformation de Fourier de la fonction f_B sur $T(\mathbb{A})$.

Démonstration :

Il suffit de traiter le cas où $f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x$ est une ρ -fonction globale produit de ρ -fonctions locales $f_x : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$.

La conclusion résulte de ce que, en toute place $x \in |F|$, l'opérateur linéaire

$$h_x \mapsto h_{x,B}$$

vérifie les propriétés suivantes :

- si h_x est à support compact dans $G(F_x)$, $h_{x,B}$ est à support compact dans $T(F_x)$, et l'opérateur transforme $g \mapsto h_x(g^{-1})$ en $t \mapsto h_{x,B}(t^{-1})$,
- si de plus $x \in |F| - S_G$ et $h_x = \mathbb{1}_{G(O_x)}$, alors $h_{x,B} = \text{vol}(N_B(O_x)) \cdot \mathbb{1}_{T(O_x)}$,
- si h_x et $h_{x,B}$ sont décomposées spectralement en

$$h_x(\bullet) = |\det_G(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\{\pi\}_x^G} d\pi \cdot h_{x,\pi}(\bullet)$$

et

$$h_{x,B}(\bullet) = |\det_G(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\{\pi\}_x^T} d\chi \cdot h_{x,B,\chi}(\bullet),$$

chaque $h_{x,B,\chi}$ ne dépend que des $h_{x,\pi}$ indexées par les $\pi \in \{\pi\}_x^G$ qui admettent (T, χ) pour support supercuspidal ; en particulier, $h_{x,B}$ ne dépend que de la partie de la décomposition spectrale de h_x qui est indexée par les $\pi \in \{\pi\}_{x,\rho_T}^G$. □

On a d'autre part :

Lemme IX.4. –

Sous les hypothèses du lemme IX.3 ci-dessus, considérons une ρ -fonction locale en une place $x \in |F|$

$$f_x : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Alors :

- (i) *Si G est non ramifié en x et la fonction f_x est sphérique, la fonction $f_{x,B}$ sur $T(F_x)$ est sphérique et, avec les notations de la définition VII.2, on a pour tous entiers $N, N' \in \mathbb{N}$*

$$(f_x^{N,N'})_B = (f_{x,B})^{N,N'}$$

si bien que l'on pourra noter sans ambiguïté $f_{x,B}^{N,N'}$.

- (ii) *Si la fonction f_x sur $G(F_x)$ est "très ramifiée" au sens de la définition VII.3(ii), la fonction $f_{x,B}$ sur $T(F_x)$ est aussi très ramifiée.* □

On déduit de ces deux lemmes et du théorème VIII.6 :

Corollaire IX.5. –

Sous les hypothèses du théorème IX.2, et pour toute ρ -fonction globale produit $f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$,

on a :

- (i) *Pour toute place $x_0 \in |F| - S_G$ en laquelle G est non ramifié et le facteur f_{x_0} est sphérique, les séries formelles*

$$\sum_{N,N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in T(F)} \left(f_{x_0,B}^{N,N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} f_{x,B} \right) \right) (\gamma)$$

et

$$\sum_{N,N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in T(F)} \left(\widehat{f}_{x_0,B}^{N,N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} \widehat{f}_{x,B} \right) \right) (\gamma)$$

sont des fractions rationnelles égales entre elles. Elles n'ont pas de pôle dans le demi-tore $|Z| \leq 1$. Leurs valeurs en $Z = 1$ ne dépendent pas du choix de x_0 et sont égales.

(ii) Si un facteur f_x de f en au moins une place $x \in |F|$ est “très ramifié”, on a nécessairement

$$\sum_{\gamma \in T(F)} f_B(\gamma) = \sum_{\gamma \in T(F)} \widehat{f}_B(\gamma).$$

□

Suite de la démonstration du théorème IX.2 :

Dans l'énoncé du corollaire IX.5 ci-dessus, on peut remplacer f par sa translatée à gauche ${}^\delta f$ par n'importe quel élément $\delta \in G(F)$, ce qui revient à remplacer \widehat{f} par sa translatée à droite $\widehat{f}^{\delta^{-1}}$.

Il est naturel de vouloir alors faire la somme sur les éléments $\delta \in G(F)/B(F)$.

Dans le cas (ii), seuls des $\delta \in G(F)/B(F)$ en nombre fini apportent des contributions non nulles et on obtient que

$$\sum_{\delta \in B(F) \backslash G(F)} \sum_{\gamma \in T(F)} {}^\delta f_B(\gamma) = \int_{N_B(F) \backslash N_B(\mathbb{A})} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} f(\gamma u)$$

est égal à

$$\sum_{\delta \in B(F) \backslash G(F)} \sum_{\gamma \in T(F)} \widehat{f}_B^{\delta^{-1}}(\gamma) = \int_{N_B(F) \backslash N_B(\mathbb{A})} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \widehat{f}(u^{-1} \gamma),$$

ce qui est l'assertion (ii) du théorème IX.2.

En revanche, pour la partie (i) du théorème IX.2, une difficulté apparaît du fait que la sommation $\sum_{\delta \in G(F)/B(F)}$ appliquée aux séries formelles

$$\begin{aligned} & \sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in T(F)} \left((\delta f_{x_0, B})^{N, N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} \delta f_{x, B} \right) \right) (\gamma) \\ &= \sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in T(F)} \left((\widehat{f}_{x_0, B}^{\delta^{-1}})^{N, N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} \widehat{f}_{x, B}^{\delta^{-1}} \right) \right) (\gamma) \end{aligned}$$

est infinie.

On observe toutefois que, pour tous entiers $N, N' \in \mathbb{N}$, seuls un nombre fini de $\delta \in G(F)/B(F)$ apportent des contributions

$$\sum_{\gamma \in T(F)} \left((\delta f_{x_0, B})^{N, N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} \delta f_{x, B} \right) \right) (\gamma) = \sum_{\gamma \in T(F)} \left((\widehat{f}_{x_0, B}^{\delta^{-1}})^{N, N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} \widehat{f}_{x, B}^{\delta^{-1}} \right) \right) (\gamma)$$

qui ne soient pas nulles. On en déduit que les deux séries formelles

$$\begin{aligned} & \sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \int_{N_B(F) \backslash N_B(\mathbb{A})} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \left(f_{x_0}^{N, N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right) (\gamma u), \\ & \sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \int_{N_B(F) \backslash N_B(\mathbb{A})} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \left(\widehat{f}_{x_0}^{N, N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} \widehat{f}_x \right) \right) (u^{-1} \gamma), \end{aligned}$$

sont égales.

Il reste à prouver que ce sont des fractions rationnelles et que leurs “valeurs régularisées” $S_B(f) = S'_B(\widehat{f})$ en $Z = 1$ ne dépendent pas du choix de la place x_0 .

Rappelant la décomposition de Bruhat

$$G(F) = \coprod_{w \in W_F^G} B(F) \cdot w \cdot N_B(F)$$

indexée par le groupe de Weyl F -rationnel

$$W_F^G = \{w \in W^G \mid \sigma(w) = w, \quad \forall \sigma \in \Gamma_F\},$$

on doit passer par la proposition suivante :

Proposition IX.6. –

Sous les hypothèses du théorème IX.2, considérons une ρ -fonction globale produit

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

et un élément $w \in W_F^G$.

Alors, pour toute place $x_0 \in |F| - S_G$ en laquelle le facteur f_{x_0} est sphérique, la série formelle

$$\begin{aligned} & \sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \int_{(N_B \cap w^{-1} N_B w)(\mathbb{A}) \backslash N_B(\mathbb{A})} du' \cdot \sum_{\gamma \in T(F)} \int_{N_B(\mathbb{A})} du \cdot \left(f_{x_0}^{N, N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right) (u^{-1} \gamma w u') \\ = & \sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \int_{(N_B \cap w^{-1} N_B w)(\mathbb{A}) \backslash N_B(\mathbb{A})} du' \cdot \sum_{\gamma \in T(F)} \int_{N_B(\mathbb{A})} du \cdot \left(\widehat{f}_{x_0}^{N, N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} \widehat{f}_x \right) \right) (u'^{-1} w^{-1} \gamma u) \end{aligned}$$

est une fraction rationnelle, et sa “valeur régularisée” en $Z = 1$, notée

$$S_{B, x_0}^w(f) = S_{B, x_0}^{w'}(\widehat{f}),$$

ne dépend pas du choix de la place x_0 .

Démonstration :

En notant $f^{wu'}(\bullet)$ les fonctions translatées à droite $f(\bullet w u')$, les deux séries de l'énoncé s'écrivent encore

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \int_{(N_B \cap w^{-1} N_B w)(\mathbb{A}) / N_B(\mathbb{A})} du' \cdot \sum_{\gamma \in T(F)} \left(\left(f_{x_0, B}^{wu'} \right)^{N, N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} f_{x, B}^{wu'} \right) \right) (\gamma)$$

et

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \int_{(N_B \cap w^{-1} N_B w)(\mathbb{A}) / N_B(\mathbb{A})} du' \cdot \sum_{\gamma \in T(F)} \left(\left(\widehat{f}_{x_0, B}^{wu'} \right)^{N, N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} \widehat{f}_{x, B}^{wu'} \right) \right) (\gamma).$$

Choisissons une famille finie $\{\chi_0\}$ de représentants unitaires χ_0 des classes $[\chi]$ des caractères automorphes $\chi = \bigotimes_{x \in |F|} \chi_x : T(\mathbb{A}) / T(F) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ de T dont chaque facteur local χ_x , $x \in |F|$, est le support supercuspidal d'une représentation $\pi_x \in \{\pi\}_x^G$ qui apparaît dans la décomposition spectrale du facteur local f_x de f .

Alors, pour tous entiers $N, N' \in \mathbb{N}$ et tout $u' \in N_B(\mathbb{A})$, les fonctions

$$T(\mathbb{A}) \ni t \mapsto |\det_T(t)|^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{\gamma \in T(F)} \left(\left(f_{x_0, B}^{wu'} \right)^{N, N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} f_{x, B}^{wu'} \right) \right) (\gamma t)$$

et

$$T(\mathbb{A}) \ni t \mapsto |\det_T(t)|^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{\gamma \in T(F)} \left(\left(\widehat{f_{x_0, B}^{wu'}} \right)^{N, N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} \widehat{f_{x, B}^{wu'}} \right) \right) (\gamma t)$$

se décomposent spectralement sous la forme

$$\begin{aligned} \sum_{\chi_0} \int_{\text{Im}[\chi_0]} d\chi &\cdot L\left(\rho_T, \chi^{-1}, q^{-\frac{1}{2}-s}\right) \cdot I_{x_0}^N\left(\rho_T, \chi, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}+s}\right) \cdot I_{x_0}^{N'}\left(\rho_T, \chi^{-1}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}-s}\right) \\ &\cdot p_{f_B^{wu'}}(\chi \otimes |\det_G(\bullet)|^{-s}) \cdot \chi(t) \cdot |\det_G(t)|^{-s} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{\chi_0} \int_{\text{Im}[\chi_0^{-1}]} d\chi &\cdot L\left(\rho_T, \chi^{-1}, q^{-\frac{1}{2}-s}\right) \cdot I_{x_0}^N\left(\rho_T, \chi, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}+s}\right) \cdot I_{x_0}^{N'}\left(\rho_T, \chi^{-1}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}-s}\right) \\ &\cdot p_{\widehat{f_B^{wu'}}}(\chi \otimes |\det_G(\bullet)|^{-s}) \cdot \chi(t) \cdot |\det_G(t)|^{-s} \end{aligned}$$

où

- les $p_{f_B^{wu'}}(\bullet)$ sont des polynômes en les $\chi \in [\chi_0]$,
- les $p_{\widehat{f_B^{wu'}}}(\bullet)$ sont des polynômes en les $\chi \in [\chi_0^{-1}]$ reliés aux précédents par les équations fonctionnelles

$$p_{\widehat{f_B^{wu'}}}(\chi^{-1}) = p_{f_B^{wu'}}(\chi) \cdot \varepsilon\left(\rho_T, \chi, q_x^{-\frac{1}{2}}\right), \quad \forall \chi \in [\chi_0],$$

- s est n'importe quel réel assez grand.

