Principe de fonctorialité et transformations de Fourier non linéaires : proposition de définitions et esquisse d'une possible (?) démonstration

Laurent LAFFORGUE

Institut des Hautes Études Scientifiques
35, route de Chartres
91440 – Bures-sur-Yvette (France)

Août 2014

IHES/M/14/25

Principe de fonctorialité et transformations de Fourier non linéaires : proposition de définitions et esquisse d'une possible (?) démonstration

Cours de l'IHÉS

par Laurent Lafforgue

Introduction

Ce texte rassemble les notes écrites d'une série de quatre exposés donnés à l'IHÉS les 19 juin, 26 juin, 3 juillet et 8 juillet 2014 (et dont les enregistrements sont disponibles à partir du site de l'auteur ou de celui des vidéos de l'IHÉS).

Il introduit une nouvelle approche pour une éventuelle démonstration (encore à vérifier) du transfert automorphe de Langlands sur les corps globaux. Plus précisément, le cadre envisagé est celui d'un groupe réductif G quasi-déployé sur un corps global F et d'une représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

qui envoie le tore maximal $\widehat{T}$ du groupe dual $\widehat{G}$ de G vers le tore maximal $T_r(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^\times)^r$ de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ et telle que le groupe de Galois Γ_F de F agisse sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de ρ par permutation des r vecteurs de sa base standard.

Il n'y a pas de restriction à supposer, comme le fait le texte, que G est muni de deux caractères définis sur F

$$\det_G, \det_B : G \to \mathbb{G}_m$$

caractérisés par les propriétés suivantes :

- le cocaractère central

$$\widehat{\det_G} : \mathbb{C}^\times \to Z_{\widehat{G}} \hookrightarrow \widehat{G}$$

  qui correspond à $\det_G$ agit sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de ρ par

$$\lambda \mapsto \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix},$$

- on a

$$\langle \det_B, \rho_T^i \rangle = \langle \delta_B, \rho_T^i \rangle$$

  pour tout poids dominant ρ_T^i d'un facteur irréductible de $\rho : \widehat{G} \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ et si δ_B désigne le caractère modulaire du sous-groupe de Borel B de G.

Dans une telle situation, le texte propose une construction de

- un opérateur de ρ-transformation de Fourier

$$f \mapsto \widehat{f}$$

  sur le groupe topologique $G(\mathbb{A})$ des points de G à valeurs dans l'anneau des adèles $\mathbb{A} = \prod_{x \in |F|} F_x$ de F,
- un espace de fonctions sur $G(\mathbb{A})$, appelées les ρ-fonctions, qui est stable par les translations à gauche ou à droite ainsi que par la ρ-transformation de Fourier,
- une fonctionnelle linéaire

$$f \mapsto \left(\sum_{\gamma \in G(F)} f(\gamma) \right) + (\text{terme de bord})$$

  sur l'espace des ρ-fonctions, qui doit vérifier la "formule de Poisson" au sens d'être laissée invariante par la ρ-transformation de Fourier $f \mapsto \widehat{f}$.

Le vœu d'une telle triple construction avait été exprimé (mais sans proposition de construction, même conjecturale) dans un article de A. Braverman et D. Kazhdan publié en l'an 2000. Il semble aussi avoir été exprimé oralement depuis des décennies par certains mathématiciens comme R. Godement (selon C. Soulé) ou divers membres de l'école russe (selon M. Gromov).

Le rêve de ces mathématiciens était évidemment de généraliser au contexte non linéaire de G et de ρ le travail de Tate dans sa thèse pour $\mathbb{G}_m$ plongé dans $\mathbb{A}^1$ et son extension par R. Godement et H. Jacquet aux groupes linéaires GL_r plongés dans les espaces de matrices M_r. La stucture linéaire de $\mathbb{A}$ ou $M_r(\mathbb{A})$ avait en effet permis d'introduire des opérateurs de transformation de Fourier adéliques, de définir des espaces naturels de fonctions sur $\mathbb{A}^\times$ ou $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ stables par ces opérateurs et de montrer une formule de Poisson. Tate puis Godement et Jacquet avaient déduit de cette formule de Poisson les propriétés globales (prolongement analytique et équation fonctionnelle) des fonctions L standard des caractères de $\mathbb{A}^\times/F^\times$ puis des représentations automorphes de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$.

Il était donc clair qu'une généralisation de ces constructions et de ces propriétés au contexte non linéaire de G et de ρ impliquerait les mêmes propriétés globales des fonctions

$$L(\rho, \pi, \bullet)$$

associées par Langlands aux représentations $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ et aux représentations automorphes π de $G(\mathbb{A})$.

De plus, les "théorèmes réciproques" de Hecke, Weil, Piatetski-Shapiro, Jacquet, Shalika et Cogdell montrent que ces propriétés globales des fonctions

$$L(\rho, \pi, \bullet)$$

et de celles qui s'en déduisent par "torsion" avec n'importe quelle représentation automorphe π' de $\mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A})$ impliquent le transfert automorphe de Langlands de G à GL_r via la représentation de transfert $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$.

Autrement dit, le transfert automorphe de Langlands de G à GL_r via ρ serait conséquence d'une formule de Poisson appropriée sur le groupe adélique $G_{r-1}(\mathbb{A})$ associé au groupe réductif G_{r-1} défini par le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} G_{r-1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{GL}_{r-1} \arrow[d, "\det"] \\ G \arrow[r, "\det_G"] & \mathbb{G}_m \end{tikzcd}$$

et muni de la représentation de transfert

$$\rho_{r-1} : \widehat{G}_{r-1} \rtimes \Gamma_F = \left[(\widehat{G} \rtimes \Gamma_F) \times \mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{C}) \right] / \mathbb{C}^\times \to \mathrm{GL}_{r(r-1)}(\mathbb{C})$$

produit tensoriel de ρ et de la représentation standard de $\mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{C})$.

En fait, l'auteur a montré dans le cas des corps de fonctions (voir l'article au Japan J. Math. qui suit la prépublication M/12/28), et en reprenant "en famille" les procédés de construction des "théorèmes réciproques", que l'existence d'une telle formule de Poisson sur $G_{r-1}(\mathbb{A})$ permettrait de construire des "noyaux du transfert" c'est-à-dire des fonctions automorphes

$$(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(F) \backslash (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

qui réalisent "en famille" le transfert automorphe de G à GL_r via ρ.

C'est d'ailleurs en cherchant à construire de tels noyaux que l'auteur s'est trouvé confronté au même problème de construction de transformations de Fourier non linéaires vérifiant des formules de Poisson que Braverman et Kazhdan avaient envisagé des années plus tôt.

Quand Braverman et Kazhdan avaient publié leur article, l'auteur ne l'avait pas pris au sérieux – pas plus que beaucoup d'autres mathématiciens – car il n'avait pas compris que le problème de construction de ρ-transformations de Fourier vérifiant des formules de Poisson n'était pas plus fort mais équivalent au problème de la fonctorialité de Langlands. Une telle équivalence est étonnante a priori puisqu'elle signifie que sur n'importe quel groupe réductif G, y compris par exemple les groupes linéaires GL_r, il existe non pas seulement une formule de Poisson mais une infinité, autant que de représentations $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$.

Le fait que le transfert automorphe de Langlands de G à GL_r via ρ implique l'existence d'un opérateur de ρ-transformation de Fourier agissant sur un espace de ρ-fonctions sur $G(\mathbb{A})$ et vérifiant une formule de Poisson, est démontré dans notre article au Japan J. Math. et, avec plus de détails, dans la prépublication M/14/05.

La partie I du présent texte dresse la liste des propriétés attendues de l'opérateur de ρ-transformation de Fourier

$$f \mapsto \widehat{f}$$

sur $G(\mathbb{A})$ que nous cherchons. Tout d'abord, il faut bien sûr qu'il s'écrive comme un produit

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x \mapsto \bigotimes_{x \in |F|} \widehat{f}_x = \widehat{f}$$

d'opérateurs de ρ-transformation de Fourier locaux

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x$$

sur les groupes réductifs $G(F_x)$ localisés en les places x de F.

Chacun de ces opérateurs $f_x \mapsto \widehat{f}_x$ doit être compatible avec les translations à gauche $f_x \mapsto {}^g f_x = f_x(g \bullet)$ et à droite $f_x \mapsto f_x^g = f_x(\bullet\, g)$ par les éléments $g \in G(F_x)$ au sens de vérifier les formules

$$\begin{cases} \widehat{{}^g f_x} &= |\det_\rho(g)|_x^{-1} \cdot \widehat{f}_x^{\,g^{-1}}, \\ \widehat{f_x^g} &= |\det_\rho(g)|_x^{-1} \cdot {}^{g^{-1}}\widehat{f}_x\,, \end{cases}$$

si $\det_\rho$ désigne le caractère produit $\det_G \cdot \det_B : G \to \mathbb{G}_m$. Autrement dit, l'opérateur $f_x \mapsto \widehat{f}_x$ doit avoir la forme

$$\widehat{f}_x(\bullet) = \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f_x(g) \cdot k_x^\rho(g\, \bullet)$$

pour une certaine fonction localement intégrable

$$k_x^\rho : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

invariante par conjugaison, et une mesure $d_\rho\, g$ sur $G(F_x)$ que les translations à gauche ou à droite transforment par le caractère $|\det_\rho(\bullet)|_x$.

Après cela, la première propriété attendue de l'opérateur $f_x \mapsto \widehat{f}_x$ sur $G(F_x)$ est que l'opérateur de passage aux termes constants le long du radical unipotent N_B de B

$$f_x \mapsto \left[T(F_x) \ni t \mapsto |\det_B(t)|_x^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{1/2} \cdot \int_{N_B(F_x)} du \cdot f_x(t \cdot u) \right]$$

le transforme en l'opérateur de ρ_T-transformation de Fourier

$$\varphi_x \mapsto \widehat{\varphi}_x$$

attendu sur le tore $T(F_x)$.

Sa seconde propriété attendue est qu'il respecte le produit hermitien sur $G(F_x)$

$$(f_1, f_2) \mapsto \langle f_1, f_2\rangle = \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f_1(g) \cdot \overline{f_2(g)}$$

et définisse donc un automorphisme unitaire de l'espace des fonctions de carré intégrable sur $G(F_x)$ pour la mesure $d_\rho\, g$. Il est équivalent de demander que $f_x \mapsto \widehat{f}_x$ admette pour inverse l'opérateur conjugué

$$f_x \mapsto \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f_x(g) \cdot \overline{k_x^\rho(g\,\bullet)}\,.$$

Si l'on munit G du cocaractère central

$$\mathbb{G}_m \to Z_G \hookrightarrow G$$

qui correspond au caractère composé $\widehat{G} \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) \xrightarrow{\det} \mathbb{C}^\times$ et que l'on cherche un noyau k_x^ρ vérifiant

$$\overline{k_x^\rho(g)} = k_x^\rho(-g)\,, \quad \forall\, g \in G(F_x)\,,$$

la propriété d'unitarité équivaut encore à demander que le composé de $f_x \mapsto \widehat{f}_x$ avec lui-même se confonde avec l'opérateur

$$f_x(\bullet) \mapsto f_x(-\bullet)\,.$$

Ensuite, on s'attend à pouvoir définir en toute place ultramétrique x de F un espace de fonctions sur $G(F_x)$, appelées les ρ-fonctions, qui soit stable par les translations à gauche et à droite ainsi que par la ρ-transformation de Fourier. Il faut que la connaissance de cet espace soit équivalente à celle de fractions rationnelles

$$L_x(\rho, \pi, Z)$$

indexées par l'ensemble $\{\pi\}_x^G$ des représentations lisses admissibles irréductibles π de $G(F_x)$, et que la connaissance de l'action de l'opérateur $f_x \mapsto \widehat{f}_x$ sur cet espace soit équivalente à celle de monômes

$$\varepsilon_x(\rho, \pi, Z)$$

indexés par les $\pi \in \{\pi\}_x^G$.

Plus précisément, on demande de pouvoir passer de l'espace des ρ-fonctions aux facteurs $L_x(\rho, \pi, Z)$ comme dans le cas linéaire traité par Godement et Jacquet. Il faut que, pour toute $\pi \in \{\pi\}_x^G$, les intégrales

$$\int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f_x(g) \cdot \varphi_x(g) \cdot |\det{}_G(g)|_x^{s-\frac{1}{2}} \cdot |\det{}_\rho(g)|_x^{-\frac{1}{2}}$$

associées aux ρ-fonctions f_x et aux coefficients matriciels de π

$$\varphi_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

convergent absolument, pour tout $s \in \mathbb{C}$ de partie réelle assez grande, vers une fraction rationnelle en $Z = q_x^{-s}$, et que ces fractions rationnelles en Z admettent un plus petit dénominateur commun, inverse d'un polynôme qui vaut 1 en $Z = 0$, qui est

$$L_x(\rho, \pi, Z)\,.$$

Pour pouvoir aller en sens inverse de la connaissance des dénominateurs $L_x(\rho, \pi, Z)$ vers celle de l'espace des ρ-fonctions, il faut savoir que l'ensemble $\{\pi\}_x^G$ a une structure algébrique naturelle. Celle-ci est définie en appelant polynômes les fonctions

$$\{\pi\}_x^G \to \mathbb{C}$$

éléments de l'algèbre engendrée par les fonctions traces

$$\pi \mapsto \mathrm{Tr}_\pi(h_x)$$

des fonctions localement constantes à support compact

$$h_x : G(F_x) \to \mathbb{C}\,.$$

On sait que toute telle fonction h_x admet une unique décomposition spectrale de la forme

$$h_x(\bullet) = \int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}_x^G} d\pi \cdot h_{x,\pi}(\bullet)$$

où

- $\bullet$ $\mathrm{Im}\,\{\pi\}_x^G$ désigne la sous-variété algébrique réelle de $\{\pi\}_x^G$ composée des représentations π qui sont unitaires et tempérées,
- $\bullet$ $d\pi$ désigne la mesure de Plancherel sur $\mathrm{Im}\,\{\pi\}_x^G$,
- $\bullet$ pour tout $\pi \in \{\pi\}_x^G$, $g \mapsto h_{x,\pi}(g)$ est un coefficient matriciel de la représentation π,
- $\bullet$ pour tout $g \in G(F_x)$, $\pi \mapsto h_{x,\pi}(g)$ est une fonction polynômiale de $\pi \in \{\pi\}_x^G$.

Alors on s'attend à ce qu'une fonction

$$f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

soit une ρ-fonction si et seulement si

- elle est invariante à gauche et à droite par un sous-groupe ouvert compact de $G(F_x)$,
- elle est supportée par une partie de $G(F_x)$ dont l'intersection avec toute fibre de

$$\begin{array}{rcl} G(F_x) & \to & q_x^{\mathbb{Z}} \\ g & \mapsto & |\det_G(g)|_x \end{array}$$

  est compacte,
- elle admet une décomposition spectrale de la forme

$$f_x(\bullet) = |\det_\rho(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}_x^G} d\pi \cdot f_{x,\pi}(\bullet) \cdot L_x\left(\rho, \pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

  où les $g \mapsto f_{x,\pi}(g)$ sont des coefficients matriciels des représentations $\pi \in \{\pi\}_x^G$ et les $\pi \mapsto f_{x,\pi}(g)$, $g \in G(F_x)$, sont des polynômes sur $\{\pi\}_x^G$.

Puis on s'attend à ce que les $\varepsilon_x(\rho,\pi,Z)$ soient des polynômes inversibles en $Z^{\pm 1}$ et $\pi \in \{\pi\}_x^G$ tels que, pour toute ρ-fonction f_x décomposée spectralement comme ci-dessus, on ait

$$\widehat{f_x}(g) = |\det_\rho(g)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}_x^G} d\pi \cdot f_{x,\pi}(g^{-1}) \cdot L_x\left(\rho, \pi, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \varepsilon_x\left(\rho, \pi, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)\,.$$

Cette relation rend équivalentes la connaissance des facteurs $\varepsilon_x(\rho,\pi,Z)$, $\pi \in \{\pi\}_x^G$, et celle de l'action de l'opérateur $f_x \mapsto \widehat{f_x}$ sur l'espace des ρ-fonctions sur $G(F_x)$.

On s'attend enfin à ce que l'espace des ρ-fonctions sur $G(F_x)$ et l'espace des ρ_T-fonctions sur $T(F_x)$ soient reliés par l'opérateur de passage aux termes constants

$$f_x \mapsto |\det_B(\bullet)|_x^{1/2} \cdot |\delta_B(\bullet)|_x^{1/2} \cdot \int_{N_B(F_x)} du \cdot f_x(\bullet\, u)\,.$$

Cela équivaut à demander que, pour toute représentation $\pi \in \{\pi\}_x^G$ qui est l'induite (normalisée) d'un caractère $\chi_\pi \in \{\pi\}_x^T$ de $T(F_x)$, on ait

$$\begin{aligned} L_x(\rho,\pi,Z) &= L_x(\rho_T,\chi_\pi,Z)\,, \\ \varepsilon_x(\rho,\pi,Z) &= \varepsilon_x(\rho_T,\chi_\pi,Z)\,. \end{aligned}$$

Cela s'applique en particulier à toutes les représentations π de $G(F_x)$ qui sont non ramifiées, en les places ultramétriques x où G est non ramifié sur F_x.

Or, en les places x où G et ρ sont non ramifiés, les facteurs $L_x(\rho,\pi,Z) = L_x(\rho_T,\chi_\pi,Z)$ et $\varepsilon_x(\rho,\pi,Z) = \varepsilon_x(\rho_T,\chi_\pi,Z)$ des caractères non ramifiés χ_π de $T(F_x)$ sont entièrement fixés a priori par la règle instituée par Langlands pour définir le transfert de G à GL_r via ρ. En ces places, le sous-espace des ρ-fonctions sphériques est donc fixé et connu, ainsi que l'action sur lui de l'opérateur $f_x \mapsto \widehat{f_x}$ de ρ-transformation de Fourier.

Ce sous-espace contient l'unique ρ-fonction sphérique, appelée “standard” ou “spéciale”, définie par la décomposition spectrale

$$f_x(\bullet) = \int d\pi \cdot f_{x,\pi}(\bullet) \cdot L_x\left(\rho, \pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot |\det_\rho(\bullet)|_x^{-1/2}$$

où π décrit la variété des représentations unitaires tempérées non ramifiées et $f_{x,\pi}(\bullet)$ désigne l'unique coefficient matriciel sphérique de π qui vaut 1 au point 1 de $G(F_x)$.

En les places x archimédiennes, toutes les représentations irréductibles de $G(F_x)$ sont des sous-quotients de représentations induites par des caractères de $T(F_x)$. Il sera donc naturel de demander qu'une fonction assez régulière

$$f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

soit une ρ-fonction si et seulement si, pour tous $g, g' \in G(F_x)$, le terme constant

$$T(F_x) \ni t \mapsto |\det_B(t)|_x^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{1/2} \cdot \int_{N_B(F_x)} du \cdot f_x(g \cdot t \cdot u \cdot g')$$

est une ρ_T-fonction.

De plus, les facteurs $L_x(\rho,\pi,\bullet)$ et $\varepsilon_x(\rho,\pi,\bullet)$ des représentations π de $G(F_x)$ devront être ceux $L_x(\rho_T,\chi,\bullet)$ et $\varepsilon_x(\rho_T,\chi,\bullet)$ des caractères associés $\chi = \chi_\pi$ de $T(F_x)$.

En les places archimédiennes, on sera donc ramené au cas des tores qui fait l'objet de la partie II.

Le dernier paragraphe de la partie I rappelle l'expression générale conjecturale d'une fonctionnelle de Poisson déjà présentée dans notre article au Japan J. Math. et dans notre prépublication M/14/05.

Tout d'abord, l'espace des ρ-fonctions sur $G(\mathbb{A})$ est défini comme l'espace engendré par les produits

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x$$

de ρ-fonctions locales f_x sur les $G(F_x)$ qui sont égales à la ρ-fonction standard en presque toute place ultramétrique en laquelle G et ρ sont non ramifiés.

Étant donnée une ρ-fonction globale

$$f : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,,$$

elle se factorise pour presque toute place ultramétrique x non ramifiée pour G et ρ comme produit

$$f = f_x \otimes f^x$$

d'une ρ-fonction f_x sur $G(F_x)$ qui est sphérique.

On introduit un procédé qui permet, à partir de la décomposition spectrale de f_x, d'écrire celle-ci comme une somme

$$f_x = \sum_{N,N' \in \mathbb{N}} f_x^{N,N'}$$

de fonctions sphériques $f_x^{N,N'} : G(F_x) \to \mathbb{C}$ qui sont à support compact, ainsi que leurs ρ-transformées de Fourier $\widehat{f_x^{N,N'}}$.

Nous conjecturons que :

- la série formelle
$$\sum_{N,N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \left(f_x^{N,N'} \otimes f^x \right)(\gamma)$$
est une fraction rationnelle en Z,
- sa valeur régularisée en $Z = 1$ (définie en enlevant à cette fraction rationnelle son éventuelle partie polaire en $Z = 1$), notée $S(f)$, ne dépend pas du choix de la place x,
- elle vérifie la formule de Poisson
$$S(f) = S(\widehat{f})\,,$$
- la différence
$$\left(\sum_{\gamma \in G(F)} f(\gamma) \right) + \left(\sum_{\gamma \in G(F)} \widehat{f}(\gamma) \right) - S(f)\,,$$
notée conventionnellement
$$\text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} f(\gamma) \text{”}\,,$$
est égale à
$$\sum_{\gamma \in G(F)} f(\gamma)$$
s'il existe au moins une place ultramétrique x de F en laquelle f se factorise comme produit
$$f = f_x \otimes f^x$$
d'une ρ-fonction locale $f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$ dont le support est compact.

On a montré dans le cas des corps de fonctions que le transfert automorphe de G à GL_r via ρ (qui est maintenant connu en général grâce aux travaux récents de Vincent Lafforgue) implique la validité de cette conjecture et donc de ce qu'elle suppose : l'existence en chaque place x d'un opérateur unitaire de ρ-transformation de Fourier sur $G(F_x)$ et celle d'un espace de ρ-fonctions sur $G(F_x)$ vérifiant toutes les propriétés attendues.

Réciproquement, la validité de cette conjecture pour le groupe $G_{r-1}(\mathbb{A})$ muni de la représentation de transfert

$$\rho_{r-1} : \widehat{G}_{r-1} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_{r(r-1)}(\mathbb{C})\,,$$

implique le transfert automorphe de G à GL_r via ρ et même l'existence de "noyaux" de ce transfert.

La partie II du texte traite le cas du tore T muni de l'homomorphisme de transfert

$$\rho_T = (\rho_T^1, \ldots, \rho_T^r) : \widehat{T} \to \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$$

induit par la représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \widehat{\mathrm{GL}}_r = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})\,.$$

L'hypothèse que le groupe de Galois Γ_F de F agit sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de ρ par permutation de ses vecteurs de base permet d'introduire la F-algèbre séparable E de degré r qui correspond à l'action de Γ_F sur $\{1, 2, \ldots, r\}$. Alors le dual $\widehat{T}_E$ du tore

$$T_E = \mathrm{Res}_{E/F}\, \mathbb{G}_m$$

s'identifie à $(\mathbb{C}^\times)^r$ muni de l'action de Γ_F, et l'homomorphisme Γ_F-équivariant $\rho_T : \widehat{T} \to \widehat{T}_E$ est dual d'un homomorphisme

$$\rho_T^\vee : T_E \to T$$

qui s'inscrit dans une suite exacte de tores sur F

$$1 \to T_\rho \to T_E \to T \to 1\,.$$

Le caractère $\det_{\rho_T}$ de T se confond avec $\det_G$, et son composé avec $\rho_T^\vee : T_E \to T$ n'est autre que la norme $\det_E$ de T_E c'est-à-dire le déterminant de l'action de T_E sur l'espace linéaire

$$\overline{T}_E = \mathrm{Res}_{E/F}\, \mathbb{A}^1\,.$$

En toute place x de F, l'homomorphisme induit par ρ_T

$$T_E(F_x) = E_x^\times \to T(F_x)$$

n'est pas nécessairement surjectif mais son image est un sous-groupe ouvert d'indice fini de $T(F_x)$. Son noyau $T_\rho(F_x)$ peut être muni de l'unique mesure invariante dt_ρ qui attribue le volume 1 au plus grand sous-groupe ouvert compact.

On choisit une fois pour toutes un caractère additif continu unitaire non trivial

$$\psi = \prod_{x \in |F|} \psi_x : \mathbb{A}/F \to \mathbb{C}^\times\,.$$

Alors, en toute place x de F, l'espace linéaire

$$\overline{T}_E(F_x) = E \otimes_F F_x = E_x$$

est muni de l'opérateur de transformation de Fourier linéaire

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x(\bullet) = \int_{E_x} dt_x \cdot f_x(t_x) \cdot k_x^E(t_x \,\bullet)$$

défini par le noyau

$$\begin{array}{rcl} k_x^E & : & E_x \xrightarrow{\mathrm{Tr}} F_x \xrightarrow{\psi_x} \mathbb{C}^\times \\ & & t_x \longmapsto \psi_x(\mathrm{Tr}\,(t_x)) \end{array}$$

et par la mesure additive "autoduale" (relativement à ψ_x) dt_x de E_x. Le groupe multiplicatif $E_x^\times$ agit sur dt_x par le caractère $|\det_E(\bullet)|_x$ et donc son sous-groupe $T_\rho(F_x)$ agit trivialement.

En les places ultramétriques x de F, on appelle ρ_E-fonctions sur $T_E(F_x) = E_x^\times$ les fonctions

$$f_x : E_x^\times \to \mathbb{C}$$

qui se prolongent par continuité en des fonctions localement à support compact sur E_x.

En les places archimédiennes, on dispose classiquement d'un espace de fonctions sur E_x qui permet de définir les facteurs $L_x(\chi, \bullet)$ et $\varepsilon_x(\chi, \psi_x, \bullet)$ des caractères χ de $E_x^\times$. On modifie cet espace pour donner une définition (encore provisoire) d'un espace de ρ_E-fonctions sur $T_E(F_x)$ qui, contrairement au précédent, est stable par translations arbitraires.

On dispose alors de l'espace des ρ_E-fonctions globales

$$f : T_E(\mathbb{A}) = \mathbb{A}_E^\times \subset \mathbb{A}_E = \overline{T}_E(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

muni de la fonctionnelle de Poisson

$$f \mapsto \sum_{\gamma \in \overline{T}_E(F) = E} f(\gamma)$$

qui, d'après Tate, vérifie la formule de Poisson

$$\sum_{\gamma \in E} f(\gamma) = \sum_{\gamma \in E} \widehat{f}(\gamma)\,.$$

En toute place x de F, on dispose de l'opérateur d'image directe par $\rho_T^\vee : T_E(F_x) \to T(F_x)$

$$f_x \mapsto (\rho_T^\vee)_*(f_x)$$

qui associe aux fonctions

$$f_x : T_E(F_x) \to \mathbb{C}$$

les fonctions

$$(\rho_T^\vee)_*(f_x) : T(F_x) \to \mathbb{C}$$

définies par les intégrales

$$T(F_x) \ni t \mapsto \int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(t)} dt_\rho \cdot f_x(t_\rho)$$

lorsque celles-ci sont absolument convergentes ou simplement convergentes en un sens approprié.

On définit un opérateur de ρ_T-transformation de Fourier sur $T(F_x)$

$$\varphi_x \mapsto \widehat{\varphi}_x$$

en demandant que :

- $\widehat{\varphi_x^t} = |\det_G(t)|_x^{-1} \cdot \widehat{\varphi}_x^{t^{-1}}$ pour toute fonction φ_x sur $T(F_x)$ et tout élément $t \in T(F_x)$,
- $\widehat{\varphi}_x = (\rho_T^\vee)_*(\widehat{f_x})$ si $\varphi_x = (\rho_T^\vee)_*(f_x)$ est l'image directe par $\rho_T^\vee$ d'une fonction f_x sur $T_E(F_x)$.

Cet opérateur de ρ_T-transformation de Fourier est défini par la formule

$$\widehat{\varphi}_x(\bullet) = \int_{T(F_x)} dt \cdot \varphi_x(t) \cdot k_x^{\rho_T}(t\,\bullet)$$

où :

- dt est l'unique mesure de $T(F_x)$ que les translations transforment par le caractère $|\det_G(\bullet)|_x$ et dont la restriction à l'image ouverte de $T_E(F_x)$ est le quotient de la mesure autoduale dt_x de $\overline{T}_E(F_x) = E_x$ par la mesure invariante dt_ρ de $T_\rho(F_x)$,

- le noyau $k_x^{\rho_T} : T(F_x) \to \mathbb{C}$ est égal à $(\rho_T^\vee)_*(k_x^E)$ c'est-à-dire est défini par les intégrales simplement convergentes
$$T(F_x) \ni t \mapsto k_x^{\rho_T}(t) = \int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(t)} dt_\rho \cdot \psi_x(\mathrm{Tr}\,(t_\rho))\,.$$

Puis l'espace des ρ_T-fonctions sur $T(F_x)$ est défini comme l'espace engendré par les images directes
$$\varphi_x = (\rho_T^\vee)_*(f_x)$$
des ρ_E-fonctions sur $T_E(F_x)$ et par leurs translatées par les éléments de $T(F_x)$.

Il vérifie toutes les propriétés attendues de la partie I et définit donc des facteurs
$$L_x(\rho_T, \chi, \bullet) \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_x(\rho_T, \chi, \bullet)$$
des caractères continus $\chi : T(F_x) \to \mathbb{C}^\times$ en les places ultramétriques x. De plus, on a pour tout tel caractère
$$\begin{array}{rcl} L_x(\rho_T, \chi, \bullet) & = & L_x(\chi \circ \rho_T^\vee, \bullet)\,, \\ \varepsilon_x(\rho_T, \chi, \bullet) & = & \varepsilon_x(\chi \circ \rho_T^\vee, \psi_x, \bullet)\,. \end{array}$$

Par conséquent, les propriétés globales (prolongement analytique et équation fonctionnelle) des fonctions
$$L(\chi, \bullet) = \prod_{x \in |F|} L_x(\chi_x, \bullet)$$
des caractères automorphes $\chi = \bigotimes\limits_{x \in |F|} \chi_x : \mathbb{A}_E^\times / E^\times \to \mathbb{C}^\times$ de $\mathbb{A}_E^\times$, qui résultent de la formule de Poisson sur $\mathbb{A}_E$, impliquent les propriétés globales des fonctions
$$L(\rho_T, \chi, \bullet) = \prod_{x \in |F|} L_x(\rho_T, \chi_x, \bullet)$$
des caractères automorphes $\chi = \bigotimes\limits_{x \in |F|} \chi_x : T(\mathbb{A})/T(F) \to \mathbb{C}$.

À leur tour, et comme vérifié dans la prépublication M/14/05, ces propriétés globales des fonctions $L(\rho_T, \chi, \bullet)$ entraînent l'existence de la fonctionnelle de Poisson
$$f \mapsto \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{T}(F)} f(\gamma) \text{”}$$
des ρ_T-fonctions globales $f : T(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$, et la formule
$$\text{“} \sum_{\gamma \in \overline{T}(F)} f(\gamma) \text{”} = \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{T}(F)} \widehat{f}(\gamma) \text{”}$$
dans les formes de la partie I.

On remarque que la formule de Poisson pour la ρ_T-transformation de Fourier sur $T(\mathbb{A})$ ne paraît pas pouvoir être démontrée autrement qu'à partir de la formule de Poisson pour la transformation de Fourier linéaire sur $\overline{T}_E(\mathbb{A}) = \mathbb{A}_E$.

Cela ne semble laisser qu'au plus deux possibilités pour établir la formule de Poisson pour une ρ-transformation de Fourier sur $G(\mathbb{A})$: ou bien comme conséquence du transfert automorphe de G à GL_r via ρ, ou bien par réduction à la formule de Poisson sur $T(\mathbb{A})$.

Le dernier paragraphe de la partie II présente une manière de prolonger les noyaux en toutes les places x

$$k_x^{\rho_T} : T(F_x) \to \mathbb{C}$$

en des fonctions invariantes par conjugaison

$$k_x^{\rho_T} : G(F_x) \to (T/W_G)(F_x) \to \mathbb{C}\,.$$

On verra toutefois dans la partie III que, dès le cas de GL_2 et des représentations sym^k de $\widehat{\mathrm{GL}}_2 = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, ces fonctions prolongées ne sont pas les “bonnes” fonctions invariantes

$$k_x^{\rho} : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

qui définissent une ρ-transformation de Fourier sur $G(F_x)$

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x(\bullet) = \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f_x(g) \cdot k_x^\rho(g\,\bullet)$$

susceptible de vérifier toutes les propriétés attendues.

Les trois premiers paragraphes de la partie III sont consacrés au cas où, pour n'importe quel entier $k \geq 1$,

$$\widehat{G} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mu_k$$

est le quotient de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ par le groupe fini central $\mu_k = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid z^k = 1\}$, et ρ est la représentation irréductible de puissance symétrique k-ième

$$\rho = \mathrm{sym}^k : \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mu_k \to \mathrm{GL}_{k+1}(\mathbb{C})\,.$$

Ainsi, G est déployé et s'inscrit dans un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{GL}_2 \arrow[d, "\det"] \\ \mathbb{G}_m \arrow[r, "\lambda \mapsto \lambda^k"'] & \mathbb{G}_m \end{tikzcd}$$

si bien que les points de G sont des paires $(g, \det(g)^{1/k})$ constituées d'un point g de GL_2 et d'un point de $\mathbb{G}_m$ qui est une racine k-ième de $\det(g)$.

Dans ce cas, $\det_G$ est le caractère

$$(g, \det(g)^{1/k}) \mapsto \det(g)^{1/k}$$

et $\det_B$ est le caractère

$$(g, \det(g)^{1/k}) \mapsto \det(g)$$

si bien que

$$\det_B = \det_G^k$$

et

$$\det_\rho = \det_G \cdot \det_B = \det_G^{k+1}\,.$$

En n'importe quelle place x de F, on cherche une “bonne” fonction noyau

$$k_x^\rho : G(F_x) \to \mathbb{C}\,.$$

Comme cette fonction doit être invariante par conjugaison, elle doit être une fonction de $\mathrm{Tr}\,(g)$ et $\det(g)^{1/k}$. On suppose qu'elle admet un développement de Fourier en la variable $\mathrm{Tr}\,(g)$, c'est-à-dire s'écrit sous la forme

$$k_x^\rho(g,\det(g)^{1/k}) = \int_{F_x} d\mu\cdot\psi_x(\mu\cdot\mathrm{Tr}\,(g))\cdot\widehat{k}_x^\rho(\mu,\det(g)^{1/k})$$

pour une mesure additive $d\mu$ de F_x et une certaine fonction

$$\widehat{k}_x^\rho : F_x\times F_x^\times\to\mathbb{C}\,.$$

On commence par étudier la propriété de compatibilité de la ρ-transformation définie sur $G(F_x)$ par un tel noyau

$$f_x\mapsto\widehat{f}_x(\bullet)=\int_{G(F_x)} d_\rho\,g\cdot f_x(g)\cdot k_x^\rho(g\,\bullet)$$

avec la ρ-transformation de Fourier sur $T(F_x)$, via l'opérateur de passage aux termes constants

$$f_x\mapsto\left[T(F_x)\ni t\mapsto|\det{}_B(t)|_x^{1/2}\cdot|\delta_B(t)|_x^{1/2}\cdot\int_{N_B(F_x)} du\cdot f_x(t\cdot u)\right].$$

On montre que cette propriété est équivalente à ce que l'on ait, pour tout élément $(t,\det(t)^{1/k})$ de $T(F_x)$,

$$k_x^{\rho_T}(t,\det(t)^{1/k})=\int_{F_x^\times} d\mu\cdot|\mu|_x^{-1}\cdot\psi_x(\mu\cdot\mathrm{Tr}\,(t))\cdot\widehat{k}_x^\rho(\mu,\det(t)^{1/k})\,,$$

sous réserve de vérification des convergences et de la légitimité des échanges d'ordres de sommations effectués lors du calcul. Autrement dit, la restriction de k_x^ρ à $T(F_x)$ et le noyau $k_x^{\rho_T}$ sur $T(F_x)$ doivent être reliés par un changement de la mesure additive $d\mu$ sur F_x en la mesure multiplicative $d\mu\cdot|\mu|_x^{-1}$ dans leurs développements de Fourier en la variable $\mathrm{Tr}\,(t)$.

Le calcul utilise la décomposition de Bruhat des éléments de $\mathrm{GL}_2(F_x)$

$$g=\begin{pmatrix}1&0\\v&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mu_1&0\\0&\mu_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&u\\0&1\end{pmatrix},\quad\mu_1,\mu_2\in F_x^\times\,,\quad u,v\in F_x\,,$$

et se fonde sur le fait que la dépendance de $\mathrm{Tr}\,(g)$ en les deux composantes linéaires $u,v\in F_x$ est linéaire en chacune d'elles.

Puis on étudie la propriété d'unitarité de l'opérateur de ρ-transformation de Fourier

$$f_x\mapsto\widehat{f}_x(\bullet)=\int_{G(F_x)} d_\rho\,g\cdot f_x(g)\cdot k_x^\rho(g\,\bullet)$$

défini par un tel noyau.