Nous devons maintenant intégrer au moyen de l'opérateur d'entrelacement

$$\int_{(N_B \cap w^{-1} N_B w)(\mathbb{A}) \setminus N_B(\mathbb{A})} du'.$$

Rappelons que chaque classe $[\chi_0]$ est constituée des caractères de la forme

$$\chi = \chi_0 \otimes \lambda = \chi_{0, \lambda}, \quad \lambda \in \Lambda^T,$$

où Λ^T désigne le tore complexe des caractères automorphes $\lambda : T(\mathbb{A})/T(F) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ qui sont triviaux sur tout sous-groupe compact de $T(\mathbb{A})/T(F)$. Pour tout cocaractère

$$\alpha^\vee : \mathbb{G}_m \rightarrow T,$$

nécessairement défini sur une extension finie F' de F , le composé

$$\lambda \circ \alpha^\vee : \mathbb{A}_{F'}^\times / F'^{\times} \rightarrow T(\mathbb{A})/T(F) \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

est nécessairement de la forme

$$|\text{Nm}_{F'/F}(\bullet)|_{\overline{[F':F]}}$$

et on peut noter

$$q^{-s} = \alpha^\vee(\lambda).$$

D'après les propriétés connues des opérateurs d'entrelacement et les équations fonctionnelles

$$p_{\widehat{f_B^{wu'}}}(\chi^{-1}) = p_{f_B^{wu'}}(\chi) \cdot \varepsilon\left(\rho_T, \chi, q^{-\frac{1}{2}}\right), \quad \forall \chi,$$

on a :

Lemme IX.7. –

(i) Avec les notations ci-dessus, les intégrales

$$[\chi_0] \ni \chi \mapsto \int_{(N_B \cap w^{-1}N_B w)(\mathbb{A}) \setminus N_B(\mathbb{A})} du' \cdot p_{f_B^{wu'}}(\chi) = R_{f_B}^w(\chi)$$

$$[\text{resp. } [\chi_0^{-1}] \ni \chi \mapsto \int_{(N_B \cap w^{-1}N_B w)(\mathbb{A}) \setminus N_B(\mathbb{A})} du' \cdot p_{\widehat{f_B^{wu'}}}(\chi) = \widehat{R}_{f_B}^w(\chi)]$$

convergent absolument en les éléments χ de la forme

$$\chi = \chi_0 \otimes \lambda \quad [\text{resp. } \chi = \chi_0^{-1} \otimes \lambda]$$

avec

$$|\alpha^\vee(\lambda)| < q^{-1} \quad [\text{resp. } |\alpha^\vee(\lambda)| > q]$$

pour toute racine positive $\alpha \in \Phi_G^+$ telle que $w(\alpha)$ soit une racine négative.

(ii) Ces intégrales convergentes définissent des fractions rationnelles $R_{f_B}^w$ et $\widehat{R}_{f_B}^w$ sur les variétés complexes $[\chi_0]$ et $[\chi_0^{-1}]$, reliées par l'équation fonctionnelle

$$\widehat{R}_{f_B}^w(\chi^{-1}) = R_{f_B}^w(\chi) \cdot \varepsilon\left(\rho_T, \chi, q^{-\frac{1}{2}}\right), \quad \forall \chi.$$

(iii) Dans chaque variété $[\chi_0] = \{\chi_0 \otimes \lambda \mid \lambda \in \Lambda^T\}$ [resp. $[\chi_0^{-1}] = \{\chi_0^{-1} \otimes \lambda \mid \lambda \in \Lambda^T\}$], la fraction rationnelle $R_{f_B}^w$ [resp. $\widehat{R}_{f_B}^w$] est le quotient d'un numérateur qui est un polynôme en $\lambda^{\pm 1}$ et d'un dénominateur qui est un produit de facteurs de la forme

$$1 - \frac{\alpha^\vee(\lambda)}{z_{\chi_0, \alpha}} \quad [\text{resp. } 1 - \alpha^\vee(\lambda) \cdot z_{\chi_0, \alpha}]$$

où $\alpha \in \Phi_G^+ \cap -w^{-1}(\Phi_G^+)$ et les $z_{\chi_0, \alpha}$ sont, quand ils existent, des nombres complexes de module q^{-1} dépendant de χ_0 et de α .

En particulier, les dénominateurs de ces fractions rationnelles sont invariants par l'action $\chi \mapsto \chi \otimes |\det_G(\bullet)|^s$, $s \in \mathbb{C}$, et ils ne s'annulent pas en les caractères χ unitaires. □

On sait aussi d'après la proposition VIII.7 que les produits

$$L\left(\rho_T, \chi^{-1}, q^{-\frac{1}{2}-s}\right) \cdot I_{x_0}^N\left(\rho_T, \chi, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}+s}\right) \cdot I_{x_0}^{N'}\left(\rho_T, \chi^{-1}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}-s}\right)$$

sont des polynômes en χ et $q^{\pm s}$. Avec le lemme IX.7 ci-dessus, cela implique :

Corollaire IX.8. –

La série formelle de la proposition IX.6 s'écrit comme la somme sur les représentants χ_0 des séries formelles

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \int_{\text{Im}[\chi_0]} d\chi \cdot L\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0}^{-1}, q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^N\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^{N'}\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0}^{-1}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot R_{f_B}^w(\chi_{\lambda_0})$$

$$= \sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \int_{\text{Im}[\chi_0^{-1}]} d\chi \cdot L\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0^{-1}}^{-1}, q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^N\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0^{-1}}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^{N'}\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0^{-1}}^{-1}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \widehat{R}_{f_B}^w(\chi_{\lambda_0^{-1}})$$

pour n'importe quel élément $\lambda_0 \in \Lambda^T$ tel que

$$|\alpha^\vee(\lambda_0)| < q^{-1}, \quad \forall \alpha \in \Phi_G^+ \cap -w^{-1}(\Phi_G^+).$$

□

Suite de la démonstration de la proposition IX.6 :

Fixons un élément $\lambda_0 \in \Lambda^T$ tel que, comme dans le corollaire IX.8 ci-dessus,

$$|\alpha^\vee(\lambda_0)| < q^{-1}, \quad \forall \alpha \in \Phi_G^+ \cap -w^{-1}(\Phi_G^+).$$

Alors il résulte de ce corollaire que pour tout $z \in \mathbb{C}$ de module $|z|$ assez petit, la série

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} z^{N+N'} \cdot \int_{(N_B \cap w^{-1}N_B w)(\mathbb{A}) \setminus N_B(\mathbb{A})} du' \cdot \sum_{\gamma \in T(F)} \int_{N_B(\mathbb{A})} du \cdot \left(f_{x_0}^{N, N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right) (u^{-1} \gamma w u')$$

converge absolument vers

$$\begin{aligned} & \sum_{\chi_0} \int_{\text{Im}[\chi_0]} d\chi \cdot R_{f_B}^w(\chi_{\lambda_0}) \cdot L\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0}^{-1}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0}^{-1}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \\ & \quad \cdot L_{x_0}\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0}, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0}^{-1}, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \\ = & \sum_{\chi_0} \int_{\text{Im}[\chi_0^{-1}]} d\chi \cdot \widehat{R}_{f_B}^w(\chi_{\lambda_0^{-1}}) \cdot L\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0^{-1}}^{-1}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0^{-1}}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0^{-1}}^{-1}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \\ & \quad \cdot L_{x_0}\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0^{-1}}, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\rho_T, \chi_{\lambda_0^{-1}}^{-1}, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right). \end{aligned}$$

Ces intégrales de contours se calculent comme des sommes de résidus qui sont nécessairement des fractions rationnelles en z .

Il en résulte que la série formelle de la proposition IX.6 est une fraction rationnelle en Z .

Il reste à prouver que sa “valeur régularisée” en $Z = 1$ ne dépend pas du choix de la place x_0 .

Commençons par l’analogie suivant du lemme V.13 :

Lemme IX.9. –

(i) Si la ρ -transformée de Fourier \widehat{f}_x de f_x est à support compact en au moins une place $x \in |F|$, on a

$$S_{B, x_0}^w(f) = \int_{(N_B \cap w^{-1}N_B w)(\mathbb{A}) \setminus N_B(\mathbb{A})} du' \cdot \sum_{\gamma \in T(F)} \int_{N_B(\mathbb{A})} du \cdot f(u^{-1} \gamma w u').$$

(ii) De même, si f_x est à support compact en au moins une place $x \in |F|$, on a

$$S_{B, x_0}'^w(\widehat{f}) = \int_{(N_B \cap w^{-1}N_B w)(\mathbb{A}) \setminus N_B(\mathbb{A})} du' \cdot \sum_{\gamma \in T(F)} \int_{N_B(\mathbb{A})} du \cdot \widehat{f}(u'^{-1} w^{-1} \gamma u).$$

Démonstration :

(i) Choisissons un élément $\lambda_0 \in \Lambda_T$ tel que

$$|\alpha^\vee(\lambda_0)| < q^{-1}, \quad \forall \alpha \in \Phi_G^+ \cap -w^{-1}(\Phi_G^+).$$

Quitte à remplacer λ_0 par $\lambda_0 \otimes |\det_G(\bullet)|^{-s}$ pour un réel s assez grand, on peut supposer que

$$\begin{aligned} & \int_{(N_B \cap w^{-1} N_B w)(\mathbb{A}) \setminus N_B(\mathbb{A})} du' \cdot \sum_{\gamma \in T(F)} \int_{N_B(\mathbb{A})} du \cdot f(u^{-1} \gamma w u') \\ &= \sum_{\chi_0} \int_{\text{Im}[\chi_0]} d\chi \cdot R_{f_B}^w(\chi \lambda_0) \cdot L\left(\rho_T, \chi \lambda_0^{-1}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right). \end{aligned}$$

Or si $z \in \mathbb{C}$ est assez petit, la fraction rationnelle

$$R(z) = \sum_{N, N' \in \mathbb{N}} z^{N+N'} \cdot \int_{(N_B \cap w^{-1} N_B w)(\mathbb{A})} du' \cdot \sum_{\gamma \in T(F)} \int_{N_B(\mathbb{A})} du \cdot \left(f_{x_0}^{N, N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right) (u^{-1} \gamma w u')$$

est égale à la somme finie d'intégrales

$$\begin{aligned} & \sum_{\chi_0} \int_{\text{Im}[\chi_0]} d\chi \cdot R_{f_B}^w(\chi \lambda_0) \cdot L\left(\rho_T, \chi \lambda_0^{-1}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\rho_T, \chi \lambda_0, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\rho_T, \chi \lambda_0^{-1}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \\ & \quad \cdot L_{x_0}\left(\rho_T, \chi \lambda_0, z q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\rho_T, \chi \lambda_0^{-1}, z q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right). \end{aligned}$$

Cette même somme d'intégrales, considérée non plus au voisinage de $z = 0$ mais au voisinage de $z = 1$, définit une autre fraction rationnelle en z que nous noterons $R'(z)$.

Comme R' est bien définie en 1 et y vaut

$$\sum_{\chi_0} \int_{\text{Im}[\chi_0]} d\chi \cdot R_{f_B}^w(\chi \lambda_0) \cdot L\left(\rho_T, \chi \lambda_0^{-1}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right),$$

il s'agit de prouver que la "valeur régularisée" en $z = 1$ de la fraction rationnelle

$$R'(z) - R(z)$$

est égale à 0.

La différence $R'(z) - R(z)$ s'écrit comme une somme de résidus calculés le long des pôles qu'il faut traverser en allant de la zone $|z| \ll 1$ à la zone $|z| = 1$.

D'après le choix de λ_0 , les pôles de

$$L_{x_0}\left(\rho_T, \chi \lambda_0^{-1}, z q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

n'apparaissent pas au cours de cette traversée.

D'autre part, comme la transformée de Fourier \widehat{f}_x est à support compact en au moins une place $x \in |F|$, les pôles de la fonction L globale

$$L\left(\rho_T, \chi \lambda_0^{-1}, q^{-\frac{1}{2}}\right)$$

disparaissent par multiplication avec le facteur

$$R_{f_B}^w(\chi \lambda_0) \cdot L_{x_0}\left(\rho_T, \chi \lambda_0^{-1}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Finalement, les seuls pôles qui apparaissent dans le calcul de la différence sont ceux de

$$L_{x_0}\left(\rho_T, \chi \lambda_0, z q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Comme les fonctions à intégrer comportent en facteur supplémentaire le polynôme

$$L_{x_0}\left(\rho_T, \chi \lambda_0, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1},$$

les résidus le long des pôles à traverser sont des fractions rationnelles en z bien définies en $z = 1$ et qui prennent la valeur 0.

Cela termine la preuve de la partie (i).

(ii) se démontre de la même façon. □

On déduit de ce lemme :

Corollaire IX.10. –

Soit $x_1 \in |F| - S_G$ une autre place en laquelle le facteur f_{x_1} de f est sphérique. Alors :

(i) La différence des deux fonctionnelles

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x \mapsto S_{B,x_0}^w(f)$$

et

$$f \mapsto S_{B,x_1}^w(f)$$

ne dépend que de la restriction de chaque \widehat{f}_x , $x \in |F|$, au complémentaire d'une partie compacte arbitrairement grande de $G(F_x)$.

(ii) De même, la différence des deux fonctionnelles

$$f \mapsto S_{B,x_0}'^w(\widehat{f})$$

et

$$f \mapsto S_{B,x_1}'^w(\widehat{f})$$

ne dépend que de la restriction de chaque facteur f_x , $x \in |F|$, de f au complémentaire d'une partie compacte arbitrairement grande de $G(F_x)$.

Démonstration :

(i) Soit $f' = \bigotimes_{x \in |F|} f'_x$ une autre ρ -fonction globale produit telle que \widehat{f}_x et \widehat{f}'_x coïncident en dehors d'une partie compacte de $G(F_x)$ en une certaine place et qu'ils sont égaux en les autres places.

Alors on a d'après le lemme IX.9(i)

$$S_{B,x_0}^w(f - f') = S_{B,x_1}^w(f - f')$$

soit

$$(S_{B,x_0}^w - S_{B,x_1}^w)(f) = (S_{B,x_0}^w - S_{B,x_1}^w)(f').$$

(ii) se déduit du lemme IX.9(ii) de la même façon. □

Fin de la démonstration de la proposition IX.6 :

On sait déjà que pour toute ρ -fonction globale produit $f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x$ sphérique en deux places $x \in |F|$, on

a

$$S_{B,x_0}^w(f) = S_{B,x_0}'^w(\widehat{f}),$$

$$S_{B,x_1}^w(f) = S_{B,x_1}'^w(\widehat{f})$$

d'où

$$(S_{B,x_0}^w - S_{B,x_1}^w)(f) = (S_{B,x_0}'^w - S_{B,x_1}'^w)(\widehat{f}).$$

Cette identité n'est compatible avec le corollaire IX.10 que si les fonctionnelles $S_{B,x_0}^w - S_{B,x_1}^w$ et $S_{B,x_0}'^w - S_{B,x_1}'^w$ sont identiquement nulles. \square

Fin de la démonstration du théorème IX.2(i) :

Il suffit de démontrer que pour toute fonction test localement constante à support compact

$$\varphi = \prod_{x \in |F|} \varphi_x : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C},$$

la ρ_T -fonction globale sur $G(\mathbb{A})$

$$g' \mapsto \int_{G(\mathbb{A})} dg \cdot \varphi(g) \cdot |\det_G(g)|^{\frac{1}{2}} \cdot f(g'g)$$

et sa ρ_T -transformée de Fourier

$$g' \mapsto \int_{G(\mathbb{A})} dg \cdot \varphi(g) \cdot |\det_G(g)|^{-\frac{1}{2}} \cdot \widehat{f}(g^{-1}g')$$

vérifient les propriétés du théorème IX.2.

Or, pour toute place $x_0 \in |F|$ et tous entiers $N, N' \in \mathbb{N}$, les fonctions automorphes

$$G(F) \backslash G(\mathbb{A}) \ni g \mapsto \int_{N_B(\mathbb{A})/N_B(F)} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \left(f_{x_0}^{N, N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right) (u \gamma g)$$

et

$$G(F) \backslash G(\mathbb{A}) \ni g \mapsto \int_{N_B(\mathbb{A})/N_B(F)} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \left(\widehat{f}_{x_0}^{N, N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} \widehat{f}_x \right) \right) (g^{-1} \gamma u^{-1})$$

ne laissent apparaître dans leur décomposition spectrale que des représentations automorphes dont le support cuspidal est constitué de caractères automorphes de $T(\mathbb{A})$, c'est-à-dire que des séries d'Eisenstein induites de B et leurs résidus.

On est donc réduit à prouver que pour toute fonction test localement constante à support compact

$$\varphi = \prod_{x \in |F|} \varphi_x : N_B(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C},$$

les séries formelles

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \int_{N_B(\mathbb{A})/N_B(F)} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)/N_B(F)} \int_{G(\mathbb{A})} dg \cdot \varphi(g) \cdot |\det_G(g)|^{\frac{1}{2}} \cdot \left(f_{x_0}^{N, N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right) (u \gamma g)$$

et

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \int_{N_B(\mathbb{A})/N_B(F)} du \cdot \sum_{\gamma \in N_B(F) \backslash G(F)} \int_{G(\mathbb{A})} dg \cdot \varphi(g) \cdot |\det_G(g)|^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\widehat{f}_{x_0}^{N, N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} \widehat{f}_x \right) \right) (g^{-1} \gamma u^{-1})$$

sont des fractions rationnelles égales entre elles, et que leurs "valeurs régularisées" en $Z = 1$ ne dépendent pas du choix de la place x_0 .

Cela résulte de la proposition IX.6. \square

X. Transfert automorphe et formules de Poisson non linéaires

Dans ce paragraphe, on considère un groupe réductif G , pas nécessairement quasi-déployé, sur le corps de fonctions F de corps des constantes \mathbb{F}_q .

Le groupe réductif complexe \widehat{G} dual de G est naturellement muni d'une paire de Borel comprenant un tore maximal \widehat{T} et d'une action du groupe de Galois Γ_F de F .

On suppose que G est muni d'un caractère non trivial défini sur F

$$\det_G : G \rightarrow \mathbb{G}_m.$$

Il lui correspond un cocaractère central de \widehat{G} fixé par Γ_F

$$\widehat{\det}_G : \widehat{\mathbb{G}}_m = \mathbb{C}^\times \rightarrow Z_{\widehat{G}} \hookrightarrow \widehat{T} \hookrightarrow \widehat{G}.$$

Suivant Langlands, on appelle représentation de transfert de G tout homomorphisme algébrique continu

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}).$$

On dira qu'une telle représentation de transfert ρ est compatible avec le caractère \det_G de G si le cocaractère central correspondant

$$\widehat{\det}_G : \mathbb{C}^\times \hookrightarrow \widehat{G}$$

agit sur l'espace \mathbb{C}^r de ρ par

$$z \mapsto z.$$

On a :

Lemme X.1. –

On dit que la représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

est non ramifiée en une place $x \in |F|$ si le groupe réductif G est non ramifié en cette place et l'action induite

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_{F_x} \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

se factorise à travers le quotient non ramifié $\Gamma_{F_x}^{\mathrm{nr}}$ de Γ_{F_x} en

$$\widehat{G} \rtimes \Gamma_{F_x}^{\mathrm{nr}} \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}).$$

Avec cette définition, on a :

- (i) *Le sous-ensemble $S_\rho \supset S_G$ de $|F|$ constitué des places en lesquelles G ou ρ est ramifié est fini.*
- (ii) *En toute place $x \in |F| - S_\rho$, ρ induit naturellement un homomorphisme entre algèbres de Hecke sphériques*

$$\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r \rightarrow \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$$

et donc une application

$$(\rho_x)_* : \{\pi\}_{x,\emptyset}^G \rightarrow \{\pi\}_{x,\emptyset}^r$$

de l'ensemble des représentations lisses admissibles irréductibles non ramifiées de $G(F_x)$ vers celui de $\mathrm{GL}_r(F_x)$.

Démonstration :

(i) résulte de ce que l'homomorphisme algébrique continu

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

contient nécessairement dans son noyau un sous-groupe ouvert de Γ_F .

(ii) En toute place $x \in |F| - S_\rho$, ρ induit un homomorphisme

$$\widehat{G} \rtimes \Gamma_{F_x}^{\mathrm{nr}} \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}).$$

Or, d'après le théorème I.6(iii), on a un isomorphisme canonique

$$S_x^G : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[\widehat{G}_x]^{\widehat{G}}$$

de l'algèbre de Hecke sphérique de $G(F_x)$ vers l'algèbre des fonctions algébriques sur \widehat{G}_x , la fibre de $\widehat{G} \rtimes \Gamma_{F_x}^{\mathrm{nr}}$ au-dessus de l'élément de Frobenius $\sigma_x \in \Gamma_{F_x}^{\mathrm{nr}}$, qui sont invariantes par conjugaison par \widehat{G} .

De même, on a un isomorphisme

$$S_x^r : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[\widehat{\mathrm{GL}}_r]^{\widehat{\mathrm{GL}}_r}$$

de l'algèbre de Hecke sphérique de $\mathrm{GL}_r(F_x)$ vers l'algèbre des fonctions algébriques invariantes par conjugaison sur $\widehat{\mathrm{GL}}_r = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$.

La restriction à \widehat{G}_x via $\widehat{G} \rtimes \Gamma_{F_x}^{\mathrm{nr}} \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ des fonctions invariantes par conjugaison sur $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ définit l'homomorphisme recherché

$$\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r \rightarrow \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G.$$

Cet homomorphisme induit une application

$$(\rho_x)_* : \{\pi\}_{x,\emptyset}^G \rightarrow \{\pi\}_{x,\emptyset}^r$$

puisque, d'après le théorème I.6, $\{\pi\}_{x,\emptyset}^G$ [resp. $\{\pi\}_{x,\emptyset}^r$] est en bijection avec l'ensemble des caractères de l'algèbre commutative $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ [resp. $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^r$]. □

Langlands a proposé la définition suivante :

Définition X.2. –

Étant donnée une représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}),$$

on pose :

- (i) Une représentation automorphe $\pi' = \bigotimes_{x \in |F|} \pi'_x$ de GL_r est appelée un ρ -transfert global d'une représentation automorphe $\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$ de G si, en toute place $x \in |F| - S_\rho$ où π_x est non ramifiée, π'_x est nécessairement non ramifiée et

$$\pi'_x = (\rho_x)_*(\pi_x).$$

- (ii) En n'importe quelle place $x_0 \in |F|$, une représentation lisse admissible irréductible $\pi'_{x_0} \in \{\pi\}_{x_0}^r$ de $\mathrm{GL}_r(F_{x_0})$ est appelée un ρ -transfert local d'une représentation lisse admissible irréductible $\pi_{x_0} \in \{\pi\}_{x_0}^G$ de $G(F_{x_0})$ s'il existe une représentation automorphe π de G admettant π_{x_0} pour composante en x_0 et un ρ -transfert global π' de π admettant π'_{x_0} pour composante en x_0 .