Il s'agit de comprendre sous quelles conditions les intégrales

$$\int_{G(F_x)} d_\rho\,g\cdot\widehat{f'}(g)\cdot\overline{\widehat{f''}(g)}$$

sont égales aux intégrales

$$\int_{G(F_x)} d_\rho\,g\cdot f'(g)\cdot\overline{f''(g)}\,.$$

Un calcul formel, fondé sur les mêmes faits élémentaires que le calcul précédent mais plus élaboré, ramène la propriété d'unitarité de l'opérateur considéré de ρ-transformation de Fourier sur $G(F_x)$ à celle de l'opérateur correspondant de ρ_T-transformation de Fourier sur $T(F_x)$, sous réserve de vérification des convergences et de la légitimité des échanges d'ordres d'intégration effectués lors du calcul.

Nous n'avons jusqu'à présent pas fait toutes ces vérifications nécessaires mais, même si ce calcul est encore en partie formel, il inspire à ce point de la recherche une idée complètement nouvelle par rapport à tout ce qui précède.

On remarque en effet qu'une bonne partie du calcul mené pour les intégrales

$$\int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot \widehat{f}'(g) \cdot \overline{\widehat{f}''(g)}$$

se transpose aux intégrales

$$\int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot \widehat{f}'(g) \cdot \widehat{f}''(g) \cdot \overline{\widehat{f}'''(g)}\,.$$

Or ces dernières définissent une distribution sur $G(F_x) \times G(F_x) \times G(F_x)$ qui est duale du "produit de ρ-convolution", c'est-à-dire du ρ-transformé de Fourier de l'opérateur de multiplication point par point des fonctions.

On remarque que le groupe $G(F_x)$ agit diagonalement sur cette distribution sur $G(F_x) \times G(F_x) \times G(F_x)$ par le caractère $|\det_\rho(\bullet)|_x$. Par conséquent, le support de cette distribution est invariant à gauche et à droite par $G(F_x)$.

L'élément nouveau est que les arguments (encore en partie formels) qui montrent que la distribution

$$(f', f'') \mapsto \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot \widehat{f}'(g) \cdot \overline{\widehat{f}''(g)}$$

est supportée par la diagonale de $G(F_x) \times G(F_x)$, montrent également que l'intersection du support de la distribution

$$(f', f'', f''') \mapsto \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot \widehat{f}'(g) \cdot \widehat{f}''(g) \cdot \overline{\widehat{f}'''(g)}$$

sur $G(F_x) \times G(F_x) \times G(F_x)$ et de

$$G(F_x) \times T(F_x) \times T(F_x) \qquad [\text{resp. } G(F_x) \times B(F_x) \times B(F_x)]$$

est contenue dans

$$T(F_x) \times T(F_x) \times T(F_x) \qquad [\text{resp. } B(F_x) \times B(F_x) \times B(F_x)]\,.$$

On peut appeler cette propriété la stabilité de $T(F_x)$ [resp. $B(F_x)$] par ρ-convolution.

Elle signifie que si f_1 et f_2 sont deux fonctions continues et de carré intégrable sur $G(F_x)$, reliées par une équation de la forme

$$\widehat{f_2} = \widehat{f_1} \cdot \varphi$$

où φ est une fonction mesurable bornée sur $G(F_x)$ dont la ρ-transformée de Fourier $\widehat{\varphi}$ (qui est bien définie a priori en tant que distribution) est supportée par $T(F_x)$ [resp. $B(F_x)$], alors la restriction de f_2 à $T(F_x)$ [resp. $B(F_x)$] ne dépend que de la restriction de f_1 à $T(F_x)$ [resp. $B(F_x)$].

Le dernier paragraphe de la partie III (qui n'a pas été exposé oralement faute de temps) pose la question de la définition de "bons" opérateurs de ρ-transformation de Fourier sur les localisés $G(F_x)$

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x(\bullet) = \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f_x(g) \cdot k_x^\rho(g\,\bullet)$$

dans le cas général d'un groupe réductif G quasi-déployé sur F muni d'une représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})\,.$$

On commence par remarquer que les calculs formels des paragraphes précédents peuvent encore être effectués et mener aux mêmes conclusions lorsque G est déployé et de rang 1 ou même lorsque ses sous-groupes SL_2 ou PGL_2 associés à ses différentes racines positives commutent les uns avec les autres.

Dans le cas général, on conjecture qu'il existe en chaque place x un unique opérateur de ρ-transformation de Fourier sur $G(F_x)$

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x$$

qui, en plus d'être compatible avec les translations à gauche et à droite, vérifie les trois propriétés suivantes :

(1) Il est compatible avec la ρ-transformation de Fourier sur $T(F_x)$.

(2) Il est unitaire.

(3) L'opérateur de ρ-convolution associé

$$(f, \varphi) \mapsto f *_\rho \varphi\,,$$

défini comme le ρ-transformé de Fourier de l'opérateur de multiplication point par point des fonctions, est "algébrique" et il préserve le tore maximal T de G. Cela signifie que la ρ-convolution doit être définie par intégration d'une forme différentielle algébrique équivariante sur une correspondance algébrique au-dessus de $G \times G \times G$ munie d'une double action de G à gauche et à droite et dont l'image dans $G \times G \times G$ est un fermé Z tel que

$$Z \cap (G \times T \times T) \subset T \times T \times T\,.$$

Les propriétés (1) et (2), qui avaient été introduites dès le début de la partie I, ne suffisaient pas à caractériser l'opérateur $f_x \mapsto \widehat{f}_x$ cherché.

La propriété (3) est inspirée en général par les calculs formels faits dans le cas de GL_2.

Combinée avec la propriété (1), elle implique que l'opérateur $*_\rho$ de ρ-convolution sur $G(F_x)$ est entièrement déterminé a priori et peut être décrit assez simplement à partir de l'opérateur de ρ_T-convolution $*_{\rho_T}$ sur $T(F_x)$.

On appelle fonctions de type torique sur $G(F_x)$ les fonctions qui admettent une décomposition spectrale dans laquelle ne figurent que des représentations induites de caractères du tore $T(F_x)$ ou, plus généralement, les fonctions de carré intégrable pour la mesure $d_\rho\, g$ qui sont des limites de suites de telles fonctions. Alors la propriété (1) fait que l'opérateur $f_x \mapsto \widehat{f}_x$ est entièrement déterminé a priori dans le sous-espace des fonctions de type torique. Son action dans ce sous-espace est unitaire puisque l'opérateur de ρ_T-transformation de Fourier sur $T(F_x)$ est unitaire.

De plus, pour toute fonction de carré intégrable sur $G(F_x)$ qui est le produit $f \cdot \varphi$ de deux fonctions de type torique, on a

$$\widehat{f \cdot \varphi} = \widehat{f} *_\rho \widehat{\varphi}\,.$$

Comme les produits $f \cdot \varphi$ de cette forme suffisent à engendrer tout le spectre de $G(F_x)$, on voit que les propriétés (1), (2) et (3) suffisent à caractériser l'opérateur recherché de ρ-transformation de Fourier

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x\,.$$

Pour démontrer l'existence d'un tel opérateur dans le cas général, il faudra probablement utiliser les fonctions unitaires

$$\mathbb{1}^G_{\chi, c_x} : N_B^{\mathrm{op}}(F_x) \backslash G(F_x) / N_B(F_x) \to U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

qui sont introduites et étudiées dans la partie IV.

La partie IV est en effet fondée sur l'idée de s'intéresser au groupe commutatif des opérateurs unitaires

$$f_x \mapsto f_x \cdot \mathbb{I}_x$$

de multiplication par les fonctions unitaires

$$\mathbb{I}_x : G(F_x) \to U(1)$$

et au groupe commutatif image, constitué des conjugués de ces automorphismes par l'automorphisme unitaire

$$f_x \mapsto \widehat{f_x}$$

de ρ-transformation de Fourier considéré.

On commence par le cas du tore $T(F_x)$ muni de l'opérateur $\varphi_x \mapsto \widehat{\varphi}_x$ de ρ_T-transformation de Fourier.

On cherche des opérateurs unitaires de multiplication sur $T(F_x)$

$$\varphi_x \mapsto \varphi_x \cdot \mathbb{I}_x$$

qui préservent les espaces de ρ_T-fonctions sur les $T(F_x)$ en toutes les places ultramétriques x de F.

Dans ce but, on introduit la variété torique affine normale $\overline{T}$ de tore T qui est définie comme le quotient de $\overline{T}_E = \mathrm{Res}_{E/F}\,\mathbb{A}^1$ par le sous-tore T_ρ de T_E. Elle est associée au cône saturé

$$X_{\overline{T}} = \{\chi \in X_T \mid \langle \chi, \rho_T^i \rangle \geq 0\,,\ 1 \leq i \leq r\}\,.$$

N'importe quel caractère $\chi \in X_{\overline{T}}$ est défini sur l'extension finie séparable E_χ de F qui correspond à l'action transitive de Γ_F sur l'orbite de χ. Il définit un morphisme équivariant

$$\chi_F : \overline{T} \to \mathrm{Res}_{E_\chi/F}\,\mathbb{A}^1$$

vers la variété torique $\mathrm{Res}_{E_\chi/F}\,\mathbb{A}^1$ qui est elle-même munie d'un morphisme équivariant

$$\mathrm{Tr} : \mathrm{Res}_{E_\chi/F}\,\mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1\,.$$

Tout élément $c_x \in E_{\chi,x} = E_\chi \otimes_F F_x$ définit donc une fonction continue unitaire

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{I}_{\chi,c_x} : \overline{T}(F_x) & \to & U(1) \\ t & \mapsto & \psi_x(\mathrm{Tr}\,(c_x \cdot \chi_F(t)))\,. \end{array}$$

En toute place ultramétrique x, les opérateurs unitaires de multiplication par ces fonctions

$$\varphi_x \mapsto \varphi_x \cdot \mathbb{I}_{\chi,c_x}$$

préservent l'espace des ρ_T-fonctions sur $T(F_x)$. Cela résulte de ce que, si φ_x est l'image directe

$$\varphi_x = (\rho_T^\vee)_*(f_x)$$

d'une fonction localement constante à support compact

$$f_x : \overline{T}_E(F_x) = E \otimes_F F_x = E_x \to \mathbb{C}\,,$$

alors on a

$$\varphi_x \cdot \mathbb{I}_{\chi,c_x} = (\rho_T^\vee)_*(f_x \cdot (\mathbb{I}_{\chi,c_x} \circ \rho_T^\vee))$$

où le produit
$$f_x \cdot (\mathbb{I}_{\chi,c_x} \circ \rho_T^\vee)$$
est encore une fonction localement constante à support compact sur $\overline{T}_E(F_x) = E_x$.

En les places x archimédiennes, on décide d'appeler dorénavant espace des ρ_T-fonctions sur $T(F_x)$ le plus petit espace qui contient les ρ_T-fonctions au sens de la partie II et qui est stable par les translations, par l'opérateur $\varphi_x \mapsto \widehat{\varphi}_x$ de ρ_T-transformation de Fourier et par multiplication par les fonctions $\mathbb{I}_{\chi,c_x}$, $\chi \in X_{\overline{T}}$, $c_x \in E_{\chi,c_x}$.

En toute place x, la ρ_T-transformée de Fourier
$$\widehat{\mathbb{I}_{\chi,c_x}}$$
de toute telle fonction $\mathbb{I}_{\chi,c_x}$ est bien définie en tant que forme linéaire sur l'espace des fonctions de carré intégrable sur $T(F_x)$ dont la ρ_T-transformée de Fourier est intégrable. On dispose de l'opérateur unitaire de convolution
$$\varphi_x \mapsto \varphi_x *_{\rho_T} \widehat{\mathbb{I}_{\chi,c_x}}$$
qui est le conjugué par $\varphi_x \mapsto \widehat{\varphi}_x$ de l'opérateur unitaire de multiplication
$$\varphi_x \mapsto \varphi_x \cdot \mathbb{I}_{\chi,c_x} .$$
En toute place x, il préserve l'espace des ρ_T-fonctions sur $T(F_x)$.

Rappelant que les faces C du cône convexe polyédral $X_{\overline{T}}$ correspondent aux strates $\overline{T}_C$ de la variété torique $\overline{T}$, on montre que la distribution
$$\widehat{\mathbb{I}_{\chi,c_x}}$$
est supportée par la strate $\overline{T}_C(F_x)$ de $\overline{T}(F_x)$ si χ est élément d'une face C de $X_{\overline{T}}$ définie sur F_x (c'est-à-dire respectée par le groupe de Galois $\Gamma_{F_x} \subset \Gamma_F$ de F_x).

On passe enfin aux fonctions globales sur $T(\mathbb{A})$. Pour tout caractère $\chi \in X_{\overline{T}}$ et tout élément
$$c = (c_x)_{x\in|F|} \in \mathbb{A}_{E_\chi} = E_\chi \otimes_F \mathbb{A} = \prod_{x\in|F|} E_{\chi,x} ,$$
la fonction
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{I}_{\chi,c} : \overline{T}(\mathbb{A}) & \to & U(1) \\ t & \mapsto & \psi(\mathrm{Tr}\,(c \cdot \chi_F(t))) \end{array}$$
s'identifie au produit de fonctions locales
$$\prod_{x\in|F|} \mathbb{I}_{\chi,c_x} .$$
L'opérateur unitaire de multiplication
$$\varphi \mapsto \varphi \cdot \mathbb{I}_{\chi,c}$$
préserve l'espace des ρ_T-fonctions globales sur $T(\mathbb{A})$, et il en est de même de son conjugué
$$\varphi \mapsto \varphi *_{\rho_T} \widehat{\mathbb{I}_{\chi,c}}$$
pour la ρ_T-transformation de Fourier sur $T(\mathbb{A})$.

On remarque que si
$$c = (c_x)_{x\in|F|} \in E_\chi \subset \mathbb{A}_{E_\chi}$$

est un élément rationnel, on a
$$\mathbb{I}_{\chi,c}(\gamma) = 1\,, \qquad \forall\,\gamma \in \overline{T}(F)\,,$$
puisque ψ est trivial sur le sous-groupe discret F de $\mathbb{A}$.

On montre que, sous cette hypothèse de rationalité de $c \in E_\chi$, l'opérateur unitaire de multiplication
$$\varphi \mapsto \varphi \cdot \mathbb{I}_{\chi,c}$$
fixe la fonctionnelle de Poisson
$$\varphi \mapsto \text{“}\sum_{\gamma\in\overline{T}(F)} f(\gamma)\text{”}\,,$$
donc aussi son conjugué
$$\varphi \mapsto \varphi *_\rho \widehat{\mathbb{I}_{\chi,c}}$$
par la ρ_T-transformation de Fourier sur $T(\mathbb{A})$.

La suite de la partie IV a pour but de transposer aux $G(F_x)$ et à $G(\mathbb{A})$ ce que nous venons d'exposer à propos des $T(F_x)$ et de $T(\mathbb{A})$. Cela amènera à prendre parfois pour définition sur G ce qui, dans le cas de T, est une propriété déjà connue.

On suppose que chaque $G(F_x)$ est muni d'un opérateur de ρ-transformation de Fourier
$$f_x \mapsto \widehat{f}_x$$
qui possède les propriétés (1), (2) et (3) énoncées plus haut.

Afin de définir les analogues sur les $G(F_x)$ des fonctions unitaires $\mathbb{I}_{\chi,c_x} : T(F_x) \subset \overline{T}(F_x) \to U(1)$, on introduit le semi-groupe affine géométriquement normal $\overline{G}$ de groupe G qui est caractérisé par la propriété que $\overline{T}$ s'identifie à l'adhérence schématique de T dans $\overline{G}$. Un tel semi-groupe existe bien puisque le cône convexe saturé
$$X_{\overline{T}} = \{\chi \in X_T \mid \langle \chi, \rho_T^i\rangle \geq 0\,, \quad 1 \leq i \leq r\}$$
est respecté par la double action du groupe de Weyl W_G et du groupe de Galois Γ_F.

La variété quotient
$$N_B^{\mathrm{op}}\backslash\overline{G}/N_B\,,$$
munie de la double action de T à gauche ou à droite, s'identifie à la variété torique affine normale de tore T
$$\overline{T}^+$$
définie par le cône $X_{\overline{T}^+}$ constitué des caractères $\chi \in X_{\overline{T}}$ qui sont dominants, c'est-à-dire vérifient
$$\langle \chi, \alpha^\vee\rangle \geq 0\,, \quad \forall\,\alpha \in \Delta_G\,.$$
Tout élément $\chi \in X_{\overline{T}^+}$ définit donc un morphisme équivariant
$$\chi_F : N_B^{\mathrm{op}}\backslash\overline{G}/N_B = \overline{T}^+ \to \mathrm{Res}_{E_\chi/F}\,\mathbb{A}^1\,.$$
D'où des fonctions unitaires
$$\begin{array}{rccl} \mathbb{I}^G_{\chi,c_x} & : & \overline{G}(F_x) \longrightarrow (N_B^{\mathrm{op}}\backslash\overline{G}/N_B)(F_x) \longrightarrow & U(1) \\ & & g \longmapsto & \psi_x(\mathrm{Tr}\,(c_x\cdot\chi_F(g))) \end{array}$$
indexées par les éléments $c_x \in E_{\chi,x} = E_\chi \otimes_F F_x$.

Les ρ-transformées de Fourier

$$\widehat{\mathbb{1}^G_{\chi,c_x}}$$

de ces fonctions $\mathbb{1}^G_{\chi,c_x}$ sont bien définies en tant que formes linéaires sur l'espace des fonctions de carré intégrable sur $G(F_x)$ dont la ρ-transformée de Fourier est intégrable. De plus, comme les $\mathbb{1}^G_{\chi,c_x}$ sont invariantes à droite par $N_B(F_x)$ (ou invariantes à gauche par $N_B^{\mathrm{op}}(F_x)$), les distributions $\widehat{\mathbb{1}^G_{\chi,c_x}}$ sont de type torique au sens qu'elles s'écrivent comme des limites de suites de fonctions de type torique, et elles ne dépendent que de l'action de la ρ-transformation de Fourier sur le sous-espace des fonctions de type torique.

On montre que chaque telle distribution

$$\widehat{\mathbb{1}^G_{\chi,c_x}}$$

est supportée par la strate

$$(N_B \cdot \overline{T}_C \cdot N_B^{\mathrm{op}})(F_x) \subset \overline{G}(F_x)$$

si χ est élément d'une face C de $X_{\overline{T}}$ définie sur F_x.

En particulier, si C est une face de $X_{\overline{T}}$ définie sur F_x et contenue dans $X_{\overline{T}^+}$, c'est-à-dire entièrement composée de caractères dominants, alors, pour tout $\chi \in C$, la distribution

$$\widehat{\mathbb{1}^G_{\chi,c_x}}$$

est supportée par la strate

$$\overline{T}_C(F_x) \subset \overline{T}(F_x) \subset \overline{G}(F_x)$$

car l'action à droite de N_B^{op} et l'action à gauche de N_B fixent les points de la strate $\overline{T}_C$ de $\overline{G}$.

Pour toute fonction continue $f : G(F_x) \to \mathbb{C}$ et tous éléments $u \in N_B(F_x)$, $v \in N_B^{\mathrm{op}}(F_x)$, notons $f^{u,v}$ la fonction continue sur $T(F_x)$

$$T(F_x) \ni t \mapsto f^{u,v}(t) = |\det_B(t)|_x^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{-1/2} \cdot f(u \cdot t \cdot v)\,.$$

Alors on déduit de la propriété (3) de l'opérateur de ρ-transformation de Fourier sur $G(F_x)$ que pour tout élément χ d'une face C de $X_{\overline{T}}$ définie sur F_x et composée de caractères dominants, et pour toutes fonctions continues et de carré intégrable

$$f_1, f_2 : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

reliées par la formule

$$\widehat{f}_2 = \widehat{f}_1 \cdot \mathbb{1}^G_{\chi,c_x} \quad \text{soit} \quad f_2 = f_1 *_\rho \widehat{\mathbb{1}^G_{\chi,c_x}}\,,$$

on a pour tous $u \in N_B(F_x)$ et $v \in N_B^{\mathrm{op}}(F_x)$,

$$f_2^{u,v} = f_1^{u,v} *_{\rho_T} \widehat{\mathbb{1}_{\chi,c_x}}$$

soit

$$\widehat{f_2^{u,v}} = \widehat{f_1^{u,v}} \cdot \mathbb{1}_{\chi,c_x}\,.$$

Autrement dit, l'opérateur de ρ-convolution avec $\widehat{\mathbb{1}^G_{\chi,c_x}}$ sur $G(F_x)$ se réduit à l'opérateur de ρ_T-convolution avec $\widehat{\mathbb{1}_{\chi,c_x}}$ sur $T(F_x)$, via les opérateurs de restriction

$$f \mapsto f^{u,v}\,, \quad u \in N_B(F_x)\,, \quad v \in N_B^{\mathrm{op}}(F_x)\,.$$

On suppose dorénavant que le cône $X_{\overline{T}}$ possède une face C définie sur F (c'est-à-dire stable par l'action de Γ_F), composée de caractères dominants, et génératrice au sens que le sous-réseau de X_T engendré par C et ses images sous l'action de W_G est d'indice fini, donc nécessairement de la forme

$$\{\chi \in X_T \mid \chi_{|Z_C} = 1\}$$

pour un certain sous-groupe fini central $Z_C \subset T$ de G.

Alors les morphismes

$$\chi_F : \overline{G} \to N_B^{\mathrm{op}} \backslash \overline{G} / N_B \to \mathrm{Res}_{E_\chi/F} \mathbb{A}^1 \,, \quad \chi \in C \,,$$

et leurs translatés à gauche ou à droite par les éléments de $G(F)$ engendrent l'algèbre des polynômes sur la variété affine $\overline{G}/Z_C$.

En les places ultramétriques x, les fonctions

$$\mathbb{1}^G_{\chi, c_x} : \overline{G}(F_x) \to U(1) \,, \quad \chi \in C \,, \quad c_x \in E_{\chi,x} \,,$$

et leurs translatées à gauche ou à droite par les éléments de $G(F_x)$ engendrent l'espace vectoriel des fonctions localement constantes sur n'importe quelle partie compacte de $(\overline{G}/Z_C)(F_x)$.

Or on rappelle qu'on cherche à définir en toute telle place ultramétrique x un espace naturel de ρ-fonctions sur $G(F_x)$. Son sous-espace des ρ-fonctions de type torique est entièrement fixé a priori par la condition de compatibilité avec l'espace des ρ_T-fonctions sur $T(F_x)$ via le passage aux termes constants. Pour déterminer entièrement l'espace des ρ-fonctions sur $G(F_x)$, il suffirait de demander qu'il soit stabilisé par un groupe supplémentaire de symétries qui, loin de respecter les décompositions spectrales, engendrent tout le spectre de $G(F_x)$ à partir de son spectre de type torique. Nous proposons de prendre pour telles symétries supplémentaires les opérateurs de multiplication par les fonctions

$$\mathbb{1}^G_{\chi, c_x} : \overline{G}(F_x) \to U(1) \,, \quad \chi \in C \,, \quad c_x \in E_{\chi,x} \,.$$

Cela équivaut à poser la définition suivante :

En n'importe quelle place ultramétrique x de F, on dira qu'une fonction

$$f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

est une ρ-fonction si et seulement si :

$$\begin{cases} \bullet \text{ elle est invariante à gauche et à droite par un sous-groupe ouvert compact de } G(F_x), \\ \bullet \text{ elle est supportée par une partie compacte de } \overline{G}(F_x), \\ \bullet \text{ pour tous éléments } g, g' \in G(F_x) \text{ et toute fonction localement constante } \mathbb{1}_x : \overline{G}(F_x) \to \mathbb{C}, \text{ la fonction} \\ \qquad T(F_x) \ni t \mapsto |\det_B(t)|_x^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{1/2} \cdot \int_{N_B(F_x)} du \cdot f_x(g \cdot t \cdot u \cdot g') \cdot \mathbb{1}_x(t \cdot u) \\ \text{est une } \rho_T\text{-fonction sur } T(F_x). \end{cases}$$

Bien sûr, cette définition ne peut être bonne que si elle vérifie toutes les propriétés attendues d'un espace de ρ-fonctions, telles qu'elles ont été énoncées dans la partie I.

La vérification de toutes ces propriétés se ramène à deux :

La première est que le sous-espace des ρ-fonctions de type torique est bien celui qui était déterminé a priori. Cela signifie qu'une fonction

$$f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

qui est invariante à gauche et à droite par un sous-groupe ouvert de $G(F_x)$, supportée par une partie compacte de $\overline{G}(F_x)$ et de type torique, est une ρ_T-fonction au sens ci-dessus si et seulement si, pour tous $g, g' \in G(F_x)$, le terme constant

$$t \mapsto |\det_B(t)|_x^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{1/2} \cdot \int_{N_B(F_x)} du \cdot f_x(g \cdot t \cdot u \cdot g')$$

est une ρ_T-fonction sur $T(F_x)$. Cette condition est évidemment nécessaire. En revanche, sa suffisance exprime une propriété très forte de $\rho_T : \widehat{T} \to \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$. Nous conjecturons que c'est ici qu'intervient l'hypothèse que l'homomorphisme Γ_F-équivariant

$$\rho_T : \widehat{T} \to \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$$

provient d'une représentation du groupe dual

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \widehat{\mathrm{GL}}_r = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})\,.$$

La seconde propriété à vérifier est que l'espace des ρ-fonctions au sens ci-dessus est stable par les opérateurs de convolution

$$f_x \mapsto f_x *_\rho \widehat{\mathbb{1}^G_{\chi,c_x}}\,, \quad \chi \in C\,, \quad c_x \in E_{\chi,x}\,.$$

Si la première propriété est acquise, elle implique en effet que l'espace des ρ-fonctions sur $G(F_x)$ est respecté par la ρ-transformation de Fourier $f_x \mapsto \widehat{f}_x$.

La vérification de cette seconde propriété devrait résulter du fait que la relation

$$f_2 = f_1 *_\rho \widehat{\mathbb{1}^G_{\chi,c_x}}$$

entraîne, si $\chi \in C$, les relations

$$f_2^{u,v} = f_1^{u,v} *_{\rho_T} \widehat{\mathbb{1}_{\chi,c_x}}\,, \quad \forall\, u \in N_B(F_x)\,, \quad \forall\, v \in N_B^{\mathrm{op}}(F_x)\,.$$

En les places x archimédiennes, on appelle ρ-fonctions sur $G(F_x)$ les fonctions

$$f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

de classe C^∞, à décroissance rapide sur les complémentaires des parties compactes de $\overline{G}(F_x)$ et telles que, pour tous $g, g' \in G(F_x)$, le terme constant

$$t \mapsto |\det_B(t)|_x^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{1/2} \cdot \int_{N_B(F_x)} du \cdot f_x(g \cdot t \cdot u \cdot g')$$

soit une ρ_T-fonction sur $T(F_x)$.

On devrait pouvoir montrer que l'espace des ρ-fonctions sur $G(F_x)$ en ce sens est stable par les opérateurs de multiplication par les fonctions unitaires

$$\mathbb{1}^G_{\chi,c_x}\,, \quad \chi \in C\,, \quad c_x \in E_{\chi,c_x}\,,$$

et donc aussi par les ρ-transformés de Fourier de ces opérateurs.

Toutes les propriétés locales dont on a besoin étant supposées vérifiées, on dispose maintenant de l'espace des ρ-fonctions

$$f : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,.$$

Il est stable par les translations à gauche et à droite par les éléments de $G(\mathbb{A})$, par la ρ-transformation de Fourier $f \mapsto \widehat{f}$ et par les opérateurs de multiplication par les fonctions unitaires

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{1}^G_{\chi,c} = \displaystyle\prod_{x\in|F|} \mathbb{1}^G_{\chi,c_x} : G(\mathbb{A}) \subset \overline{G}(\mathbb{A}) & \longrightarrow & U(1) \\ g & \longmapsto & \psi(\mathrm{Tr}\,(c \cdot \chi_F(g))) \end{array}$$

associées aux caractères $\chi \in C$ et aux éléments $c = (c_x)_{x\in|F|} \in \mathbb{A}_{E_\chi}$.

Il reste à proposer comment construire une fonctionnelle de Poisson sur l'espace des ρ-fonctions sur $G(\mathbb{A})$

$$f \mapsto \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} f(\gamma) \text{”}$$

qui vérifie la formule de Poisson

$$\text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} f(\gamma) \text{”} = \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} \widehat{f}(\gamma) \text{”}, \quad \forall f .$$

Pour ce problème global, nous proposons d'adopter une démarche analogue à celle que nous venons d'exposer pour le problème local de définition des espaces de ρ-fonctions en les places ultramétriques : caractériser l'objet recherché en fixant son image par l'opérateur de passage aux termes constants et en demandant qu'il possède une symétrie supplémentaire prenant la forme d'une invariance par certains opérateurs unitaires de multiplication.

On rappelle que, dans le cas du tore T, on a montré que la fonctionnelle de Poisson sur les ρ-fonctions sur $T(\mathbb{A})$

$$\varphi \mapsto \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{T}(F)} \varphi(\gamma) \text{”}$$

est invariante par les opérateurs de multiplication par les fonctions

$$\mathbb{1}_{\chi,c} = \prod_{x \in |F|} \mathbb{1}_{\chi,c_x} : T(\mathbb{A}) \hookrightarrow \overline{T}(\mathbb{A}) \to U(1)$$

indexées par les caractères $\chi \in X_{\overline{T}}$ et par les éléments rationnels $c = (c_x)_{x \in |F|} \in E_\chi \subset \mathbb{A}_{E_\chi} = \prod_{x \in |F|} E_{\chi,c}$.

Dans le cas de G, les analogues de ces fonctions sur T sont les fonctions

$$\mathbb{1}^G_{\chi,c} = \prod_{x \in |F|} \mathbb{1}^G_{\chi,c_x} : G(\mathbb{A}) \hookrightarrow \overline{G}(\mathbb{A}) \to U(1)$$

indexées par les caractères $\chi \in X_{\overline{T}^+}$ et les éléments rationnels $c = (c_x)_{x \in |F|} \in E_\chi \subset \mathbb{A}_{E_\chi}$. Ces fonctions valent 1 en les points $\gamma \in \overline{G}(F)$ puisque c est rationnel.

Il est donc raisonnable de conjecturer qu'il existe sur l'espace des ρ-fonctions sur $G(\mathbb{A})$ une unique forme linéaire

$$f \mapsto \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} f(\gamma) \text{”}$$

qui vérifie les trois propriétés suivantes :

(1′) Elle est invariante par translation à gauche et à droite par les éléments de $G(F)$.

(2′) Son terme constant à gauche [resp. à droite].

$$f \mapsto \int_{N_B(\mathbb{A})/N_B(F)} du \cdot \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} f(u \cdot \gamma) \text{”}$$

$$\left[\text{resp.} \quad f \mapsto \int_{N_B(\mathbb{A})/N_B(F)} du \cdot \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} f(\gamma \cdot u^{-1}) \text{”} \ \right]$$

s'identifie à la forme linéaire invariante à gauche [resp. à droite] par $N_B(\mathbb{A})$ et invariante à droite [resp. à gauche] par $G(F)$

$$f \mapsto \text{``} \sum_{\gamma \in (N_B \backslash \overline{G})(F)} \int_{N_B(\mathbb{A})} du \cdot f(u \cdot \gamma) \text{''}$$

$$[\text{resp.} \quad f \mapsto \text{``} \sum_{\gamma \in (\overline{G}/N_B)(F)} \int_{N_B(\mathbb{A})} du \cdot f(\gamma \cdot u^{-1}) \text{''} \quad]$$

induite par la fonctionnelle de Poisson sur $T(\mathbb{A})$

$$\varphi \mapsto \text{``} \sum_{\gamma \in \overline{T}(F)} \varphi(\gamma) \text{''} .$$

$(3')$ Elle est invariante par les opérateurs de multiplication par les fonctions unitaires

$$\mathbb{1}^G_{\chi,c} : G(\mathbb{A}) \hookrightarrow \overline{G}(\mathbb{A}) \to U(1)$$

indexés par les caractères $\chi \in C$ et par les éléments rationnels $c \in E_\chi \subset \mathbb{A}_{E_\chi}$.

La propriété d'unicité dans cette conjecture devrait résulter de ce que, pour tout $u \in N_B(\mathbb{A})$, la famille d'équations

$$\mathbb{1}^G_{\chi,c}(\gamma \cdot u \cdot \gamma') = 1 , \quad \forall \chi \in C , \quad \forall c \in E_\chi , \quad \forall \gamma, \gamma' \in G(F)$$

équivaut à la condition

$$u \in N_B(F) .$$

La propriété d'existence devrait résulter de ce que la fonctionnelle de Poisson sur le tore $T(\mathbb{A})$ est invariante par multiplication par les fonctions $\mathbb{1}_{\chi,c}$, $\chi \in C$, $c \in E_\chi$.

Puis on conjecture que, pour tout $\chi \in C$ et tout $c \in E_\chi$, la forme linéaire uniquement déterminée

$$f \mapsto \text{``} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} f(\gamma) \text{''}$$

est invariante par l'opérateur de convolution

$$f \mapsto f *_\rho \widehat{\mathbb{1}^G_{\chi,c}} .$$

Cela devrait résulter de ce que, si $f_1, f_2 : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ sont deux ρ-fonctions globales reliées par l'équation

$$f_2 = f_1 *_\rho \widehat{\mathbb{1}^G_{\chi,c}} , \quad \text{soit} \quad \widehat{f_2} = \widehat{f_1} \cdot \mathbb{1}^G_{\chi,c} ,$$

on a pour tous $u \in N_B(\mathbb{A}) \supset N_B(F)$ et $v \in N_B^{\mathrm{op}}(\mathbb{A}) \supset N_B^{\mathrm{op}}(F)$

$$f_2^{u,v} = f_1^{u,v} *_{\rho_T} \widehat{\mathbb{1}_{\chi,c}} ,$$

et de ce que l'opérateur de convolution sur $T(\mathbb{A})$

$$\varphi \mapsto \varphi *_{\rho_T} \widehat{\mathbb{1}_{\chi,c}}$$

respecte la fonctionnelle de Poisson

$$\varphi \mapsto \text{``} \sum_{\gamma \in \overline{T}(F)} \varphi(\gamma) \text{''} .$$

Si ces deux conjectures sont vérifiées, on voit que la ρ-transformée de Fourier de la forme linéaire

$$f \mapsto \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} f(\gamma) \text{ ”}$$

possède les propriétés (1′) et (3′).

Elle possède également la propriété (2′) puisque la forme linéaire $\varphi \mapsto$ “ $\sum_{\gamma \in \overline{T}(F)} \varphi(\gamma)$ ” sur $T(\mathbb{A})$ vérifie la formule de Poisson.

Comme la forme linéaire

$$f \mapsto \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} f(\gamma) \text{ ”}$$

est caractérisée par les propriétés (1′), (2′) et (3′), elle est sa propre ρ-transformée de Fourier. Autrement dit, elle vérifie la formule de Poisson.

On conjecture enfin que la fonctionnelle de Poisson

$$\text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} f(\gamma) \text{ ”}$$

se confond avec la fonctionnelle d'évaluation

$$\sum_{\gamma \in G(F)} f(\gamma)$$

en les ρ-fonctions globales $f : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ qui se factorisent en au moins une place ultramétrique x de F comme produit

$$f = f_x \otimes f^x$$

d'une fonction localement constante à support compact dans $G(F_x)$

$$f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}\,.$$

Cela devrait résulter de la propriété analogue déjà connue de la fonctionnelle de Poisson

$$\varphi \mapsto \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{T}(F)} \varphi(\gamma) \text{ ”}$$

sur le tore $T(\mathbb{A})$.

Les différentes conjectures locales et globales de la partie IV que nous venons d'exposer sont en cours de démonstration plus ou moins avancée dans le cas de GL_2 et des représentations de puissances symétriques $\rho = \mathrm{sym}^k$, $k \geq 2$, de $\widehat{\mathrm{GL}_2} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, en supposant la propriété de stabilité du tore T par ρ-convolution complètement vérifiée.

Nous pensons pour notre part que ces conjectures ne seront pas très difficiles à démontrer en général si la propriété de stabilité du tore T par ρ-convolution est correcte.

Le point essentiel sur lequel tout repose est donc l'existence (et unicité) d'un opérateur de ρ-transformation de Fourier sur $G(F_x)$ en chaque place x de F

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x$$

qui possède les trois propriétés :

$$\begin{cases} \text{(1) Il est compatible avec l'opérateur de } \rho\text{-transformation de Fourier sur } T(F_x). \\ \\ \text{(2) Il est unitaire.} \\ \\ \text{(3) L'opérateur de } \rho\text{-convolution sur } G(F_x) \text{ associé est algébrique et respecte le tore maximal } T \text{ de } G. \end{cases}$$

Notre objectif prioritaire est par conséquent de vérifier complètement si cet énoncé est correct ou bien non, d'abord dans le cas de GL_2 et des représentations de transfert $\rho = \mathrm{sym}^k$, $k \geq 2$.

Si cet énoncé est correct, l'auteur a peu de doute que l'esquisse de démonstration présentée ici pourra être transformée en vraie démonstration.

Si en revanche il est incorrect, toute la stratégie échoue.

En attendant de vérifier ce qu'il en est, c'est un plaisir pour l'auteur de remercier Cécile Gourgues qui a réalisé avec sa disponibilité et son efficacité coutumières toute la frappe de ces notes de cours.

Sommaire

Exposé I.
Propriétés attendues des transformations de Fourier non linéaires
(Laurent Lafforgue, IHES, 19 juin 2014)

1 Situation

On se place sur un corps global F.

On note $|F|$ l'ensemble des places de F et F_x la complétion de F en toute place $x \in |F|$.