Remarques :

- (i) Les notions de ρ -transfert global ou local sont invariantes par conjugaison de ρ par les éléments de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$. On peut donc supposer toujours que ρ envoie le tore maximal \widehat{T} de \widehat{G} dans celui $\widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$ de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$.
- (ii) On peut démontrer en utilisant la formule des traces d'Arthur-Selberg que toute représentation lisse admissible irréductible supercuspidale $\pi_{x_0} \in \{\pi\}_{x_0}^G$ de G en une place $x_0 \in |F|$ est la composante locale en x_0 d'au moins une représentation automorphe π de $G(\mathbb{A})$ et en fait de beaucoup.
- (iii) Il résulte de la définition que, en toute place $x \in |F| - S_\rho$, les représentations non ramifiées $\pi_x \in \{\pi\}_{x, \emptyset}^G$ ne peuvent avoir d'autre ρ -transfert local que $(\rho_x)_*(\pi_x)$.

□

Langlands avait conjecturé l'énoncé suivant, appelé principe de functorialité, qui est maintenant un théorème dans le cas des corps de fonctions où nous sommes :

Théorème X.3. –

Étant donnée une représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}),$$

on a :

- (i) Toute représentation automorphe π de G admet au moins un ρ -transfert global π' dans GL_r .
- (ii) En toute place $x_0 \in |F|$ et pour toute représentation lisse admissible irréductible $\pi_{x_0} \in \{\pi\}_{x_0}^G$ de $G(F_{x_0})$, tous les ρ -transferts locaux $\pi'_{x_0} \in \{\pi'\}_{x_0}$ de π_{x_0} dans GL_r ont le même support supercuspidal. Il ne dépend que du support supercuspidal de π_0 et de la restriction de ρ à $\widehat{G} \rtimes \Gamma_{F_{x_0}}$.

Démonstration :

Notons $W_F \subset \Gamma_F$ le “groupe de Weil” de Γ_F , constitué des éléments dont l'image dans le groupe de Galois $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$ du corps des constantes \mathbb{F}_q de F est une puissance de l'élément de Frobenius. Autrement dit, W_F est défini par le carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} W_F & \hookrightarrow & \Gamma_F \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z} & \hookrightarrow & \widehat{\mathbb{Z}} = \Gamma_{\mathbb{F}_q} \end{array}$$

En toute place $x \in |F|$, le “groupe de Weil local” $W_{F_x} = \Gamma_{F_x} \cap W_F$ est constitué des éléments de Γ_{F_x} dont l'image dans $\Gamma_{\mathbb{F}_q}^{\mathrm{nr}} = \Gamma_{\kappa_x} = \Gamma_{\mathbb{F}_{q^x}}$ est une puissance de l'élément de Frobenius σ_x .

Choisissons un nombre premier ℓ qui ne divise pas q , une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ de \mathbb{Q}_ℓ et un isomorphisme $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \cong \mathbb{C}$.

On dit qu'une représentation continue

$$\sigma : W_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) = \widehat{\mathrm{GL}}_r$$

$$[\text{resp. } \sigma : W_F \rightarrow \widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)]$$

est non ramifiée en une place $x \in |F|$ si sa restriction au groupe de Weil local W_{F_x} se factorise à travers son quotient $\sigma_x^{\mathbb{Z}}$.

On dit qu'une représentation automorphe $\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$ de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ [resp. $G(\mathbb{A})$] et une représentation continue $\sigma : W_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ [resp. $\sigma : W_F \rightarrow \widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$] se correspondent au sens de Langlands si, en toute place $x \in |F|$ [resp. $x \in |F| - S_G$] où π est non ramifiée, σ est également non ramifiée et

$$\mathrm{Tr}_{\pi_x}(h_x) = h_x(\sigma(\sigma_x)), \quad \forall h_x \in \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r = \overline{\mathbb{Q}}_\ell [\widehat{\mathrm{GL}}_r]^{\mathrm{GL}_r},$$

$$[\text{resp.} \quad \mathrm{Tr}_{\pi_x}(h_x) = h_x(\sigma(\sigma_x), \sigma_x), \quad \forall h_x \in \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G = \overline{\mathbb{Q}}_\ell [\widehat{G}_x]^{\widehat{G}}].$$

On remarque que si π et σ se correspondent, alors π et la semi-simplifiée σ^{ss} de σ se correspondent également.

De plus, si M est un sous-groupe de Levy standard de GL_r [resp. G] et (M, π_0) est le support cuspidal d'une représentation automorphe π de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ [resp. $G(\mathbb{A})$], alors \widehat{M} s'identifie à un sous-groupe de Levy standard de $\widehat{\mathrm{GL}}_r$ [resp. \widehat{G}] et une représentation continue

$$\sigma_0 : W_F \rightarrow \widehat{M}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

correspond à π_0 au sens de Langlands si et seulement si la représentation composée

$$W_F \rightarrow \widehat{M}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \hookrightarrow \mathrm{GL}_r(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

$$[\text{resp.} \quad W_F \rightarrow \widehat{M}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \hookrightarrow \widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)]$$

correspond à π .

Ces remarques étant faites, on voit que la partie (i) du théorème X.3 résulte du théorème ci-dessous combiné avec le théorème II.2 :

Théorème X.4. –

- (i) (Laurent Lafforgue, 2002) *La correspondance de Langlands définit une bijection de l'ensemble des représentations automorphes cuspidales π de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ sur l'ensemble des représentations continues, presque partout non ramifiées et irréductibles*

$$\sigma : W_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

- (ii) (Vincent Lafforgue, 2013) *Quel que soit le groupe réductif G sur F , la correspondance de Langlands définit une application*

$$\pi \mapsto \sigma_\pi$$

de l'ensemble des représentations automorphes cuspidales π de $G(\mathbb{A})$ vers l'ensemble des représentations continues, presque partout non ramifiées et semi-simples

$$\sigma : W_F \rightarrow \widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

□

Suite de la démonstration du théorème IX.3.

En n'importe quelle place $x \in |F|$, on dit qu'une représentation lisse admissible irréductible $\pi_x \in \{\pi\}_x^r$ [resp. $\pi_x \in \{\pi\}_x^G$] de $\mathrm{GL}_r(F_x)$ [resp. $G(F_x)$] et une représentation continue

$$W_{F_x} \rightarrow \mathrm{GL}_r(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \quad [\text{resp.} \quad W_{F_x} \rightarrow \widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)]$$

se correspondent au sens de Langlands s'il est possible de les relever en un couple (π, σ) constitué d'une représentation automorphe π de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ [resp. $G(\mathbb{A})$] et d'une représentation continue

$$\sigma : W_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \quad [\text{resp. } W_F \rightarrow \widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)]$$

qui se correspondent globalement au sens de Langlands.

La partie (ii) du théorème X.3 résulte du théorème suivant qui complète le théorème X.4 :

Théorème X.5. –

En toute place $x \in |F|$, on a :

- (i) (Laurent Lafforgue, 2002) *Pour tout rang $r \geq 1$, la correspondance de Langlands locale définit une bijection de l'ensemble des représentations lisses admissibles irréductibles supercuspidales de $\mathrm{GL}_r(F_x)$ sur l'ensemble des représentations continues irréductibles*

$$W_{F_x} \rightarrow \mathrm{GL}_r(\overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

De plus, si $\pi_x \in \{\pi\}_x^r$ et une représentation continue $\sigma : W_{F_x} \rightarrow \mathrm{GL}_r(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ se correspondent localement au sens de Langlands, alors le support supercuspidal de π_x et la semi-simplifiée σ^{ss} de σ se correspondent par la bijection ci-dessus.

- (ii) (Alain Genestier et Vincent Lafforgue, en préparation) *Quel que soit le groupe réductif G sur F et pour toute paire (π_x, σ) constituée d'une représentation lisse admissible irréductible $\pi_x \in \{\pi\}_x^G$ de $G(F_x)$ et d'une représentation continue*

$$\sigma : W_{F_x} \rightarrow \widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

se correspondant au sens de Langlands, la semi-simplifiée σ^{ss} de σ est entièrement déterminée par le support supercuspidal de π_x et par l'action de Γ_{F_x} sur \widehat{G} .

□

Considérons maintenant une représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

compatible avec le caractère $\det_G : G \rightarrow \mathbb{G}_m$.

Étant donnée une représentation lisse admissible irréductible supercuspidale $\pi_{x_0} \in \{\pi\}_{x_0}^G$ de G en une place x_0 , considérons les triplets (G', ρ', π'_{x_0}) constitués de

- un groupe réductif G' sur F muni d'un isomorphisme

$$G'_{F_{x_0}} \cong G_{F_{x_0}}$$

(si bien que le dual \widehat{G}' de G' muni de l'action de $\Gamma_{F_{x_0}}$ s'identifie à \widehat{G} muni de l'action de $\Gamma_{F_{x_0}}$),

- une représentation de transfert

$$\rho' : \widehat{G}' \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

dont la restriction à $\widehat{G}' \rtimes \Gamma_{F_{x_0}} = \widehat{G} \rtimes \Gamma_{F_{x_0}}$ coïncide avec celle de ρ ,

- un ρ' -transfert local $\pi'_{x_0} \in \{\pi\}_{x_0}^r$ de π_{x_0} .

Alors, d'après le théorème X.3(ii) combiné avec le théorème III.6, les facteurs

$$\gamma_{x_0}(\pi'_{x_0}, \psi_{x_0}, Z) = \frac{L_{x_0}(\pi'_{x_0}, Z) \cdot \varepsilon_{x_0}(\pi'_{x_0}, \psi_{x_0}, Z)}{L_{x_0}(\pi_{x_0}^{\vee}, \frac{q_{x_0}}{Z})}$$

ne dépendent que de π_{x_0} et de la restriction $\widehat{G} \rtimes \Gamma_{F_{x_0}} \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$. On peut donc les noter

$$\gamma_{x_0}(\rho, \pi_{x_0}, Z).$$

De plus, tous les polynômes

$$L_{x_0}(\pi'_{x_0}, Z)^{-1}$$

sont des multiples du dénominateur réduit de la fraction rationnelle en Z

$$\gamma_{x_0}(\rho, \pi_{x_0}, Z).$$

Il en est de même de leur plus grand commun diviseur que l'on notera

$$L_{x_0}(\rho, \pi_{x_0}, Z)^{-1}.$$

Enfin, on notera

$$\varepsilon_x(\rho, \pi_{x_0}, Z) = \frac{L_{x_0}(\rho, \pi_{x_0}^\vee, \frac{q_{x_0}}{Z}) \cdot \gamma_{x_0}(\rho, \pi_{x_0}, Z)}{L_{x_0}(\rho, \pi_{x_0}, Z)}.$$

C'est automatiquement un monôme en Z .

Plus généralement, étant donnée une représentation lisse admissible irréductible $\pi \in \{\pi\}_{x_0}^G$ de G en x_0 dont le support discret (M_{x_0}, π_0) est supercuspidal, considérons les triplets (M, ρ_M, π'_0) constitués de

- un groupe réductif M sur F muni d'un isomorphisme

$$M_{F_{x_0}} \cong M_{x_0}$$

(si bien que le dual \widehat{M} de M muni de l'action de $\Gamma_{F_{x_0}}$ s'identifie à celui \widehat{M}_{x_0} de M_{x_0} plongé dans \widehat{G}),

- une représentation de transfert

$$\rho_M : \widehat{M} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

dont la restriction à $\widehat{M} \rtimes \Gamma_{F_{x_0}}$ coïncide avec

$$\widehat{M}_{x_0} \rtimes \Gamma_{F_{x_0}} \hookrightarrow \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}),$$

- un ρ_M -transfert local $\pi'_0 \in \{\pi\}_{x_0}^r$ de π_0 .