En toute place ultramétrique x, on note O_x l'anneau des entiers de F_x, ϖ_x une uniformisante, q_x le cardinal fini du corps résiduel $\kappa_x = O_x/\varpi_x \cdot O_x$ et

$$v_x : F_x^\times \to \mathbb{Z}$$

la valuation associée à x.

Notant

$$\mathbb{A} = \prod_{x \in |F|} F_x$$

l'anneau topologique des adèles de F, on choisit une fois pour toutes un caractère additif continu unitaire non trivial

$$\psi = \prod_{x \in |F|} \psi_x : \mathbb{A}/F \to \mathbb{C}^\times .$$

En toute place $x \in |F|$, le caractère additif continu unitaire non trivial

$$\psi_x : F_x \to \mathbb{C}^\times$$

définit sur F_x une unique mesure additive da_x dite la mesure "auto-duale" relative à ψ_x. Le groupe multiplicatif $F_x^\times$ agit sur les mesures additives de F_x, et en particulier sur da_x, par un caractère continu

$$|\bullet|_x : F_x^\times \to \mathbb{R}_+^\times .$$

Si x est une place ultramétrique, ce caractère $|\bullet|_x$ n'est autre que la norme ultramétrique

$$|\bullet|_x = q_x^{-v_x(\bullet)} .$$

Si $F_x \cong \mathbb{R}$, $|\bullet|_x$ n'est autre que la valeur absolue usuelle des nombres réels.

Enfin, si $F_x \cong \mathbb{R}$, $|\bullet|_x$ est le carré du module usuel des nombres complexes.

On considère d'autre part un groupe réductif connexe et quasi-déployé G sur F, muni d'une paire de Borel (T, B) définie sur F.

On appelle "standard" les sous-groupes paraboliques [resp. de Levy] de G qui contiennent B [resp. T]. Il existe une unique injection

$$P \mapsto M_P$$

de l'ensemble fini des sous-groupes paraboliques standard dans celui des sous-groupes de Levy standard, telle que chaque P soit le produit

$$P = M_P \cdot N_P = N_P \cdot M_P$$

de son sous-groupe de Levy M_P et de son radical unipotent $N_P \subset N_B$.

Pour tout tel P, on notera

$$\delta_P : P \to P/N_P \cong M_P \to \mathbb{G}_m$$

le caractère modulaire par lequel P ou M_P agissent par la conjugaison $(m,u) \mapsto m \cdot u \cdot m^{-1}$ sur la puissance extérieur maximale de Lie (N_P).

On dispose du dual $\widehat{G}$ de G. C'est un groupe réductif sur $\mathbb{C}$, muni d'une paire de Borel $(\widehat{T}, \widehat{B})$ et d'une action continue du groupe de Galois Γ_F de F. Son tore maximal $\widehat{T}$ s'identifie au dual du tore maximal T de G, ce qui signifie que le réseau $X_{\widehat{T}}$ des caractères $\widehat{T}$ s'identifie à celui $X_T^\vee$ des cocaractères de T ou, ce qui revient au même, que $X_{\widehat{T}}^\vee = X_T$.

On suppose enfin que G est muni d'un caractère défini sur F

$$\det_G : G \to \mathbb{G}_m$$

ou, ce qui revient au même, d'un cocaractère central

$$\widehat{\det_G} : \mathbb{C}^\times \to Z_{\widehat{G}} \hookrightarrow \widehat{T} \hookrightarrow \widehat{G}$$

fixé par l'action de Γ_F.

Définition I.1. –

On appellera "représentation de transfert" de G tout morphisme algébrique continu

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \widehat{\mathrm{GL}}_r = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

tel que :

(1) *Le composé de*

$$\widehat{\det_G} : \mathbb{C}^\times \to \widehat{G}$$

et de ρ n'est autre que

$$\lambda \mapsto \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}.$$

(2) *Le morphisme ρ envoie $\widehat{T}$ dans le tore maximal $\widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$ de $\widehat{\mathrm{GL}}_r$ et induit donc un morphisme de tores*

$$\rho_T = (\rho_T^1, \ldots, \rho_T^r) : \widehat{T} \to \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r.$$

(3) *Le noyau de $\rho_T : \widehat{T} \to \widehat{T}_r$ est trivial.*

(4) *Considérant le sous-groupe de Borel B de G, il existe un (unique) caractère de G défini sur F*

$$\det_B : G \to \mathbb{G}_m$$

tel que

$$\langle \det_B, \rho_T^i \rangle = \langle \delta_B, \rho_T^i \rangle$$

pour tout poids $\rho_T^i \in X_{\widehat{T}} = X_T^\vee$ de $\rho_T : \widehat{T} \to \widehat{T}_r$ qui est le poids dominant d'un facteur irréductible de ρ.

Remarques :

(i) L'unicité du caractère $\det_B$ de (4) résulte de (3).
Son existence est assurée si ρ induit un isomorphisme

$$Z_{\widehat{G}}^F \xrightarrow{\sim} \widehat{Z}_\rho$$

de

$$Z_{\widehat{G}}^F = \big\{z \in Z_{\widehat{G}} \mid \sigma(z) = z\,, \quad \forall\, \sigma \in \Gamma_F\big\}$$

vers le centre $\widehat{Z}_\rho$ du sous-groupe des automorphismes de ρ dans $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$.

(ii) Pour tout sous-groupe de Levy standard M de G, son dual $\widehat{M}$ s'identifie à un sous-groupe de Levy standard de $\widehat{G}$ fixé par l'action de Γ_F, et toute représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \widehat{\mathrm{GL}}_r$$

induit une représentation

$$\rho_M : \widehat{M} \rtimes \Gamma_F \to \widehat{\mathrm{GL}}_r$$

qui n'est pas nécessairement une représentation de transfert au sens de la définition mais qui s'écrit comme une somme directe de telles représentations.

Exemple :

Pour n'importe quel entier $k \geq 1$, considérons la représentation de transfert définie par la représentation irréductible sym^k de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

Cela signifie que

$$\widehat{G} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mu_k\,,$$

où $\mu_k = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid z^k = 1\}$, est muni de la représentation

$$\begin{array}{rcl} \rho : \widehat{G} & \to & \mathrm{GL}_{k+1}(\mathbb{C}) \\ g & \mapsto & \mathrm{sym}^k(g)\,. \end{array}$$

Le groupe réductif complexe $\widehat{G}$ admet pour tore maximal

$$\widehat{T} = T_2(\mathbb{C})/\mu_k = (\mathbb{C}^\times)^2/\mu_k$$

avec donc

$$X_{\widehat{T}} = \big\{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid n_1 + n_2 \in k\,\mathbb{Z}\big\}$$

et

$$X_{\widehat{T}}^\vee = \left\{(r_1, r_2) \in \mathbb{Q}^2 \mid r_1, r_2 \in \frac{1}{k}\,\mathbb{Z} \ \wedge \ r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Les poids de la représentation irréductible ρ sont les

$$(i, k-i) \in X_{\widehat{T}}\,, \qquad 0 \leq i \leq k\,.$$

Le groupe réductif $\widehat{G}$ sur $\mathbb{C}$ est le dual d'un unique groupe réductif G déployé sur F.

L'homomorphisme de passage au quotient par $\mu_k \subset Z_{\widehat{\mathrm{GL}}_2}$

$$\widehat{\mathrm{GL}}_2 = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \twoheadrightarrow \widehat{G}$$

est dual d'un homomorphisme
$$G \to \mathrm{GL}_2\,.$$
Si T est le tore dual de $\widehat{T}$ sur F, identifié au tore maximal de G, le morphisme induit
$$T \to T_2 = \mathbb{G}_m^2$$
identifie $X_T^\vee = X_{\widehat{T}}$ à
$$\left\{(n_1,n_2) \in \mathbb{Z}^2 = X_{T_2}^\vee \mid n_1+n_2 \in k\,\mathbb{Z}\right\}\,.$$
Cela signifie que G s'inscrit dans le carré cartésien
$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[drr, phantom, "\square"] & & \mathrm{GL}_2 \arrow[d, "\det"] \\ \mathbb{G}_m \arrow[rr, "\lambda \mapsto \lambda^k"'] & & \mathbb{G}_m \end{tikzcd}$$
et ses points pourront être notés commes des paires
$$(g, \det(g)^{1/k}) \qquad \text{avec} \quad g \in \mathrm{GL}_2\,.$$
En particulier, T s'inscrit dans le carré cartésien
$$\begin{tikzcd} T \arrow[r] \arrow[d] & T_2 = \mathbb{G}_m^2 \arrow[d, "{\substack{(\lambda_1,\lambda_2) \\ \downarrow \\ \lambda_1\lambda_2}}"] \\ \mathbb{G}_m \arrow[r, "\lambda \mapsto \lambda^k"'] & \mathbb{G}_m \end{tikzcd}$$
et ses points pourront être notés comme des triplets
$$(\lambda_1, \lambda_2, (\lambda_1\,\lambda_2)^{1/k}) \qquad \text{avec} \quad \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{G}_m\,.$$

$\square$

2 Forme et propriétés générales attendues

Commençons par introduire les caractères suivants :

Définition I.2. –

Étant donné un groupe réductif G quasi-déployé sur F muni d'une représentation de transfert
$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})\,,$$
on définit les caractères algébriques
$$\det_\rho : G \to \mathbb{G}_m$$
et, pour tout sous-groupe de Levy standard M de G tel que $\rho_M : \widehat{M} \rtimes \Gamma_F \to \widehat{\mathrm{GL}}_r$ soit une représentation de transfert au sens de la définition I.1*,*
$$\det_{\rho_M} : M \to \mathbb{G}_m$$
par les formules
$$\det_\rho = \det_G \cdot \det_B$$
$$\det_{\rho_M} = \det_G \cdot \det_{B\cap M}\,.$$

Remarque :

Si $M = T$, on a simplement
$$\det_{\rho_T} = \det_G : T \to \mathbb{G}_m\,.$$

Exemples :

(i) Si $G = \mathrm{GL}_r$ et ρ est la représentation standard de $\widehat{\mathrm{GL}}_r = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, on a

$$\det_G = \det\,, \quad \det_B = (\det)^{r-1}\,, \quad \det_\rho = (\det)^r\,.$$

(ii) Si $\widehat{G} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mu_k$ et $\rho = \mathrm{sym}^k$ pour un entier $k \geq 1$, on a

$$\det_G(g, \det(g)^{1/k}) = \det(g)^{1/k}\,,$$

$$\det_B(g, \det(g)^{1/k}) = \det(g)$$

d'où

$$\det_B = (\det_G)^k\,,$$
$$\det_\rho = (\det_G)^{k+1}\,.$$

□

En n'importe quelle place $x \in |F|$, on s'intéresse aux opérateurs linéaires

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x$$

de l'espace des fonctions continues à support compact sur $G(F_x)$ vers l'espace des fonctions continues sur $G(F_x)$, qui sont compatibles avec les translations à droite $f_x \mapsto f_x^g = f_x(\bullet\, g)$ et à gauche $f_x \mapsto {}^g f_x = f_x(g\, \bullet)$ au sens du lemme suivant :

Lemme I.3. –

En n'importe quelle place $x \in |F|$, un opérateur linéaire

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x$$

vérifie la double propriété

$$\begin{cases} \widehat{f_x^g} &= |\deg_\rho(g)|_x^{-1} \cdot {}^{g^{-1}}\widehat{f}_x \\ \widehat{{}^g f_x} &= |\det_\rho(g)|_x^{-1} \cdot \widehat{f}_x^{\,g^{-1}} \end{cases}$$

pour toute fonction continue à support compact $f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$ et tout élément $g \in G(F_x)$, si et seulement si il s'écrit sous la forme

$$\widehat{f}_x(g') = \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f_x(g) \cdot k_x(gg')$$

où

- *$d_\rho\, g$ est une mesure sur $G(F_x)$ que les translations à gauche ou à droite transforment par le caractère*

$$g \mapsto |\det_\rho(g)|_x\,,$$

- *$g \mapsto k_x(g)$ est une fonction sur $G(F_x)$ qui est localement intégrable et invariante par conjugaison.*

□

Pour tout sous-groupe parabolique standard P de G, et pour toute place $x \in |F|$, on munit le radical unipotent $N_P(F_x)$ de la mesure invariante induite par la mesure autoduale da_x de F_x.

Cela permet d'associer à toute fonction continue à support compact

$$f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

son “terme constant” le long de P

$$\begin{array}{rcl} f_{x,N_P} : M_P(F_x) & \to & \mathbb{C} \\ m & \mapsto & |\delta_P(m)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \displaystyle\int_{N_P(F_x)} du \cdot f_x(u \cdot t) = |\delta_P(m)|_x^{\frac{1}{2}} \cdot \displaystyle\int_{N_P(F_x)} du \cdot f_x(t \cdot u) \end{array}$$

qui est une fonction continue à support compact sur $M_P(F_x)$.

Voici une formulation générale du problème de définition de transformations de Fourier “non linéaires” sur les groupes réductifs :

Problème I.4. –

On voudrait associer à tout groupe réductif quasi-déployé G sur F, à toute représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

et à toute place $x \in |F|$, un opérateur linéaire de la forme du lemme I.3

$$f_x \mapsto \widehat{f_x}(\bullet) = \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f_x(g) \cdot k_x^\rho(g\,\bullet)\,,$$

appelé “ρ-transformation de Fourier sur $G(F_x)$”, de telle façon que soient vérifiées au moins les deux propriétés suivantes :

(1) *Pour toute fonction continue à support compact*

$$f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

et tout sous-groupe parabolique standard P de G égal à B ou, plus généralement, tel que ρ_{M_P} : $\widehat{M_P} \rtimes \Gamma_F \to \widehat{\mathrm{GL}_r}$ est une représentation de transfert, le produit

$$|\det_B(\bullet)|_x^{1/2} \cdot |\det_{B\cap M_P}(\bullet)|_x^{-1/2} \cdot f_{x,N_P} : M_P(F_x) \to \mathbb{C}$$

admet pour ρ_{M_P}-transformation de Fourier sur $M_P(F_x)$ le produit

$$|\det_B(\bullet)|_x^{1/2} \cdot |\det_{B\cap M_P}(\bullet)|_x^{-1/2} \cdot (\widehat{f_x})_{N_P} : M_P(F_x) \to \mathbb{C}\,.$$

(2) *L'opérateur de ρ-transformation de Fourier sur $G(F_x)$*

$$f_x \mapsto \widehat{f_x}$$

est unitaire, c'est-à-dire préserve le produit hermitien

$$(f_1, f_2) \mapsto \langle f_1, f_2\rangle = \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f_1(g) \cdot \overline{f_2(g)}\,.$$

Remarque :

La propriété (2) équivaut à demander que les deux opérateurs

$$f_x \mapsto \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f_x(g) \cdot k_x^\rho(g\,\bullet)$$

et

$$f_x \mapsto \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f_x(g) \cdot \overline{k_x^\rho(g\,\bullet)}$$

sont inverses l'un de l'autre.

Elle fait de la ρ-transformation de Fourier sur $G(F_x)$ un automorphisme de l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure $d_\rho\, g$.

Si l'on munit G du cocaractère central $\mathbb{G}_m \to G$ qui correspond au caractère composé $\widehat{T} \hookrightarrow \widehat{G} \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) \xrightarrow{\det} \mathbb{C}^\times$ et que l'on suppose, comme on fera toujours,

$$\overline{k_x^\rho(g)} = k_x^\rho(-g)\,, \qquad \forall\, g \in G(F_x)\,,$$

la propriété (2) est encore équivalente à

$$\hat{\hat{f}}_x(g) = f_x(-g)\,, \qquad \forall\, g \in G(F_x)\,, \qquad \forall\, f_x\,.$$

□

3 Décomposition spectrale locale

Considérons une place ultramétrique x de F.

Munissant $G(F_x)$ d'une mesure invariante dg, on note $\mathcal{H}_x^G$ l'algèbre de convolution des fonctions localement constantes à support compact $h_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$. Elle est la réunion filtrante des sous-algèbres unitaires $\mathcal{H}_{x,K}^G$ des fonctions invariantes à droite et à gauche par les sous-groupes ouverts compacts $K \subset G(F_x)$.

On note $\{\pi\}_x^G$ l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations lisses admissibles irréductibles de $\mathcal{H}_x^G$. Il est la réunion filtrante des sous-ensembles $\{\pi\}_{x,K}^G$ de représentations π qui admettent des vecteurs non nuls invariants par les $K \subset G(F_x)$. Chaque $\{\pi\}_{x,K}^G$ s'identifie à l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations irréductibles de dimension finie de $\mathcal{H}_{x,K}^G$.

On dit qu'une fonction

$$\mathcal{H}_{x,K}^G \to \mathbb{C}$$

est polynomiale si elle appartient à l'algèbre $A_{x,K}^G$ engendrée par les fonctions

$$\{\pi\}_{x,K}^G \ni \pi \mapsto \mathrm{Tr}_\pi(h_x)$$

associées aux éléments $h_x \in \mathcal{H}_{x,K}^G$. On sait que chaque $A_{x,K}^G$ est un produit fini d'algèbres intègres et de type fini sur $\mathbb{C}$, et que l'ensemble correspondant $\{\pi\}_{x,K}^G$ s'identifie à un ouvert de Zariski de la variété algébrique complexe $\mathrm{Spec}\,(A_{x,K}^G)$. Enfin, si $K \subset K'$ sont deux sous-groupes ouverts compacts emboîtés de $G(F_x)$, l'inclusion

$$\{\pi\}_{x,K'}^G \hookrightarrow \{\pi\}_{x,K}^G$$

est une immersion ouverte et fermée entre variétés algébriques.

Pour tout $K \subset G(F_x)$, on note $\mathrm{Im}\,\{\pi\}_{x,K}^G$ la sous-variété algébrique réelle de $\{\pi\}_{x,K}^G$ qui classifie les représentations π qui sont unitaires et tempérées. Elle est munie d'une unique mesure $d\pi$, appelée mesure de Plancherel, telle que, pour toute $h_x \in \mathcal{H}_{x,K}^G$, on ait

$$h_x(1) = \int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}_{x,K}^G} d\pi \cdot \mathrm{Tr}_\pi(h_x)\,.$$

Pour toute $\pi \in \{\pi\}_x^G$, on note $\pi^\vee$ la représentation "contragrédiente" de π constituée des formes linéaires sur π qui sont invariantes par un sous-groupe ouvert compact de $G(F_x)$. On appelle "coefficients matriciels" de π les fonctions

$$G(F_x) \to \mathbb{C}$$

de la forme

$$g \mapsto \langle v^\vee, g \cdot v \rangle = \langle g^{-1} \cdot v^\vee, v \rangle$$

avec $v \in \pi$, $v^\vee \in \pi^\vee$, ou plus généralement les combinaisons linéaires (finies) de telles fonctions.

On connaît le théorème de décomposition spectrale des fonctions localement constantes à support compact sur $G(F_x)$:

Théorème I.5. –

Pour tout $K \subset G(F_x)$, toute fonction $h_x \in \mathcal{H}_{x,K}^G$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$h_x(g) = \int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}_{x,K}^G} d\pi \cdot h_{x,\pi}(g)\,, \qquad \forall\, g \in G(F_x)\,,$$

où :

- *pour tout $g \in G(F_x)$,*

$$\pi \mapsto h_{x,\pi}(g)$$

  est une fonction polynomiale sur $\{\pi\}_{x,K}^G$,

- *pour toute $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^G$, la fonction*

$$G(F_x) \ni g \mapsto h_{x,\pi}(g)$$

  est un coefficient matriciel de π invariant à gauche et à droite par K. $\square$

On dit que G est non ramifié en la place ultramétrique x si l'action sur $\widehat{G}$ du groupe de Galois local Γ_{F_x} est non ramifiée. On sait que G est non ramifié en presque toute place.

Si G est non ramifié en x, l'élément de Frobenius σ_x agit sur $\widehat{G}$ et on peut noter $\widehat{G}_x$ la fibre du produit semi-direct

$$\widehat{G} \rtimes \sigma_x^{\mathbb{Z}}$$

au-dessus de σ_x, munie de sa structure de variété algébrique sur $\mathbb{C}$ et de l'action par conjugaison de $\widehat{G}$.

De plus, G admet une structure de schéma en groupes réductifs sur $\mathrm{Spec}\,(O_x)$ et $G(O_x)$ est un sous-groupe ouvert compact maximal de $G(F_x)$. Notant $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G = \mathcal{H}_{x,G(O_x)}^G$ et $A_{x,\emptyset}^G = A_{x,G(O_x)}^G$, on a le théorème de Satake :

Théorème I.6. –

Si G est non ramifié en x, on a un isomorphisme canonique d'algèbres

$$S_x^G : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}\,[\widehat{G}_x]^{\widehat{G}}\,.$$

En particulier, $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ est commutative et s'identifie à $A_{x,\emptyset}^G$.

Remarque :

Si G est déployé sur F_x, c'est-à-dire si Γ_{F_x} agit trivialement sur $\widehat{G}$, l'algèbre $\mathbb{C}\,[\widehat{G}_x]^{\widehat{G}}$ est l'algèbre $\mathbb{C}\,[\widehat{G}]^{\widehat{G}}$ des polynômes invariants sur $\widehat{G}$. Elle s'identifie à l'algèbre $\mathbb{C}\,[\widehat{T}]^{W_G}$ des polynômes sur $\widehat{T}$ invariants par l'action du groupe de Weyl W_G.

C'est en particulier le cas si $G = \mathrm{GL}_r$. On note alors $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^{\mathrm{GL}_r} = \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r$ qui est isomorphe à $\mathbb{C}\,[\widehat{T}_r]^{\mathfrak{S}_r}$. $\square$

On dit qu'une représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) = \widehat{\mathrm{GL}}_r$$

est non ramifiée en la place ultramétrique x si G est non ramifié en x et, de plus, l'action de Γ_{F_x} sur l'espace de ρ est non ramifiée. On sait que ρ est non ramifiée en presque toute place.

Si ρ est non ramifiée en x, elle définit un homomorphisme

$$\widehat{G} \rtimes \sigma_x^{\mathbb{Z}} \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) = \widehat{\mathrm{GL}}_r$$

qui induit un morphisme d'algèbres

$$\mathbb{C}\,[\widehat{\mathrm{GL}}_r]^{\widehat{\mathrm{GL}}_r} \to \mathbb{C}\,[\widehat{G}_x]^{\widehat{G}}$$

et donc, via les isomorphismes de Satake,

$$\rho_x^* : \mathcal{H}^r_{x,\emptyset} \to \mathcal{H}^G_{x,\emptyset}\,.$$

Nous pouvons maintenant compléter le problème I.4 de définition de transformations de Fourier “non linéaires” sur les groupes réductifs :

Problème I.7. –

On voudrait associer à tout groupe réductif quasi-déployé G sur F, à toute représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

et à toute place ultramétrique x de F, un sous-espace de fonctions

$$G(F_x) \to \mathbb{C}\,,$$

appelées les “ρ-fonctions”, qui satisfasse les propriétés suivantes :

(1) *Les ρ-fonctions sont de carré intégrable pour la mesure $d_\rho\, g$, et chacune est invariante à droite et à gauche par un sous-groupe ouvert compact $K \subset G(F_x)$.*

(2) *L'espace des ρ-fonctions est invariant par les translations à droite $f_x \mapsto f_x^g = f_x(\bullet\, g)$ et à gauche $f_x \mapsto {}^g f_x = f_x(g\,\bullet)$, ainsi que par la ρ-transformation de Fourier $f_x \mapsto \widehat{f_x}$ et son inverse $f_x \mapsto \widehat{f_x}(-\bullet)$. D'autre part, il est dense dans l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur $G(F_x)$.*

(3) *Pour toute $\pi \in \{\pi\}_x^G$, les intégrales*

$$\int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f_x(g) \cdot \varphi_x(g) \cdot |\mathrm{det}_G(g)|_x^{s-\frac{1}{2}} \cdot |\mathrm{det}_\rho(g)|_x^{-\frac{1}{2}}$$

associées aux ρ-fonctions

$$f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

et aux coefficients matriciels de π

$$\varphi_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

convergent absolument, pour tout $s \in \mathbb{C}$ de partie réelle $\mathrm{Re}\,(s)$ *assez grande, vers une fraction rationnelle en $Z = q_x^{-s}$.*

De plus, ces fractions rationnelles en $Z = q_x^{-s}$ engendrent un idéal fractionnaire qui admet un unique générateur

$$L_x(\rho, \pi, Z)$$

dont l'inverse $L_x(\rho,\pi,Z)^{-1}$ est un polynôme en Z et π dont la spécialisation en $Z = 0$ est égale à 1.

(4) *Une fonction invariante à droite et à gauche par un sous-groupe ouvert compact K*

$$f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

est une ρ-fonction si et seulement si ses restrictions aux fibres de l'homomorphisme

$$|\det_G(\bullet)|_x : G(F_x) \to q_x^{\mathbb{Z}}$$

sont à support compact, et qu'elle se décompose spectralement sous la forme

$$f_x(\bullet) = |\det_\rho(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}_{x,K}^G} d\pi \cdot f_{x,\pi}(\bullet) \cdot L_x\left(\rho, \pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

où :

- *pour tout $g \in G(F_x)$,*

$$\pi \mapsto f_{x,\pi}(g)$$

  est une fonction polynomiale sur $\{\pi\}_{x,K}^G$,
- *pour toute $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^G$, la fonction sur $G(F_x)$*

$$g \mapsto f_{x,\pi}(g)$$

  est un coefficient matriciel de π invariant à droite et à gauche par K.

(5) *Il existe une famille (nécessairement unique) de polynômes inversibles en π et $Z^{\pm 1}$*

$$\varepsilon_x(\rho, \pi, Z) = \varepsilon_x\left(\rho, \pi \otimes |\det_G(\bullet)|^s,\, q_x^s \cdot Z\right), \quad \forall\, s \in \mathbb{C}, \quad \forall\, \pi \in \{\pi\}_{x,K}^G,$$

telle que, pour toute ρ-fonction f_x décomposée spectralement comme ci-dessus, on ait

$$\widehat{f_x}(\bullet) = |\det_\rho(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}_{x,K}^G} d\pi \cdot f_{x,\pi}((\bullet)^{-1}) \cdot L_x\left(\rho, \pi, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \varepsilon_x\left(\rho, \pi, q_x^{-\frac{1}{2}}\right).$$

(6) *Pour tout sous-groupe parabolique standard $P = M_P \cdot N_P$ de G tel que $\rho_{M_P} : \widehat{M_P} \rtimes \Gamma_F \to \widehat{\mathrm{GL}}_r$ est une représentation de transfert, et pour toute ρ-fonction sur $G(F_x)$*

$$f_x : G(F_x) \to \mathbb{C},$$

le produit

$$|\det_B(\bullet)|_x^{1/2} \cdot |\det_{B \cap M_P}(\bullet)|_x^{-1/2} \cdot f_{x,N_P} : M_P(F_x) \to \mathbb{C}$$

est une ρ_{M_P}-fonction sur $M_P(F_x)$.
En particulier, le produit

$$|\det_B(\bullet)|_x^{1/2} \cdot f_{x,N_B} : T(F_x) \to \mathbb{C}$$

est une ρ_T-fonction sur $T(F_x)$.
Réciproquement, si une fonction invariante à droite et à gauche par $K \subset G(F_x)$

$$f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

admet une décomposition spectrale qui ne fait apparaître que des représentations $\pi \in \mathrm{Im}\,\{\pi\}_{x,K}^G$ induites normalisées de représentations $\pi_P \in \mathrm{Im}\,\{\pi\}_x^{M_P}$, alors f_x est une ρ-fonction si les

$$|\det_B(\bullet)|_x^{1/2} \cdot |\det_{B \cap M_P}(\bullet)|_x^{-1/2} \cdot ({}^g f_x^{g'})_{N_P} : M_P(F_x) \to \mathbb{C}, \qquad g, g' \in G(F_x),$$

sont des ρ_{M_P}-fonctions sur $M_P(F_x)$.

(7) *Si G et ρ sont non ramifiés en la place ultramétrique x, et $K = G(O_x)$, les fractions rationnelles*

$$L_x(\rho,\pi,Z)\,, \qquad \pi \in \{\pi\}^G_{x,\emptyset} = \{\pi\}^G_{x,G(O_x)}\,,$$

$$\varepsilon_x(\rho,\pi,Z)\,, \qquad \pi \in \{\pi\}^G_{x,\emptyset}\,,$$

sont les transformées par l'homomorphisme

$$\rho_x^* : \mathbb{C}\left[Z_1^{\pm 1},\ldots,Z_r^{\pm 1}\right]^{\mathfrak{S}_r} \cong \mathcal{H}^r_{x,\emptyset} \to \mathcal{H}^G_{x,\emptyset}$$

des fractions rationnelles

$$\prod_{1\le i\le r} \frac{1}{1 - Z_i\cdot Z} = \prod_{1\le i\le r} L_x(\chi_0, Z_i\cdot Z)$$

et

$$\prod_{1\le i\le r} \varepsilon_x(\chi_0, Z_i\cdot Z, \psi_x)$$

où χ_0 désigne le caractère trivial de $\mathbb{G}_m(F_x) = F_x^\times$.

Remarques :

(i) Si F est un corps de nombres, on voudrait aussi définir un espace analogue de ρ-fonctions en toute place archimédienne x de F. Sa connaissance devrait être équivalente à celle de facteurs

$$L_x(\rho,\pi,Z) \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_x(\rho,\pi,Z)$$

associés aux représentations admissibles irréductibles π de $G(F_x)$.

(ii) Compte tenu des propriétés (3), (4) et (5), la propriété (6) équivaut à demander que, pour toute représentation $\pi \in \{\pi\}^G_x$ qui est l'induite normalisée d'une représentation $\pi_P \in \{\pi\}^{M_P}_x$ d'un sous-groupe de Levy standard P de G tel que $\rho_{M_P} : \widehat{M}_P \rtimes \Gamma_F \to \widehat{\mathrm{GL}}_r$ est une représentation de transfert, on a

$$L_x(\rho,\pi,Z) = L_x(\rho_{M_P},\pi_P,Z)\,,$$
$$\varepsilon_x(\rho,\pi,Z) = \varepsilon_x(\rho_{M_P},\pi_P,Z)\,.$$

(iii) À partir du moment où, comme il est demandé dans la propriété (2), l'espace des ρ-fonctions est stable par translations à droite et à gauche ainsi que par l'opérateur de ρ-transformation de Fourier qui est compatible avec ces translations au sens du lemme I.3, cet espace et sa ρ-transformation de Fourier doivent admettre des expressions spectrales. Les propriétés (3), (4) et (5) ne font que préciser la forme attendue de ces expressions spectrales.

(iv) La propriété d'unitarité de l'opérateur de ρ-transformation de Fourier $f_x \mapsto \widehat{f}_x$ s'exprime par le fait que, pour toute représentation lisse admissible irréductible unitaire et tempérée $\pi \in \{\pi\}^G_x$, les fractions rationnelles

$$L_x(\rho,\pi^\vee,Z) \qquad \text{et} \qquad L_x(\rho,\pi,Z)$$

doivent être conjuguées l'une de l'autre, tandis que les polynômes inversibles

$$\varepsilon_x(\rho,\pi^\vee,Z) \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_x(\rho,\pi,Z)$$

doivent vérifier la relation

$$\varepsilon_x(\rho,\pi^\vee,Z^{-1})\cdot\overline{\varepsilon_x(\rho,\pi,Z)} = 1\,.$$

□

4 Formule de Poisson

On considère toujours les groupes réductifs G quasi-déployés sur F munis d'une représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \widehat{\mathrm{GL}}_r = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})\,.$$

Dans ce paragraphe, on suppose résolus le problème I.4 de définition d'une ρ-transformation de Fourier sur $G(F_x)$ en chaque place $x \in |F|$ ainsi que le problème I.7 de définition d'un sous-espace de ρ-fonctions sur $G(F_x)$ en toute place x.

On rappelle que G et ρ sont non ramifiés en presque toute place ultramétrique x. Si G est non ramifié en une place x, les fonctions sur $G(F_x)$ invariantes à gauche et à droite par $G(O_x)$ sont appelées "sphériques", et l'ensemble des caractères de l'algèbre commutative $\mathcal{H}^G_{x,\emptyset}$ des fonctions sphériques à support compact est noté $\{\pi\}^G_{x,\emptyset}$.

Définition I.8. –

Dans les conditions ci-dessus, on pose :

(i) *En toute place ultramétrique $x \in |F|$ où G et ρ sont non ramifiés, on appelle "ρ-fonction standard" (ou "spéciale") la fonction sphérique*

$$G(O_x)\backslash G(F_x)/G(O_x) \to \mathbb{C}$$

définie par la décomposition spectrale

$$|\det\nolimits_\rho(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}^G_{x,\emptyset}} d\pi \cdot \varphi_{x,\pi}(\bullet) \cdot L_x\left(\rho, \pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

où, pour tout $\pi \in \{\pi\}^G_{x,\emptyset}$, $\varphi_{x,\pi}(\bullet)$ désigne l'unique coefficient matriciel de π qui est sphérique et vérifie $\varphi_{x,\pi}(1) = 1$.

(ii) *On appellera ρ-fonctions sur $G(\mathbb{A})$ les combinaisons linéaires de produits*

$$f = \bigotimes_{x\in|F|} f_x : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

de ρ-fonctions locales

$$f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

égales aux "ρ-fonctions standard" de (i) *en presque toute place ultramétrique x où G et ρ sont non ramifiés.*

(iii) *On appellera ρ-transformation de Fourier des ρ-fonctions globales sur $G(\mathbb{A})$ l'opérateur linéaire qui associe à toute ρ-fonction produit*

$$f = \bigotimes_{x\in|F|} f_x$$

le produit des ρ-transformées de Fourier locales

$$\widehat{f} = \bigotimes_{x\in|F|} \widehat{f}_x\,.$$

Il admet pour inverse le produit $f \mapsto \widehat{f}(-\bullet)$ des opérateurs $f_x \mapsto \widehat{f}_x(-\bullet)$.

Remarque :

Il résulte des conditions du problème I.7 que l'on doit avoir, en presque toute place ultramétrique x de F où G et ρ sont non ramifiés, la propriété

$$\varepsilon_x(\rho, \pi, Z) = 1\,, \qquad \forall\, \pi \in \{\pi\}_{x,\emptyset}^G\,,$$

qui entraîne que la ρ-fonction standard sur $G(F_x)$ est sa propre ρ-transformée de Fourier.

Par conséquent, la ρ-transformée de Fourier d'une ρ-fonction globale sur $G(\mathbb{A})$ est encore une ρ-fonction globale.

□

Pour énoncer une formule de Poisson susceptible d'être vérifiée par la ρ-transformation de Fourier globale sur $G(\mathbb{A})$, nous avons besoin d'introduire une nouvelle notation :

Définition I.9. –

Soit x une place ultramétrique de F en laquelle le groupe réductif G et la représentation ρ sont non ramifiés.

Soit une ρ-fonction sur $G(F_x)$

$$f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

qui est sphérique et dont la décomposition spectrale s'écrit

$$f_x(\bullet) = |\det{}_\rho(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}_{x,\emptyset}^G} d\pi \cdot f_{x,\pi}(\bullet) \cdot L_x\left(\rho, \pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) .$$

Alors, pour tous entiers $N, N' \in \mathbb{N}$, on note

$$f_x^{N,N'} : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

la ρ-fonction définie par l'expression spectrale

$$f_x^{N,N'}(\bullet) = |\det{}_\rho(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}_{x,\emptyset}^G} d\pi \cdot f_{x,\pi}(\bullet) \cdot L_x\left(\rho, \pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_x^N\left(\rho, \pi, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_x^{N'}\left(\rho, \pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

où $I_x^N(\rho, \pi, Z)$ désigne le polynôme en Z et π produit de

$$L_x(\rho, \pi, Z)^{-1}$$

et du monôme de degré N en Z qui apparaît dans le développement en série formelle en Z de l'inverse

$$L_x(\rho, \pi, Z)\,.$$

Remarques :

(i) Comme le polynôme $L_x(\rho, \pi, Z)^{-1}$ divise les $I_x^N(\rho, \pi, Z)$ par construction, les fonctions $f_x^{N,N'}$, $N, N' \in \mathbb{N}$, et leurs ρ-transformées de Fourier $\widehat{f_x^{N,N'}}$ sont éléments de l'algèbre $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$. Autrement dit, elles sont supportées par des parties compactes de $G(F_x)$.

(ii) Pour toute $\pi \in \{\pi\}_{x,\emptyset}^G$, on a l'égalité

$$\sum_{N \in \mathbb{N}} I_x^N(\rho, \pi, Z) = 1$$

dans l'anneau des séries formelles en Z. De plus, les sommes

$$\sum_{N \geq N_0} \left| I_x^N \left(\rho, \pi, q_x^{-\frac{1}{2}} \right) \right|$$

convergent uniformément vers 0 si $\pi \in \operatorname{Im} \{\pi\}_{x,\emptyset}^G$ et N_0 devient arbitrairement grand.

Il en résulte que, pour tout $g \in G(F_{x_0})$, on a

$$\sum_{N,N' \in \mathbb{N}} f_x^{N,N'}(g) = f_x(g) \, .$$

□

Pour tout élément $z_0 \in \mathbb{C}$, toute fraction rationnelle à coefficients complexes $R \in \mathbb{C}(Z)$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$R = R_0 + \sum_{1 \leq i \leq k} \frac{a_i}{(Z - z_0)^i}$$

où les a_i, $1 \leq i \leq k$, sont des constantes et R_0 est une fraction rationnelle en Z dont le dénominateur ne s'annule pas en z_0. On peut appeler $R_0(z_0)$ la "valeur régularisée" de R au point z_0.

Cela permet de proposer l'énoncé suivant de formule de Poisson pour la ρ-transformation de Fourier globale sur $G(\mathbb{A})$:

Problème I.10. –

On voudrait que pour toute ρ-fonction globale

$$f : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C} \, ,$$

on ait :

(1) *Pour toute place ultramétrique $x \in |F|$ en laquelle G et ρ sont non ramifiés et f se factorise en*

$$f = f_x \otimes f^x \, ,$$

avec pour facteur une ρ-fonction sphérique sur $G(F_x)$

$$f_x : G(O_x) \backslash G(F_x) / G(O_x) \to \mathbb{C} \, ,$$

alors la série formelle

$$\sum_{N,N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} (f_x^{N,N'} \otimes f^x)(\gamma)$$

est une fraction rationnelle en Z dont la "valeur régularisée en $Z = 1$", notée $S(f)$, ne dépend pas du choix de la place x.

(2) *On a la formule de Poisson*

$$S(f) = S(\widehat{f})$$

qui s'écrit encore

$$\text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} f(\gamma) \text{”} = \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} \widehat{f}(\gamma) \text{”}$$

en notant

$$\text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} f(\gamma) \text{”} = \left(\sum_{\gamma \in G(F)} f(\gamma) \right) + \left(\sum_{\gamma \in G(F)} \widehat{f}(\gamma) \right) - S(f) \, .$$

(3) *On a*

$$\text{“}\sum_{\gamma\in\overline{G}(F)} f(\gamma)\text{”} = \sum_{\gamma\in G(F)} f(\gamma)$$

si f se factorise en au moins une place ultramétrique x sous la forme

$$f = f_x \otimes f^x\,,$$

avec pour facteur une ρ-fonction locale

$$f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

qui est supportée par une partie compacte de $G(F_x)$.

Remarque :

En toute place ultramétrique x de F, pour tout sous-groupe ouvert compact $K \subset G(F_x)$ et pour tout caractère unitaire continu

$$\omega : F_x^\times \to \mathbb{C}^\times$$

assez ramifié en fonction de K, on s'attend à ce que

$$L_x(\rho,\pi',Z) = 1$$

pour toute représentation $\pi' \in \{\pi\}_x^G$ de la forme

$$\pi' = \pi \otimes (\omega \circ \det_G(\bullet))\,, \qquad \text{avec} \quad \pi \in \{\pi\}_{x,K}^G\,.$$

Cela implique que toute ρ-fonction sur $G(F_x)$

$$f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

dont la décomposition spectrale ne fait apparaître que des représentations $\pi' = \pi \otimes (\omega \circ \det_G(\bullet))$ comme ci-dessus, est supportée par une partie compacte de $G(F_x)$, ainsi que sa transformée de Fourier $\widehat{f}_x$.

Pour toute ρ-fonction globale qui admet en facteur une telle f_x en au moins une place,

$$f = f_x \otimes f^x$$

la formule de Poisson doit donc s'écrire

$$\sum_{\gamma\in G(F)} f(\gamma) = \sum_{\gamma\in G(F)} \widehat{f}(\gamma)\,.$$

Exemple :

Si $G = \mathrm{GL}_r$ et ρ est la représentation standard de $\widehat{G} = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, la ψ_x-transformation de Fourier linéaire définie en toute place x par

$$k_x^\rho(g) = \psi_x(\mathrm{Tr}(g))$$

répond aux conditions du problème I.4.

Alors, en toute place ultramétrique x, l'espace des fonctions localement constantes à support compact sur $M_r(F_x) \supset \mathrm{GL}_r(F_x)$ répond aux conditions du problème I.7.

On a vérifié dans le cas des corps de fonctions que les conditions du problème I.10 sont également remplies, avec pour toute ρ-fonction globale sur $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ qui se prolonge donc en une fonction continue (et même localement constante à support compact) sur $M_r(\mathbb{A})$

$$f : \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \subset M_r(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,,$$

l'identité

$$\text{“}\sum_{\gamma\in\overline{G}(F)} f(\gamma)\text{”} = \sum_{\gamma\in M_r(F)} f(\gamma)\,.$$

□

On a démontré dans le cas des corps de fonctions :

Théorème I.11. –

Le transfert automorphe de Langlands de G vers GL_r via la représentation $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \widehat{\mathrm{GL}}_r$ fournit une réponse positive aux problèmes I.4, I.7 *et* I.10. □

Pour formuler une réciproque, on a besoin de la définition suivante :

Définition I.12. –

Pour tout entier $r' \geq 1$, on appelle "groupe croisé de degré r' de G" et on note $G_{r'}$ le groupe réductif quasi-déployé sur F défini par le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} G_{r'} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{GL}_{r'} \arrow[d, "\det"] \\ G \arrow[r, "\det_G"] & \mathbb{G}_m \end{tikzcd}$$

et dont le dual $\widehat{G}_{r'}$ s'identifie au conoyau du cocaractère central

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}^\times & \to & \widehat{G} \times \mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{C})\,, \\ z & \mapsto & \left(\widehat{\det}_G(z), z^{-1}\right). \end{array}$$

Si G est muni de la représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})\,,$$

on note

$$\rho_{r'} : \widehat{G}_{r'} \rtimes \Gamma_F = \left[(\widehat{G} \rtimes \Gamma_F) \times \mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{C})\right] / \mathbb{C}^\times \to \mathrm{GL}_{rr'}(\mathbb{C})$$

la représentation de transfert déduite de ρ par produit tensoriel avec l'identité de $\mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{C})$

$$\begin{array}{rcl} \left[(\widehat{G} \rtimes \Gamma_F) \times \mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{C})\right] / \mathbb{C}^\times & \to & \mathrm{GL}_{rr'}(\mathbb{C})\,, \\ (g, g') & \mapsto & \rho(g) \otimes g'\,. \end{array}$$

□

Les "théorèmes réciproques", ou bien la construction plus directe et un peu plus fine de "noyaux du transfert", permettent de prouver :

Théorème I.13. –

La solution des problèmes I.4, I.7 *et* I.10 *dans le cas de la représentation de transfert*

$$\rho_{r-1} : \widehat{G}_{r-1} \rtimes \Gamma_F \to \widehat{\mathrm{GL}}_{r(r-1)}$$

du groupe croisé G_{r-1} de degré $r-1$ implique le transfert automorphe de Langlands de G à GL_r via ρ.

□

Exposé II.
Le cas des tores
(Laurent Lafforgue, IHES, 26 juin 2014)

1 Construction de noyaux des transformations de Fourier

On considère toujours un groupe réductif quasi-déployé G sur F, muni d'une représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})\,.$$

Par définition d'une représentation de transfert, ρ induit un morphisme de tores complexes

$$\rho_T = (\rho_T^1, \ldots, \rho_T^r) : \widehat{T} \to \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r\,.$$

Lemme II.1. –

Faisons l'hypothèse que le groupe de Galois Γ_F agit sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de ρ par permutation de ses r vecteurs de base.

Soit E l'extension séparable de degré r de F qui est associée à l'ensemble d'indices $\{1, 2, \ldots, r\}$ muni de l'action de Γ_F, et soit

$$T_E = \mathrm{Res}_{E/F}\, \mathbb{G}_m$$

le tore algébrique de rang r sur F déduit de $\mathbb{G}_m$ par restriction des scalaires à la Weil de E à F.

Alors :

(i) *Le dual $\widehat{T}_E$ de T_E s'identifie au produit*

$$(\mathbb{C}^\times)^r$$

muni de l'action par permutation de Γ_F.

(ii) *L'homomorphisme Γ_F-équivariant de tores complexes*

$$\rho_T = (\rho_T^1, \ldots, \rho_T^r) : \widehat{T} \to (\mathbb{C}^\times)^r = \widehat{T}_E$$

est dual d'un morphisme de tores

$$\rho_T^\vee : T_E \to T$$

bien défini sur F.

(iii) *Le composé*

$$\det_E : T_E \xrightarrow{\rho_T^\vee} T \xrightarrow{\det_G} \mathbb{G}_m$$

n'est autre que l'homomorphisme de norme, c'est-à-dire le déterminant de l'action de T_E sur l'espace linéaire

$$\overline{T}_E = \mathrm{Res}_{E/F}\, \mathbb{A}^1\,.$$

En particulier, la restriction de ce déterminant au noyau

$$T_\rho = \mathrm{Ker}\left(T_E \xrightarrow{\rho_T^\vee} T\right)$$

est triviale.

Remarque :

Par définition d'une représentation de transfert, le noyau de

$$\rho_T : \widehat{T} \to \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$$

est trivial. Il en résulte que l'on a une suite exacte de tores algébriques sur F

$$1 \longrightarrow T_\rho \longrightarrow T_E \xrightarrow{\rho_T^\vee} T \longrightarrow 1\,.$$

Exemple :

Si G est déployé sur F et l'action de Γ_F sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de ρ est triviale, on a $T_E = \mathbb{G}_m^r$ et T_ρ est un tore déployé sur F comme T et T_E.

C'est en particulier le cas si

$$\widehat{G} = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})/\mu_k$$

et

$$\rho = \mathrm{sym}^k : \widehat{G} \to \mathrm{GL}_{k+1}(\mathbb{C})$$

pour n'importe quel entier $k \geq 1$.

Dans ce cas, on a

$$T_E = T_{k+1} = \mathbb{G}_m^{k+1}$$

et l'homomorphisme

$$\rho_T^\vee : T_{k+1} = \mathbb{G}_m^{k+1} \to T = \mathbb{G}_m^2 \times_{\mathbb{G}_m} \mathbb{G}_m$$

est

$$(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) \mapsto \left(\lambda_1\,\lambda_2^2 \ldots \lambda_k^k = \mu_1\,,\quad \lambda_0^k\,\lambda_1^{k-1} \ldots \lambda_{k-1} = \mu_2\,,\quad \lambda_0\,\lambda_1 \ldots \lambda_k = (\mu_1\,\mu_2)^{\frac{1}{k}}\right).$$

$\square$

L'espace linéaire $\overline{T}_E = \mathrm{Res}_{E/F}\,\mathbb{A}^1$ est muni du morphisme F-linéaire

$$\mathrm{Tr} : \overline{T}_E = \mathrm{Res}_{E/F}\,\mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$$

qui, pour toute F-algèbre A, associe à tout élément $a \in \overline{T}_E\,(A) = E \otimes_F A$ sa trace comme endomorphisme du A-module $E \otimes_F A$ libre de rang r.

En particulier, pour toute place x de F, le F_x-espace vectoriel $\overline{T}_E\,(F_x) = E \otimes_F F_x$, qui est de dimension r, est muni de la forme linéaire

$$\mathrm{Tr} : \overline{T}_E\,(F_x) \to F_x\,.$$

On peut composer celle-ci avec la composante

$$\psi_x : F_x \to \mathbb{C}^\times$$

du caractère additif unitaire continu non trivial

$$\psi : \mathbb{A}/F \to \mathbb{C}^\times$$

pour définir

$$\begin{array}{rcl} k_x^E : T_E\,(F_x) \subset \overline{T}_E\,(F_x) & \to & \mathbb{C}\,, \\ t_x & \mapsto & \psi_x(\mathrm{Tr}\,(t_x))\,. \end{array}$$

On connaît l'existence et les propriétés de la ψ_x-transformation de Fourier linéaire sur $\overline{T}_E\,(F_x) \supset T_E\,(F_x)$:

Théorème II.2. –

Pour toute place $x \in |F|$, il existe sur $\overline{T}_E\,(F_x) \supset T_E\,(F_x)$ une unique mesure additive dt_x, dite la "mesure autoduale", telle que la ψ_x-transformation de Fourier sur $T_E\,(F_x)$

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x = \int_{T_E\,(F_x)} dt_x \cdot f_x(t_x) \cdot k_x^E(t_x \bullet)$$

définisse un opérateur unitaire, c'est-à-dire qui respecte le produit hermitien

$$(f_1, f_2) \mapsto \langle f_1, f_2 \rangle = \int_{T_E\,(F_x)} dt_x \cdot f_1(t_x) \cdot \overline{f_2(t_x)}\,.$$

Remarque :

Les mesures additives sur $T_E\,(F_x) \subset \overline{T}_E\,(F_x)$ sont transformées par les translations multiplicatives suivant le caractère

$$|\det_E(\bullet)|_x : T_E\,(F_x) \to F_x^\times \to \mathbb{R}_+^\times\,.$$

Par conséquent, on a pour toute fonction f_x sur $T_E\,(F_x)$ et tout élément $t \in T_E\,(F_x)$

$$\widehat{f_x^t} = |\det_E(t)|_x^{-1} \cdot \widehat{f}_x^{\,t^{-1}}\,.$$

En particulier, si $t \in T_\rho(F_x)$, on a

$$\widehat{f_x^t} = \widehat{f}_x^{\,t^{-1}}\,.$$

$\square$

Lemme II.3. –

En toute place $x \in |F|$, on a :

(i) *La suite exacte de tores algébriques sur F*

$$1 \longrightarrow T_\rho \longrightarrow T_E \xrightarrow{\rho_T^\vee} T \longrightarrow 1$$

induit un homomorphisme

$$T_E\,(F_x) \to T(F_x)$$

dont le noyau est $T_\rho(F_x)$ et dont l'image est un sous-groupe ouvert de $T(F_x)$.

(ii) *Si l'on munit $T_\rho(F_x)$ d'une mesure invariante dt_ρ, il existe sur $T(F_x)$ une unique mesure dt qui se transforme suivant le caractère*

$$|\det_G(\bullet)|_x$$

et dont la restriction à l'image de $T_E\,(F_x) \to T(F_x)$ est le quotient de la mesure autoduale de $T_E\,(F_x)$ par la mesure invariante dt_ρ de $T_\rho(F_x)$.

$\square$

Pour toute fonction $f_x : T_E\,(F_x) \to \mathbb{C}$, on peut noter

$$\begin{array}{rcl} (\rho_T^\vee)_*(f_x) : T(F_x) & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \displaystyle\int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(t)} dt_\rho \cdot f_x(t_\rho) \end{array}$$

quand cette intégrale est bien définie en presque tout $t \in T(F_x)$.

On déduit du théorème II.2 et du lemme II.3 :

Corollaire II.4. –

En toute place $x \in |F|$ comme ci-dessus, on a :

(i) *Le sous-espace des fonctions de carré intégrable sur $T_E\,(F_x)$*

$$f_x : T_E\,(F_x) \to \mathbb{C}$$

telles que

$$(\rho_T^\vee)_*(f_x) : T(F_x) \to \mathbb{C}$$

soit bien définie et de carré intégrable sur $T(F_x)$, est stable par la ψ_x-transformation de Fourier

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x\,.$$

(ii) *Il existe un unique opérateur unitaire sur $T(F_x)$*

$$\varphi_x \mapsto \widehat{\varphi}_x$$

tel que :

- *pour toute fonction $f_x : T_E\,(F_x) \to \mathbb{C}$ comme dans* (i), *on a*

$$\widehat{(f_T^\vee)_*(f_x)} = (f_T^\vee)_*(\widehat{f}_x)\,,$$

- *pour toute fonction φ_x et tout $t \in T(F_x)$, on a*

$$\widehat{\varphi_x^t} = |\det_G(t)|_x^{-1} \cdot \widehat{\varphi}_x^{\,t^{-1}}\,.$$

(iii) *Cette transformation de Fourier sur $T(F_x)$*

$$\varphi_x \mapsto \widehat{\varphi}_x$$

a la forme

$$\widehat{\varphi}_x(\bullet) = \int_{T(F_x)} dt \cdot k_x^{\rho_T}(\bullet\, t) \cdot \varphi_x(t)$$

où

$$k_x^{\rho_T} : T(F_x) \to \mathbb{C}$$

est une fonction localement intégrable telle que

$$k_x^{\rho_T}(t) = \lim_{a \mapsto 0} \int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(t)} dt_\rho \cdot k_x^E(t_\rho) \cdot \mathbb{1}_x(a \cdot t_\rho)$$

pour n'importe quelle fonction localement constante à support compact [resp. de classe C^∞ à décroissance rapide si x est une place archimédienne]

$$\mathbb{1}_x : \overline{T}_E\,(F_x) \to \mathbb{C}$$

qui est égale à 1 dans un voisinage du point $0 \in \overline{T}_E\,(F_x) = E \otimes_F F_x$.

Remarque :

L'inverse de l'opérateur de ρ_T-transformation de Fourier défini par le noyau $t \mapsto k_x^{\rho_T}(t)$ est l'opérateur défini par le noyau $t \mapsto \overline{k_x^{\rho_T}}(t) = k_x^{\rho_T}(-t)$. □

2 Espaces de ρ_T-fonctions locales

Comme au paragraphe précédent, on suppose que Γ_F agit sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

par permutation de ses r vecteurs de base, ce qui permet d'introduire E, T_E, $\rho_T^\vee$, T_ρ, $\overline{T}_E$ et les opérateurs unitaires de ρ_T-transformation de Fourier locale sur les $T(F_x)$

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x(\bullet) = \int_{T(F_x)} dt \cdot k_x^{\rho_T}(\bullet\, t) \cdot f_x(t)\,.$$

On connaît :

Théorème II.5. –

En toute place ultramétrique x de F, appelons ρ_E-fonctions les fonctions sur $T_E\,(F_x)$ qui se prolongent (de manière nécessairement unique) en des fonctions localement constantes à support compact sur $\overline{T}_E\,(F_x) = E \otimes_F F_x$.

Alors l'espace des ρ_E-fonctions sur $T_E\,(F_x)$ satisfait toutes les conditions du problème I.7 *(excepté la condition* (6) *qui est vide dans ce cas) relativement à la ψ_x-transformation de Fourier linéaire sur $T_E\,(F_x)$*

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x(\bullet) = \int_{T_E\,(F_x)} dt_x \cdot \psi_x(\mathrm{Tr}\,(\bullet\, t_x)) \cdot f_x(t_x)\,.$$

En particulier, cet espace des ρ_E-fonctions est respecté par la ψ_x-transformation de Fourier, et sa connaissance plus celle de l'action sur lui de la transformation de Fourier équivalent à celle des fractions rationnelles

$$L_x(\rho_E, \chi, Z) = L_x(\chi, Z)$$

$$\varepsilon_x(\rho_E, \chi, Z) = \varepsilon_x(\chi, \psi_x, Z)$$

associées à tout élément $\chi \in \{\pi\}_x^{T_E}$ c'est-à-dire à tout caractère localement constant

$$\chi : T_E\,(F_x) \to \mathbb{C}^\times\,.$$

$\square$

Si F est un corps de nombres et x une place archimédienne de F, $\overline{T}_E\,(F_x) = E \otimes_F F_x$ est un produit fini de facteurs $E_{x'}$ tous isomorphes à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Nous allons introduire des espaces de ρ_E-fonctions sur ces facteurs $E_{x'}$ et leur produit $\overline{T}_E\,(F_x)$.

Pour cela, nous allons introduire des notations nouvelles.

Tout d'abord, considérant les 2 fonctions

$$\mathbb{C} \ni s \mapsto \begin{cases} G_1(s) &=& \pi^{-\frac{1}{2}s} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\,s\right)\,, \\ G_2(s) &=& (2\pi)^{1-s} \cdot \Gamma(s)\,, \end{cases}$$

on appelle "facteur eulérien réel" [resp. "facteur eulérien complexe"] les fonctions de la forme

$$P(s) \cdot G_1(s + s_0)$$

$$[\text{resp.} \qquad P(s) \cdot G_2(s + s_0)\ ]$$

où P est un polynôme en $s \in \mathbb{C}$ et $s_0 \in \mathbb{C}$ est une constante.

Le théorème II.5 est complété par le théorème suivant :

Théorème II.6. –

Si F est un corps de nombres et x une place archimédienne de F, considérons la décomposition

$$\overline{T}_E\,(F_x) = E \otimes_F F_x = \prod_{x'} E_{x'}$$

en facteurs $E_{x'}$ isomorphes à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Lorsque $E_{x'} \cong \mathbb{R}$ [resp. $E_{x'} \cong \mathbb{C}$] et le caractère unitaire $\psi_x \circ \mathrm{Tr}$ restreint à $E_{x'}$ est écrit sous la forme

$$a \mapsto \exp\left(2\,\pi\, i\, c_{x'}\, a\right), \quad \textit{avec} \quad c_{x'} \in \mathbb{R}^\times\,,$$

$$\textit{[resp.} \qquad a \mapsto \exp\left(2\,\pi\, i\,(c_{x'}\, a + \overline{c}_{x'}\, \overline{a})\right), \quad \textit{avec} \quad c_{x'} \in \mathbb{C}^\times \ \textit{]},$$

on appelle ρ_E-fonctions sur $E_{x'}$ les fonctions de la forme

$$a \mapsto P(a) \cdot \exp\left(-\pi\, |c_{x'}|\, a^2\right)$$

$$\textit{[resp.} \qquad a \mapsto P(a, \overline{a}) \cdot \exp\left(-2\,\pi\, |c_{x'}|\, |a|^2\right) \ \textit{]}$$

où P est un polynôme arbitraire de $\mathbb{C}\,[Z]$ [resp. $\mathbb{C}\,[Z_1, Z_2]$].

Et on appelle ρ_E- fonctions sur $\overline{T}_E\,(F_x) = E \otimes_F F_x = \prod\limits_{x'} E_{x'}$ les combinaisons linéaires de produits

$$\bigotimes_{x'} f_{x'}$$

de ρ_E- fonctions sur les facteurs $E_{x'}$.

Alors :

(i) *L'espace des ρ_E-fonctions sur chaque facteur $E_{x'}$ [resp. sur leur produit $\overline{T}_E\,(F_x)$] est stable par translation par les éléments du sous-groupe compact maximal de $E_{x'}^\times$ [resp. de $T_E\,(F_x)$] (mais pas par les éléments en dehors de ce sous-groupe).*
Il est également stable par la ψ_x-transformation de Fourier et par son inverse.
D'autre part, il est dense dans l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur $E_{x'}$ [resp. $\overline{T}_E\,(F_x)$].

(ii) *Pour tout caractère continu $\chi : E_{x'}^\times \to \mathbb{C}^\times$ [resp. $\chi \in \{\pi\}_x^{T_E}$], les intégrales*

$$\int_{E_{x'}} dt_{x'} \cdot f_{x'}(t_{x'}) \cdot \chi(t_{x'}) \cdot |\mathrm{det}_E(t_{x'})|_x^{s-1}$$

$$\textit{[resp.} \qquad \int_{\overline{T}_E\,(F_x)} dt_x \cdot f_x(t_x) \cdot \chi(t_x) \cdot |\mathrm{det}_E(t_x)|_x^{s-1} \ \textit{]}$$

associées aux ρ_E-fonctions $f_{x'}$ sur $E_{x'}$ [resp. f_x sur $\overline{T}_E\,(F_x)$], convergent absolument, pour tout $s \in \mathbb{C}$ de partie réelle $\mathrm{Re}\,(s)$ assez grande, vers une fonction analytique en s.
De plus, ces fonctions analytiques forment un module libre sur $\mathbb{C}\,[Z]$ qui possède un unique générateur de la forme

$$L_{x'}\left(\chi, s + \frac{1}{2}\right) \cdot |c_{x'}|^{-\frac{1}{2}(s+1)} \quad \textit{si} \quad F_{x'} \cong \mathbb{R}$$

$$\textit{[resp.} \qquad L_{x'}\left(\chi, s + \frac{1}{2}\right) \cdot |c_{x'}|^{-(s+1)} \quad \textit{si} \quad F_{x'} \cong \mathbb{C} \ \textit{]}$$

$$\textit{[resp.} \qquad L_x\left(\chi, s + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\prod_{F_{x'} \cong \mathbb{R}} |c_{x'}|^{-\frac{1}{2}(s+1)}\right) \cdot \left(\prod_{F_{x'} \cong \mathbb{C}} |c_{x'}|^{-(s+1)}\right) \ \textit{]}$$

où les $L_{x'}(\chi, \bullet)$ sont des facteurs eulériens réels [resp. complexes] et

$$L_x(\chi, \bullet) = \prod_{x'} L_{x'}(\chi, \bullet)\,.$$

(iii) *Les ρ_E-fonctions sur chaque facteur $E_{x'}$ [resp. sur $\overline{T}_E\,(F_x)$] admettent une décomposition spectrale de la forme*

$$f_{x'}(\bullet) = |\det_E(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\{\chi\,:\,E_{x'}^\times \to \mathbb{C}^\times \text{ unitaire}\}} d\chi \cdot \chi(\bullet) \cdot L_{x'}\left(\chi^{-1}, \frac{1}{2}\right) \cdot p_{x'}(\chi)$$

$$\textit{[resp.} \qquad f_x(\bullet) = |\det_E(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}_x^{T_E}} d\chi \cdot \chi(\bullet) \cdot L_x\left(\chi^{-1}, \frac{1}{2}\right) \cdot p_x(\chi)\ \textit{]}$$

où, pour tout caractère continu $\chi : E_{x'}^\times \to \mathbb{C}^\times$, la fonction

$$\mathbb{C} \ni s \mapsto p_{x'}\,(\chi \otimes |\det_E(\bullet)|_x^s)$$

est le produit d'un polynôme en s et de

$$\begin{cases} s \ \mapsto\ |c_{x'}|^{-\frac{1}{2}s} & \textit{si} \quad F_{x'} \cong \mathbb{R}\,, \\ s \ \mapsto\ |c_{x'}|^{-s} & \textit{si} \quad F_{x'} \cong \mathbb{C}\,, \end{cases}$$

et où la fonction p_x est une somme de produits de telles fonctions $p_{x'}$.

(iv) *Il existe une famille (nécessairement unique) de fonctions exponentielles en $s \in \mathbb{C}$*

$$\varepsilon_{x'}(\chi, s, \psi_x)$$

$$\textit{[resp.} \qquad \varepsilon_x(\chi, s, \psi_x) = \prod_{x'} \varepsilon_{x'}(\chi, s, \psi_x)\ \textit{]}$$

indexées par les caractères continus $\chi : E_{x'}^\times \to \mathbb{C}^\times$ [resp. $\chi \in \{\pi\}_x^{T_E}$], telles que

$$\varepsilon_{x'}(\chi, s, \psi_x) = \varepsilon_{x'}\,(\chi \otimes |\det_E(\bullet)|^s, 0, \psi_x)$$

$$\textit{[resp.} \qquad \varepsilon_x(\chi, s, \psi_x) = \varepsilon_x\,(\chi \otimes |\det_E(\bullet)|^s, 0, \psi_x)\ \textit{]}$$

et que, pour toute ρ_E-fonction $f_{x'}$ sur $E_{x'}$ [resp. f_x sur $\overline{T}_E\,(F_x)$] décomposée spectralement comme ci-dessus, on ait

$$\widehat{f}_{x'}(\bullet) = |\det_E(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\{\chi\,:\,E_{x'}^\times \to \mathbb{C}^\times \text{ unitaire}\}} d\chi \cdot \chi^{-1}(\bullet) \cdot L_{x'}\left(\chi, \frac{1}{2}\right) \cdot \varepsilon_{x'}\left(\chi, \frac{1}{2}, \psi_x\right) \cdot p_{x'}(\chi)$$

$$\textit{[resp.} \qquad \widehat{f}_x(\bullet) = |\det_E(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}_x^{T_E}} d\chi \cdot \chi^{-1}(\bullet) \cdot L_x\left(\chi, \frac{1}{2}\right) \cdot \varepsilon_x\left(\chi, \frac{1}{2}, \psi_x\right) \cdot p_x(\chi)\ \textit{]}.$$

□

Remplaçons maintenant cette notion de ρ_E-fonctions sur $E_{x'}$ ou $\overline{T}_E\,(F_x)$ par une notion très proche mais encore provisoire de ρ_E-fonctions sur $E_{x'}^\times$ ou $T_E\,(F_x)$, qui est davantage analogue à celle en les places ultramétriques et mieux adaptée à la structure multiplicative de $E_{x'}^\times$ ou $T_E\,(F_x)$:

Définition provisoire II.7. –

Si F est un corps de nombres et x une place archimédienne de F, considérons la décomposition

$$T_E\,(F_x) = \prod_{x'} E_{x'}^\times$$

en facteurs $E_{x'}^\times$ isomorphes à $\mathbb{R}^\times$ ou $\mathbb{C}^\times$.

(i) *On appelle ρ_E-fonctions sur chaque facteur $E_{x'}^\times$ les fonctions*

$$f_{x'} : E_{x'}^\times \to \mathbb{C}$$

qui admettent une décomposition spectrale de la forme

$$f_{x'}(\bullet) = |\det{}_E(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\{\chi\,:\,E_{x'}^\times \to \mathbb{C}^\times \text{ unitaire}\}} d\chi \cdot \chi(\bullet) \cdot L_{x'}\left(\chi^{-1}, \frac{1}{2}\right) \cdot p_{x'}(\chi)$$

où

- *la fonction $p_{x'}$ des caractères continus $\chi : E_{x'}^\times \to \mathbb{C}^\times$ est supportée par un nombre fini de classes modulo l'action de*

$$\mathbb{C} \ni s \mapsto |\det{}_E(\bullet)|_x^s\,,$$

- *pour tout représentant χ d'une telle classe, la fonction*

$$\mathbb{C} \ni s \mapsto p_{x'}\left(\chi \otimes |\det{}_E(\bullet)|_x^s\right)$$

est le produit d'un polynôme en s et d'une exponentielle de la forme

$$s \mapsto \exp(c \cdot s) \qquad \text{avec} \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$

(ii) *On appelle ρ_E-fonctions sur $T_E(F_x)$ les combinaisons linéaires (finies) de produits*

$$\bigotimes_{x'} f_{x'}$$

de ρ_E-fonctions sur les facteurs $E_{x'}^\times$.

Remarques :

(i) L'espace des ρ_E-fonctions sur chaque facteur $E_{x'}^\times$ [resp. sur $T_E(F_x)$] est stable par translation par des éléments arbitraires de $E_{x'}^\times$ [resp. $T_E(F_x)$], ainsi que par la ψ_x-transformation de Fourier et son inverse.

D'autre part, il est dense dans l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur $E_{x'}^\times$ [resp. $T_E(F_{x'})$].

(ii) La connaissance de l'espace des ρ_E-fonctions sur les $E_{x'}^\times$ et $T_E(F_x)$ équivaut à celle des facteurs

$$L_{x'}(\chi, \bullet)$$

et

$$L_x(\chi, \bullet) = \prod_{x'} L_{x'}(\chi, \bullet)\,.$$

(iii) La ψ_x-transformation de Fourier des ρ_E-fonctions sur les $E_{x'}^\times$ et $T_E(F_x)$ consiste à associer à une fonction décomposée spectralement sous la forme

$$f_{x'}(\bullet) = |\det{}_E(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\{\chi\,:\,E_{x'}^\times \to \mathbb{C}^\times \text{ unitaire}\}} d\chi \cdot \chi(\bullet) \cdot L_{x'}\left(\chi^{-1}, \frac{1}{2}\right) \cdot p_{x'}(\chi)$$

$$\text{[resp.} \qquad f_x(\bullet) = |\det{}_E(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}_x^{T_E}} d\chi \cdot \chi(\bullet) \cdot L_x\left(\chi^{-1}, \frac{1}{2}\right) \cdot p_x(\chi)\ ]$$

la fonction définie spectralement par la formule

$$\widehat{f}_{x'}(\bullet) = |\det_E(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\{\chi\,:\,E_{x'}^\times \to \mathbb{C}^\times \text{ unitaire}\}} d\chi \cdot \chi^{-1}(\bullet) \cdot L_{x'}\left(\chi, \frac{1}{2}\right) \cdot \varepsilon_{x'}\left(\chi, \frac{1}{2}, \psi_x\right) \cdot p_{x'}(\chi)$$

$$[\text{resp.} \qquad \widehat{f}_x(\bullet) = |\det_E(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}_x^{T_E}} d\chi \cdot \chi^{-1}(\bullet) \cdot L_x\left(\chi, \frac{1}{2}\right) \cdot \varepsilon_x\left(\chi, \frac{1}{2}, \psi_x\right) \cdot p_x(\chi)\ ].$$

Sa connaissance est équivalente à celle des facteurs

$$\varepsilon_{x'}\,(\chi, \bullet, \psi_x)$$

$$[\text{resp.} \qquad \varepsilon_x\,(\chi, \bullet, \psi_x) = \prod_{x'} \varepsilon_{x'}\,(\chi, \bullet, \psi_x)\ ].$$

□

On déduit du théorème II.5 :

Corollaire II.8. –

Supposant toujours que Γ_F agit sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de la représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

par permutation de ses r vecteurs de base, on considère une place ultramétrique x de F.

Appelons ρ_T-fonctions sur $T(F_x)$ les combinaisons linéaires de fonctions images directes

$$\varphi_x = (\rho_T^\vee)_*\, f_x = \int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(\bullet)} dt_\rho \cdot f_x(t_\rho)$$

de ρ_E-fonctions f_x sur $T_E\,(F_x)$ et de leurs translatées par des éléments de $T(F_x)$.

Alors :

(i) *L'espace des ρ_T-fonctions sur $T(F_x)$ satisfait toutes les conditions du problème* I.7 *(excepté la condition* (6) *qui est vide dans ce cas) relativement à la ρ_T-transformation de Fourier sur $T(F_x)$*

$$\varphi_x \mapsto \widehat{\varphi}_x(\bullet) = \int_{T(F_x)} dt \cdot k_x^{\rho_T}(t\,\bullet) \cdot \varphi_x(t)\,.$$

En particulier, cet espace des ρ_T-fonctions sur $T(F_x)$ est respecté par la ρ_T-transformation de Fourier et son inverse, et il est dense dans l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable.

(ii) *La connaissance de cet espace des ρ_T-fonctions sur $T(F_x)$ et de l'action sur lui de la ρ_T-transformation de Fourier équivaut à celle des fractions rationnelles*

$$L_x(\rho_T, \chi, Z) = L_x(\rho_E, \chi \circ \rho_T^\vee, Z)$$

$$\varepsilon_x(\rho_T, \chi, Z) = \varepsilon_x(\rho_E, \chi \circ \rho_T^\vee, Z)$$

associées à tout élément $\chi \in \{\pi\}_x^T$, c'est-à-dire à tout caractère localement constant

$$\chi : T(F_x) \to \mathbb{C}^\times\,.$$

□

De manière analogue, on déduit du théorème II.6 réinterprété grâce à la définition II.7 :

Corollaire II.9. –

Sous les mêmes hypothèses, supposons de plus que F est un corps de nombres, et considérons une place archimédienne x de F.

Appelons provisoirement (c'est-à-dire dans le cadre du présent exposé II*) ρ_T-fonctions sur $T(F_x)$ les combinaisons linéaires de fonctions images directes*

$$\varphi_x = (\varphi_T^\vee)_* \, f_x = \int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(\bullet)} dt_\rho \cdot f_x(t_\rho)$$

de ρ_E-fonctions f_x sur $T_E\,(F_x)$ et de leurs translatées par des éléments de $T(F_x)$.

Alors :

(i) *L'espace des ρ_T-fonctions sur $T(F_x)$ est stable par translation par des éléments arbitraires de $T(F_x)$, ainsi que par la ρ_T-transformation de Fourier*

$$\varphi_x \mapsto \widehat{\varphi}_x(\bullet) = \int_{T(F_x)} dt \cdot k_x^{\rho_T}(t\,\bullet) \cdot \varphi_x(t)$$

et son inverse.

D'autre part, il est dense dans l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur $T(F_x)$.

(ii) *Posant pour tout $\chi \in \{\pi\}_x^T$*

$$L_x(\rho_T, \chi, s) = L_x(\chi \circ \rho_T^\vee, s) = \prod_{x'} L_{x'}(\chi \circ \rho_T^\vee, s)\,,$$

les ρ_T-fonctions sur $T(F_x)$ sont les fonctions

$$f_x : T(F_x) \to \mathbb{C}$$

qui admettent une décomposition spectrale de la forme

$$f_x(\bullet) = |\det{}_G(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}_x^T} d\chi \cdot \chi(\bullet) \cdot L_x\left(\rho_T, \chi^{-1}, \frac{1}{2}\right) \cdot p_x(\chi)$$

où

- *la fonction p_x des caractères continus $\chi : T(F_x) \to \mathbb{C}^\times$ est supportée par un nombre fini de composantes connexes de $\{\pi\}_x^T$,*
- *sachant que chaque composante connexe de $\{\pi\}_x^T$ a une structure naturelle d'espace affine sur $\mathbb{R}$, avec des coordonnées affines $s_1, \ldots, s_k$, la restriction de p_x à chaque telle composante est le produit d'un polynôme en $s_1, \ldots, s_k$ et d'une exponentielle de la forme*

$$(s_1, \ldots, s_k) \mapsto \exp\left(c_1 \cdot s_1 + \ldots + c_k \cdot s_k\right) \quad \textit{avec} \quad c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}\,.$$

(iii) *Posant pour tout $\chi \in \{\pi\}_x^T$*

$$\varepsilon_x(\rho_T, \chi, s) = \varepsilon_x(\chi \circ \rho_T^\vee, \psi_x, s) = \prod_{x'} \varepsilon_{x'}(\chi \circ \rho_T^\vee, \psi_x, s)\,,$$

la ρ_T-transformation de Fourier des ρ_T-fonctions sur $T(F_x)$ consiste à associer à une fonction décomposée spectralement sous la forme

$$f_x(\bullet) = |\det{}_G\,(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}_x^T} d\chi \cdot \chi(\bullet) \cdot L_x\left(\rho_T, \chi^{-1}, \frac{1}{2}\right) \cdot p_x(\chi)$$

la fonction définie spectralement par la formule

$$\widehat{f}_x(\bullet) = |\det_G(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\mathrm{Im}\,\{\pi\}_x^T} d\chi \cdot \chi^{-1}(\bullet) \cdot L_x\left(\rho_T, \chi, \frac{1}{2}\right) \cdot \varepsilon_x\left(\rho_T, \chi, \frac{1}{2}\right) \cdot p_x(\chi)\,.$$

□

3 Formule de Poisson pour les tores et conséquence

On considère toujours une représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

telle que Γ_F agisse sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de ρ par permutation de ses r vecteurs de base.