Alors le facteur

$$\gamma_{x_0}(\pi'_0, \psi_{x_0}, Z)$$

ne dépend que de π_0 et de la restriction $\widehat{M}_{x_0} \rtimes \Gamma_{F_{x_0}} \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, et on peut le noter

$$\gamma_{x_0}(\rho, \pi, Z) = \gamma_{x_0}(\rho, \pi_0, Z).$$

Puis on note

$$L_{x_0}(\rho, \pi, Z)^{-1} = L_{x_0}(\rho, \pi_0, Z)^{-1}$$

le plus grand commun diviseur des

$$L_{x_0}(\pi'_0, Z)^{-1}$$

et enfin

$$\varepsilon_{x_0}(\rho, \pi, Z) = \varepsilon_{x_0}(\rho, \pi_0, Z) = \frac{L_{x_0}(\rho, \pi_0^\vee, \frac{q_{x_0}}{Z}) \cdot \gamma_{x_0}(\rho, \pi_0, Z)}{L_{x_0}(\rho, \pi_0, Z)}.$$

Le corollaire VI.4 permet de compléter les applications

$$\pi \mapsto L_{x_0}(\rho, \pi, Z)$$

et

$$\pi \mapsto \varepsilon_{x_0}(\rho, \pi, Z)$$

pour obtenir le corollaire suivant du théorème X.3 :

Corollaire X.6. –

Considérons une représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

compatible avec le caractère $\det_G : G \rightarrow \mathbb{G}_m$, et un caractère

$$\det_\rho : G \rightarrow \mathbb{G}_m.$$

Alors il existe une unique façon de définir en chaque place $x_0 \in |F|$ une “donnée normalisée” au sens de la définition VI.5

$$\{\pi\}_{x_0}^G \ni \pi \mapsto \begin{cases} L_{x_0}(\rho, \pi, Z) \\ \varepsilon_{x_0}(\rho, \pi, Z) \end{cases}$$

qui coïncide avec les $L_{x_0}(\rho, \pi, Z)$ et $\varepsilon_{x_0}(\rho, \pi, Z)$ définis ci-dessus lorsque le support discret de π est supercuspidal.

Elle est telle que pour toute paire (π, π') constituée d’une représentation $\pi \in \{\pi\}_{x_0}^G$ et d’un ρ -transfert local $\pi' \in \{\pi\}_{x_0}^r$ de π , le facteur

$$\gamma_{x_0}(\rho, \pi, Z) = \frac{L_{x_0}(\rho, \pi, Z) \cdot \varepsilon_{x_0}(\rho, \pi, Z)}{L_{x_0}(\rho, \pi^\vee, \frac{q_{x_0}}{Z})}$$

est égal à

$$\gamma_{x_0}(\pi', \psi_{x_0}, Z)$$

et le polynôme

$$L_{x_0}(\rho, \pi, Z)^{-1}$$

divise le polynôme

$$L_{x_0}(\pi', Z)^{-1}.$$

□

Jusqu’à présent, on ne sait pas donner d’expression directe générale des fractions rationnelles

$$L_{x_0}(\rho, \pi, Z)$$

et

$$\varepsilon_{x_0}(\rho, \pi, Z)$$

en fonction de $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ et de $\pi \in \{\pi\}_{x_0}^G$.

Il résulte cependant de la définition du ρ -transfert global ou local que, en toute place non ramifiée $x_0 \in |F| - S_\rho$, la famille des

$$\begin{aligned} & L_{x_0}(\rho, \pi, Z), \quad \pi \in \{\pi\}_{x_0, \emptyset}^G \\ [\text{resp. } & \varepsilon_{x_0}(\rho, \pi, Z), \quad \pi \in \{\pi\}_{x_0, \emptyset}^G] , \end{aligned}$$

vue comme un élément de

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}_{x_0, \emptyset}^G[[Z]] \\ [\text{resp. } & \mathcal{H}_{x_0, \emptyset}^G[Z^{\pm 1}]] , \end{aligned}$$

est la transformée par l'homomorphisme $\rho_{x_0}^* : \mathcal{H}_{x_0, \emptyset}^r \rightarrow \mathcal{H}_{x_0, \emptyset}^G$ de la famille des

$$L_{x_0}(\pi', Z), \quad \pi' \in \{\pi\}_{x_0, \emptyset}^r$$

[resp. $\varepsilon_{x_0}(\pi', \psi_{x_0}, Z), \quad \pi' \in \{\pi\}_{x_0, \emptyset}^r$],

vue comme un élément de

$$\mathcal{H}_{x, \emptyset}^r[[Z]]$$

[resp. $\mathcal{H}_{x, \emptyset}^r[Z^{\pm 1}]$].

On a aussi :

Proposition X.7. –

Considérons toujours une représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

compatible avec le caractère $\det_G : G \rightarrow \mathbb{G}_m$.

Et supposons que

- *G est quasi-déployé sur F , avec un tore maximal T ,*
- *ρ induit un homomorphisme de tores*

$$\rho_T = (\rho_T^1, \dots, \rho_T^r) : \widehat{T} \rightarrow (\mathbb{C}^\times)^r,$$

- *le groupe de Galois Γ_F agit sur l'espace \mathbb{C}^r de ρ par des permutations de ses r vecteurs de base, si bien que $W^G \rtimes \Gamma_F$ agit sur les caractères ρ_T^i , $1 \leq i \leq r$, via une action sur l'ensemble $\{1, \dots, r\}$ de leurs indices.*

Alors, pour toute place $x_0 \in |F|$ et toute représentation $\pi \in \{\pi\}_x^G$ dont le support discret est de la forme (T, χ) , on a avec les notations de la définition VIII.4

$$L_{x_0}(\rho, \pi, Z) = L_{x_0}(\rho_T, \chi, Z),$$

$$\varepsilon_{x_0}(\rho, \pi, Z) = \varepsilon_{x_0}(\rho_T, \chi, Z).$$

□

En une place arbitraire $x_0 \in |F|$, considérons les représentations $\pi \in \{\pi\}_{x_0}^G$ de la forme

$$\pi = \pi_0 \otimes (\omega \circ \det_G) = \pi_0 \cdot \omega$$

où $\pi_0 \in \{\pi\}_{x_0, K_{x_0}}^G$ est de ramification bornée par un sous-groupe ouvert compact $K_{x_0} \subset G(F_{x_0})$ et $\omega : F_{x_0} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ est un caractère très ramifié.

Alors tout ρ -transfert local π' de π par une représentation $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ compatible avec \det_G est nécessairement de la forme

$$\pi' = \pi'_0 \otimes (\omega \circ \det) = \pi'_0 \cdot \omega$$

où π'_0 est un ρ -transfert local de π_0 donc est de ramification bornée par un sous-groupe ouvert compact $K'_{x_0} \subset \mathrm{GL}_r(F_{x_0})$ qui ne dépend que de K_{x_0} et de la restriction $\widehat{G} \rtimes \Gamma_{F_{x_0}} \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$.

Or on a d'après le théorème III.8(ii) que

$$L_{x_0}(\pi'_0 \cdot \omega, Z) = 1$$

et

$$\varepsilon_{x_0}(\pi'_0 \cdot \omega, \psi_{x_0}, Z) = \varepsilon_{x_0}(\chi_{\pi'_0} \cdot \omega, \psi_{x_0}, Z) \cdot \varepsilon_{x_0}(\omega, \psi_{x_0}, Z)^{r-1}$$

si ω est assez ramifié en fonction de K'_{x_0} et $\chi_{\pi'_0}$ désigne le caractère central de π'_0 .

De plus, le caractère central $\chi_{\pi'_0}$ de π'_0 s'exprime en fonction de π_0 de la manière suivante :

Lemme X.8. –

Soit $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ une représentation de transfert de G compatible avec le caractère $\det_G : G \rightarrow \mathbb{G}_m$.

Soit

$$\mu_G : \mathbb{G}_m \rightarrow G$$

le cocaractère central dual du caractère composé fixé par Γ_F

$$\widehat{G} \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) \xrightarrow{\det} \mathbb{C}^\times,$$

et soit

$$\omega_\rho : \mathbb{A}^\times / F^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

le caractère continu d'ordre fini qui correspond par la théorie du corps de classes au caractère composé continu

$$\Gamma_F \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) \xrightarrow{\det} \mathbb{C}^\times.$$

Alors :

(i) Pour toute représentation automorphe π de $G(\mathbb{A})$ et tout ρ -transfert global π' de π dans $G(\mathbb{A})$, on a

$$\chi_{\pi'} = \chi_\pi \cdot \omega_\rho$$

si χ_π désigne le caractère par lequel \mathbb{A}^\times agit sur π via $\mu_G : \mathbb{G}_m \rightarrow G$.

(ii) Pour toute représentation $\pi_{x_0} \in \{\pi\}_{x_0}^G$ de $G(F_{x_0})$ en une place x_0 et pour tout ρ -transfert local π'_{x_0} de π_{x_0} , on a

$$\chi_{\pi'_{x_0}} = \chi_{\pi_{x_0}} \cdot \omega_\rho$$

si $\chi_{\pi_{x_0}}$ désigne le caractère par lequel $F_{x_0}^\times$ agit sur π_{x_0} via $\mu_G : \mathbb{G}_m \rightarrow G$.

Démonstration :

(ii) résulte de (i).

(i) résulte de (ii) dans le cas où $x_0 \in |F| - S_\rho$, π_{x_0} est non ramifiée et $\pi'_{x_0} = (\rho_{x_0})_*(\pi_{x_0})$.

Or, en une telle place x_0 , l'homomorphisme

$$\mathcal{H}_{x_0, \emptyset}^r = \mathbb{C}[\widehat{\mathrm{GL}}_r] \xrightarrow{\widehat{\mathrm{GL}}_r} \mathbb{C}[\widehat{G}_x] \xrightarrow{\widehat{G}} \mathcal{H}_{x_0, \emptyset}^G$$

est induit par le morphisme

$$\widehat{G}_{x_0} \rightarrow \widehat{\mathrm{GL}}_r = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}).$$

La restriction à la fibre \widehat{G}_{x_0} de $\widehat{G} \rtimes \Gamma_{F_{x_0}}^{\mathrm{nr}}$ au-dessus de l'élément de Frobenius σ_{x_0} de la fonction invariante \det sur $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ est le produit de sa restriction à \widehat{G} et du scalaire $\det \circ \rho(\sigma_{x_0})$.

D'où la formule annoncée. \square

On déduit de ce lemme :

Corollaire X.9. –

Dans la situation et avec les notations du lemme X.8 ci-dessus, on a pour toute place $x_0 \in |F|$, toute représentation $\pi_{x_0} \in \{\pi\}_{x, K_{x_0}}^G$ de ramification bornée par un sous-groupe ouvert compact $K_{x_0} \subset (F_{x_0})$ et tout caractère

$$\omega : F_{x_0}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

assez ramifié en fonction de K_{x_0} et de $\widehat{G} \rtimes \Gamma_{F_{x_0}} \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, les formules

$$L_{x_0}(\rho, \pi_{x_0} \cdot \omega, Z) = 1$$

$$\varepsilon_{x_0}(\rho, \pi_{x_0} \cdot \omega, Z) = \varepsilon_{x_0}(\chi_{\pi_{x_0}} \cdot \omega_\rho \cdot \omega, \psi_{x_0}, Z) \cdot \varepsilon_{x_0}(\omega, \psi_{x_0}, Z)^{r-1}.$$

□

Pour toute représentation lisse admissible irréductible

$$\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$$

de $G(\mathbb{A})$, on note

$$L(\rho, \pi, Z) = \prod_{x \in |F|} L_x(\rho, \pi_x, Z^{\deg(x)})$$

qui est bien défini a priori en tant que série formelle en Z , et

$$\varepsilon(\rho, \pi, Z) = \prod_{x \in |F|} \varepsilon_x(\rho, \pi_x, Z^{\deg(x)})$$

qui est bien défini comme monôme en Z puisque les monômes locaux $\varepsilon_x(\rho, \pi_x, Z)$ sont nécessairement égaux à 1 en presque toute place $x \in |F|$.