On a défini en toute place x de F un opérateur de ρ_T-transformation de Fourier sur $T(F_x)$

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x(\bullet) = \int_{T(F_x)} dt \cdot k_x^{\rho_T}(t\,\bullet) \cdot f_x(t)$$

ainsi qu'un espace de ρ_T-fonctions sur $T(F_x)$. Cet espace est stable par translation, par la ρ_T-transformation de Fourier et par son inverse, et il est dense dans l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable. Sa connaissance équivaut à celle des facteurs

$$L_x(\rho_T, \chi, \bullet) \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_x(\rho_T, \chi, \bullet)\,, \qquad \chi \in \{\pi\}_x^T\,,$$

qui sont des fractions rationnelles en toute place ultramétrique x.

En toute place ultramétrique x en laquelle G et ρ sont non ramifiés, on dispose de la "ρ_T-fonction standard" au sens de la définition I.8(i). Cela permet comme dans la définition I.8(ii) d'introduire l'espace des ρ_T-fonctions globales sur $T(\mathbb{A})$. Comme on a en presque toute place ultramétrique de F non ramifiée pour G et ρ

$$\varepsilon_x(\rho_T, \chi, \bullet) = 1\,, \qquad \forall\, \chi \in \{\pi\}_{x,\emptyset}^T\,,$$

les ρ_T-fonctions standard sont leur propre ρ_T-transformée de Fourier en presque toute place, et l'espace des ρ_T-fonctions globales est muni d'un opérateur unitaire inversible de ρ_T-transformation de Fourier globale.

On a démontré dans le cas des corps de fonctions (et prouverait de la même façon dans le cas des corps de nombres) que la ρ_T-transformation de Fourier globale sur $T(\mathbb{A})$ satisfait toutes les conditions du problème I.10 :

Théorème II.10. –

On suppose toujours que Γ_F agit sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de la représentation de transfert $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ par permutation de ses r vecteurs de base.

Alors, pour toute ρ_T-fonction globale

$$f : T(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}\,,$$

on a :

(i) *Pour toute place ultramétrique $x \in |F|$ en laquelle G et ρ sont non ramifiés et f se factorise en*

$$f = f_x \otimes f^x\,,$$

avec pour facteur une ρ_T-fonction sphérique sur $T(F_x)$

$$f_x : T(F_x)/T(O_x) \to \mathbb{C}\,,$$

la série formelle

$$\sum_{N,N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in T(F)} \left(f_x^{N,N'} \otimes f^x \right)(\gamma)$$

est une fraction rationnelle en Z.

De plus, elle est absolument convergente dans la zone

$$|Z| < q_x^{1/2} ,$$

donc n'y admet pas de pôle, et sa valeur en $Z = 1$, notée $S(f)$, ne dépend pas du choix de la place x.

(ii) *On a la formule de Poisson*

$$S(f) = S(\widehat{f})$$

qui s'écrit encore

$$\text{“} \sum_{\gamma \in \overline{T}(F)} f(\gamma) \text{”} = \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{T}(F)} \widehat{f}(\gamma) \text{”}$$

en notant

$$\text{“} \sum_{\gamma \in \overline{T}(F)} f(\gamma) \text{”} = \left(\sum_{\gamma \in T(F)} f(\gamma) \right) + \left(\sum_{\gamma \in T(F)} \widehat{f}(\gamma) \right) - S(f) .$$

(iii) *On a*

$$\text{“} \sum_{\gamma \in \overline{T}(F)} f(\gamma) \text{”} = \sum_{\gamma \in T(F)} f(\gamma)$$

si f se factorise en au moins une place ultramétrique x sous la forme

$$f = f_x \otimes f^x ,$$

avec pour facteur une ρ_T-fonction locale

$$f_x : T(F_x) \to \mathbb{C}$$

qui est supportée par une partie compacte de $T(F_x)$. □

On a également prouvé (dans le cas des corps de fonctions) que cette formule de Poisson pour le tore T implique pour le groupe réductif G muni de la représentation de transfert ρ la forme approchée suivante de formule de Poisson :

Théorème II.11. –

Sous les mêmes hypothèses, considérons deux fonctions

$$f_1, f_2 : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

telles que

- *en toute place ultramétrique x de F, f_1 et f_2 sont invariantes à gauche et à droite par un sous-groupe ouvert compact de $G(F_x)$ qui, de plus, est égal à $G(O_x)$ en presque toute place x où G et ρ sont non ramifiés,*
- *en toute place archimédienne x de F, f_1 et f_2 sont des fonctions de classe C^∞ de la variable $g_x \in G(F_x)$,*

- *pour tout élément k de tout sous-groupe compact de $G(\mathbb{A})$, les deux fonctions*

$$T(\mathbb{A}) \ni t \mapsto |\det_B(t)|^{1/2} \cdot (f_1^k)_{N_B}(t) = |\det_B(t)|^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|^{-1/2} \cdot \int_{N_B(\mathbb{A})} f_1(u \cdot t \cdot k) \cdot du$$

et

$$T(\mathbb{A}) \ni t \mapsto |\det_B(t)|^{1/2} \cdot ({}^{k^{-1}}f_2)_{N_B}(t) = |\det_B(t)|^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|^{1/2} \cdot \int_{N_B(\mathbb{A})} f_2(k^{-1} \cdot t \cdot u) \cdot du$$

sont bien définies et sont deux ρ_T-fonctions globales sur $T(\mathbb{A})$ dont la seconde est la ρ_T-transformée de Fourier de la première.

Alors :

(i) *Pour toute place ultramétrique $x \in |F|$ en laquelle G et ρ sont non ramifiés et f_1, f_2 se factorisent en*

$$f_1 = f_{1,x} \otimes f_1^x \,,$$

$$f_2 = f_{2,x} \otimes f_2^x \,,$$

avec pour facteurs deux fonctions sphériques sur $G(F_x)$

$$f_{1,x}, f_{2,x} : G(O_x)\backslash G(F_x)/G(O_x) \to \mathbb{C}\,,$$

les séries formelles

$$\sum_{N,N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \int_{N_B(\mathbb{A})/N_B(F)} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \left(f_{1,x}^{N,N'} \otimes f_1^x\right)(u\,\gamma)$$

et

$$\sum_{N,N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \int_{N_B(\mathbb{A})/N_B(F)} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \left(f_{2,x}^{N,N'} \otimes f_2^x\right)(\gamma\, u^{-1})$$

sont des fractions rationnelles égales entre elles.

De plus, leurs "valeurs régularisées" en $Z = 1$, notées $S_B(f_1)$ et $S'_B(f_2)$, ne dépendent pas du choix de la place x.

Elles vérifient

$$S_B(f_1) = S'_B(f_2)\,.$$

(ii) *On a*

$$S_B(f_1) = \int_{N_B(\mathbb{A})/N_B(F)} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} f_2(\gamma\, u^{-1})$$

$$\textit{[resp.}\quad S_B(f_2) = \int_{N_B(\mathbb{A})/N_B(F)} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} f_1(u\,\gamma)\ \textit{]}$$

si la fonction f_1 [resp. f_2] se factorise en au moins une place ultramétrique x sous la forme

$$f_1 = f_{1,x} \otimes f_1^x \qquad \textit{[resp.}\quad f_2 = f_{2,x} \otimes f_2^x\ \textit{]},$$

avec pour facteur une fonction

$$f_{1,x} : G(F_x) \to \mathbb{C} \qquad \textit{[resp.}\quad f_{2,x} : G(F_x) \to \mathbb{C}\ \textit{]}$$

localement constante à support compact dans $G(F_x)$.

Remarque :

Les facteurs $f_{1,x}$ et $f_{2,x}$ de (i) sont par hypothèse des fonctions sphériques, donc ne font apparaître dans leurs décompositions spectrales que des représentations $\pi \in \mathrm{Im}\,\{\pi\}^G_{x,\emptyset}$, lesquelles sont des induites normalisées de caractères $\chi_\pi \in \mathrm{Im}\,\{\pi\}^T_{x,\emptyset}$. Pour de telles représentations, les facteurs

$$L_x(\rho,\pi,Z) = L_x(\rho_T,\chi_\pi,Z)$$

sont bien définis.

Alors on dit que les fonctions sphériques $f_{1,x}$ et $f_{2,x}$ sur $G(F_x)$ sont des ρ-fonctions si et seulement si leurs termes constants

$$T(F_x) \ni t \mapsto |\det_B(t)|_x^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{-1/2} \cdot \int_{N_B(F_x)} du \cdot f_{1,x}(u\cdot t)\,,$$

et

$$T(F_x) \ni t \mapsto |\det_B(t)|_x^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{1/2} \cdot \int_{N_B(F_x)} du \cdot f_{2,x}(t\cdot u)$$

sont des ρ_T-fonctions sur $T(F_x)$. Dans ce cas, on peut leur associer les familles de fonctions

$$f_{1,x}^{N,N'} \quad \text{et} \quad f_{2,x}^{N,N'}\,, \qquad N,N' \in \mathbb{N}\,,$$

suivant la règle de construction de la définition I.9. $\square$

4 Un prolongement naturel des noyaux

Supposant toujours que Γ_F agit sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de la représentation de transfert $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ par permutation de ses r vecteurs de base, on considère la fonction noyau associée

$$k_x^{\rho_T} : T(F_x) \to \mathbb{C}$$

en toute place $x \in |F|$.

Cette fonction noyau est égale à

$$k_x^{\rho_T}(t) = \int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(t)} dt_\rho \cdot \psi_x \circ \mathrm{Tr}\,(t_\rho)$$

au sens que, pour toute fonction f_x localement constante à support compact [resp. de classe C^∞ à décroissance rapide si x est une place archimédienne] sur $\overline{T}_E\,(F_x) = E \otimes_F F_x$, on a

$$\int_{T(F_x)} dt \cdot k_x^{\rho_T}(t) \cdot \int_{T_\rho(F_x)} dt_\rho \cdot f_x(t\cdot t_\rho) = \int_{T_\rho(F_x)} dt_\rho \cdot \int_{\overline{T}_E\,(F_x)} \psi_x \circ \mathrm{Tr}\,(t_x \cdot t_\rho) \cdot f_x(t_x) \cdot dt_x\,.$$

Si x est une place ultramétrique de F et $\mathbb{I}_{O_{E_x}}(\bullet)$ désigne la fonction caractéristique de l'anneau des entiers O_{E_x} de la F_x-algèbre $\overline{T}_E\,(F_x) = E \otimes_F F_x = E_x$, on a aussi

$$k_x^{\rho_T}(t) = \lim_{N\mapsto+\infty} \int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(t)} dt_\rho \cdot \psi_x \circ \mathrm{Tr}\,(t_\rho) \cdot \mathbb{I}_{O_{E_x}}(\varpi_x^N \cdot t_\rho)\,.$$

Si F est un corps de nombres, x est une place archimédienne de F, les $E_{x'} \cong \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont les facteurs de la F_x-algèbre $E_x = E \otimes_F F_x = \overline{T}_E\,(F_x)$ et $\mathbb{I}_x(\bullet)$ désigne le produit des fonctions

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{I}_{x'} : E_{x'} \cong \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ a & \mapsto & \exp\left(-\pi \cdot |c_{x'}| \cdot a^2\right) \end{array}$$

pour $E_{x'} \cong \mathbb{R}$ et $\psi_x \circ \mathrm{Tr}\,(a) = \exp\,(2\,\pi\, i \cdot c_{x'} \cdot a)$, et

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{1}_{x'} : E_{x'} \cong \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ a & \mapsto & \exp\,(-2\,\pi \cdot |c_{x'}| \cdot |a|^2) \end{array}$$

pour $E_{x'} \cong \mathbb{C}$ et $\psi_x \circ \mathrm{Tr}\,(a) = \exp\,(2\,\pi\, i \cdot (c_{x'} \cdot a + \overline{c}_{x'} \cdot \overline{a}))$, on a

$$k_x^{\rho_T}(t) = \lim_{N \mapsto 0} \int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(t)} dt_\rho \cdot \psi_x \circ \mathrm{Tr}\,(t_\rho) \cdot \mathbb{1}_x(a \cdot t_\rho)\,.$$

Lemme II.12. –

Considérons le cas où G est déployé sur F et Γ_F agit trivialement sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de $\rho : \widehat{G} \times \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$.

Notons $\mathfrak{S}^{r,\rho}$ le sous-groupe du groupe symétrique $\mathfrak{S}^r$ composé des éléments $w \in \mathfrak{S}^r$ qui respectent le sous-tore $\widehat{T} \subset \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$ et qui coïncident sur $\widehat{T}$ avec un élément du groupe de Weyl W_G de G agissant sur $\widehat{T}$.

Alors :

(i) *L'homomorphisme de restriction*

$$\mathfrak{S}^{r,\rho} \to W_G$$

est surjectif, et son noyau coïncide avec le sous-groupe de $\mathfrak{S}^r$ composé des permutations de $\{1, 2, \ldots, r\}$ qui respectent la partition définie par la relation d'égalité entre les caractères ρ_T^i, $1 \leq i \leq r$.

(ii) *La restriction de*

$$\mathfrak{S}^{r,\rho} \to W_G$$

au sous-groupe

$$\left\{w \in \mathfrak{S}^{r,\rho} \subset \mathfrak{S}^r \mid w \text{ respecte la relation d'ordre de chaque classe } \{1 \leq i \leq r \mid \rho_T^i = \mu\}\,,\ \forall\, \mu \in X_{\widehat{T}}\right\}$$

est un isomorphisme.

Cet isomorphisme identifie donc W_G à un sous-groupe de $\mathfrak{S}^{r,\rho}$.

Démonstration :

La représentation de transfert ρ induit un morphisme d'algèbres

$$\mathbb{C}\,[\widehat{T}_r]^{\mathfrak{S}^r} = \mathbb{C}\,[\widehat{\mathrm{GL}}_r]^{\widehat{\mathrm{GL}}_r} \to \mathbb{C}\,[\widehat{G}]^{\widehat{G}} = \mathbb{C}\,[\widehat{T}]^{W_G}\,.$$

Soit t un point générique de $\widehat{T}$.

L'image de $\mathbb{C}\,[\widehat{T}_r]^{\mathfrak{S}^r}$ dans $\mathbb{C}\,[\widehat{T}]$ est constituée des polynômes P tels que

$$P(w(t)) = P(t)$$

pour tout $w \in \mathfrak{S}^r$ tel que $w(\widehat{T}) \subset \widehat{T}$.

D'autre part, $\mathbb{C}\,[\widehat{T}]^{W_G}$ est constitué des polynômes $P \in \mathbb{C}\,[\widehat{T}]$ tels que

$$P(w(t)) = P(t) \qquad \forall\, w \in W_G\,.$$

Donc, si $w \in W_G$, il existe $w' \in \mathfrak{S}^r$ qui respecte le sous-tore $\widehat{T}$ de $\widehat{T}_r$ et vérifie

$$w'(t) = w(t)\,.$$

Cela montre que l'homomorphisme de (i) et surjectif. La description de son noyau est évidente.

Enfin, (ii) est une conséquence immédiate de (i).

Exemple :

Si $\widehat{G} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mu_k$ et ρ est le représentation symétrique

$$\mathrm{sym}^k = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mu_k \to \mathrm{GL}_{k+1}(\mathbb{C})\,,$$

le groupe $W_G = \mathfrak{S}^2$ s'identifie au sous-groupe du groupe symétrique $\mathfrak{S}^{k+1}$ agissant sur l'ensemble des indices $\{0,1,\ldots,k\}$ des vecteurs de base de $\mathbb{C}^{k+1}$, engendré par l'involution

$$i \mapsto k-i\,, \qquad \forall\, i \in \{0,1,\ldots,k\}\,.$$

□

Considérons maintenant le cas général où Γ_F agit par permutation des vecteurs de la base de l'espace $\mathbb{C}^r$ de la représentation ρ.

On note toujours E la F-algèbre séparable de degré r qui correspond à l'action de Γ_F sur $\{1,2,\ldots,r\}$.

Écrivons E comme un produit

$$E = \prod_{1\leq i\leq e} E_i^{m_i}$$

de corps E_i, $1 \leq i \leq e$, apparaissant avec des multiplicités m_i, et dont certains peuvent éventuellement être isomorphes entre eux.

En notant I_i l'ensemble fini muni d'une action transitive de Γ_F qui correspond à chaque E_i, $1 \leq i \leq e$, la décomposition

$$E = \prod_{1\leq i\leq e} E_i^{m_i}$$

correspond à une unique bijection

$$\{1,2,\ldots,r\} \xrightarrow{\sim} \coprod_{1\leq i\leq e} I_i \times \{1,2,\ldots,m_i\}$$

qui respecte les actions de Γ_F.

Le groupe linéaire sur F

$$\mathrm{GL}_E = \prod_{1\leq i\leq e} \mathrm{Res}_{E_i/F}\,\mathrm{GL}_{m_i}$$

admet pour tore maximal

$$T_E = \mathrm{Res}_{E/F}\,\mathbb{G}_m = \prod_{1\leq i\leq e} \mathrm{Res}_{E_i/F}\,\mathbb{G}_m^{m_i}$$

et pour groupe dual

$$\widehat{\mathrm{GL}}_E = \prod_{1\leq i\leq e}\,\prod_{\iota\in I_i} \mathrm{GL}_{m_i}(\mathbb{C})$$

qui, munit de l'action naturelle de Γ_F, s'identifie à un sous-groupe de Levy de $\widehat{\mathrm{GL}}_r = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$.

Enfin, le groupe de Weyl W_E de GL_E s'identifie à

$$\prod_{1\leq i\leq e}\,\prod_{\iota\in I_i} \mathfrak{S}^{m_i}$$

muni de l'action naturelle de Γ_F par permutation des facteurs.

On pose la définition suivante :

Définition II.13. –

On dira que la décomposition

$$E = \prod_{1 \le i \le e} E_i^{m_i}$$

est "bien disposée" pour $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ *si :*

(1) *Pour tout* i, $1 \le i \le e$, *et tout* $\iota \in I_i$, $\{\iota\} \times \{1, 2, \ldots, m_i\}$ *correspond à un intervalle de* $\{1, 2, \ldots, r\}$ *dont l'ordre des éléments est le même.*

(2) *La représentation de transfert*

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

envoie $\widehat{G}$ *dans le sous-groupe de Levy standard*

$$\widehat{\mathrm{GL}}_E = \prod_{1 \le i \le e} \prod_{\iota \in I_i} \mathrm{GL}_{m_i}(\mathbb{C}) \,,$$

et elle envoie le sous-groupe de Borel $\widehat{B}$ *de* $\widehat{G}$ *dans le sous-groupe de Borel de* $\widehat{\mathrm{GL}}_E$

$$\widehat{B}_E = \prod_{1 \le i \le e} \prod_{\iota \in I_i} B_{m_i}(\mathbb{C}) = \widehat{\mathrm{GL}}_E \cap B_r(\mathbb{C}) \,.$$

□

Cette définition étant posée, on a la généralisation suivante du lemme II.12 :

Lemme II.14. –

Supposons que $E = \prod\limits_{1 \le i \le e} E_i^{m_i}$ *est "bien disposée" pour* ρ *au sens de la définition précédente.*

Notons $W_{E,\rho}$ *le sous-groupe du groupe de Weyl* W_E *de* GL_E *constitué des éléments* w *qui respectent le sous-tore*

$$\widehat{T} \hookrightarrow \widehat{T}_E = \widehat{T}_r$$

et qui coïncident sur $\widehat{T}$ *avec un élément du groupe de Weyl* W_G *de* G.

Alors :

(i) *L'homomorphisme*

$$W_{E,\rho} \to W_G$$

est surjectif, et son noyau coïncide avec le sous-groupe de $W_E = \prod\limits_{1 \le i \le e} \prod\limits_{\iota \in I_i} \mathfrak{S}^{m_i}$ *constitué des familles de permutations des intervalles* $\{\iota\} \times \{1, 2, \ldots, m_i\}$, $1 \le i \le e$, $\iota \in I_i$, *qui respectent la partition de chaque tel intervalle définie par la relation d'égalité entre caractères* ρ_T^j, $1 \le j \le r$.

(ii) *La restriction de cet homomorphisme*

$$W_{E,\rho} \to W_G$$

au sous-groupe

$$\left\{ w \in W_{E,\rho} \mid w \text{ respecte la relation d'ordre de chaque classe } \{1 \le j \le r \mid \rho_T^j = \mu\} \,,\ \forall\, \mu \in X_{\widehat{T}} \right\}$$

est un isomorphisme Γ_F*-équivariant.*

Cet isomorphisme identifie donc W_G *muni de l'action de* Γ_F *à un sous-groupe de* $W_{E,\rho} \subset W_E$.

Démonstration :

Elle est semblable à celle du lemme II.12. □

On déduit des lemmes II.12 et II.14 ci-dessus :

Corollaire II.15. –

(i) *Si G est déployé sur F et Γ_F agit trivialement sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de ρ, identifions W_G à un sous-groupe de $\mathfrak{S}^{r,\rho} \subset \mathfrak{S}^r$ comme dans le lemme* II.12.
Alors l'homomorphisme W_G-équivariant

$$\rho_T^\vee : T_r \to T$$

dual de $\rho_T : \widehat{T} \hookrightarrow \widehat{T}_r$, et le morphisme

$$T_r \hookrightarrow \overline{T}_r = (\mathbb{A}^1)^r \xrightarrow{T_r} \mathbb{A}^1$$

invariant par l'action de $\mathfrak{S}^r$, définissent un diagramme

$$\begin{tikzcd} T_r/W_G \arrow[r, hook] \arrow[d] & \overline{T}_r/W_G \arrow[r, "T_r"] & \mathbb{A}^1 \\ T/W_G & & \end{tikzcd}$$

de schémas sur F.

(ii) *Plus généralement, si $E = \prod_{1 \leq i \leq e} E_i^{m_i}$ est "bien disposée" pour ρ au sens de la définition* II.13, *identifions W_G à un sous-groupe de $W_{E,\rho} \subset W_E$ comme dans le lemme* II.14.
Alors l'homomorphisme

$$\rho_T^\vee : T_E \to T$$

dual du plongement $W_G \rtimes \Gamma_F$-équivariant

$$\rho_T : \widehat{T} \hookrightarrow \widehat{T}_E\,,$$

et le morphisme

$$T_E \hookrightarrow \overline{T}_E = \mathrm{Res}_{E/F}\,\mathbb{A}^1 \xrightarrow{T_r} \mathbb{A}^1$$

invariant par la double action de W_E et de Γ_F, définissent un diagramme

$$\begin{tikzcd} T_E/W_G \arrow[r, hook] \arrow[d] & \overline{T}_E/W_G \arrow[r, "T_r"] & \mathbb{A}^1 \\ T/W_G & & \end{tikzcd}$$

de schémas sur F.

Remarque :

Pour tout corps $F' \supset F$, toute fibre de

$$\rho_T^\vee : (T_E/W_G)(F') \to (T/W_G)(F')$$

au-dessus d'un point $\bar{t} \in (T/W_G)(F')$ qui admet un relèvement $t \in T(F')$ s'identifie à la fibre de

$$\rho_T^\vee : T_E(F') \to T(F')$$

au-dessus du point $t \in T(F')$. $\square$

Toujours sous les hypothèses du corollaire II.15, considérons le faisceau libre T_E-équivariant et W_G-équivariant

$$\Omega_{T_E/T}$$

des différentielles relatives de T_E au-dessus de T.

Son quotient par l'action de W_G s'identifie au faisceau localement libre des différentielles relatives de T_E/W_G au-dessus de T/W_G.

La puissance extérieure maximale de $\Omega_{T_E/T}$ est engendrée par une section $\omega_{T_E/T}$ qui est invariante par l'action de T_E, F-rationnelle et sur laquelle W_G agit par un caractère $W_G \to \{\pm 1\}$. Cette section $\omega_{T_E/T}$ ne provient pas nécessairement d'une forme différentielle de degré maximal de T_E/W_G au-dessus de T/W_G, mais elle suffit à définir une forme de volume $d\,|\omega_{T_E/T}|$ sur les fibres de $T_E/W_G \to T/W_G$ au-dessus des points de T/W_G à valeurs dans un F_x.

On a :

Lemme II.16. –

Toujours sous les hypothèses du corollaire II.15*, on a en toute place x de F :*

(i) *L'opérateur*

$$(\rho_T^\vee)_* = \int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(\bullet)} dt_\rho$$

d'intégration le long des fibres de

$$\rho_T^\vee : T_E\,(F_x) \to T(F_x)$$

est défini, modulo multiplication par une constante fixe, par la forme différentielle relative de degré maximal $\omega_{T_E/T}$.

(ii) *Par conséquent, il se prolonge en un opérateur encore noté*

$$(\rho_T^\vee)_* = \int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(\bullet)} dt_\rho$$

d'intégration le long des fibres de

$$\rho_T^\vee : (T_E/W_G)(F_x) \to (T/W_G)(F_x)\,,$$

qui est défini, modulo multiplication par la même constante, par la forme de volume $d\,|\omega_{T_E/T}|$.

□

On peut maintenant énoncer :

Proposition II.17. –

Toujours sous les hypothèses du corollaire II.15*, considérons une place arbitraire $x \in |F|$.*

Alors la fonction

$$\begin{array}{rcl} k_x^{\rho_T} : T(F_x) & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \displaystyle\int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(t)} dt_\rho \cdot \psi_x \circ \mathrm{Tr}\,(t_\rho) \end{array}$$

se prolonge naturellement en la fonction, que nous noterons de la même façon,

$$\begin{array}{rcl} k_x^{\rho_T} : (T/W_G)(F_x) & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \displaystyle\int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(t)} dt_\rho \cdot \psi_x \circ \mathrm{Tr}\,(t_\rho) = \lim_{a \mapsto 0} \int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(t)} dt_\rho \cdot \psi_x \circ \mathrm{Tr}\,(t_\rho) \cdot \mathbb{1}_x(a \cdot t_\rho) \end{array}$$

où

$$\mathbb{1}_x : (\overline{T}_E/W_G)(F_x) \to 0$$

désigne n'importe quelle fonction localement constante à support compact [resp. de classe C^∞ à décroissance rapide si x est une place archimédienne] qui vaut 1 dans un voisinage du point 0 de $(\overline{T}_E/W_G)(F_x)$.

Remarque :

En toute place x de F, la fonction

$$k_x^{\rho_T} : (T/W_G)(F_x) \to \mathbb{C}$$

peut être vue comme une fonction

$$k_x^{\rho_T} : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

qui est invariante par conjugaison, et même par conjugaison stable.

Elle vérifie aussi la propriété $\overline{k_x^{\rho_T}(g)} = k_x^{\rho_T}(-g)$, $\forall\, g \in G(F_x)$.

Mais attention ! Nous ne disons pas que cette fonction est la fonction invariante

$$k_x^{\rho} : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

recherchée dans le problème I.4. En fait, on verra au chapitre III qu'elle ne l'est pas déjà dans les cas où $\widehat{G} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mu_k$ et $\rho = \mathrm{sym}^k$, $k \geq 2$.

Exemple :

Si $\widehat{G} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mu_2$ et ρ est le carré symétrique

$$\mathrm{sym}^2 : \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mu_2 \to \mathrm{GL}_3(\mathbb{C}) ,$$

les éléments de

$$G = \mathrm{GL}_2 \times_{\mathbb{G}_m} \mathbb{G}_m$$

s'écrivent comme des paires $(g, \det(g)^{1/2})$ avec $g \in \mathrm{GL}_2$.

Par conséquent, en toute place x de F, $k_x^{\rho_T}$ doit être une fonction de $\mathrm{Tr}\,(g) \in F_x$ et $\det(g)^{1/2} \in F_x^\times$.

Comme $\rho_T^\vee$ s'écrit

$$(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \mapsto (\lambda_1\, \lambda_2^2 = \mu_1\, ,\ \lambda_0^2\, \lambda_1 = \mu_2\, ,\ \lambda_0\, \lambda_1\, \lambda_2 = (\mu_1\, \mu_2)^{1/2}) ,$$

le sous-tore T_ρ est constitué des triplets

$$(\mu, \mu^{-2}, \mu)$$

et l'action de $W_G = \mathfrak{S}^2$ sur T_ρ est triviale.

On en déduit facilement que, pour tout

$$(g, \det(g)^{1/2}) \in G(F_x) ,$$

on a

$$k_x^{\rho_T}(g, \det(g)^{1/2}) = \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \psi_x(\mu + \mu^{-2} \cdot (\mathrm{Tr}\,(g) + 2 \cdot \det(g)^{1/2}))$$

où $d\mu$ désigne une mesure multiplicative de $F_x^\times$. $\square$

Exposé III.
Le cas de GL_2 : étude locale (encore formelle)
(Laurent Lafforgue, IHES, 3 juillet 2014)

1 Compatibilité avec le passage aux termes constants

On se place toujours sur le corps global F.

Considérant un entier $k \geq 1$, on note
$$\widehat{G} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mu_k$$
le groupe réductif sur $\mathbb{C}$ quotient de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ par le groupe fini $\mu_k = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid z^k = 1\}$, et ρ la représentation de transfert
$$\begin{array}{ccc} \widehat{G} & \hookrightarrow & \mathrm{GL}_{k+1}(\mathbb{C}) \\ g & \mapsto & \mathrm{sym}^k(g)\,. \end{array}$$
Le groupe réductif $\widehat{G}$ admet pour tore maximal
$$\widehat{T} = T_2(\mathbb{C})/\mu_k = (\mathbb{C}^\times)^2/\mu_k$$
avec donc
$$X_{\widehat{T}} = \left\{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid n_1 + n_2 \in k\,\mathbb{Z}\right\}$$
et
$$X_{\widehat{T}}^\vee = \left\{(r_1, r_2) \in \mathbb{Q}^2 \mid r_1, r_2 \in \frac{1}{k}\,\mathbb{Z} \ \wedge \ r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Le groupe réductif $\widehat{G}$ sur $\mathbb{C}$ est le dual du groupe réductif G déployé sur F qui s'inscrit dans le carré cartésien
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathrm{GL}_2 \arrow[d, "\det"] \\ \mathbb{G}_m \arrow[r, "\lambda \mapsto \lambda^k"'] & \mathbb{G}_m \end{tikzcd}$$
et dont le tore maximal T s'inscrit dans le carré cartésien :
$$\begin{tikzcd} T \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & T_2 = \mathbb{G}_m^2 \arrow[d, "{(\mu_1,\mu_2) \mapsto \mu_1\mu_2}"] \\ \mathbb{G}_m \arrow[r, "\lambda \mapsto \lambda^k"'] & \mathbb{G}_m \end{tikzcd}$$

Ainsi, les points de G peuvent être notés comme des couples
$$\left(g, \det(g)^{1/k}\right)$$

où

$$g = \begin{pmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} \\ g_{2,1} & g_{2,2} \end{pmatrix}$$

est un point de GL_2 et $\det(g)^{1/k}$ est une racine k-ième de $\det(g)$ dans $\mathbb{G}_m$.

De même, les points de T peuvent être notés comme des triplets

$$\left(\mu_1, \mu_2, (\mu_1\, \mu_2)^{1/k}\right)$$

où μ_1, μ_2 sont deux points de $\mathbb{G}_m$ et $(\mu_1\, \mu_2)^{1/k}$ est une racine k-ième de $\mu_1\, \mu_2$ dans $\mathbb{G}_m$.

L'homomorphisme injectif de tores induit par ρ

$$\begin{array}{rcl} \rho_T : \widehat{T} = (\mathbb{C}^\times)^2/\mu_k & \to & \widehat{T}_{k+1} = (\mathbb{C}^\times)^{k+1} \\ (\lambda_1, \lambda_2) & \mapsto & \left(\lambda_1^k, \lambda_1^{k-1}\,\lambda_2, \ldots, \lambda_1\,\lambda_2^{k-1}, \lambda_2^k\right) \end{array}$$

admet pour dual l'épimorphisme

$$\begin{array}{rcl} \rho_T^\vee : T_{k+1} = \mathbb{G}_m^{k+1} & \to & \widehat{T} = \mathbb{G}_m^2 \times_{\mathbb{G}_m} \mathbb{G}_m \\ (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) & \mapsto & \left(\lambda_0^k\,\lambda_1^{k-1} \ldots \lambda_{k-1} = \mu_1, \lambda_1\,\lambda_2^2 \ldots \lambda_k^k = \mu_2, \lambda_0\,\lambda_1 \ldots \lambda_k = (\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right). \end{array}$$

Celui-ci est équivariant pour l'action du groupe de Weyl $W_G = \mathfrak{S}^2$ de G sur $T_{k+1} = \mathbb{G}_m^{k+1}$ par la permutation

$$\lambda_i \mapsto \lambda_{k-i}\,, \qquad 0 \le i \le k\,,$$

et donc on a un morphisme induit de schémas sur F

$$T_{k+1}/W_G \to T/W_G\,.$$

D'autre part, le noyau T_ρ de $\rho_T^\vee : T_{k+1} \to T$ est le sous-tore de codimension 2 de $T_{k+1} = \mathbb{G}_m^{k+1}$ défini par les deux équations

$$\lambda_0\,\lambda_1 \ldots \lambda_k = 1 \qquad \text{et} \qquad \lambda_1\,\lambda_2^2 \ldots \lambda_k^k = 1\,.$$

Il est stable par l'action du groupe de Weyl $W_G = \mathfrak{S}^2$ de G.

On remarque au passage que, dans le cas particulier $k = 2$, T_ρ est le sous-tore de dimension 1 de $T_3 = \mathbb{G}_m^3$ constitué des triplets de la forme $(\lambda, \lambda^{-2}, \lambda)$. Ses points sont fixés par l'action sur T_3 de $W_G = \mathfrak{S}^2$ si bien que, dans ce cas, T_ρ agit sur T_3/W_G et T/W_G s'identifie au quotient de T_3/W_G par l'action de T_ρ.

Dans le cas général, le morphisme

$$\begin{array}{rcl} \overline{T}_{k+1} = (\mathbb{A}^1)^{k+1} & \xrightarrow{\mathrm{Tr}} & \mathbb{A}^1 \\ (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) & \mapsto & \lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_k \end{array}$$

est invariant par l'action de $W_G = \mathfrak{S}^2$, donc se factorise en un morphisme

$$\overline{T}_{k+1}/W_G \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \mathbb{A}^1$$

qui s'inscrit dans un diagramme de schémas sur F :

$$\begin{tikzcd} T_{k+1}/W_G \arrow[r, hook] \arrow[d, "\rho_T^\vee"] & \overline{T}_{k+1}/W_G \arrow[r, "\mathrm{Tr}"] & \mathbb{A}^1 \\ T/W_G & & \end{tikzcd}$$

On rappelle d'autre part que l'on a choisi une fois pour toutes un caractère continu unitaire non trivial

$$\psi = \prod_{x\,\in\,|F|} \psi_x : \mathbb{A}_F/F \to \mathbb{C}^\times \, .$$

En toute place x de F, on dispose donc de l'application composée

$$\psi_x \circ \mathrm{Tr} : (T_{k+1}/W_G)\,(F_x) \hookrightarrow \left(\overline{T}_{k+1}/W_G\right)(F_x) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} F_x \xrightarrow{\psi_x} \mathbb{C}^\times \, .$$

La fonction noyau $k_x^{\rho_T}$ de la ρ_T-transformation de Fourier sur $T(F_x)$

$$\begin{array}{rcl} k_x^{\rho_T} : T(F_x) & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \displaystyle\int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(t)} dt_\rho \cdot \psi_x(\mathrm{Tr}\,(t_\rho)) \end{array}$$

provient donc d'une fonction

$$\begin{array}{rcl} k_x^{\rho_T} : (T/W_G)(F_x) & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \displaystyle\int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(t)} dt_\rho \cdot \psi_x(\mathrm{Tr}\,(t_\rho)) = \lim_{a\,\mapsto\,0} \int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(t)} dt_\rho \cdot \psi_x(\mathrm{Tr}\,(t_\rho)) \cdot \mathbb{1}_x(a \cdot t_\rho) \end{array}$$

où $\mathbb{1}_x$ désigne n'importe quelle fonction localement constante à support compact [resp. de classe C^∞ à décroissance rapide si x est une place archimédienne] sur $(\overline{T}_{k+1}/W_G)(F_x)$ qui est égale à 1 dans un voisinage du point 0.

Comme le schéma affine quotient de G par l'action par conjugaison de G s'identifie à T/W_G, la fonction

$$k_x^{\rho_T} : (T/W_G)(F_x) \to \mathbb{C}$$

en toute place $x \in |F|$ peut être vue comme une fonction

$$G(F_x) \to \mathbb{C}$$

qui est invariante par conjugaison.