On déduit du théorème X.3 et des corollaires X.6 et X.9 :

Théorème X.10. –

Pour toute représentation automorphe $\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$ de $G(\mathbb{A})$, on a :

(i) Le produit

$$L(\rho, \pi, q^{-s}) = \prod_{x \in |F|} L_x(\rho, \pi_x, q_x^{-s})$$

converge absolument pour tout $s \in \mathbb{C}$ dont la partie réelle est assez grande.

(ii) Sa limite

$$L(\rho, \pi, q^{-s})$$

est une fraction rationnelle en $q^{-s} = Z$.

(iii) Les fractions rationnelles $L(\rho, \pi, Z)$ et $L(\rho, \pi^\vee, Z)$ sont reliées par l'équation fonctionnelle

$$L\left(\rho, \pi^\vee, \frac{q}{Z}\right) = L(\rho, \pi, Z) \cdot \varepsilon(\rho, \pi, Z).$$

(iv) Si, en au moins une place $x_0 \in |F|$, le facteur local π_{x_0} de π est le produit

$$\pi_{x_0} = \pi_0 \otimes (\omega \circ \det_G) = \pi_0 \cdot \omega$$

d'une représentation $\pi_0 \in \{\pi\}_{x_0, K_0}^G$ de ramification bornée par un sous-groupe ouvert compact $K_0 \subset G(F_{x_0})$ et d'un caractère $\omega : F_{x_0}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ assez ramifié en fonction de la borne K_0 et de $\widehat{G} \rtimes \Gamma_{F_{x_0}} \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, alors la fraction rationnelle

$$L(\rho, \pi, Z)$$

n'a pas de pôles, c'est un polynôme en Z .

(v) Pour toute place $x_0 \in |F| - S_G$ en laquelle le facteur local π_{x_0} de π est non ramifié, le produit

$$L\left(\rho, \pi, Z \cdot q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\rho, \pi_{x_0}, Z^{\deg(x_0)} \cdot q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\rho, \pi_{x_0}^\vee, Z^{-\deg(x_0)} \cdot q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}$$

est un polynôme en Z .

Démonstration :

Il existe au moins une représentation automorphe $\pi' = \bigotimes_{x \in |F|} \pi'_x$ de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ qui soit un ρ -transfert global de π .

En toute place $x \in |F| - S_\rho$ où π_x est non ramifié, on a

$$L_x(\rho, \pi_x, Z) = L_x(\pi'_x, Z)$$

d'où les propriétés (i) et (ii).

De plus, on a en toute place $x \in |F|$ sans exception

$$\gamma_x(\rho, \pi_x, Z) = \gamma_x(\pi'_x, \psi_x, Z)$$

d'où la propriété (iii).

En les places x en nombre fini où ρ ou π_x est ramifié,

$$L_x(\rho, \pi_x, Z)$$

est toujours le produit de

$$L_x(\pi'_x, Z)$$

et d'un polynôme en Z . Donc la fraction rationnelle globale

$$L(\rho, \pi, Z)$$

est le produit de

$$L(\pi', Z)$$

et d'un polynôme en Z .

(iv) résulte alors du corollaire IV.3.

(v) En une telle place $x_0 \in |F| - S_G$ où π_{x_0} est non ramifiée, on a d'après la proposition X.7

$$\begin{aligned} L_{x_0}(\rho, \pi_{x_0}, Z) &= L_{x_0}(\pi'_{x_0}, Z), \\ \varepsilon_{x_0}(\rho, \pi_{x_0}, Z) &= \varepsilon_{x_0}(\pi'_{x_0}, \psi_{x_0}, Z). \end{aligned}$$

Comme $L(\rho, \pi, Z)$ est le produit $L(\pi', Z)$ et d'un polynôme en Z , on est ramené au fait que

$$L\left(\pi', Z \cdot q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\pi'_{x_0}, Z^{\deg(x_0)} \cdot q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\pi_{x_0}^\vee, Z^{-\deg(x_0)} \cdot q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

est un polynôme en Z , comme démontré dans le lemme V.6. □

Nous allons déduire de ce théorème le théorème suivant qui généralise le corollaire V.2 et le théorème V.4 et qui constitue le principal résultat du présent texte :

Théorème X.11. –

Soit une représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

qui est compatible avec le caractère $\det_G : G \rightarrow \mathbb{G}_m$.

Étant donné un caractère

$$\det_\rho : G \rightarrow \mathbb{G}_m,$$

complétons-le en la “donnée globale” induite par ρ définie dans le corollaire X.6.

Alors :

- (i) La ρ -transformation de Fourier des ρ -fonctions globales sur $G(\mathbb{A})$ satisfait la formule de Poisson de la définition VII.3(i).
- (ii) Elle satisfait également la formule de Poisson très ramifiée de la définition VII.3(ii).

Démonstration :

L'énoncé ne dépend pas du choix du caractère \det_ρ , donc on peut supposer que \det_ρ est trivial.

Comme au paragraphe II.3, on choisit une paire (T_0, B_0) constituée d'un sous-tore T_0 de G , défini sur F et maximal pour cette propriété, et d'un sous-groupe parabolique B_0 de G , contenant T_0 , défini sur F et minimal pour cette propriété. Le centralisateur M_0 de T_0 dans G est un sous-groupe de Levy de B_0 . On appelle “standard” les sous-groupes paraboliques P [resp. les sous-groupes de Levy M] de G définis sur F et contenant B_0 [resp. M_0]. Tout sous-groupe parabolique standard possède un unique sous-groupe de Levy standard M_P , et l'application ainsi définie $P \mapsto M_P$ est une bijection.

En toute place non ramifiée $x \in |F| - S_G$, on choisit une paire de Borel (T_x, B_x) de G , définie sur F_x et telle que $T_x \supset T_0$ et $B_x \subset B_0$. Elle définit une structure entière de G sur O_x et donc un sous-groupe ouvert compact maximal $K_{x,\emptyset} = G(O_x)$ de $G(F_x)$ tel que $G(F_x) = B_x(F_x) \cdot G(O_x)$ et a fortiori $G(F_x) = B_0(F_x) \cdot K_{x,\emptyset}$.

En les places restantes $x \in S_G$, on choisit un sous-groupe ouvert compact maximal $K_{x,\emptyset}$ de $G(F_x)$ tel que $G(F_x) = B_0(F_x) \cdot K_{x,\emptyset}$.

Ainsi, $K_\emptyset = \prod_{x \in |F|} K_{x,\emptyset}$ est un sous-groupe ouvert compact maximal de $G(\mathbb{A})$ tel que $G(\mathbb{A}) = B_0(\mathbb{A}) \cdot K_\emptyset$.

Étant donné un sous-groupe ouvert compact

$$K = \prod_{x \in |F|} K_x \subset K_\emptyset,$$

on considère les paires (M_P, π) constituées d'un sous-groupe de Levy standard M_P de G (provenant d'un unique sous-groupe parabolique standard P dont le radical unipotent est noté N_P) et d'une représentation automorphe de carré intégrable π de $M_P(\mathbb{A})$ telle que l'espace $L_\pi^2(M_P(F) \cdot N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})/K)$ ne soit pas nul. Leurs classes d'équivalence faible sont en nombre fini, et on peut en choisir un ensemble fini de représentants unitaires (M_P, π_0) .

Alors, pour toute fonction à support compact

$$h : K \backslash G(\mathbb{A})/K \rightarrow \mathbb{C}$$

et pour tous éléments $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$, on a d'après le théorème II.3 de décomposition spectrale de Langlands

$$\sum_{\gamma \in G(F)} h(g_1^{-1} \gamma g_2) = \sum_{(M_P, \pi_0)} \int_{\mathrm{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_\pi(g_1, g_2)$$

où chaque fraction rationnelle

$$[\pi_0] \ni \pi \mapsto h_\pi(g_1, g_2) = \frac{1}{|\text{Fixe}(M_P, \pi_0)|} \cdot \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_K(M_P, \pi_0)} (h * E_\pi(\varphi))(g_2) \cdot E_{\pi^\vee}(\bar{\varphi})(g_1)$$

ne dépend pas du choix de la base orthonormée finie $\mathcal{B}_K(M_P, \pi_0)$ de l'espace $L^2_{\pi_0}(M_P(F) \cdot N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})/K)$ et est invariante par l'action du groupe fini $\text{Fixe}(M_P, \pi_0)$ sur $[\pi_0]$.

On commence par le lemme suivant :

Lemme X.12. –

Considérons une ρ -fonction globale produit

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

qui est bi-invariante par $K = \prod_{x \in |F|} K_x$.

En chaque place $x \in |F|$, considérons la décomposition spectrale de f_x donnée par la définition VI.1(i)

$$f_x(\bullet) = \int_{\text{Im}\{\pi\}_{x, K_x}^G} d\pi \cdot f_{x, \pi}(\bullet) \cdot L_x\left(\rho, \pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

et définissons une fonction

$$h_x : K_x \backslash G(F_x)/K_x \rightarrow \mathbb{C}$$

par la décomposition spectrale

$$h_x(\bullet) = \int_{\text{Im}\{\pi\}_{x, K_x}^G} d\pi \cdot f_{x, \pi}(\bullet).$$

Alors :

- (i) *La fonction h_x est la fonction caractéristique $\mathbb{1}_{G(O_x)}$ en toute place $x \in |F| - S_G$ où f_x est la “ ρ -fonction locale standard” au sens de la définition VII.1.*

En les autres places, h_x n'est pas nécessairement à support compact, mais elle agit sur chaque classe de $\{\pi\}_{x, K_x}^G$ comme un élément de \mathcal{H}_{x, K_x}^G .

Par conséquent, $h = \bigotimes_{x \in |F|} h_x$ agit sur chaque classe $[\pi_0]$ de représentations automorphes comme un élément de \mathcal{H}_K^G .

- (ii) *Pour tout réel s assez grand et tous éléments $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$, on a*

$$\sum_{\gamma \in G(F)} f(g_1^{-1} \gamma g_2) = \sum_{(M_P, \pi_0)} \int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_{\pi \otimes |\det_G(\bullet)|^{-s}}(g_1, g_2) \cdot L\left(\rho, \pi^\vee \otimes |\det_G(\bullet)|^s, q^{-\frac{1}{2}}\right)$$

où, pour tout représentant (M_P, π_0) et toute $\pi \in [\pi_0]$, on note encore

$$h_\pi(g_1, g_2) = \frac{1}{|\text{Fixe}(M_P, \pi_0)|} \cdot \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_K(M_P, \pi_0)} (h * E_\pi(\varphi))(g_2) \cdot E_{\pi^\vee}(\bar{\varphi})(g_1).$$

(iii) De même, si $x_0 \in |F| - S_G$ est une place en laquelle f_{x_0} est non ramifiée, on a pour tout réel s assez grand, tous entiers $N, N' \in \mathbb{N}$ et tous éléments $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma \in G(F)} \left(f_{x_0}^{N, N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right) (g_1^{-1} \gamma g_2) \\ = & \sum_{(M_P, \pi_0)} \int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_{\pi \otimes |\det_G(\bullet)|^{-s}}(g_1, g_2) \cdot L \left(\rho, \pi^\vee \otimes |\det_G(\bullet)|^s, q^{-\frac{1}{2}} \right) \\ & \cdot I_{x_0}^N \left(\rho, \pi_{x_0} \otimes |\det_G(\bullet)|_{x_0}^{-s}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}} \right) \cdot I_{x_0}^{N'} \left(\rho, \pi_{x_0}^\vee \otimes |\det_G(\bullet)|_{x_0}^s, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

Démonstration :

(i) résulte de ce que les $f_{x, \pi}(\bullet)$ sont des fonctions polynomiales de $\pi \in \{\pi\}_{x, K_x}^G$.