Le centre

$$Z_{\widehat{G}} = \mathbb{C}^\times/\mu_k \cong \mathbb{C}^\times$$

de $\widehat{G}$ agit sur l'espace $\mathbb{C}^{k+1}$ de

$$\rho = \mathrm{sym}^k : \widehat{G} \to \mathrm{GL}_{k+1}(\mathbb{C})$$

par le cocaractère

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\det}_G : \mathbb{C}^\times & \xrightarrow{\sim} & Z_{\widehat{G}} \\ \lambda & \longmapsto & \lambda \overset{\rho}{\longmapsto} \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} . \end{array}$$

Il lui correspond le caractère défini sur F

$$\det_G : G \to \mathbb{G}_m$$

dont le composé

$$T_{k+1} \xrightarrow{\rho_T^\vee} T \xrightarrow{\det_G} \mathbb{G}_m$$

n'est autre que

$$\det_{k+1} : (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) \mapsto \lambda_0\, \lambda_1 \ldots \lambda_k \,.$$

D'autre part, parmi les poids de la représentation irréductible ρ

$$\begin{array}{rcl} \rho_T^i : \widehat{T} = (\mathbb{C}^\times)^2/\mu_k & \to & \mathbb{C} \\ (\lambda_1, \lambda_2) & \mapsto & \lambda_1^{k-i}\, \lambda_2^i \,, \quad 0 \le i \le k \,, \end{array}$$

on distingue le poids dominant qui est

$$\rho_T^0 : (\lambda_1, \lambda_2) \mapsto \lambda_1^k \,.$$

Il correspond au cocaractère

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{G}_m & \to & T = \mathbb{G}_m^2 \times_{\mathbb{G}_m} \mathbb{G}_m \\ \lambda & \mapsto & (\lambda^k, 1, \lambda) \,. \end{array}$$

Enfin, le caractère modulaire δ_B associé au sous-groupe de Borel B de G constitué des matrices triangulaires supérieures est

$$\begin{array}{rcl} \delta_B : T & \to & \mathbb{G}_m \\ \Big(\mu_1, \mu_2, (\mu_1\, \mu_2)^{1/k}\Big) & \mapsto & \mu_1\, \mu_2^{-1} \,. \end{array}$$

Alors

$$\begin{array}{rcl} \det_B : G & \to & \mathbb{G}_m \\ \Big(g, \det(g)^{1/k}\Big) & \mapsto & \det(g) \end{array}$$

est l'unique caractère qui, considéré comme un élément de $X_T = X_{\widehat{T}}^\vee$, vérifie

$$\langle \det_B, \rho_T^0 \rangle = \langle \delta_B, \rho_T^0 \rangle \,.$$

Ainsi, on dispose sur G des trois caractères

$$\begin{array}{rcl} \det_G : G & \to & \mathbb{G}_m \\ \Big(g, \det(g)^{1/k}\Big) & \mapsto & \det(g)^{1/k} \,, \end{array}$$

$$\det_B = (\det_G)^k$$

et

$$\det_\rho = \det_G \cdot \det_B = (\det_G)^{k+1} \,.$$

Rappelons l'énoncé du problème I.4 dans le cas où nous sommes :

Problème III.1. –

Étant donné un entier $k \ge 1$, considérons la représentation de transfert

$$\rho = \mathrm{sym}^k : \widehat{G} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mu_k \to \mathrm{GL}_{k+1}(\mathbb{C})$$

du groupe réductif déployé

$$G = \mathrm{GL}_2 \times_{\mathbb{G}_m} \mathbb{G}_m$$

muni de ses trois caractères

$$\det_G \,, \quad \det_B = (\det_G)^k \quad \textit{et} \quad \det_\rho = \det_G \cdot \det_B \,.$$

En toute place x de F, on voudrait munir $G(F_x)$ de

$$\begin{cases} \bullet \text{ une mesure } d_\rho\, g \text{ que les translations à gauche ou à droite transforment par le caractère } |\det_\rho(\bullet)|_x, \\ \bullet \text{ une fonction invariante par conjugaison} \\ \qquad\qquad G(F_x) \to \mathbb{C} \\ \qquad\qquad g \mapsto k_x^G(g) \end{cases}$$

de telle façon que l'opérateur de ρ-transformation de Fourier associé

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x = \left[g' \mapsto \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f_x(g) \cdot k_x^\rho(g\, g') \right]$$

vérifie les propriétés suivantes :

(1) *Pour toute fonction localement constante à support compact [resp. de classe C^∞ à décroissance rapide si x est archimédienne]*

$$f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}\,,$$

le produit

$$\begin{array}{rcl} |\det_B|_x^{1/2} \cdot f_{x,N_B} : T(F_x) & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & |\det_B(t)|_x^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{-1/2} \cdot \displaystyle\int_{N_B(F_x)} du \cdot f_x(u \cdot t) \end{array}$$

admet pour ρ_T-transformée de Fourier sur $T(F_x)$ le produit

$$\begin{array}{rcl} |\det_B|_x^{1/2} \cdot (\widehat{f}_x)_{N_B} : T(F_x) & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & |\det_B(t)|_x^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{1/2} \cdot \displaystyle\int_{N_B(F_x)} du \cdot \widehat{f}_x(t \cdot u)\,. \end{array}$$

(2) *L'opérateur*

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x$$

est unitaire, c'est-à-dire préserve le produit hermitien

$$(f_1, f_2) \mapsto \langle f_1, f_2 \rangle = \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f_1(g) \cdot \overline{f_2(g)}\,.$$

Remarque :

D'après le lemme I.3, un opérateur de cette forme

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x = \left[g' \mapsto \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f_x(g) \cdot k_x^\rho(g\, g') \right]$$

vérifiera nécessairement les formules de transformation par les translations

$$\widehat{f_x^g} = |\det_\rho(g)|_x^{-1} \cdot {}^{g^{-1}}\widehat{f}_x\,,$$

$$\widehat{{}^g f_x} = |\det_\rho(g)|_x^{-1} \cdot \widehat{f}_x^{\,g^{-1}}\,,$$

pour toute fonction $f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$ et tout $g \in G(F_x)$. □

Les points de $G(F_x)$ sont les couples

$$\left(g, \det(g)^{1/k}\right)$$

composés de $g \in \mathrm{GL}_2(F_x)$ et $\det(g)^{1/k} \in F_x^\times$.

Par conséquent, les fonctions

$$G(F_x) \to \mathbb{C}$$

invariantes par conjugaison sont les fonctions de $\det(g)^{1/k} \in F_x^\times$ et $\mathrm{Tr}\,(g) \in F_x$.

Faisant une transformation de Fourier partielle en la variable $\mathrm{Tr}\,(g)$, on peut chercher ces fonctions sous la forme

$$k_x^\rho\left(g, \det(g)^{1/k}\right) = \int_{F_x} d\mu \cdot \psi_x(\mu \cdot \mathrm{Tr}\,(g)) \cdot \widehat{k}_x^\rho\left(\mu, \det(g)^{1/k}\right)$$

où $d\mu$ désigne une mesure additive de F_x.

On a :

Proposition III.2. (modulo vérification des convergences et de la légitimité des échanges de sommations) – *Considérons une fonction invariante par conjugaison*

$$k_x^\rho : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

écrite sous la forme

$$k_x^\rho\left(g, \det(g)^{1/k}\right) = \int_{F_x} d\mu \cdot \psi_x(\mu \cdot \mathrm{Tr}\,(g)) \cdot \widehat{k}_x^\rho\left(\mu, \det(g)^{1/k}\right)$$

pour une certaine mesure additive $d\mu$ de F_x.

Alors l'opérateur de ρ-transformation de Fourier associé

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x = \left[g' \mapsto \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f_x(g) \cdot k_x^\rho(g\, g')\right]$$

vérifie la propriété (1) *du problème* III.1*, de compatibilité avec le passage aux termes constants*

$$f_x \mapsto f_{x,N_B}\,,$$

si et seulement si on a, pour tout élément $t = \left(\mu_1, \mu_2, (\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right) \in T(F_x)$,

$$\begin{aligned} k_x^{\rho_T}\left(\mu_1, \mu_2, (\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right) &= \int_{F_x} d\mu \cdot |\mu|_x^{-1} \cdot \widehat{k}_x^\rho\left(\mu, (\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right) \cdot \psi_x\left(\mu \cdot (\mu_1 + \mu_2)\right) \\ &= \int_{F_x^\times} d^\times\mu \cdot \widehat{k}_x^\rho\left(\mu, (\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right) \cdot \psi_x\left(\mu \cdot (\mu_1 + \mu_2)\right) \end{aligned}$$

où $d^\times\mu$ désigne la mesure multiplicative $|\mu|_x^{-1} \cdot d\mu$ de $F_x^\times$.

Remarques :

(i) Ainsi, la propriété (1) et la connaissance du noyau $k_x^{\rho_T}$ sur $T(F_x)$ ne déterminent la fonction k_x^ρ sur $G(F_x)$ que si la projection

$$T(F_x) \to (T/W_G)(F_x)$$

est surjective. Cela ne se produit que si F_x est algébriquement clos, soit $F_x \cong \mathbb{C}$.

(ii) La restriction de la fonction k_x^ρ à $T(F_x)$ ne coïncide pas avec la fonction $k_x^{\rho_T}$. Pour passer de l'une à l'autre, il faut remplacer la mesure additive $d\mu$ sur F_x par la mesure multiplicative $d^\times\mu = |\mu|_x^{-1} \cdot d\mu$ dans leurs représentations de Fourier.

Exemple :

Si $k=2$, on a pour tout élément $t = \left(\mu_1, \mu_2, (\mu_1\,\mu_2)^{1/2}\right)$ de $T(F_x)$

$$k_x^{\rho_T}\left(\mu_1, \mu_2, (\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right) = \int_{F_x^\times} d\mu \cdot \psi_x\left(\mu^{-1} + \mu^2 \cdot \left(\mu_1 + \mu_2 + 2\,(\mu_1\,\mu_2)^{1/2}\right)\right) .$$

La fonction sur $G(F_x)$ invariante par conjugaison

$$k_x^\rho\left(g, \det(g)^{1/2}\right) = \int_{F_x^\times} d\mu \cdot |\mu|_x^2 \cdot \psi_x\left(\mu^{-1} + \mu^2 \cdot \left(\mu_1 + \mu_2 + 2\,(\mu_1\,\mu_2)^{1/2}\right)\right)$$

satisfait donc la propriété (1) du problème III.1.

Démonstration :

Écrivons les éléments $\left(g, \det(g)^{1/k}\right)$ de $G(F_x)$ sous la forme

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_1 \cdot u \\ \mu_1 \cdot v & \mu_2 + \mu_1 \cdot uv \end{pmatrix}$$

avec $\mu_1, \mu_2 \in F_x^\times$ et $u, v \in F_x$, d'où aussi

$$\det(g) = \mu_1\,\mu_2 .$$

On a :

Lemme III.3. –

Écrivant les éléments de $\mathrm{GL}_2(F_x)$ *sous la forme*

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_1 \cdot u \\ \mu_1 \cdot v & \mu_2 + \mu_1 \cdot uv \end{pmatrix},$$

on a :

(i) *La mesure invariante* dg *de* $\mathrm{GL}_2(F_x)$ *s'écrit à une constante multiplicative près comme un produit*

$$|\delta_B(\mu_1, \mu_2)|_x \cdot d\mu_1 \cdot d\mu_2 \cdot du \cdot dv = \left|\frac{\mu_1}{\mu_2}\right|_x \cdot d\mu_1 \cdot d\mu_2 \cdot du \cdot dv$$

où $d\mu_1, d\mu_2$ *sont des mesures multiplicatives de* $F_x^\times$, *et* du, dv *des mesures additives de* F_x.

(ii) *La mesure* $d_\rho\, g$ *de* $\mathrm{GL}_2(F_x)$ *s'écrit à une constante multiplicative près comme le produit*

$$\left|(\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right|_x \cdot |\mu_1|_x^2 \cdot d\mu_1 \cdot d\mu_2 \cdot du \cdot dv .$$

$\square$

Suite de la démonstration de la proposition III.2 :

Pour $\left(\mu_1', \mu_2', (\mu_1'\,\mu_2')^{1/k}\right) \in T(F_x)$ et $u' \in F_x$, on a

$$\begin{aligned} & \widehat{f}_x\left(\left(\begin{pmatrix} \mu_1' & 0 \\ 0 & \mu_2' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (\mu_1'\,\mu_2')^{1/k}\right)\right) \\ = & \int \left|(\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right|_x \cdot |\mu_1|_x^2 \cdot d\mu_1 \cdot d\mu_2 \cdot du \cdot dv \cdot f_x\left(\left(\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_1 \cdot u \\ \mu_1 \cdot v & \mu_2 + \mu_1 \cdot uv \end{pmatrix}, (\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right)\right) \\ \cdot & \int_{F_x} d\mu \cdot \widehat{k}_x^\rho\left(\mu, (\mu_1\,\mu_2\,\mu_1'\,\mu_2')^{1/k}\right) \cdot \psi_x\left(\mu \cdot (\mu_1\,\mu_1' + \mu_2\,\mu_2' + \mu_1\,\mu_2' \cdot uv + \mu_1\,\mu_1' \cdot u'v)\right) . \end{aligned}$$

En intégrant pour la mesure additive du', puis multipliant par le caractère

$$\left|\delta_B\left(\mu'_1,\mu'_2,(\mu'_1\,\mu'_2)^{1/k}\right)\right|_x^{1/2} = \left|\frac{\mu'_1}{\mu'_2}\right|_x^{1/2},$$

on obtient en faisant un échange de sommations

$$\begin{aligned}
&\left|\delta_B\left(\mu'_1,\mu'_2,(\mu'_1\,\mu'_2)^{1/k}\right)\right|_x^{1/2} \cdot \int_{F_x} du' \cdot \widehat{f}_x\left(\begin{pmatrix}\mu'_1 & 0\\ 0 & \mu'_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & u'\\ 0 & 1\end{pmatrix}, (\mu'_1\,\mu'_2)^{1/k}\right)\\
= \;& |\mu'_1\,\mu'_2|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int \left|(\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right|_x \cdot |\mu_1|_x \cdot d\mu_1 \cdot d\mu_2 \cdot du \cdot f_x\left(\begin{pmatrix}\mu_1 & \mu_1\cdot u\\ 0 & \mu_2\end{pmatrix}, (\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right)\\
\cdot \;& \int_{F_x} d\mu \cdot |\mu|_x^{-1} \cdot \widehat{k}_x^\rho\left(\mu, (\mu_1\,\mu_2\,\mu'_1\,\mu'_2)^{1/k}\right) \cdot \psi_x\left(\mu\cdot(\mu_1\,\mu'_1 + \mu_2\,\mu'_2)\right)
\end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{aligned}
&(\widehat{f}_x)_{N_B}\left(\mu'_1,\mu'_2,(\mu'_1\,\mu'_2)^{1/k}\right)\cdot|\mu'_1\,\mu'_2|_x^{1/2}\\
= \;& \int \left|(\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right|_x \cdot d\mu_1 \cdot d\mu_2 \cdot f_{x,N_B}\left(\begin{pmatrix}\mu_1 & 0\\ 0 & \mu_2\end{pmatrix}, (\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right)\\
\cdot \;& |\mu_1\,\mu_2|_x^{1/2} \cdot k_x^{\rho_T}\left(\mu_1\,\mu'_1, \mu_2\,\mu'_2, (\mu_1\,\mu'_1\,\mu_2\,\mu'_2)^{1/k}\right).
\end{aligned}$$

C'est le résultat annoncé. $\square$

2 Unitarité

Pour $k \geq 1$, on considère toujours la représentation de transfert

$$\rho = \mathrm{sym}^k : \widehat{G} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mu_k \hookrightarrow \mathrm{GL}_{k+1}(\mathbb{C})$$

du revêtement de degré k

$$G = \mathrm{GL}_2 \times_{\mathbb{G}_m} \mathbb{G}_m$$

de GL_2.

Étant donnée une place arbitraire x de F, on considère une fonction noyau

$$k_x^\rho : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

écrite sous la forme

$$k_x^\rho(g) = \int_{F_x} d\mu \cdot \psi_x(\mu \cdot \mathrm{Tr}\,(g)) \cdot \widehat{k}_x^\rho\left(\mu, \det(g)^{1/k}\right)$$

et qui satisfait les hypothèses et la conclusion de la proposition III.2.

Cette fonction noyau définit la ρ-transformation de Fourier

$$f \mapsto \widehat{f} = \left[g' \mapsto \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f(g) \cdot k_x^\rho(g\,g')\right]$$

qui est bien définie au moins pour les fonctions continues à support compact

$$f : G(F_x) \to \mathbb{C}\,.$$

On voudrait maintenant que pour toutes telles fonctions continues à support compact

$$f', f'' : G(F_x) \to \mathbb{C}\,,$$

on ait

$$\int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot \widehat{f}'(g) \cdot \overline{\widehat{f}''(g)} = \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f'(g) \cdot \overline{f''(g)}\,.$$

Développons l'intégrale de gauche en

$$\int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot \widehat{f}'(g) \cdot \overline{\widehat{f}''(g)} = \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot \int_{G(F_x)\times G(F_x)} d_\rho\, g' \cdot d_\rho\, g'' \cdot f'(g') \cdot \overline{f''(g'')} \cdot k_x^\rho(g\,g') \cdot \overline{k_x^\rho(g\,g'')}\,,$$

et écrivons les éléments $g \in G(F_x)$ sous la forme

$$g = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (\mu_1\,\mu_2)^{1/k} \right)$$

avec, d'après le lemme III.3(ii),

$$d_\rho\, g = |\mu_1\,\mu_2|_x^{1/k} \cdot |\mu_1|_x^2 \cdot d\mu_1 \cdot d\mu_2 \cdot du \cdot dv$$

à une constante multiplicative près.

D'autre part, on a

$$k_x^\rho(g\,g') = \int_{F_x} d\mu' \cdot \psi_x(\mu' \cdot \mathrm{Tr}\,(g\,g')) \cdot \widehat{k}_x^\rho \left(\mu', \det(g\,g')^{1/k}\right)$$

et

$$\overline{k_x^\rho(g\,g'')} = \int_{F_x} d\mu'' \cdot \psi_x(-\mu'' \cdot \mathrm{Tr}\,(g\,g'')) \cdot \overline{\widehat{k}_x^\rho \left(\mu'', \det(g\,g'')^{1/k}\right)}$$

avec

$$\mathrm{Tr}\,(g\,g') = (g'_{1,1} \cdot \mu_1 + g'_{2,2} \cdot \mu_2) + g'_{2,1} \cdot \mu_1 \cdot u + g'_{1,2} \cdot \mu_1 \cdot v + g'_{2,2} \cdot \mu_1 \cdot uv$$

et

$$\mathrm{Tr}\,(g\,g'') = (g''_{1,1} \cdot \mu_1 + g''_{2,2} \cdot \mu_2) + g''_{2,1} \cdot \mu_1 \cdot u + g''_{1,2} \cdot \mu_1 \cdot v + g''_{2,2} \cdot \mu_1 \cdot uv$$

d'où

$$\begin{array}{rcl} \mu' \cdot \mathrm{Tr}\,(g\,g') - \mu'' \cdot \mathrm{Tr}\,(g\,g'') & = & \mu' \cdot (g'_{1,1} \cdot \mu_1 + g'_{2,2} \cdot \mu_2) - \mu'' \cdot (g''_{1,1} \cdot \mu_1 + g''_{2,2} \cdot \mu_2) \\ & + & (\mu' \cdot g'_{2,1} - \mu'' \cdot g''_{2,1}) \cdot \mu_1 \cdot u \\ & + & (\mu' \cdot g'_{1,2} - \mu'' \cdot g''_{1,2}) \cdot \mu_1 \cdot v \\ & + & (\mu' \cdot g'_{2,2} - \mu'' \cdot g''_{2,2}) \cdot \mu_1 \cdot uv\,. \end{array}$$

Il est clair que si l'on cherche à intégrer ces expressions pour la mesure

$$|\mu_1\,\mu_2|_x^{1/k} \cdot |\mu_1|_x^2 \cdot d\mu_1 \cdot d\mu_2 \cdot du \cdot dv\,,$$

une difficulté apparaît du fait de la présence du terme quadratique

$$(\mu' \cdot g'_{2,2} - \mu'' \cdot g''_{2,2}) \cdot \mu_1 \cdot uv$$

en u et v.

Or on a :

Lemme III.4. –

Soit $K_{x,\emptyset}$ le sous-groupe compact maximal de $G(F_x)$ donné par

$$K_{x,\emptyset} = \begin{cases} G(O_x) & \text{si } x \text{ est une place ultramétrique de } F, \\ 0_2(\mathbb{R}) \times_{\mathbb{R}^\times} \mathbb{R}^\times & \text{si } F_x = \mathbb{R}, \\ U_2(\mathbb{R}) \times_{\mathbb{C}^\times} \mathbb{C}^\times & \text{si } F_x \cong \mathbb{C}. \end{cases}$$

Alors, pour tous $\mu', \mu'' \in F_x^\times$ et tous éléments

$$g', g'' \in G(F_x)\,,$$

il existe un élément $g_\emptyset \in K_{x,\emptyset}$ tel que

$$\mu' \cdot (g' g_\emptyset)_{2,2} - \mu'' \cdot (g'' g_\emptyset)_{2,2} = 0\,.$$

□

Pour $\mu', \mu'' \in F_x^\times$ fixés, on peut donc écrire les paires d'éléments $g', g'' \in G(F_x)$ sous la forme

$$\begin{aligned} g' &= \left(\begin{pmatrix} 1 & u' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1' & 0 \\ 0 & \mu_2' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v' & 1 \end{pmatrix}, (\mu_1'\, \mu_2')^{1/k} \right) \cdot g_\emptyset \\ &= \left(\begin{pmatrix} \mu_1' + \mu_2' \cdot u'v' & \mu_2' \cdot u' \\ \mu_2' \cdot v' & \mu_2' \end{pmatrix}, (\mu_1'\, \mu_2')^{1/k} \right) \cdot g_\emptyset \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g'' &= \left(\begin{pmatrix} 1 & u'' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1'' & 0 \\ 0 & \mu_2'' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v'' & 1 \end{pmatrix}, (\mu_1''\, \mu_2'')^{1/k} \right) \cdot g_\emptyset \\ &= \left(\begin{pmatrix} \mu_1'' + \mu_2'' \cdot u''v'' & \mu_2'' \cdot u'' \\ \mu_2'' \cdot v'' & \mu_2'' \end{pmatrix}, (\mu_1''\, \mu_2'')^{1/k} \right) \cdot g_\emptyset \end{aligned}$$

avec $\mu'' \cdot \mu_2'' = \mu' \cdot \mu_2'$.

De plus, notre mesure sur $G(F_x) \times G(F_x)$ s'écrit dans les nouvelles coordonnées

$$d_\rho\, g' \cdot d_\rho\, g'' = |\mu_1'\, \mu_2'\, \mu_1''\, \mu_2''|_x^{1/k} \cdot |\mu_2'|_x^2 \cdot |\mu_2''|_x^2 \cdot |v' - v''|_x \cdot d\mu_1' \cdot d\mu_2' \cdot d\mu_1'' \cdot du' \cdot dv' \cdot du'' \cdot dv'' \cdot dg_\emptyset$$

pour une mesure invariante $dg_\emptyset$ de $K_{x,\emptyset}$.

Supposons qu'il est légitime de changer l'ordre d'intégration

$$\int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot \int_{G(F_x)} d_\rho\, g' \cdot d_\rho\, g'' \cdot \int_{F_x \times F_x} d\mu' \cdot d\mu''$$

en

$$\int_{F_x \times F_x} d\mu' \cdot d\mu'' \cdot \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot \int_{G(F_x) \times G(F_x)} d_\rho\, g' \cdot d_\rho\, g''\,.$$

D'autre part, introduisons la suite de fonctions de troncature $\mathbb{1}_{x,n}^G$ sur $G(F_x)$ définies comme les fonctions caractéristiques des g tels que, pour tous $g_\emptyset, g_\emptyset' \in K_{x,\emptyset}$, on ait

$$\left|(g_\emptyset\, g\, g_\emptyset')_{i,j}\right|_x \leq n\,, \qquad \forall\, i,j \in \{1,2\}\,,$$

et

$$\frac{1}{n^2} \leq \left|\det(g_\emptyset\, g\, g_\emptyset')_{i,j}\right|_x \leq n^2\,.$$

La mesure $\int_{G(F_x)} d_\rho\, g$ est la limite quand $n \mapsto +\infty$ des $\int_{G(F_x)} \mathbb{1}^G_{x,n}(g) \cdot d_\rho\, g$ et, pour tout n fixé, les sommations $\int_{G(F_x)} \mathbb{1}^G_{x,n}(g) \cdot d_\rho\, g$ et $\int_{G(F_x)\times G(F_x)} d_\rho\, g' \cdot d_\rho\, g''$ peuvent être échangées dans nos intégrales.

En utilisant le fait que les mesures $\int_{G(F_x)} \mathbb{1}^G_{x,n}(g) \cdot d_\rho\, g$ sont invariantes à gauche et à droite par $K_{x,\emptyset}$, on obtient que le produit hermitien

$$\int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot \widehat{f'}(g) \cdot \overline{\widehat{f''}(g)}$$

est égal, à une constante multiplicative près, à la limite

$$\begin{aligned}
\lim_{n\mapsto+\infty} \quad & \int_{F_x\times F_x} d\mu' \cdot d\mu'' \cdot \int \mathbb{1}^G_{x,n}\left(\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_1 \cdot u \\ \mu_1 \cdot v & \mu_2 + \mu_1 \cdot uv \end{pmatrix}\right) \cdot |\mu_1\,\mu_2|_x^{1/k} \cdot |\mu_1|_x^2 \cdot d\mu_1 \cdot d\mu_2 \cdot du \cdot dv \\
\cdot \quad & \int_{\mu''\mu_2''=\mu'\mu_2'} |\mu_1'\,\mu_2'\,\mu_1''\,\mu_2''|^{1/k} \cdot |\mu_2'|_x^2 \cdot |\mu_2''|_x^2 \cdot d\mu_1' \cdot d\mu_2' \cdot d\mu_1'' \cdot |v'-v''|_x \cdot du' \cdot du'' \cdot dv' \cdot dv'' \\
\cdot \quad & f'\left(\begin{pmatrix} \mu_1' + \mu_2' \cdot u'v' & \mu_2' \cdot u' \\ \mu_2' \cdot v' & \mu_2' \end{pmatrix}, (\mu_1'\,\mu_2')^{1/k}\right) \cdot \overline{f''\left(\begin{pmatrix} \mu_1'' + \mu_2'' \cdot u''v'' & \mu_2'' \cdot u'' \\ \mu_2'' \cdot v'' & \mu_2'' \end{pmatrix}, (\mu_1''\,\mu_2'')^{1/k}\right)} \\
\cdot \quad & \widehat{k}_x^\rho\left(\mu', (\mu_1'\,\mu_2')^{1/k} \cdot (\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right) \cdot \overline{\widehat{k}_x^\rho\left(\mu'', (\mu_1''\,\mu_2'')^{1/k} \cdot (\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right)} \\
\cdot \quad & \psi_x(\mu' \cdot \mu_1\,\mu_1' - \mu'' \cdot \mu_1\,\mu_1'') \cdot \psi_x(\mu_1\,\mu'\,\mu_2' \cdot u'v' - \mu_1\,\mu''\,\mu_2'' \cdot u''v'') \\
\cdot \quad & \psi_x\left((\mu'\,\mu_2' \cdot v' - \mu''\,\mu_2'' \cdot v'') \cdot \mu_1 \cdot u\right) \cdot \psi_x\left((\mu'\,\mu_2' \cdot u' - \mu''\,\mu_2'' \cdot u'') \cdot \mu_1 \cdot v\right).
\end{aligned}$$

On observe que, dans les arguments des caractères ψ_x, les variables d'intégration u et v n'apparaissent plus que linéairement.

Se souvenant que l'on a toujours dans le domaine d'intégration

$$\mu''\,\mu_2'' = \mu'\,\mu_2',$$

l'intégration pour les mesures additives

$$du \cdot dv$$

tend à concentrer les mesures vers le domaine

$$v'' = v', \qquad u'' = u',$$

lorsque $n \mapsto +\infty$.

Introduisant n'importe quelle fonction continue à support compact

$$\mathbb{1}_x : F_x \to \mathbb{R}_+$$

qui vaut 1 au voisinage de 0, on obtient que notre produit hermitien est égal, à une constante multiplicative près, à la limite

$$\begin{aligned}
\lim_{n\mapsto+\infty} \quad & \int_{F_x^\times} |\mu'|_x^{-1} \cdot d\mu' \cdot \int_{F_x^\times} |\mu''|_x^{-1} \cdot d\mu'' \cdot \int \mathbb{1}^G_{x,n}\left(\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_1 \cdot u \\ \mu_1 \cdot v & \mu_2 + \mu_1 \cdot uv \end{pmatrix}\right) \cdot |\mu_1\,\mu_2|_x^{1/k}\, d\mu_1 \cdot d\mu_2 \cdot du \cdot dv \\
& \qquad \cdot \left[\int du'' \cdot dv'' \cdot \psi_x(u\,u'' + v\,v'') \cdot |v''| \cdot \mathbb{1}_x(u'') \cdot \mathbb{1}_x(v'')\right] \\
\cdot \quad & \int_{\mu''\mu_2''=\mu'\mu_2'} |\mu_1'\,\mu_2'\,\mu_1''\,\mu_2''|_x^{1/k} \cdot |\mu_2'|_x \cdot |\mu_2''|_x \cdot d\mu_1' \cdot d\mu_2' \cdot d\mu_1'' \cdot du' \cdot dv' \\
\cdot \quad & f'\left(\begin{pmatrix} \mu_1' + \mu_2' \cdot u'v' & \mu_2' \cdot u' \\ \mu_2' \cdot v' & \mu_2' \end{pmatrix}, (\mu_1'\,\mu_2')^{1/k}\right) \cdot \overline{f''\left(\begin{pmatrix} \mu_1'' + \mu_2'' \cdot u'v' & \mu_2'' \cdot u' \\ \mu_2'' \cdot v' & \mu_2'' \end{pmatrix}, (\mu_1''\,\mu_2'')^{1/k}\right)} \\
\cdot \quad & \psi_x(\mu' \cdot \mu_1\,\mu_1' - \mu'' \cdot \mu_1\,\mu_1'') \\
\cdot \quad & \widehat{k}_x^\rho\left(\mu', (\mu_1\,\mu_2)^{1/k} \cdot (\mu_1'\,\mu_2')^{1/k}\right) \cdot \overline{\widehat{k}_x^\rho\left(\mu'', (\mu_1\,\mu_2)^{1/k} \cdot (\mu_1''\,\mu_2'')^{1/k}\right)}.
\end{aligned}$$

Maintenant, on a :

Lemme III.5. –

Pour toutes fonctions continues à support compact

$$\varphi', \varphi'' : T(F_x) \to \mathbb{C}\,,$$

on a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\mapsto+\infty} \quad & \int_{F_x^\times} |\mu'|_x^{-1}\cdot d\mu' \cdot \int_{F_x^\times} |\mu''|_x^{-1}\cdot d\mu'' \cdot \int \mathbb{1}^G_{x,n}\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_1\cdot u \\ \mu_1\cdot v & \mu_2+\mu_1\cdot uv\end{pmatrix} \cdot |\mu_1\,\mu_2|_x^{1/k}\cdot d\mu_1\cdot d\mu_2\cdot du\cdot dv \\
& \qquad\qquad \cdot \left[\int du''\cdot dv''\cdot \psi_x(u\,u''+v\,v'')\cdot|v''|\cdot \mathbb{1}_x(u'')\cdot\mathbb{1}_x(v'')\right] \\
& \int_{\mu''\mu''_2=\mu'\mu'_2} |\mu'_1\,\mu'_2\,\mu''_1\,\mu''_2|_x^{1/k}\cdot d\mu'_1\cdot d\mu'_2\cdot d\mu''_1 \\
& \cdot \quad \varphi'\left(\mu'_1,\mu'_2,(\mu'_1\,\mu'_2)^{1/k}\right)\cdot\overline{\varphi''\left(\mu''_1,\mu''_2,(\mu''_1\,\mu''_2)^{1/k}\right)} \\
& \cdot \quad \psi_x(\mu'\cdot\mu_1\,\mu'_1-\mu''\cdot\mu_1\,\mu''_1) \\
& \cdot \quad \widehat{k}_x^\rho\left(\mu',(\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\cdot(\mu'_1\,\mu'_2)^{1/k}\right)\cdot\overline{\widehat{k}_x^\rho\left(\mu'',(\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\cdot(\mu''_1\,\mu''_2)^{1/k}\right)} \\
= \quad & \int |\mu'_1\,\mu'_2|^{1/k}\cdot d\mu'_1\cdot d\mu'_2\cdot\varphi'\left(\mu'_1,\mu'_2,(\mu'_1\,\mu'_2)^{1/k}\right)\cdot\overline{\varphi''\left(\mu'_1,\mu'_2,(\mu'_1\,\mu'_2)^{1/k}\right)}\,.
\end{aligned}$$

Démonstration :

Comme la ρ_T-transformation de Fourier sur $T(F_x)$

$$\begin{aligned}
\varphi\mapsto\widehat{\varphi} = \Bigg[\left(\mu'_1,\mu'_2,(\mu'_1\,\mu'_2)^{1/k}\right) \quad \mapsto \quad & \int |\mu_1\,\mu_2|_x^{1/k}\cdot d\mu_1\cdot d\mu_2\cdot\varphi\left(\mu_1,\mu_2,(\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right) \\
\cdot \quad & k_x^{\rho_T}\left(\mu_1\,\mu'_1,\mu_2\,\mu'_2,(\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\cdot(\mu'_1\,\mu'_2)^{1/k}\right)\Bigg]
\end{aligned}$$

préserve le produit hermitien

$$(\varphi',\varphi'')\mapsto\langle\varphi',\varphi''\rangle = \int |\mu_1\,\mu_2|_x^{1/k}\cdot d\mu_1\cdot d\mu_2\cdot\varphi'\left(\mu_1,\mu_2,(\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right)\cdot\overline{\varphi''\left(\mu_1,\mu_2,(\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right)}$$

et que, pour tout $\left(\mu_1,\mu_2,(\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right)\in T(F_x)$,

$$k_x^{\rho_T}\left(\mu_1,\mu_2,(\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right) = \int_{F_x^\times}|\mu|_x^{-1}\cdot d\mu\cdot\psi_x(\mu\cdot(\mu_1+\mu_2))\cdot\widehat{k}_x^\rho\left(\mu,(\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right)\,,$$

on sait déjà que le produit hermitien

$$\langle\varphi',\varphi''\rangle = \int |\mu'_1\,\mu'_2|_x^{1/k}\cdot d\mu'_1\cdot d\mu'_2\cdot\varphi'\left(\mu'_1,\mu'_2,(\mu'_1\,\mu'_2)^{1/k}\right)\cdot\overline{\varphi''\left(\mu'_1,\mu'_2,(\mu'_1\,\mu'_2)^{1/k}\right)}$$

est égal à l'expression

$$\begin{aligned}
\int_{F_x^\times}|\mu'|_x^{-1}\cdot d\mu' \quad \cdot \quad & \int_{F_x^\times}|\mu''|_x^{-1}\cdot d\mu''\cdot\int|\mu_1\,\mu_2|_x^{1/k}\cdot d\mu_1\cdot d\mu_2\cdot\int|\mu'_1\,\mu'_2\,\mu''_1\,\mu''_2|_x^{1/k}\cdot d\mu'_1\cdot d\mu'_2\cdot d\mu''_1\cdot d\mu''_2 \\
\cdot \quad & \varphi'\left(\mu'_1,\mu'_2,(\mu'_1\,\mu'_2)^{1/k}\right)\cdot\overline{\varphi''\left(\mu''_1,\mu''_2,(\mu''_1\,\mu''_2)^{1/k}\right)} \\
\cdot \quad & \psi_x\left(\mu'\cdot(\mu_1\,\mu'_1+\mu_2\,\mu'_2)-\mu''\cdot(\mu_1\,\mu''_1+\mu_2\,\mu''_2)\right) \\
\cdot \quad & \widehat{k}_x^\rho\left(\mu',(\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\cdot(\mu'_1\,\mu'_2)^{1/k}\right)\cdot\overline{\widehat{k}_x^\rho\left(\mu'',(\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\cdot(\mu''_1\,\mu''_2)^{1/k}\right)}.
\end{aligned}$$

Il s'agit donc de prouver que cette expression ne change pas si l'on remplace l'opérateur d'intégration

$$\int |\mu_1\,\mu_2|_x^{1/k}\cdot d\mu_1\cdot d\mu_2\cdot\int |\mu_1'\,\mu_2'\,\mu_1''\,\mu_2''|_x^{1/k}\cdot d\mu_1'\cdot d\mu_2'\cdot d\mu_1''\cdot d\mu_2''$$

par les opérateurs

$$\begin{aligned}\int |\mu_1\,\mu_2|_x^{1/k}\cdot d\mu_1\cdot d\mu_2 \quad &\cdot \quad \int du\cdot dv\cdot \mathbb{I}^G_{x,n}\begin{pmatrix}\mu_1 & \mu_1\cdot u\\ \mu_1\cdot v & \mu_2+\mu_1\cdot uv\end{pmatrix}\\ &\cdot\quad \int du''\cdot dv''\cdot\psi_x(uu''+vv'')\cdot|v''|_x\cdot\mathbb{I}_x(u'')\cdot\mathbb{I}_x(v'')\\ &\cdot\quad\int_{\mu''\mu_2''=\mu'\mu_2'}|\mu_1'\,\mu_2'\,\mu_1''\,\mu_2''|_x^{1/k}\cdot d\mu_1'\cdot d\mu_2'\cdot d\mu_1''\end{aligned}$$

et que l'on fait tendre n vers $+\infty$.