(ii) résulte du théorème II.3 de décomposition spectrale de Langlands, du théorème X.10(i) et de ce que, par définition de l'espace des ρ -fonctions globales, la restriction de $f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x$ à chaque fibre de l'homomorphisme

$$|\det(\bullet)| : \text{GL}_r(\mathbb{A}) \rightarrow q^{\mathbb{Z}}$$

est supportée par une partie compacte.

(iii) se déduit de (ii) en remplaçant f par $f_{x_0}^{N, N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right)$. □

Considérons d'autre part la ρ -transformée de Fourier $\widehat{f} = \bigotimes_{x \in |F|} \widehat{f}_x$ de $f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x$. En toute place $x \in |F|$, les décompositions spectrales de f_x et \widehat{f}_x

$$\begin{aligned} f_x(\bullet) &= \int_{\text{Im} \{\pi\}_{x, K_x}^G} d\pi \cdot f_{x, \pi}(\bullet) \cdot L_x \left(\rho, \pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}} \right), \\ \widehat{f}_x(\bullet) &= \int_{\text{Im} \{\pi\}_{x, K_x}^G} d\pi \cdot \widehat{f}_{x, \pi}(\bullet) \cdot L_x \left(\rho, \pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}} \right), \end{aligned}$$

sont reliées par les formules

$$\widehat{f}_{x, \pi^\vee}(g) = f_{x, \pi}(g^{-1}) \cdot \varepsilon_x \left(\rho, \pi, q_x^{-\frac{1}{2}} \right), \quad \forall \pi.$$

On définit en toute place $x \in |F|$ une fonction

$$\widehat{h}_x : K_x \backslash G(F_x) / K_x \rightarrow \mathbb{C}$$

par la décomposition spectrale

$$\widehat{h}_x(\bullet) = \int_{\text{Im} \{\pi\}_{x, K_x}^G} d\pi \cdot \widehat{f}_{x, \pi}(\bullet),$$

puis on forme le produit global

$$\widehat{h} = \bigotimes_{x \in |F|} \widehat{h}_x$$

et on pose pour tout représentant (M_P, π_0) , tout $\pi \in [\pi_0^\vee]$ et tous éléments $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$

$$\widehat{h}_\pi(g_1, g_2) = \frac{1}{|\text{Fixe}(M_P, \pi_0)|} \cdot \sum_{\varphi \in \mathcal{B}_K(M_P, \pi_0^\vee)} (\widehat{h} * E_\pi(\varphi))(g_2) \cdot E_{\pi^\vee}(\overline{\varphi})(g_1).$$

D'après le lemme X.12 appliqué à \widehat{f} , on a, pour n'importe quel réel s assez grand, les formules

$$\sum_{\gamma \in G(F)} \widehat{f}(g_2^{-1} \gamma g_1) = \sum_{(M_P, \pi_0)} \int_{\text{Im}[\pi_0^\vee]} d\pi \cdot \widehat{h}_{\pi \otimes |\det_G(\bullet)|^{-s}}(g_2, g_1) \cdot L\left(\rho, \pi^\vee \otimes |\det_G(\bullet)|^s, q^{-\frac{1}{2}}\right)$$

et, pour tous entiers $N, N' \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma \in G(F)} \left(\widehat{f}_{x_0}^{N, N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} \widehat{f}_x \right) \right) (g_2^{-1} \gamma g_1) \\ &= \sum_{(M_P, \pi_0)} \int_{\text{Im}[\pi_0^\vee]} d\pi \cdot \widehat{h}_{\pi \otimes |\det_G(\bullet)|^{-s}}(g_2, g_1) \cdot L\left(\rho, \pi^\vee \otimes |\det_G(\bullet)|^s, q^{-\frac{1}{2}}\right) \\ & \quad \cdot I_{x_0}^N\left(\rho, \pi_{x_0} \otimes |\det_G(\bullet)|_{x_0}^{-s}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^{N'}\left(\rho, \pi_{x_0}^\vee \otimes |\det_G(\bullet)|_{x_0}^s, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right). \end{aligned}$$

Or on a :

Lemme X.13. –

Pour tout représentant (M_P, π_0) et tous éléments $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$, on a :

(i) Les fonctions

$$\begin{aligned} [\pi_0] \ni \pi &\mapsto h_\pi(g_1, g_2), \\ [\pi_0] \ni \pi &\mapsto \widehat{h}_{\pi^\vee}(g_2, g_1) \end{aligned}$$

sont des fractions rationnelles en π .

Elles admettent un dénominateur indépendant de $g_1, g_2 \in G(\mathbb{A})$, invariant par l'action de Λ^G et qui ne s'annule pas sur $\text{Im}[\pi_0]$ ni donc sur $\Lambda^G \cdot \text{Im}[\pi_0] \supset \{\pi \otimes |\det_G(\bullet)|^s, \pi \in \text{Im}[\pi_0], s \in \mathbb{C}\}$.

(ii) Ces fractions rationnelles sont reliées par l'équation fonctionnelle

$$\widehat{h}_{\pi^\vee}(g_2, g_1) = h_\pi(g_1, g_2) \cdot \varepsilon\left(\rho, \pi, q^{-\frac{1}{2}}\right), \quad \forall \pi \in [\pi_0].$$

Démonstration :

(i) résulte des propriétés connues des séries d'Eisenstein

$$\pi \mapsto E_\pi(\varphi), \quad \varphi \in L_{\pi_0}^2(M_P(F) \cdot N_P(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})/K).$$

(ii) résulte de ce que, en toute place $x \in |F|$,

$$\widehat{f}_{x, \pi^\vee}(g) = f_{x, \pi}(g^{-1}) \cdot \varepsilon_x\left(\rho, \pi, q_x^{-\frac{1}{2}}\right), \quad \forall g, \quad \forall \pi.$$

□

D'après ce lemme et le théorème X.3, on passe de la somme

$$\sum_{\gamma \in G(F)} f(g_1^{-1} \gamma g_2) \quad [\text{resp.} \quad \sum_{\gamma \in G(F)} \left(f_{x_0}^{N, N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right) (g_1^{-1} \gamma g_2)]$$

à la somme

$$\sum_{\gamma \in G(F)} \widehat{f}(g_2^{-1} \gamma g_1) \quad [\text{resp.} \quad \sum_{\gamma \in G(F)} \left(\widehat{f}_{x_0}^{N',N} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} \widehat{f}_x \right) \right) (g_2^{-1} \gamma g_1)]$$

par un déplacement de contours d'intégration, de $\text{Re}(s) \gg 0$ à $\text{Re}(s) \ll 0$, des intégrales

$$\int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_{\pi \otimes |\det_G(\bullet)|^{-s}}(g_1, g_2) \cdot L\left(\rho, \pi^\vee \otimes |\det_G(\bullet)|^s, q^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$[\text{resp.} \quad \int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_{\pi \otimes |\det_G(\bullet)|^{-s}}(g_1, g_2) \cdot L\left(\rho, \pi^\vee \otimes |\det_G(\bullet)|^s, q^{-\frac{1}{2}}\right) \\ \cdot I_{x_0}^N\left(\rho, \pi_{x_0} \otimes |\det_G(\bullet)|_{x_0}^{-s}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^{N'}\left(\rho, \pi_{x_0}^\vee \otimes |\det_G(\bullet)|_{x_0}^s, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)].$$

Si f est très ramifiée en au moins une place, le théorème X.10(iv) implique que les facteurs

$$L\left(\rho, \pi^\vee \otimes |\det_G(\bullet)|^{-s}, q^{-\frac{1}{2}}\right)$$

n'ont pas de pôle.

Les intégrales pour $\text{Re}(s) \gg 0$ et $\text{Re}(s) \ll 0$ sont donc égales, soit

$$\sum_{\gamma \in G(F)} f(g_1^{-1} \gamma g_2) = \sum_{\gamma \in G(F)} \widehat{f}(g_2^{-1} \gamma g_1).$$

Cela prouve la partie (ii) du théorème X.11.

Dans le cas général, on sait d'après le théorème X.10(v) que les produits

$$L\left(\rho, \pi^\vee \otimes |\det_G(\bullet)|^s, q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^N\left(\rho, \pi_{x_0} \otimes |\det_G(\bullet)|_{x_0}^{-s}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^{N'}\left(\rho, \pi_{x_0}^\vee \otimes |\det_G(\bullet)|_{x_0}^s, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

n'ont jamais de pôles.

On en déduit :

Lemme X.14. –

(i) *Pour tout représentant (M_P, π_0) , les séries formelles*

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_{\pi \otimes |\det_G(\bullet)|^{-s}}(g_1, g_2) \cdot L\left(\rho, \pi^\vee \otimes |\det_G(\bullet)|^s, q^{-\frac{1}{2}}\right) \\ \cdot I_{x_0}^N\left(\rho, \pi_{x_0} \otimes |\det_G(\bullet)|_{x_0}^{-s}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^{N'}\left(\rho, \pi_{x_0}^\vee \otimes |\det_G(\bullet)|_{x_0}^s, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

et

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \int_{\text{Im}[\pi_0^\vee]} d\pi \cdot \widehat{h}_{\pi \otimes |\det_G(\bullet)|^{-s}}(g_2, g_1) \cdot L\left(\rho, \pi^\vee \otimes |\det_G(\bullet)|^s, q^{-\frac{1}{2}}\right) \\ \cdot I_{x_0}^N\left(\rho, \pi_{x_0} \otimes |\det_G(\bullet)|_{x_0}^{-s}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^{N'}\left(\rho, \pi_{x_0}^\vee \otimes |\det_G(\bullet)|_{x_0}^s, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

sont indépendantes de $s \in \mathbb{C}$ et égales entre elles.

(ii) Leurs sommes sur les représentants (M_P, π_0) , qui sont les séries formelles

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \left(f_{x_0}^{N, N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right) (g_1^{-1} \gamma g_2)$$

et

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \left(\widehat{f}_{x_0}^{N, N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} \widehat{f}_x \right) \right) (g_2^{-1} \gamma g_1),$$

sont égales. □

Puis on obtient :

Corollaire X.15. –

(i) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ de module $|z|$ assez petit, les séries en $Z = z$ du corollaire X.14(i) ci-dessus convergent absolument vers les intégrales

$$\begin{aligned} \int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_\pi(g_1, g_2) \cdot L\left(\rho, \pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\rho, \pi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\rho, \pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \\ \cdot L_{x_0}\left(\rho, \pi_{x_0}, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\rho, \pi_{x_0}^\vee, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right). \end{aligned}$$

(ii) Ces intégrales définissent des fractions rationnelles en z .

Démonstration :

(i) résulte du corollaire X.14(i) en prenant $s = 0$.