Il suffit de le faire dans le cas où les deux fonctions continues à support compact

$$\varphi',\varphi'':T(F_x)\to\mathbb{C}$$

sont déduites de deux fonctions continues à support compact

$$f',f'':G(F_x)\to\mathbb{C}$$

par les formules

$$\varphi'\left(\mu_1',\mu_2',(\mu_1'\,\mu_2')^{1/k}\right)=|\mu_2'|_x\cdot\int du'\cdot dv'\cdot f'\left(\begin{pmatrix}\mu_1'+\mu_2'\cdot u'v' & \mu_2'\cdot u'\\ \mu_2'\cdot v' & \mu_2'\end{pmatrix},(\mu_1'\,\mu_2')^{1/k}\right),$$

$$\varphi''\left(\mu_1'',\mu_2'',(\mu_1''\,\mu_2'')^{1/k}\right)=|\mu_2''|_x\cdot\int du''\cdot dv''\cdot f''\left(\begin{pmatrix}\mu_1''+\mu_2''\cdot u''v'' & \mu_2''\cdot u''\\ \mu_2''\cdot v'' & \mu_2''\end{pmatrix},(\mu_1''\,\mu_2'')^{1/k}\right).$$

Or ceci résulte de ce que le produit hermitien

$$\langle f',f''\rangle$$

de deux telles fonctions f',f'' est égal à l'expression qui précède l'énoncé du lemme III.5.

Cela termine la preuve de ce lemme.

Remarque sur la démonstration du lemme :

Cette démonstration utilise le plongement de $T(F_x)$ dans $G(F_x)$ et le fait que le noyau $k_x^{\rho_T}$ sur $T(F_x)$ est relié au noyau

$$\begin{aligned}k_x^\rho:G(F_x)\quad&\to\quad\mathbb{C}\\ \left(g,\det(g)^{1/k}\right)\quad&\mapsto\quad\int_{F_x}d\mu\cdot\psi_x(\mu\cdot\mathrm{Tr}\,(g))\cdot\widehat{k}_x^\rho\left(\mu,\det(g)^{1/k}\right)\end{aligned}$$

dont on suppose qu'il est suffisamment contrôlé pour autoriser les différents changements d'ordre des intégrations dont on a besoin au cours du calcul.

Lorsque $k=2$, on peut aussi faire un calcul direct à partir de l'expression

$$k_x^{\rho_T}\left(\mu_1,\mu_2,(\mu_1\,\mu_2)^{1/2}\right)=\int_{F_x^\times}d\mu\cdot\psi_x\left(\mu^{-1}+\mu^2\cdot\left(\mu_1+\mu_2+2\,(\mu_1\,\mu_2)^{1/2}\right)\right).$$

Le noyau $k_x^{\rho_T}$ est en effet déduit de la fonction

$$(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \mapsto \psi_x(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)$$

par intégration le long des fibres de

$$\begin{array}{rcl} \rho_T^\vee : T_3(F_x) & \to & T(F_x) \\ (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) & \mapsto & \left(\lambda_0^2\,\lambda_1 = \mu_1, \lambda_1\,\lambda_2^2 = \mu_2, \lambda_0\,\lambda_1\,\lambda_2 = (\mu_1\,\mu_2)^{1/2}\right). \end{array}$$

Les éléments de chaque telle fibre ont la forme

$$\left(\mu^{-1} \cdot \frac{\mu_1^{1/2}}{\mu_1^{1/2} + \mu_2^{1/2}}\,,\ \mu^2 \cdot \left(\mu_1^{1/2} + \mu_2^{1/2}\right)^2,\ \mu^{-1} \cdot \frac{\mu_2^{1/2}}{\mu_1^{1/2} + \mu_2^{1/2}}\right)$$

avec

$$\frac{\mu_1^{1/2}}{\mu_1^{1/2} + \mu_2^{1/2}} = \frac{\mu_1}{\mu_1 + (\mu_1\,\mu_2)^{1/2}}\,,\ \frac{\mu_2^{1/2}}{\mu_1^{1/2} + \mu_2^{1/2}} = \frac{\mu_2}{(\mu_1\,\mu_2)^{1/2} + \mu_2}\,,\ \left(\mu_1^{1/2} + \mu_2^{1/2}\right)^2 = \mu_1 + \mu_2 + 2\,(\mu_1\,\mu_2)^{1/2},$$

et

$$\psi_x\left(\mu^{-1} \cdot \frac{\mu_1^{1/2}}{\mu_1^{1/2} + \mu_2^{1/2}} + \mu^2 \cdot \left(\mu_1^{1/2} + \mu_2^{1/2}\right)^2 + \mu^{-1} \cdot \frac{\mu_2^{1/2}}{\mu_1^{1/2} + \mu_2^{1/2}}\right) = \psi_x\left(\mu^{-1} + \mu^2 \cdot \left(\mu_1 + \mu_2 + 2\,(\mu_1\,\mu_2)^{1/2}\right)\right).$$

Comme la distribution sur $\overline{T}_3(F_x) = F_x^3$

$$\begin{array}{rl} \displaystyle\int d\lambda_0 \cdot d\lambda_1 \cdot d\lambda_2 & \cdot \ \displaystyle\int d\lambda_0' \cdot d\lambda_1' \cdot d\lambda_2' \cdot d\lambda_0'' \cdot d\lambda_1'' \cdot d\lambda_2'' \\ & \cdot \ \psi_x(\lambda_0\,\lambda_0' + \lambda_1\,\lambda_1' + \lambda_2\,\lambda_2' - \lambda_0\,\lambda_0'' - \lambda_1\,\lambda_1'' - \lambda_2\,\lambda_2'') \\ & \cdot \ f'(\lambda_0', \lambda_1', \lambda_2') \cdot \overline{f''(\lambda_0'', \lambda_1'', \lambda_2'')} \end{array}$$

est supportée par la diagonale

$$\lambda_0' = \lambda_0''\,, \quad \lambda_1' = \lambda_1''\,, \quad \lambda_2' = \lambda_2''\,,$$

on en déduit que la distribution

$$\begin{array}{rl} \displaystyle\int_{F_x^\times \times F_x^\times} d\mu' \cdot d\mu'' & \cdot \ \displaystyle\int d\mu_1 \cdot d\mu_2 \cdot \int d\mu_1' \cdot d\mu_2' \cdot d\mu_1'' \cdot d\mu_2'' \\ & \cdot \ \psi_x\left(\mu'^{-1} + \mu'^2 \cdot \left(\mu_1\,\mu_1' + \mu_2\,\mu_2' + 2\,(\mu_1\,\mu_2)^{1/2} \cdot (\mu_1'\,\mu_2')^{1/2}\right)\right) \\ & \cdot \ \psi_x\left(-\mu''^{-1} - \mu''^2 \cdot \left(\mu_1\,\mu_1'' + \mu_2\,\mu_2'' + 2\,(\mu_1\,\mu_2)^{1/2} \cdot (\mu_1''\,\mu_2'')^{1/2}\right)\right) \\ & \cdot \ \varphi'\left(\mu_1', \mu_2', (\mu_1'\,\mu_2')^{1/2}\right) \cdot \overline{\varphi''\left(\mu_1'', \mu_2'', (\mu_1''\,\mu_2'')^{1/2}\right)} \end{array}$$

est supportée par le produit des diagonales

$$\mu' = \mu''$$

et

$$\mu_1' = \mu_1''\,, \quad \mu_2' = \mu_2''\,.$$

□

Reprenons le calcul du produit hermitien

$$\left\langle \widehat{f}', \widehat{f}'' \right\rangle = \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot \widehat{f}'(g) \cdot \overline{\widehat{f}''(g)}$$

des ρ-transformées de Fourier de deux fonctions continues à support compact

$$f', f'' : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

au point où nous l'avions laissé avant l'énoncé du lemme III.5.

D'après ce lemme, ce produit hermitien est encore égal à

$$\int |\mu_1\,\mu_2|_x^{1/k} \cdot |\mu_2|_x^2 \cdot d\mu_1 \cdot d\mu_2 \cdot \int du \cdot dv$$

$$f'\left(\begin{pmatrix} \mu_1 + \mu_2 \cdot uv & \mu_2 \cdot u \\ \mu_2 \cdot v & \mu_2 \end{pmatrix}, (\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right) \cdot \overline{f''\left(\begin{pmatrix} \mu_1 + \mu_2 \cdot uv & \mu_2 \cdot u \\ \mu_2 \cdot v & \mu_2 \end{pmatrix}, (\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right)}$$

qui, d'après le lemme III.3(ii), n'est autre que

$$\int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f'(g) \cdot \overline{f''(g)} = \langle f', f'' \rangle\,.$$

On obtient finalement :

Proposition III.6. (modulo vérification des convergences et de la légitimité des échanges d'ordres des intégrations utilisés lors du calcul) –

On suppose comme dans la proposition III.2 *que la fonction noyau*

$$k_x^\rho : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

s'écrit sous la forme

$$k_x^\rho\left(g, \det(g)^{1/k}\right) = \int_{F_x} d\mu \cdot \psi_x(\mu \cdot \mathrm{Tr}\,(g)) \cdot \widehat{k}_x^\rho\left(\mu, \det(g)^{1/k}\right)$$

et vérifie la formule

$$k_x^{\rho_T}\left(\mu_1, \mu_2, (\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right) = \int_{F_x} |\mu|_x^{-1} \cdot d\mu \cdot \psi_x(\mu \cdot (\mu_1 + \mu_2)) \cdot \widehat{k}_x^\rho\left(\mu, (\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right)$$

pour tout élément $\left(\mu_1, \mu_2, (\mu_1\,\mu_2)^{1/k}\right) \in T(F_x)$.

Alors l'opérateur de ρ-transformation de Fourier sur $G(F_x)$

$$f \mapsto \widehat{f} = \left[g' \mapsto \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f(g) \cdot k_x^\rho(g\,g')\right]$$

vérifie la propriété (2) *du problème* III.1, *c'est-à-dire respecte le produit hermitien*

$$(f', f'') \mapsto \langle f', f'' \rangle = \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f'(g) \cdot \overline{f''(g)}\,.$$

□

3 Une troisième propriété locale : la transformée de Fourier de la multiplication point par point des fonctions

On considère toujours la représentation de transfert

$$\rho = \mathrm{sym}^k : \widehat{G} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mu_k \hookrightarrow \mathrm{GL}_{k+1}(\mathbb{C})$$

du revêtement de degré $k \geq 1$

$$G = \mathrm{GL}_2 \times_{\mathbb{G}_m} \mathbb{G}_m$$

de GL_2.

En une place arbitraire x de F, on considère une fonction noyau

$$k_x^\rho : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

qui s'écrit sous la forme

$$k_x^\rho(g) = \int_{F_x} d\mu \cdot \psi_x(\mu \cdot \mathrm{Tr}\,(g)) \cdot \widehat{k}_x^\rho \left(\mu, \det(g)^{1/k}\right)$$

et satisfait les hypothèses des propositions III.2 et III.6, donc aussi les propriétés (1) et (2) du problème III.1.

Pour démontrer la propriété (2) d'unitarité, nous avons calculé le produit hermitien

$$\left\langle \widehat{f'}, \widehat{f''} \right\rangle = \int_{G(F_x)} \widehat{f'}(g) \cdot \overline{\widehat{f''}(g)}$$

des ρ-transformées de Fourier $\widehat{f'}$ et $\widehat{f''}$ de deux fonctions continues à support compact

$$f', f'' : G(F_x) \to \mathbb{C}\,.$$

La façon dont nous avons mené le calcul amène à considérer aussi les intégrales

$$\int_{G(F_x)} \widehat{f'}(g) \cdot \widehat{f''}(g) \cdot \overline{\widehat{f'''}(g)}$$

associées à trois fonctions continues à support compact

$$f', f'', f''' : G(F_x) \to \mathbb{C}\,,$$

c'est-à-dire à s'intéresser au ρ-transformé de Fourier de l'opérateur de multiplication point par point des fonctions sur $G(F_x)$.

L'intégrale ci-dessus s'écrit

$$\int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot \int d_\rho\, g' \cdot d_\rho\, g'' \cdot d_\rho\, g''' \cdot f'(g') \cdot f''(g'') \cdot \overline{f'''(g''')} \cdot k_x^\rho(g\, g') \cdot k_x^\rho(g\, g'') \cdot \overline{k_x^\rho(g\, g''')}$$

et on peut mettre les éléments $g \in G(F_x)$ sous la forme

$$g = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (\mu_1\, \mu_2)^{1/k} \right)$$

avec, d'après le lemme III.3(ii),

$$d_\rho\, g = |\mu_1\, \mu_2|_x^{1/k} \cdot |\mu_1|_x^2 \cdot d\mu_1 \cdot d\mu_2 \cdot du \cdot dv\,.$$

D'autre part, on a

$$\begin{array}{ll} & k_x^\rho(g\,g')\cdot k_x^\rho(g\,g'')\cdot\overline{k_x^\rho(g\,g''')} \\ = & \displaystyle\int_{F_x\times F_x\times F_x} d\mu'\cdot d\mu''\cdot d\mu'''\cdot k_x^\rho\left(\mu',\det(g\,g')^{1/k}\right)\cdot k_x^\rho\left(\mu'',\det(g\,g'')^{1/k}\right)\cdot\overline{k_x^\rho\left(\mu''',\det(g\,g''')^{1/k}\right)} \\ \cdot & \psi_x\left(\mu'\cdot\mathrm{Tr}\,(g\,g')+\mu''\cdot\mathrm{Tr}\,(g\,g'')-\mu'''\cdot\mathrm{Tr}\,(g\,g''')\right) \end{array}$$

avec

$$\begin{array}{ll} & \mu'\cdot\mathrm{Tr}\,(g\,g')+\mu''\cdot\mathrm{Tr}\,(g\,g'')-\mu'''\cdot\mathrm{Tr}\,(g\,g''') \\ = & \mu'\cdot(g'_{1,1}\cdot\mu_1+g'_{2,2}\cdot\mu_2)+\mu''\cdot(g''_{1,1}\cdot\mu_1+g''_{2,2}\cdot\mu_2)-\mu'''\cdot(g'''_{1,1}\cdot\mu_1+g'''_{2,2}\cdot\mu_2) \\ + & (\mu'\cdot g'_{2,1}+\mu''\cdot g''_{2,1}-\mu'''\cdot g'''_{2,1})\cdot\mu_1\cdot u \\ + & (\mu'\cdot g'_{1,2}+\mu''\cdot g''_{1,2}-\mu'''\cdot g'''_{1,2})\cdot\mu_1\cdot v \\ + & (\mu'\cdot g'_{2,2}+\mu''\cdot g''_{2,2}-\mu'''\cdot g'''_{2,2})\cdot\mu_1\cdot uv\,. \end{array}$$

Ici encore, le terme quadratique en u et v

$$(\mu'\cdot g'_{2,2}+\mu''\cdot g''_{2,2}-\mu'''\cdot g'''_{2,2})\cdot\mu_1\cdot uv$$

pose problème, mais on a l'analogue suivant du lemme III.4 :

Lemme III.7. –

Soit $K_{x,\emptyset}$ le même sous-groupe compact maximal de $G(F_x)$ que dans le lemme III.4.

Alors, pour tous $\mu',\mu'',\mu'''\in F_x^\times$ et tous éléments

$$g',g'',g'''\in G(F_x)\,,$$

il existe un élément $g_\emptyset\in K_{x,\emptyset}$ tel que

$$\mu'''\cdot(g'''g_\emptyset)_{2,2}=\mu'\cdot(g'g_\emptyset)_{2,2}+\mu''\cdot(g''g_\emptyset)_{2,2}\,.$$

□

Procédons comme au paragraphe précédent, en supposant en particulier qu'il est légitime de changer l'ordre d'intégration

$$\int_{G(F_x)} d_\rho\,g\cdot\int d_\rho\,g'\cdot d_\rho\,g''\cdot d_\rho\,g'''\cdot\int_{F_x\times F_x\times F_x} d\mu'\cdot d\mu''\cdot d\mu'''$$

en

$$\int_{F_x\times F_x\times F_x} d\mu'\cdot d\mu''\cdot d\mu'''\cdot\int_{G(F_x)} d_\rho\,g\cdot\int d_\rho\,g'\cdot d_\rho\,g''\cdot d_\rho\,g'''\,.$$

On écrit la mesure $\int_{G(F_x)} d_\rho\,g$ comme limite, quand n tend vers $+\infty$, des mesures à support compact $\int_{G(F_x)} d_\rho\,g\cdot\mathbb{I}_{x,n}^G$ qu'il est possible de faire commuter avec les sommations $\int d_\rho\,g'\cdot d_\rho\,g''\cdot d_\rho\,g'''$.

Comme les mesures $\int_{G(F_x)}\mathbb{I}_{x,n}^G(g)\cdot d_\rho\,g$ sont invariantes par $K_{x,\emptyset}$, on obtient que le produit triple

$$\int_{G(F_x)} d_\rho\,g\cdot\widehat{f}'(g)\cdot\widehat{f}''(g)\cdot\overline{\widehat{f}'''(g)}$$

est égal, à une constante multiplicative près, à la limite

$$
\begin{aligned}
\lim_{n \mapsto +\infty} \quad & \int_{F_x \times F_x \times F_x} d\mu' \cdot d\mu'' \cdot d\mu''' \cdot \int \mathbb{1}_{x,n}^G \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_1 \cdot u \\ \mu_1 \cdot v & \mu_2 + \mu_1 \cdot uv \end{pmatrix} \cdot |\mu_1\,\mu_2|_x^{1/k} \cdot |\mu_1|_x^2 \cdot d\mu_1 \cdot d\mu_2 \cdot du \cdot dv \\
\cdot \quad & \int_{\mu'''\mu_2''' = \mu'\mu_2' + \mu''\mu_2''} |\mu_1'\,\mu_2'\,\mu_1''\,\mu_2''\,\mu_1'''\,\mu_2'''|_x^{1/k} \cdot |\mu_2'|_x^2 \cdot |\mu_2''|_x^2 \cdot |\mu_2'''|_x^2 \cdot d\mu_1' \cdot d\mu_2' \cdot d\mu_1'' \cdot d\mu_2'' \cdot d\mu_1''' \\
\cdot \quad & \left| v''' - \frac{\mu'\,\mu_2'\,v'}{\mu'''\,\mu_2'''} - \frac{\mu''\,\mu_2''\,v''}{\mu'''\,\mu_2'''} \right|_x \cdot du' \cdot dv' \cdot du'' \cdot dv'' \cdot du''' \cdot dv''' \\
\cdot \quad & f'\left(\begin{pmatrix} \mu_1' + \mu_2' \cdot u'v' & \mu_2' \cdot u' \\ \mu_2' \cdot v' & \mu_2' \end{pmatrix}, (\mu_1'\,\mu_2')^{1/k} \right) \cdot f''\left(\begin{pmatrix} \mu_1'' + \mu_2'' \cdot u''v'' & \mu_2'' \cdot u'' \\ \mu_2'' \cdot v'' & \mu_2'' \end{pmatrix}, (\mu_1''\,\mu_2'')^{1/k} \right) \\
& \overline{\cdot f'''\left(\begin{pmatrix} \mu_1''' + \mu_2''' \cdot u'''v''' & \mu_2''' \cdot u''' \\ \mu_2''' \cdot v''' & \mu_2''' \end{pmatrix}, (\mu_1'''\,\mu_2''')^{1/k} \right)} \\
\cdot \quad & \widehat{k}_x^\rho \left(\mu', (\mu_1'\,\mu_2')^{1/k} \cdot (\mu_1\,\mu_2)^{1/k} \right) \cdot \widehat{k}_x^\rho \left(\mu'', (\mu_1''\,\mu_2'')^{1/k} \cdot (\mu_1\,\mu_2)^{1/k} \right) \cdot \overline{\widehat{k}_x^\rho \left(\mu''', (\mu_1'''\,\mu_2''')^{1/k} \cdot (\mu_1\,\mu_2)^{1/k} \right)} \\
\cdot \quad & \psi_x \left(\mu' \cdot (\mu_1\,\mu_1' + \mu_2\,\mu_2') + \mu'' \cdot (\mu_1\,\mu_1'' + \mu_2\,\mu_2'') - \mu''' \cdot (\mu_1\,\mu_1''' + \mu_2\,\mu_2''') \right) \\
\cdot \quad & \psi_x \left(\mu_1\,\mu'\,\mu_2' \cdot u'v' + \mu_1\,\mu''\,\mu_2'' \cdot u''v'' - \mu_1\,\mu'''\,\mu_2''' \cdot u'''v''' \right) \\
\cdot \quad & \psi_x \left((\mu'\,\mu_2' \cdot v' + \mu''\,\mu_2'' \cdot v'' - \mu'''\,\mu_2''' \cdot v''') \cdot \mu_1 \cdot u \right) \\
\cdot \quad & \psi_x \left((\mu'\,\mu_2' \cdot u' + \mu''\,\mu_2'' \cdot u'' - \mu'''\,\mu_2''' \cdot u''') \cdot \mu_1 \cdot v \right).
\end{aligned}
$$

Alors, pour μ', μ'' et μ''' fixés, l'intégration pour les mesures additives

$$du \cdot dv$$

amène à substituer les équations

$$\mu'''\,\mu_2''' \cdot v''' = \mu'\,\mu_2' \cdot v' + \mu''\,\mu_2'' \cdot v''$$

$$\mu'''\,\mu_2''' \cdot u''' = \mu'\,\mu_2' \cdot u' + \mu''\,\mu_2'' \cdot u''$$

dans les expressions de

$$f'(\bullet), f''(\bullet), \overline{f'''(\bullet)}$$

à l'intérieur de l'intégrale.

Autrement dit, pour μ', μ'' et μ''' fixés, avoir modifié les coordonnées de g', g'' et g''' par l'action diagonale d'un élément $g_\emptyset \in K_{x,\emptyset}$ pour imposer la condition de départ

$$\mu''' \cdot g_{2,2}''' = \mu' \cdot g_{2,2}' + \mu'' \cdot g_{2,2}''$$

entraîne nécessairement aussi les conditions

$$\mu''' \cdot g_{2,1}''' = \mu' \cdot g_{2,1}' + \mu'' \cdot g_{2,1}'',$$

$$\mu''' \cdot g_{1,2}''' = \mu' \cdot g_{1,2}' + \mu'' \cdot g_{1,2}''.$$

Comme la distribution considérée de f', f'' et f''' est invariante par l'action de $K_{x,\emptyset}$ et donc de $W_G = \mathfrak{S}^2$, et voit que l'équation vérifiée par le support de cette distribution

$$\mu''' \cdot g_{2,1}''' = \mu' \cdot g_{2,1}' + \mu'' \cdot g_{2,1}''$$

entraîne à son tour l'équation

$$\mu''' \cdot g_{1,1}''' = \mu' \cdot g_{1,1}' + \mu'' \cdot g_{1,1}''.$$

Ainsi on a :

Proposition III.8. (modulo vérification des convergences et de la légitimité des échanges d'ordre des intégrations utilisés lors du calcul) –

On considère comme dans les propositions III.2 *et* III.6 *une fonction noyau*

$$k_x^\rho : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

qui s'écrit sous la forme

$$k_x^\rho \left(g, \det(g)^{1/k}\right) = \int_{F_x} d\mu \cdot \psi_x(\mu \cdot \mathrm{Tr}\,(g)) \cdot \widehat{k}_x^\rho \left(\mu, \det(g)^{1/k}\right) .$$

Alors, pour tous $\mu', \mu'', \mu''' \in F_x^\times$ fixés, la forme

$$\begin{aligned} \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \quad \cdot \quad & \int d_\rho\, g' \cdot d_\rho\, g'' \cdot d_\rho\, g''' \cdot f'(g') \cdot f''(g'') \cdot \overline{f'''(g''')} \\ & \widehat{k}_x^\rho \left(\mu', \det(g)^{1/k} \cdot \det(g')^{1/k}\right) \cdot \widehat{k}_x^\rho \left(\mu'', \det(g)^{1/k} \cdot \det(g'')^{1/k}\right) \cdot \overline{\widehat{k}_x^\rho \left(\mu''', \det(g)^{1/k} \cdot \det(g''')^{1/k}\right)} \\ \cdot \quad & \psi_x(\mu' \cdot \mathrm{Tr}\,(gg') + \mu'' \cdot \mathrm{Tr}\,(gg'') - \mu''' \cdot \mathrm{Tr}\,(gg''')) \end{aligned}$$

ne dépend que de la restriction de la fonction

$$\begin{array}{rcl} G(F_x) \times G(F_x) \times G(F_x) & \to & \mathbb{C} \\ (g', g'', g''') & \mapsto & f'(g') \cdot f''(g'') \cdot \overline{f'''(g''')} \end{array}$$

au sous-espace des triplets (g', g'', g''') dont les projections dans $\mathrm{GL}_2(F_x)$ satisfont l'équation

$$\mu''' \cdot g''' = \mu' \cdot g' + \mu'' \cdot g'' .$$

□

Pour toute fonction continue à valeurs unitaires

$$\varphi : G(F_x) \to U(1) = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| = 1\} ,$$

l'opérateur

$$f \mapsto f \cdot \varphi = [g \mapsto f(g)\, \varphi(g)]$$

est un opérateur unitaire de l'espace des fonctions de carré intégrable sur $G(F_x)$.

On déduit de la proposition III.8 ci-dessus ou même directement du calcul qui la précède :

Corollaire III.9. (modulo vérification des convergences et de la légitimité des échanges d'ordres des intégrations utilisés lors du calcul) –

On considère une fonction noyau

$$\begin{array}{rcl} k_x^\rho : G(F_x) & \to & \mathbb{C} \\ g & \mapsto & k_x^\rho(g) = \displaystyle\int_{F_x} d\mu \cdot \psi_x(\mu \cdot \mathrm{Tr}\,(g)) \cdot \widehat{k}_x^\rho \left(\mu, \det(g)^{1/k}\right) \end{array}$$

qui vérifie les hypothèses et donc aussi les conclusions des propositions III.2 *et* III.6.

Soient une fonction continue unitaire

$$\varphi : G(F_x) \to U(1) \subset \mathbb{C}^\times$$

et deux fonctions continues de carré intégrable

$$f_1, f_2 : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

reliées par la formule

$$\widehat{f_2} = \widehat{f_1} \cdot \varphi\,.$$

Alors, si φ est la ρ-transformée de Fourier d'une distribution supportée par $T(F_x)$ [resp. $B(F_x)$], la restriction de f_2 à $T(F_x)$ [resp. $B(F_x)$] ne dépend que de la restriction de f_1 à ce même $T(F_x)$ [resp. $B(F_x)$].

$\square$

4 Et le cas général ?

Nous voudrions maintenant revenir au cas général d'un groupe réductif G muni d'une représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

au sens de la définition I.1.

En particulier, G est muni des 2 caractères $\det_G$ et $\det_B$. Par définition, le cocaractère central dual de $\det_G$

$$\widehat{\det_G} : \mathbb{C}^\times \to Z_{\widehat{G}} \hookrightarrow \widehat{T} \hookrightarrow \widehat{G}$$

agit sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de ρ par l'unique caractère $\lambda \mapsto \lambda$, et le caractère $\det_B$ est caractérisé par les identités

$$\langle \det_B, \rho_T^i \rangle = \langle \delta_B, \rho_T^i \rangle$$

pour toute composante ρ_T^i de

$$\rho_T = (\rho_T^1, \dots, \rho_T^r) : \widehat{T} \to \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$$

qui est le plus haut poids d'un facteur irréductible de ρ.

Considérons d'abord le cas où G est déployé et de rang 1, c'est-à-dire ne compte qu'une seule racine simple. Autrement dit, le groupe dérivé $G^{\mathrm{der}} = [G, G]$ est isomorphe à SL_2 ou PGL_2, et le groupe dérivé du dual $\widehat{G}^{\mathrm{der}} = [\widehat{G}, \widehat{G}]$ est a priori isomorphe à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ ou $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$.

Alors ρ est une somme directe de représentations irréductibles de $\widehat{G}$ dont la restriction à $\widehat{G}^{\mathrm{der}} \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ ou $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ est une représentation de puissance symétrique $\mathrm{sym}^k : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_{k+1}(\mathbb{C})$. De plus, le cocaractère dual de δ_B

$$\widehat{\delta}_B : \mathbb{C}^\times \to \widehat{T}$$

agit sur l'espace de tout tel facteur irréductible sym^k par la famille de caractères

$$\lambda \mapsto (\lambda^k, \lambda^{k-2}, \dots, \lambda^{-k+2}, \lambda^{-k})$$

et donc le cocaractère central

$$\widehat{\det_B} : \mathbb{C}^\times \to Z_{\widehat{G}} \hookrightarrow \widehat{T}$$

agit sur cet espace par

$$\lambda \mapsto (\lambda^k, \lambda^k, \dots, \lambda^k)\,.$$

Cela signifie que l'on a un morphisme

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \to \widehat{G}$$

dont l'image est le produit de $\widehat{G}^{\mathrm{der}}$ et de l'image de $\widehat{\det_B}$ et dont le noyau est l'intersection des sous-groupes finis μ_k associés aux facteurs sym^k de la décomposition de ρ.

Le dual de ce morphisme est un épimorphisme

$$G \to \mathrm{GL}_2 \,.$$

D'autre part, on dispose de l'épimorphisme de quotient

$$G \to G/G^{\mathrm{der}} = G^{\mathrm{ab}}$$

vers le tore G^{ab}. Les caractères $\det_G$ et $\det_B$ de G se factorisent à travers G^{ab}, et on a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[d] & G^{\mathrm{ab}} \arrow[d, "\det_B"] \\ \mathrm{GL}_2 \arrow[r, "\det"] & \mathbb{G}_m \end{tikzcd}$$

qui est nécessairement cartésien. On a prouvé :

Lemme III.10.

Si le groupe réductif G muni de la représentation de transfert ρ est déployé sur F et de rang 1, il s'identifie au produit fibré

$$G = \mathrm{GL}_2 \times_{\mathbb{G}_m} G^{\mathrm{ab}}$$

via le caractère $\det_B : G^{\mathrm{ab}} \to \mathbb{G}_m$ du tore G^{ab} abélianisé de G.

Le tore maximal de G s'identifie à

$$T = T_2 \times_{\mathbb{G}_m} G^{\mathrm{ab}}$$

et le quotient par conjugaison

$$G/G = T/W_G$$

s'identifie à

$$\mathbb{A}^1 \times G^{\mathrm{ab}}$$

via le morphisme

$$(g, g^{\mathrm{ab}}) \mapsto (\mathrm{Tr}\,(g), g^{\mathrm{ab}})\,.$$

□

Dans la situation de ce lemme, le groupe réductif G est également muni du sous-groupe de Borel

$$B = B_2 \times_{\mathbb{G}_m} G^{\mathrm{ab}}$$

dont le radical unipotent N_B s'identifie au radical unipotent

$$N_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

du sous-groupe de Borel B_2 de GL_2.

Alors on démontre exactement de la même façon que la proposition III.2, la proposition III.6 et le corollaire III.9 :

Proposition III.11.

Considérons le cas où le groupe réductif G est déployé sur F et de rang 1, donc s'écrit

$$G = \mathrm{GL}_2 \times_{\mathbb{G}_m} G^{\mathrm{ab}}\,,$$

et où ρ est une représentation

$$\rho : \widehat{G} \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

sans action du groupe de Galois Γ_F.

En une place arbitraire x de F, considérons une fonction invariante par conjugaison

$$\begin{array}{rcl} k_x^\rho : G(F_x) = \mathrm{GL}_2(F_x) \times_{F_x^\times} G^{\mathrm{ab}}(F_x) & \to & \mathbb{C} \\ (g, g^{\mathrm{ab}}) & \mapsto & k_x^\rho(g, g^{\mathrm{ab}}) \end{array}$$

écrite sous la forme

$$k_x^\rho(g, g^{\mathrm{ab}}) = \int_{F_x} d\mu \cdot \psi_x(\mu \cdot \mathrm{Tr}\,(g)) \cdot \widehat{k}_x^\rho(\mu, g^{\mathrm{ab}})$$

pour une certaine mesure additive $d\mu$ de F_x.

Alors, sous réserve que les fonctions

$$F_x \times G_{\mathrm{ab}}(F_x) \ni (\mu, g^{\mathrm{ab}}) \to \widehat{k}_x^\rho(\mu, g^{\mathrm{ab}})$$

satisfassent les propriétés de convergence et de légitimité d'échanges d'ordres d'intégrations nécessaires dans les calculs, on a :

(i) *L'opérateur de ρ-transformation de Fourier sur $G(F_x)$ défini par le noyau k_x^ρ*

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x = \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f_x(g) \cdot k_x^\rho(g\, \bullet)$$

est compatible avec l'opérateur de ρ_T-transformation de Fourier sur $T(F_x)$ défini dans l'exposé II

$$\varphi_x \mapsto \widehat{\varphi}_x = \int_{T(F_x)} dt \cdot \varphi_x(t) \cdot k_x^{\rho_T}(t\, \bullet)$$

via l'opérateur de passage aux termes constants

$$f_x \mapsto |\det{}_B(\bullet)|_x^{1/2} \cdot f_{x,N_B}(\bullet) = \left[t \mapsto |\det{}_B(t)|_x^{\frac{1}{2}} \cdot |\delta_B(t)|_x^{\frac{1}{2}} \cdot \int_{N_B(F_x)} du \cdot f_x(t \cdot u) \right]$$

si et seulement si on a pour tout élément

$$t = (t_1, t_2, t^{\mathrm{ab}}) \in T(F_x) = T_2(F_x) \times_{F_x^\times} G^{\mathrm{ab}}(F_x)$$

la relation

$$k_x^{\rho_T}(t) = \int_{F_x} d\mu \cdot |\mu|_x^{-1} \cdot \psi_x(\mu \cdot (t_1 + t_2)) \cdot \widehat{k}_x^\rho(\mu, t^{\mathrm{ab}})\,.$$

(ii) *Sous ces mêmes hypothèses, l'opérateur*

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x$$

est unitaire.

(iii) *Sous ces mêmes hypothèses, l'opérateur de "convolution" sur $G(F_x)$ (défini comme le transformé par $f_x \mapsto \widehat{f}_x$ de la multiplication point par point des fonctions) préserve le tore maximal $T(F_x)$ ainsi que le sous-groupe de Borel $B(F_x)$.*

Cela signifie que pour toute fonction continue unitaire

$$\varphi : G(F_x) \to U(1) \subset \mathbb{C}^\times$$

dont la ρ-transformée de Fourier est une distribution supportée par $T(F_x)$ [resp. $B(F_x)$], et pour toutes fonctions continues de carré intégrable

$$f_1, f_2 : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

reliées par la formule

$$\widehat{f_2} = \widehat{f_1} \cdot \varphi \,,$$

la restriction de f_2 à $T(F_x)$ [resp. $B(F_x)$] ne dépend que de la restriction de f_1 à $T(F_x)$ [resp. $B(F_x)$].

□

Dans le cas général, considérons l'ensemble Φ_G des racines de G.

Pour toute $\alpha \in \Phi_G$, on note T_α [resp. $\widehat{T}_\alpha$] le sous-tore de codimension 1 de T [resp. $\widehat{T}$] défini comme la composante neutre du noyau du caractère $\alpha : T \to \mathbb{G}_m$ [resp. $\alpha^\vee : \widehat{T} \to \mathbb{C}^\times$], et G_α [resp. $\widehat{G}_\alpha$] le sous-groupe de Levy standard de G [resp. $\widehat{G}$] défini comme le commutateur de T_α [resp. $\widehat{T}_\alpha$] dans G [resp. $\widehat{G}$].

Ainsi, chaque G_α est un groupe réductif de rang 1 qui est défini et déployé sur toute extension finie séparable F' de F dont le groupe de Galois $\Gamma_{F'} \subset \Gamma_F$ laisse invariante la racine α. De plus, $\widehat{G}_\alpha$ s'identifie au dual de G_α. Les sous-groupes dérivés $G_\alpha^{\mathrm{der}} = [G_\alpha, G_\alpha]$ et $\widehat{G}_\alpha^{\mathrm{der}} = [\widehat{G}_\alpha, \widehat{G}_\alpha]$ sont isomorphes à SL_2 ou PGL_2.

Considérons maintenant une représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

avec les deux caractères associés

$$\det_G, \det_B : T \subset G \to \mathbb{G}_m \,.$$

Pour toute racine $\alpha \in \Phi_G$, la représentation induite

$$\widehat{G}_\alpha \hookrightarrow \widehat{G} \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

se décompose comme une somme directe de représentations irréductibles dont la restriction à $\widehat{G}_\alpha^{\mathrm{der}} \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ ou $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ est de la forme sym^k pour des entiers $k \geq 0$. On peut donc introduire le cocaractère

$$\widehat{\det_\alpha} : \mathbb{C}^\times \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

dont l'action sur chaque facteur irréductible de $\widehat{G}_\alpha \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ est donnée par $\lambda \mapsto \lambda^k$ si l'action de $\widehat{G}_\alpha^{\mathrm{der}}$ sur ce facteur est de la forme sym^k.

On peut noter $\widehat{G}'_\alpha$ le sous-groupe réductif de rang 1 de $\widehat{G}$ défini comme le composé de $\widehat{G}_\alpha$ et de l'image de $\widehat{\det_\alpha}$. Il contient $\widehat{G}_\alpha$ comme sous-groupe distingué et le quotient

$$\widehat{G}'_\alpha / \widehat{G}_\alpha$$

est soit trivial, soit un tore de dimension 1.