(ii) Si Λ^{M_P} est un tore de dimension k , donc isomorphe à $(\mathbb{C}^\times)^k$, la variété algébrique complexe $[\pi_0]$ s'identifie à un ouvert de $\Lambda^{M_P} \cong (\mathbb{C}^\times)^k$ et sa sous-variété algébrique réelle $\text{Im}[\pi_0]$ s'identifie au sous-tore unitaire $\text{Im} \Lambda^{M_P} \cong \{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in (\mathbb{C}^\times)^k \mid |\lambda_1| = \dots = |\lambda_k| = 1\}$.

La mesure $d\pi$ sur $\text{Im}[\pi_0]$ n'est autre que la mesure invariante de volume 1

$$d\lambda_1 \dots d\lambda_k.$$

L'expression

$$h_\pi(g_1, g_2)$$

est une fraction rationnelle en π , c'est-à-dire en $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, dont le dénominateur est un produit de facteurs de la forme

$$1 - \lambda_i \lambda_i^{-1} z_0$$

pour des $z_0 \in \mathbb{C}^\times$ tels que $|z_0| \neq 1$.

Le produit

$$L\left(\rho, \pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\rho, \pi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\rho, \pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}$$

est un polynôme en π , c'est-à-dire en $\lambda_1^{\pm 1}, \dots, \lambda_k^{\pm 1}$.

Enfin, il existe des caractères

$$\rho_j : \Lambda^{M_P} \cong (\mathbb{C}^\times)^k \rightarrow \mathbb{C}^\times,$$

des multiplicités $e_j \geq 1$ et des complexes $z_j \in \mathbb{C}^\times$, $1 \leq j \leq r'$, tels que, pour toute $\pi \in [\pi_0]$ paramétrée par $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \Lambda^{M_P} \cong (\mathbb{C}^\times)^k$, on ait

$$L_{x_0}(\rho, \pi_{x_0}, Z) = \prod_{1 \leq j \leq r'} \frac{1}{1 - \rho_j(\lambda^{\deg(x_0)}) \cdot Z^{e_j} \cdot z_j},$$

$$L_{x_0}(\rho, \pi_{x_0}^\vee, Z) = \prod_{1 \leq j \leq r'} \frac{1}{1 - \rho_j(\lambda^{-\deg(x_0)}) \cdot Z^{e_j} \cdot \bar{z}_j}.$$

Si $\Lambda^{\mathbb{G}_m} \cong \mathbb{C}^\times$ agit sur $\Lambda^{M_P} \cong (\mathbb{C}^\times)^k$ via le caractère $M_P \hookrightarrow G \xrightarrow{\det_G} \mathbb{G}_m$, on a pour tout indice $j \in \{1, \dots, r'\}$

$$\rho_j(z\lambda) = z^{e_j} \cdot \rho_j(\lambda), \quad \forall \lambda \in \Lambda^{M_P}, \quad \forall z \in \Lambda^{\mathbb{G}_m} \cong \mathbb{C}^\times.$$

La conclusion s'obtient par déplacement des contours d'intégration, par exemple dans la direction $|z| \mapsto 0$, et calcul des résidus. □

Ainsi, les deux séries formelles

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \left(f_{x_0}^{N, N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} f_x \right) \right) (\gamma)$$

et

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \left(\widehat{f}_{x_0}^{N, N'} \otimes \left(\bigotimes_{x \neq x_0} \widehat{f}_x \right) \right) (\gamma)$$

sont des fractions rationnelles égales entre elles.

En particulier, elles ont la même valeur régularisée en $Z = 1$, notée

$$S_{x_0}(f) = S_{x_0}(\widehat{f}).$$

Il reste seulement à prouver que $S_{x_0}(f)$ ne dépend pas du choix de la place x_0 .

On montre d'abord :

Lemme X.16. –

Supposons que la transformée de Fourier \widehat{f}_x de f_x est à support compact en au moins une place $x \in |F| - S_G$ où f_x est sphérique.

Alors :

- (i) *Pour tout représentant (M_P, π_0) , la "valeur régularisée" en $Z = 1$ de la fraction rationnelle développée en série formelle*

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_\pi(g_1, g_2) \cdot L\left(\rho, \pi^\vee, q^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^N\left(\rho, \pi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_{x_0}^{N'}\left(\rho, \pi_{x_0}^\vee, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

est égale à l'intégrale

$$\int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_{\pi \otimes |\det_G(\bullet)|^{-s}}(g_1, g_2) \cdot L\left(\rho, \pi^\vee \otimes |\det_G(\bullet)|^{-s}, q^{-\frac{1}{2}}\right)$$

pour n'importe quel réel s assez grand.

(ii) On a

$$S_{x_0}(f) = \sum_{\gamma \in G(F)} f(\gamma).$$

Démonstration :

(ii) résulte de (i) et du lemme X.12(ii).

(i) Choisissons un réel s assez grand.

D'après les corollaires X.14(i) et X.15, la fraction rationnelle considérée $R(z)$ est égale, si $|z|$ est assez petit, à l'intégrale

$$\int_{\text{Im}[\pi_0]} d\pi \cdot h_{\pi_{\otimes}|\det_G(\bullet)|^{-s}}(g_1, g_2) \cdot L\left(\rho, \pi^{\vee}, q^{-s-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\rho, \pi_{x_0}, q_{x_0}^{s-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \cdot L_{x_0}\left(\rho, \pi_{x_0}^{\vee}, q_{x_0}^{-s-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \\ \cdot L_{x_0}\left(\rho, \pi_{x_0}, zq_{x_0}^{s-\frac{1}{2}}\right) \cdot L_{x_0}\left(\rho, \pi_{x_0}^{\vee}, zq_{x_0}^{-s-\frac{1}{2}}\right).$$

Cette même intégrale, considérée non plus au voisinage de $z = 0$ mais au voisinage de $z = 1$, définit une autre fraction rationnelle en z que nous noterons $R'(z)$.

Comme $R'(1)$ est égal à l'intégrale de (i), il s'agit de prouver que la "valeur régularisée" en $z = 1$ de la fraction rationnelle

$$R'(z) - R(z)$$

est égale à 0.

Or la différence $R'(z) - R(z)$ s'écrit comme une somme de résidus calculés le long des pôles qu'il faut traverser en allant de la zone $|z| \ll 1$ à la zone $|z| = 1$.

Comme s a été choisi très grand, les pôles de

$$L_{x_0}\left(\rho, \pi_{x_0}^{\vee}, zq_{x_0}^{-s-\frac{1}{2}}\right)$$

n'apparaissent pas au cours de cette traversée.

D'autre part, comme la transformée de Fourier \widehat{f}_x est à support compact en au moins une place $x \in |F| - S_G$ où f_x est sphérique, les pôles de la fonction L globale

$$L\left(\rho, \pi^{\vee}, q^{-s-\frac{1}{2}}\right)$$

disparaissent par multiplication avec le facteur

$$h_{\pi_{\otimes}|\det_G(\bullet)|^{-s}}(g_1, g_2) \cdot L_{x_0}\left(\rho, \pi_{x_0}^{\vee}, q_{x_0}^{-s-\frac{1}{2}}\right)^{-1}.$$

Finalement, les seuls pôles qui apparaissent dans le calcul de la différence $R'(z) - R(z)$ sont ceux de

$$L_{x_0}\left(\rho, \pi_{x_0}, zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) = \prod_{1 \leq j \leq r'} \frac{1}{1 - \left(zq_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{e_j} \cdot z_j \cdot \rho_j(\lambda)}.$$

Comme les fonctions à intégrer comportent en facteur supplémentaire le polynôme

$$L_{x_0}\left(\rho, \pi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}}\right) = \prod_{1 \leq j \leq r'} \left(1 - q_{x_0}^{-\frac{1}{2}e_j} \cdot z_j \cdot \rho_j(\lambda)\right),$$

les résidus le long des pôles à traverser sont des fractions rationnelles en z bien définies en $z = 1$ et qui y prennent la valeur 0.

Cela termine la preuve de la partie (i) en donc du lemme X.16. □

On déduit de ce lemme le corollaire suivant qui termine la preuve du théorème X.11 :

Corollaire X.17. –

Soit $x_1 \in |F| - S_G$ une autre place en laquelle le facteur f_{x_1} de f est sphérique. Alors :

(i) La différence des deux fonctionnelles

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x \mapsto S_{x_0}(f)$$

et

$$f \mapsto S_{x_1}(f)$$

ne dépend que de la restriction de \widehat{f}_{x_0} ou \widehat{f}_{x_1} au complémentaire d'une partie compacte arbitrairement grande de $G(F_x)$.

(ii) Cette différence est identiquement nulle.

Démonstration :

(i) se montre à partir du lemme X.16 comme le corollaire IX.10 à partir du lemme IX.9.

(ii) résulte de (i) et de ce que la différence $S_{x_0} - S_{x_1}$ vérifie la formule de Poisson

$$(S_{x_0} - S_{x_1})(f) = (S_{x_0} - S_{x_1})(\widehat{f}).$$

□

On peut noter $S(f)$ la valeur commune des $S_{x_0}(f)$.

Pour terminer, remarquons la conséquence suivante du lemme X.16(i) :

Corollaire X.18. –

Pour toute ρ -fonction globale f sur $G(\mathbb{A})$, notons

$$\text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} f(\gamma) \text{”} = \left(\sum_{\gamma \in G(F)} f(\gamma) \right) + \left(\sum_{\gamma \in G(F)} \widehat{f}(\gamma) \right) - S(f).$$

Alors :

(i) La fonctionnelle

$$f \mapsto \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} f(\gamma) \text{”}$$

satisfait la formule de Poisson au sens que

$$\text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} f(\gamma) \text{”} = \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} \widehat{f}(\gamma) \text{”}, \quad \forall f.$$

(ii) Elle coïncide avec la fonctionnelle

$$f \mapsto \sum_{\gamma \in G(F)} f(\gamma)$$

en les ρ -fonctions globales $f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x$ dont au moins un facteur sphérique f_x en une place $x \in |F| - S_G$ est à support compact dans $G(F_x)$.

□

Bibliographie

- A. BRAVERMAN et D. KAZHDAN, 2000, “ γ -functions of representations and lifting” (avec un appendice par V. Vologodsky), in “Visions in Mathematics”, GAFA 2000 Special Volume, Part I, p. 237-278.
- A. GENESTIER et V. LAFFORGUE, en préparation, “Chtoucas restreints pour les groupes réductifs et paramétrisation de Langlands locale”.
- R. GODEMENT et H. JACQUET, 1972, “Zeta functions of simple algebras”, LNM 260, Springer-Verlag.
- H. JACQUET et J.A. SHALIKA, 1985, “A lemma on highly ramified ϵ -factors”, Mathematische Annalen 271, p. 319-332.
- L. LAFFORGUE, 2002, “Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands”, Inventiones mathematicae 147, fascicule 1, p. 1-242.
- L. LAFFORGUE, 2012, “Noyaux du transfert automorphe de Langlands et formules de Poisson non linéaires”, prépublication de l’IHÉS numéro M/12/28.
- L. LAFFORGUE, 2013, “Noyaux du transfert automorphe de Langlands et formules de Poisson non linéaires”, à paraître au Japanese Journal of Mathematics.
- V. LAFFORGUE, 2013, “Chtoucas pour les groupes réductifs et paramétrisation de Langlands globale”, arXiv :1212.2107.
- C. MOEGLIN et J.-L. WALDSPURGER, 1993, “Décomposition spectrale et séries d’Eisenstein”, Progress in mathematics, volume 113, Birkhäuser.
- J. TATE, 1950, “Fourier analysis in number fields and Hecke’s zeta-functions”, thèse de doctorat (Princeton) reproduite dans : J.W.S. Cassels et A. Fröhlich (éditeurs), “Algebraic number theory”, Academic Press (1967), p. 305-347.