On peut encore noter G'_α le groupe réductif dual de $\widehat{G}'_\alpha$; il est défini sur n'importe quelle extension F' de F sur laquelle G_α est défini. On a un épimorphisme de groupes réductifs

$$G'_\alpha \to G_\alpha$$

dont le noyau est soit trivial, soit un tore de dimension 1. De plus, G'_α est muni du caractère

$$\det_\alpha : G'_\alpha \to \mathbb{G}_m$$

dual du cocaractère central

$$\widehat{\det_\alpha} : \mathbb{C}^\times \to \widehat{G}'_\alpha \,.$$

On remarque que les $T_\alpha, \widehat{T}_\alpha, G_\alpha, \widehat{G}_\alpha, \widehat{\det}_\alpha, \widehat{G}'_\alpha, G'_\alpha, \det_\alpha$ sont invariants par la permutation $\alpha \mapsto -\alpha$ de Φ_G. On a :

Lemme III.12.

Avec les notations ci-dessus, supposons que le groupe réductif G est déployé sur F (si bien que les G_α, $\alpha \in \Phi_G$, sont définis sur F) et que les sous-groupes $G_\alpha^{\mathrm{der}} = [G_\alpha, G_\alpha]$, $\alpha \in \Phi_G/\{\pm 1\}$, de G commutent entre eux ou, ce qui revient au même, que les sous-groupes $\widehat{G}_\alpha^{\mathrm{der}} = [\widehat{G}_\alpha, \widehat{G}_\alpha]$ de $\widehat{G}$ commutent entre eux.

Alors :

(i) *Quitte à remplacer $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ par une représentation conjuguée, on peut supposer non seulement que ρ envoie $\widehat{T}$ dans $\widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$ mais que, poour tout $\alpha \in \Phi_G$, le cocaractère $\widehat{\det_\alpha} : \mathbb{C}^\times \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ se factorise à travers $\widehat{T}_r$.*

(ii) *Le groupe réductif G s'identifie au quotient du produit*

$$\prod_{\alpha \in \Phi_G/\{\pm 1\}} G'_\alpha$$

par un sous-groupe abélien central, produit d'un sous-groupe abélien fini et d'un sous-tore.

(iii) *Le cocaractère produit*

$$\prod_{\alpha \in \Phi_G/\{\pm 1\}} \widehat{\det_\alpha} : \mathbb{C}^\times \to \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$$

est égal au composé

$$\widehat{\det_B} : \mathbb{C}^\times \longrightarrow \widehat{T} \xrightarrow{\rho_T} \widehat{T}_r\,,$$

et le caractère produit

$$\prod_{\alpha \in \Phi_G/\{\pm 1\}} \det_\alpha : \prod_{\alpha \in \Phi_G/\{\pm 1\}} G'_\alpha \to \mathbb{G}_m$$

est égal au composé de la projection

$$\prod_{\alpha \in \Phi_G/\{\pm 1\}} G'_\alpha \to G$$

et de

$$\det_B : G \to \mathbb{G}_m\,.$$

Démonstration :

(i) La représentation $\widehat{G} \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ se décompose comme somme directe de sous-représentations irréductibles. La restriction à $[\widehat{G}, \widehat{G}] = \prod_{\alpha \in \Phi_G/\{\pm 1\}} [\widehat{G}_\alpha, \widehat{G}_\alpha]$ de chaque telle sous-représentation irréductible est encore irréductible, et elle s'écrit comme un produit tensoriel de représentations irréductibles des facteurs $[\widehat{G}_\alpha, \widehat{G}_\alpha]$.

(ii) Le groupe réductif G s'écrit comme un quotient du produit $\prod_{\alpha \in \Phi_G/\{\pm 1\}} G_\alpha$ et donc aussi de $\prod_{\alpha \in \Phi_G/\{\pm 1\}} G'_\alpha$.

(iii) Le cocaractère produit

$$\prod_{\alpha \in \Phi_G/\{\pm 1\}} \widehat{\det_\alpha} : \mathbb{C}^\times \to \widehat{T}_r$$

et le cocaractère central

$$\widehat{\det_B} : \mathbb{C}^\times \to \widehat{T} \to \widehat{T}_r$$

agissent chacun par un scalaire sur chaque facteur irréductible de $\rho : \widehat{G} \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$.

Afin de démontrer qu'ils sont égaux, il suffit de prouver que pour toute composante ρ_T^i de $\rho_T = (\rho_T^1, \dots, \rho_T^r)$ qui est le plus haut poids d'un facteur irréductible, on a

$$\left\langle \prod_{\alpha \in \Phi_G/\{\pm 1\}} \widehat{\det_\alpha}\, ,\ \rho_T^i \right\rangle = \langle \det_B , \rho_T^i \rangle \,.$$

Or, en notant Φ_G^+ l'ensemble des racines positives de G, on a

$$\left\langle \widehat{\det_\alpha}\, ,\ \rho_T^i \right\rangle = \langle \alpha, \rho_T^i \rangle \,, \quad \forall\, \alpha \in \Phi_G^+ \,.$$

La conclusion résulte de ce que $\Phi_G^+ \to \Phi_G/\{\pm 1\}$ est une bijection et de la formule

$$\prod_{\alpha \in \Phi_G^+} \alpha = \delta_B \,.$$

$\square$

Pour toute racine $\alpha \in \Phi_G$, le groupe réductif G'_α muni du caractère $\det_\alpha : G'_\alpha \to \mathbb{G}_m$ vérifie les hypothèses du lemme III.10. Il s'identifie donc à un produit fibré de la forme

$$G'_\alpha = \mathrm{GL}_2 \times_{\mathbb{G}_m} G'^{\mathrm{ab}}_\alpha$$

où G'^{ab}_α désigne le tore quotient $G'_\alpha / G'^{\mathrm{der}}_\alpha$ muni du caractère $\det_\alpha : G'^{\mathrm{ab}}_\alpha \to \mathbb{G}_m$.

Chaque G'_α est donc également muni d'un morphisme composé

$$\mathrm{Tr}_\alpha : G'_\alpha \longrightarrow \mathrm{GL}_2 \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \mathbb{A}^1 \,.$$

On déduit du lemme qui précède :

Corollaire III.13.

Sous les hypothèses du lemme III.12 *ci-dessus, tout polynôme sur le schéma affine*

$$\prod_{\alpha \in \Phi_G/\{\pm 1\}} G'_\alpha$$

qui provient d'un polynôme sur le groupe réductif G qui est invariant par conjugaison, provient nécessairement d'un polynôme sur le schéma affine produit

$$\left(\prod_{\alpha \in \Phi_G/\{\pm 1\}} \mathbb{A}^1 \right) \times G^{\mathrm{ab}}$$

via les morphismes

$$\mathrm{Tr}_\alpha : G'_\alpha \to \mathbb{A}^1 \,, \quad \alpha \in \Phi_G/\{\pm 1\} \,.$$

$\square$

On démontre de la même façon que la proposition III.2, la proposition III.6 et le corollaire III.9 :

Proposition III.14.

Considérons le cas où le groupe réductif G est déployé sur F et où ses sous-groupes $G^{\mathrm{der}}_\alpha = [G_\alpha, G_\alpha]$, $\alpha \in \Phi_G/\{\pm 1\}$, commutent entre eux.

En une place arbitraire x de F, considérons une fonction invariante par conjugaison

$$k_x^\rho : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

qui, considérée comme une fonction de $\left(\prod\limits_{\alpha \in \Phi_G/\{\pm 1\}} G'_\alpha\right)(F_x)$, *s'écrit sous la forme*

$$k_x^\rho(g) = \int \bigotimes_{\alpha \in \Phi_G/\{\pm 1\}} d\mu_\alpha \cdot \psi_x\left(\sum_{\alpha \in \Phi_G/\{\pm 1\}} \mu_\alpha \cdot \mathrm{Tr}_\alpha(g)\right) \cdot \widehat{k}_x^\rho\left((\mu_\alpha)_{\alpha \in \Phi_G/\{\pm 1\}},\, g^{\mathrm{ab}}\right)$$

où $\bigotimes\limits_\alpha d\mu_\alpha$ *est une mesure additive de* $\prod\limits_{\alpha \in \Phi_G/\{\pm 1\}} F_x$.

Alors, sous réserve que les fonctions

$$\left(\prod_{\alpha \in \Phi_G/\{\pm 1\}} F_x\right) \times G_{\mathrm{ab}}(F_x) \ni \left((\mu_\alpha), g^{\mathrm{ab}}\right) \mapsto \widehat{k}_x^\rho\left((\mu_\alpha), g^{\mathrm{ab}}\right)$$

satisfassent les propriétés de convergence et de légitimité d'échanges d'ordres d'intégrations nécessaires dans les calculs, on a :

(i) *L'opérateur de ρ-transformation de Fourier sur $G(F_x)$ défini par le noyau k_x^ρ*

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x = \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f_x(g) \cdot k_x^\rho(g\, \bullet)$$

est compatible avec l'opérateur de ρ_T-transformation de Fourier sur $T(F_x)$ défini dans l'exposé II

$$\varphi_x \mapsto \widehat{\varphi}_x = \int_{T(F_x)} dt \cdot \varphi_x(t) \cdot k_x^{\rho_T}(t\, \bullet)$$

via l'opérateur de passage aux termes constants

$$f_x \mapsto |\det{}_B(\bullet)|_x^{1/2} \cdot f_{x,N_B}(\bullet) = \left[t \mapsto |\det{}_B(t)|_x^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{1/2} \cdot \int_{N_B(F_x)} du \cdot f_x(t \cdot u)\right]$$

si et seulement si on a pour tout élément de $T(F_x)$ relevé en un élément t du tore maximal de $\left(\prod\limits_{\alpha \in \Phi_G/\{\pm 1\}} G'_\alpha\right)(F_x)$ *la relation*

$$k_x^{\rho_T}(t) = \int \left(\bigotimes_\alpha d\mu_\alpha\right) \cdot \left(\prod_\alpha |\mu_\alpha|_x^{-1}\right) \cdot \psi_x\left(\sum_\alpha \mu_\alpha \cdot \mathrm{Tr}_\alpha(t)\right) \cdot \widehat{k}_x^\rho\left((\mu_\alpha), t^{\mathrm{ab}}\right)$$

où t^{ab} désigne l'image de t dans le quotient $G^{\mathrm{ab}}(F_x)$ de $T(F_x)$.

(ii) *Sous ces mêmes hypothèses, l'opérateur*

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x$$

est unitaire.

(iii) *Sous ces mêmes hypothèses, l'opérateur de "convolution" sur $G(F_x)$ préserve le tore maximal $T(F_x)$ ainsi que le sous-groupe de Borel $B(F_x)$.* $\square$

Nous voudrions maintenant traiter le cas général d'un groupe réductif quasi-déployé G sur F muni d'une représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

telle que Γ_F agisse sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de ρ par permutation de ses r vecteurs de base. L'action de Γ_F sur l'ensemble d'indices $\{1, 2, \ldots, r\}$ définit une F-algèbre séparable E de degré r, et ρ induit une suite exacte de tores sur F

$$1 \longrightarrow T_\rho \longrightarrow T_E = \mathrm{Res}_{E/F}\, \mathbb{G}_m \longrightarrow T \longrightarrow 1\,.$$

Nous allons construire d'abord des opérateurs dits "de convolution" sur les $G(F_x)$ puis caractériser les opérateurs de ρ-transformation de Fourier recherchés en demandant qu'ils transforment les opérateurs de multiplication point par point des fonctions en les opérateurs de convolution qui auront été construits.

Les opérateurs de convolution sur les $G(F_x)$ vont être construits à partir des opérateurs de convolution déjà connus sur les $T_E(F_x) = E_x^\times \subset E_x$ et donc aussi sur les $T(F_x)$.

Considérant l'espace linéaire

$$\overline{T}_E = \mathrm{Res}_{E/F}\, \mathbb{A}^1\,,$$

avec donc $\overline{T}_E(F_x) = E \otimes_F F_x = E_x$, $\forall\, x \in |F|$, on a d'abord :

Proposition III.15.

Le produit $f_1 \cdot f_2$ de deux fonctions localement constantes à support compact [resp. de classe C^∞ à décroissance rapide si x est archimédienne] sur un localisé $E_x = E \otimes_F F_x$, $x \in |F|$, de E

$$f_1, f_2 : \overline{T}_E(F_x) = E_x \to \mathbb{C}$$

est encore une fonction localement constante à support compact [resp. de classe C^∞ à décroissance rapide si x est archimédienne] sur E_x.

De plus, on a

$$\widehat{f_1 \cdot f_2} = \int_{E_x} dt_x \cdot \widehat{f}_1(\bullet - t_x) \cdot \widehat{f}_2(t_x) = \widehat{f}_1 *_E \widehat{f}_2$$

où $*_E$ désigne donc l'opérateur de convolution additive. □

Notons $Z_E \hookrightarrow \overline{T}_E \times \overline{T}_E \times \overline{T}_E$ le fermé irréductible défini par l'équation

$$x_1 + x_2 = x_3\,.$$

Il est de dimension $2 \dim T_E = 2\,r$, et il est invariant par l'action diagonale de T_E dans $\overline{T}_E \times \overline{T}_E \times \overline{T}_E$.

On a :

Lemme III.16.

Soit x une place arbitraire de F.

Il existe une unique forme différentielle

$$\omega_E \in \Omega^r_{Z_E/\overline{T}_E}$$

relative au morphisme de 3e projection

$$\mathrm{pr}^3_{Z_E} : Z_E \to \overline{T}_E$$

et de degré maximal $r = \dim T_E$, telle que :

- *via son action diagonale, T_E agit sur ω_E par le caractère $\det_E(\bullet)$ composé de $T_E \xrightarrow{\rho_T^\vee} T$ et de $\det_G : T \to \mathbb{G}_m$,*

- *pour toutes fonctions localement constantes à support compact [resp. de classe C^∞ à décroissance rapide si x est archimédienne]*
$$f_1, f_2 : \overline{T}_E(F_x) = E_x \to \mathbb{C} \, ,$$
on a
$$(f_1 *_E f_2)(\bullet) = \int_{(\mathrm{pr}^3_{Z_E})^{-1}(\bullet)} (\mathrm{pr}^1_{Z_E})^*(f_1) \cdot (\mathrm{pr}^2_{Z_E})^*(f_2) \cdot \omega_E$$
où $\mathrm{pr}^1_{Z_E}, \mathrm{pr}^2_{Z_E}, \mathrm{pr}^3_{Z_E} : Z_E \to \overline{T}_E$ *désignent les trois projections de* Z_E *sur* $\overline{T}_E$*.*

□

On note $\overline{T}$ la variété torique affine normale de tore T définie comme le quotient de $\overline{T}_E$ par l'action du noyau T_ρ de $\rho_T^\vee : T_E \to T$. Elle est définie par le cône convexe polyédral
$$X_{\overline{T}} = \left\{ \chi \in X_T \mid \langle \chi, \rho_T^i \rangle \geq 0 \, , \quad 1 \leq i \leq r \right\} \, .$$

Notons alors Z_{ρ_T} le schéma affine normal défini comme le quotient du schéma affine lisse $Z_E \hookrightarrow \overline{T}_E \times \overline{T}_E \times \overline{T}_E$ par l'action diagonale de T_ρ. Il est muni d'une action de T et de trois morphismes de projection T-équivariants
$$\mathrm{pr}^1_{Z_{\rho_T}}, \mathrm{pr}^2_{Z_{\rho_T}}, \mathrm{pr}^3_{Z_{\rho_T}} : Z_{\rho_T} \to \overline{T} \, .$$
Sa dimension est égale à $2 \dim T_E - \dim T_\rho = \dim T_E + \dim T = r + \dim T$. La forme différentielle relative $\omega_E \in \Omega^r_{Z_E / \overline{T}_E}$ de degré r est invariante par l'action du sous-tore T_ρ de T_E. Elle provient donc d'une forme différentielle
$$\omega_{\rho_T} \in \Omega^r_{Z_{\rho_T}/\overline{T}}$$
relative au morphisme
$$\mathrm{pr}^3_{Z_{\rho_T}} : Z_{\rho_T} \to \overline{T}$$
et de degré maximal $r = \dim Z_{\rho_T} - \dim T$.

On a :

Proposition III.17.

Soit x une place ultramétrique de F.

Pour toute ρ_T-fonction f_x sur $T(F_x)$ et toute fonction localement constante à support compact φ_x sur $\overline{T}(F_x)$, on a :

(i) *La fonction φ_x est de carré intégrable, et sa ρ_T-transformée de Fourier $\widehat{\varphi}_x$ est intégrable.*

(ii) *Le produit $f_x \cdot \varphi_x$ est une ρ_T-fonction sur $T(F_x)$.*

(iii) *Sa ρ_T-transformée de Fourier*
$$T(F_x) \ni t \mapsto \widehat{f_x \cdot \varphi_x}\,(t)$$
est donnée par les intégrales bien définies
$$\widehat{f_x \cdot \varphi_x}\,(\bullet) = \int_{(\mathrm{pr}^3_{Z_{\rho_T}})^{-1}(\bullet)} (\mathrm{pr}^1_{Z_{\rho_T}})^*(\widehat{f}_x) \cdot (\mathrm{pr}^2_{Z_{\rho_T}})^*(\widehat{\varphi}_x) \cdot \omega_{Z_{\rho_T}} = \widehat{f}_x *_{\rho_T} \widehat{\varphi}_x \, .$$

Remarque :

De même, si x est une place archimédienne de F, on dispose de l'opérateur de ρ_T-convolution sur $T(F_x)$ défini par la formule
$$(f_1, f_2) \mapsto f_1 *_{\rho_T} f_2 = \int_{(\mathrm{pr}^3_{Z_{\rho_T}})^{-1}(\bullet)} (\mathrm{pr}^1_{Z_{\rho_T}})^*(f_1) \cdot (\mathrm{pr}^2_{Z_{\rho_T}})^*(f_2) \cdot \omega_{Z_{\rho_T}}$$

et on a

$$\widehat{f_1 \cdot f_2} = \widehat{f}_1 *_{\rho_T} \widehat{f}_2$$

pour toute ρ_T-fonction $f_1 : T(F_x) \to \mathbb{C}$ et toute fonction

$$f_2 : \overline{T}(F_x) \to \mathbb{C}$$

continue à support compact.

Démonstration :

(i) est évident.

(ii) Par définition, l'espace des ρ_T-fonctions est engendré par les translatées par les éléments de $T(F_x)$ de fonctions

$$f_x = (\rho_T^\vee)_*(h_x)$$

images par $\rho_T^\vee : T_E(F_x) \to T(F_x)$ de fonctions localement constantes à support compact

$$h_x : \overline{T}_E(F_x) = E_x \to \mathbb{C}\,.$$

On peut donc supposer que f_x est de cette forme et alors la conclusion résulte de ce que

$$f_x \cdot \varphi_x = (\rho_T^\vee)_*(h_x \cdot \varphi_x \circ \rho_T^\vee)\,.$$

(iii) Comme l'opérateur de convolution est $T(F_x)$-équivariant, on peut supposer ici encore que f_x a la forme

$$f_x = (\rho_T^\vee)_*(h_x)$$

pour une fonction localement constante à support compact

$$h_x : E_x \to \mathbb{C}\,.$$

Comme on a dans ce cas

$$\begin{aligned} \widehat{f}_x &= (\rho_T^\vee)_*(\widehat{h}_x)\,, \\ f_x \cdot \varphi_x &= (\rho_T^\vee)_*(h_x \cdot \varphi_x \circ \rho_T^\vee) \end{aligned}$$

et

$$\widehat{f_x \cdot \varphi_x} = (\rho_T^\vee)_*\big(\, \widehat{h_x \cdot \varphi_x \circ \rho_T^\vee} \,\big)\,,$$

la formule annoncée se déduit de l'identité sur $T_E(F_x)$

$$\widehat{h_x \cdot \varphi_x \circ \rho_T^\vee}\,(t_x) = \int_{(\mathrm{pr}^3_{Z_E})^{-1}(t_x)} (\mathrm{pr}^1_{Z_E})^*(\widehat{h}_x) \cdot (\mathrm{pr}^2_{Z_E})^*(\widehat{\varphi_x \circ \rho_T^\vee}) \cdot \omega_{Z_E}$$

par intégration le long des fibres de

$$\rho_T^\vee : T_E(F_x) \to T(F_x)\,.$$

$\square$

L'opérateur de convolution $*_{\rho_T}$ sur $T(F_x)$ en chaque place $x \in |F|$ va maintenant permettre de construire un opérateur $*_\rho$ sur $G(F_x)$ en chaque telle place.

On a d'abord besoin de construire un schéma Z_ρ muni d'une double action de G à gauche et à droite et de trois projections équivariantes

$$\mathrm{pr}^1_{Z_\rho}, \mathrm{pr}^2_{Z_\rho}, \mathrm{pr}^3_{Z_\rho} : Z_\rho \to G \times G \times G\,.$$

On commence par le lemme suivant :

Lemme III.18.

(i) *Le produit*

$$G \times G \times G$$

muni de la double action diagonale de G à gauche et à droite est isomorphe sur F à

$$G \backslash [G \times (G \times G \times \{1\}) \times G]$$

où les points g de G agissent

- *sur le premier facteur G par la translation à droite $\bullet\, g$,*
- *sur $(G \times G \times \{1\})$ par convolution $g^{-1} \bullet g$,*
- *sur le dernier facteur G par la translation à gauche $g^{-1} \bullet$.*

(ii) *Soit G^{reg} l'ouvert dense de G défini sur F constitué des points g de G dont le commutateur $C_G(g)$ est isomorphe sur $\overline{F}$ au tore maximal T de G.*
Alors la variété munie de la double action de G

$$G \backslash [G \times (G \times G^{\mathrm{reg}} \times \{1\}) \times G]$$

s'identifie à un ouvert dense de $G \times G \times G$, et elle est isomorphe sur $\overline{F}$ à

$$N_G(T) \backslash [G \times (G \times T^{\mathrm{reg}} \times \{1\}) \times G]$$

où T^{reg} est l'ouvert dense $T \cap G^{\mathrm{reg}}$ de T, et $N_G(T) \cong T \rtimes W_G$ est le normalisateur de T dans G.

□

On a d'autre part :

Lemme III.19.

Supposons que G est déployé sur F ou, plus généralement, que la F-algèbre séparable E associée à l'action de Γ_F sur $\{1, 2, \ldots, r\}$ admet une décomposition en produit de corps

$$E = \prod_{1 \le i \le e} E_i^{m_i}$$

qui est "bien disposée" pour ρ au sens de la définition II.13.

Alors la variété Z_{ρ_T} munie des trois projections

$$\mathrm{pr}^1_{Z_{\rho_T}}, \mathrm{pr}^2_{Z_{\rho_T}}, \mathrm{pr}^3_{Z_{\rho_T}} = Z_{\rho_T} \to \overline{T}$$

est également munie d'une action naturelle de W_G et donc de $T \rtimes W_G \cong N_G(T)$ qui est définie sur F.

Démonstration :

Par définition, Z_{ρ_T} est le schéma affine normal quotient par l'action de $T_\rho \subset T_E$ du schéma affine lisse

$$Z_E \hookrightarrow \overline{T}_E \times \overline{T}_E \times \overline{T}_E$$

défini par l'équation $x_1 + x_2 = x_3$.

L'isomorphisme Γ_F-équivariant

$$\widehat{T}_E = (\mathbb{C}^\times)^r$$

définit un isomorphisme sur $\overline{F}$

$$\overline{T}_E \xrightarrow{\sim} (\mathbb{A}^1)^r$$

tel que l'action induite de Γ_F sur $(\mathbb{A}^1)^r$ se fasse par permutation des facteurs.

Or, comme on a vu dans le lemme II.14, le groupe de Weyl W_G muni de l'action de Γ_F s'identifie à un sous-groupe de $W_{E,\rho} \subset W_E \subset \mathfrak{S}^r$. Via l'isomorphisme $\overline{T}_E \cong (\mathbb{A}^1)^r$ sur $\overline{F}$, le sous-schéma fermé $Z_E \hookrightarrow \overline{T}_E \times \overline{T}_E \times \overline{T}_E$ s'identifie au sous-schéma fermé Z_r de $(\mathbb{A}^1)^r \times (\mathbb{A}^1)^r \times (\mathbb{A}^1)^r$ défini par la même équation $x_1 + x_2 = x_3$, et il est stable par l'action diagonale du groupe symétrique $\mathfrak{S}^r$.

D'où la conclusion. □

On peut maintenant poser :

Définition III.20.

Supposons comme ci-dessus que G est déployé sur F ou, plus généralement, que la F-algèbre séparable E associée à l'action de Γ_F sur $\{1, 2, \ldots, r\}$ admet une décomposition

$$E = \prod_{1 \leq i \leq e} E_i^{m_i}$$

qui est "bien disposée" pour ρ au sens de la définition II.13.

Alors on notera Z_ρ le schéma au-dessus de l'ouvert dense

$$G \backslash [G \times (G \times G^{\mathrm{reg}} \times \{1\}) \times G]$$

de $G \times G \times G$, que l'isomorphisme sur $\overline{F}$

$$G \backslash [G \times (G \times G^{\mathrm{reg}} \times \{1\}) \times G] \xrightarrow{\sim} N_G(T) \backslash [G \times (G \times T^{\mathrm{reg}} \times \{1\}) \times G]$$

transforme en

$$N_G(T) \backslash \left[G \times \left((\mathrm{pr}^1_{Z_{\rho_T}})^{-1}\,(T) \cap (\mathrm{pr}^2_{Z_{\rho_T}})^{-1}\,(T^{\mathrm{reg}}) \cap (\mathrm{pr}^3_{Z_{\rho_T}})^{-1}\,(1) \right) \times G \right] .$$

Remarque :

Le schéma Z_{ρ_T} au-dessus de $\overline{T} \times \overline{T} \times \overline{T}$ est l'adhérence schématique de son ouvert image réciproque de $T \times T \times T$ ou même $T \times T^{\mathrm{reg}} \times T$.

De plus, comme il est T-équivariant, il est entièrement déterminé par sa fibre au-dessus de $T \times T^{\mathrm{reg}} \times \{1\}$.

□

Voici les propriétés essentielles de Z_ρ :

Proposition III.21.

Sous les hypothèses de la définition III.20 *, on a :*

(i) *Le schéma Z_ρ est bien défini sur F.*

(ii) *Il est muni d'une double action de G à gauche et à droite et d'une triple projection équivariante*

$$(\mathrm{pr}^1_{Z_\rho}, \mathrm{pr}^2_{Z_\rho}, \mathrm{pr}^3_{Z_\rho}) : Z_\rho \to G \times G \times G \,,$$

toutes bien définies sur F.

(iii) *Sa restriction au-dessus de $G \times T \times T$ se factorise à travers $T \times T \times T$.*
Plus généralement, pour tout tore maximal T' de G, sa restriction au-dessus de $G \times T' \times T'$ sa factorise à travers $T' \times T' \times T'$.

(iv) *Sa restriction au-dessus de $G \times B \times B$ se factorise à travers $B \times B \times B$.*
Plus généralement, pour tout sous-groupe parabolique P de G, sa restriction au-dessus de $G \times P \times P$ se factorise à travers $P \times P \times P$.

Démonstration :

(i) Au-dessus de $\overline{F}$, Z_ρ s'identifie au quotient par T_ρ de

$$\begin{aligned} & (T_E \rtimes W_G)\backslash \left[G \times \left((\mathrm{pr}^1_{Z_E})^{-1}(T_E) \cap (\mathrm{pr}^2_{Z_E})^{-1}(T^{\mathrm{reg}}) \cap (\mathrm{pr}^3_{Z_E})^{-1}(T_\rho)\right) \times G\right] \\ \cong \quad & (T_r \rtimes W_G)\backslash \left[G \times \left((\mathrm{pr}^1_{Z_r})^{-1}(T_r) \cap (\mathrm{pr}^2_{Z_r})^{-1}(T^{\mathrm{reg}}) \cap (\mathrm{pr}^3_{Z_r})^{-1}(T_\rho)\right) \times G\right] \end{aligned}$$

où T_ρ est considéré comme un sous-tore de $T_r = \mathbb{G}_m^r$.
L'action de Γ_F sur $T_r = \mathbb{G}_m^r$ par permutation des facteurs est compatible avec celle sur W_G, et elle respecte le sous-schéma fermé $Z_r \hookrightarrow \overline{T}_r \times \overline{T}_r \times \overline{T}_r$ ainsi que le sous-tore T_ρ.
Ainsi, Z_ρ est muni sur $\overline{F}$ d'une action naturelle de Γ_F qui définit sur lui une structure F-rationnelle.

(ii) est évident sur la construction.

(iii) Il suffit de prouver que la restriction de Z_ρ au-dessus de $G \times T' \times \{1\}$ se factorise à travers $T' \times T' \times \{1\}$.
Si $T' = T$, cela résulte de la définition de Z_ρ.
Si T' est général, cela résulte de ce que T' est conjugué de T sur $\overline{F}$.

(iv) Il suffit de prouver que la restriction de Z_ρ au-dessus de $G \times P \times \{1\}$ se factorise à travers $P \times P \times \{1\}$.
Or, tout élément de l'ouvert dense $P^{\mathrm{reg}} = P \cap G^{\mathrm{reg}}$ de P est conjugué à un élément de T^{reg} via un élément de P. D'où la conclusion.

□

On rappelle que la dimension de Z_{ρ_T} est

$$\dim\, Z_{\rho_T} = 2\, \dim\, T_E - \dim\, T_\rho = \dim\, T_E + \dim\, T$$

si bien que les trois projections équivariantes

$$\mathrm{pr}^1_{Z_{\rho_T}}, \mathrm{pr}^2_{Z_{\rho_T}}, \mathrm{pr}^3_{Z_{\rho_T}} : Z_{\rho_T} \to T$$

ont pour dimension relative

$$\dim\, Z_{\rho_T} - \dim\, T = \dim\, T_E = r\,.$$

On en déduit :

Corollaire III.22.

Sous les hypothèses de la définition III.20*, le schéma Z_ρ a pour dimension*

$$\dim\, Z_\rho = r + 2\, \dim\, G - \dim\, T$$

et les trois projections équivariantes

$$\mathrm{pr}^1_{Z_\rho}, \mathrm{pr}^2_{Z_\rho}, \mathrm{pr}^3_{Z_\rho} : Z_\rho \to G$$

ont pour dimension relative

$$\dim\, Z_\rho - \dim\, G = r + \dim\, G - \dim\, T = \dim\, G + \dim\, T_\rho\,.$$

$\square$

Rappelons maintenant que le schéma équivariant

$$Z_{\rho_T} \to \overline{T} \times \overline{T} \times \overline{T}$$

est muni d'une forme différentielle algébrique

$$\omega_{\rho_T} \in \Omega^r_{Z_{\rho_T}}/\overline{T}$$

relative à la troisième projection

$$\mathrm{pr}^3_{Z_{\rho_T}} : Z_{\rho_T} \to \overline{T}$$

et de degré maximal $r = \dim Z_{\rho_T} - \dim\, T$.

Le tore T agit sur cette forme différentielle relative ω_{ρ_T} par le caractère $\det_G : T \to \mathbb{G}_m$.

On peut poser :

Définition III.23.

Sous les hypothèses de la définition III.20, *on notera*

$$\omega_\rho \in \Omega^{r + \dim G - \dim T}_{Z_\rho/G}$$

la forme différentielle (uniquement déterminée à multiplication près par une constante) relative à la troisième projection

$$\mathrm{pr}^3_{Z_\rho} : Z_\rho \to G$$

et de degré maximal

$$\dim\, Z_\rho - \dim\, G = r + \dim\, G - \dim\, T$$

telle que :

- *l'action de G à gauche ou à droite sur Z_ρ transforme ω_ρ par le caractère* $\det_G \cdot \det_B = \det_\rho$,
- *en particulier, ω_ρ est invariante par conjugaison par G,*
- *au-dessus de $G \times G^{\mathrm{reg}} \times \{1\} \subset G \times G \times G$, où la fibre $(\mathrm{pr}^3_{Z_\rho})^{-1}(1) \subset Z_\rho$ est isomorphe à*

$$N_G(T)\backslash \left[(\mathrm{pr}^3_{Z_{\rho_T}})^{-1}(1) \times \{(g_1, g_2) \in G \times G \mid g_1\, g_2 = 1\}\right] ,$$

  la forme différentielle relative ω_ρ est le produit de

$$\omega_{\rho_T} \in \Omega^r_{Z_{\rho_T}}/\overline{T}$$

  et d'une forme différentielle algébrique invariante de degré maximal de

$$N_G(T)\backslash \{(g_1, g_2) \in G \times G \mid g_1\, g_2 = 1\} \cong N_G(T)\backslash G\,.$$

$\square$

Le schéma Z_ρ au-dessus de $G \times G \times G$ et la forme différentielle ω_ρ sur Z_ρ relative à la projection $\mathrm{pr}^3_{Z_\rho} : Z_\rho \to G$ permettent de définir un opérateur de "ρ-convolution" sur $G(F_x)$ en toute place x de F :

Définition III.24.

Sous les hypothèses de la définition III.20*, considérons une place arbitraire $x \in |F|$.*

On appellera "produit de ρ-convolution" de deux fonctions

$$f_x, \varphi_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

et on notera

$$f_x *_\rho \varphi_x : G(F) \to \mathbb{C}$$

la fonction définie par l'intégrale

$$(f_x *_\rho \varphi_x)(g) = \int_{(\mathrm{pr}^3_{Z_\rho})^{-1}(g)} (\mathrm{pr}^1_{Z_\rho})^*(f_x) \cdot (\mathrm{pr}^2_{Z_\rho})^*(\varphi_x) \cdot \omega_\rho \,, \quad g \in G(F_x)\,,$$

quand celle-ci est bien définie.

Remarque :

Le produit $f_x *_\rho \varphi_x$ sera défini plus généralement si

- φ_x est une fonction (ou même une distribution) qui s'écrit comme limite, en un sens approprié, de suites de fonctions

$$\varphi_n : G(F_x) \to \mathbb{C}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

  telles que les intégrales

$$(f_x *_\rho \varphi_x)(\bullet) = \int_{(\mathrm{pr}^3_{Z_\rho})^{-1}(\bullet)} (\mathrm{pr}^1_{Z_\rho})^*(f_x) \cdot (\mathrm{pr}^2_{Z_\rho})^*(\varphi_n) \cdot \omega_\rho$$

  soient bien définies,
- les suites de fonctions

$$f_x *_\rho \varphi_n : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

  convergent en un sens approprié vers une fonction

$$f_x *_\rho \varphi_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

  qui ne dépend pas de la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ considérée. □

Nous pouvons maintenant poser :

Conjecture III.25.

Supposons toujours que G est déployé sur F ou, plus généralement, que la F-algèbre séparable E associée à l'action de Γ_F sur $\{1, 2, \ldots, r\}$ admet une décomposition

$$E = \prod_{1 \le i \le e} E_i^{m_i}$$

qui est "bien disposée" pour ρ au sens de la définition II.13.

Alors, en toute place $x \in |F|$, il existe un unique opérateur de ρ-transformation de Fourier sur $G(F_x)$ de la forme du lemme I.3

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x(\bullet) = \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f_x(g) \cdot k^\rho_x(g\,\bullet)$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

(1) *Il est compatible avec l'opérateur de ρ_T-transformation de Fourier sur $T(F_x)$ déjà défini*

$$\varphi_x \mapsto \widehat{\varphi}_x(\bullet) = \int_{T(F_x)} dt \cdot \varphi_x(t) \cdot k_x^{\rho_T}(t\,\bullet)$$

via l'opérateur de passage aux termes constants

$$f_x \mapsto |\det{}_B(\bullet)|_x^{1/2} \cdot f_{x,N_B}(\bullet) = |\det{}_B(\bullet)\,\delta_B(\bullet)|_x^{1/2} \cdot \int_{N_B(F_x)} du \cdot f_x(\bullet\, u)\,.$$

(2) *Il préserve le produit hermitien*

$$(f_1, f_2) \mapsto \langle f_1, f_2\rangle = \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f_1(g) \cdot \overline{f_2(g)}$$

et définit donc un automorphisme unitaire de l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur $G(F_x)$ pour la mesure $d_\rho\, g$.

(3) *Il transforme l'opérateur de multiplication point par point des fonctions sur $G(F_x)$*

$$(f_1, f_2) \mapsto f_1 \cdot f_2$$

en l'opérateur de ρ-convolution de la définition III.24

$$(f_x, \varphi_x) \mapsto f_x *_\rho \varphi_x$$

(quitte à modifier la forme différentielle ω_ρ qui définit $*_\rho$ par une constante multiplicative uniquement déterminée).

Remarque :

Si un opérateur de ρ-transformation de Fourier sur $G(F_x)$

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x(\bullet) = \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f_x(g) \cdot k_x^\rho(g\,\bullet)$$

vérifie les propriétés (1) et (2) ci-dessus, alors son opérateur de convolution associée (défini comme le transformé par $f_x \mapsto \widehat{f}_x$ de la multiplication point par point des fonctions) est nécessairement égal à l'opérateur

$$(f_x, \varphi_x) \mapsto f_x *_\rho \varphi_x$$

de la définition III.24 s'il stabilise le tore maximal $T(F_x)$ de $G(F_x)$ au sens que le support $Z \subset G(F_x) \times G(F_x) \times G(F_x)$ de la distribution qui le définit vérifie la propriété

$$Z \cap (G(F_x) \times T(F_x) \times T(F_x)) \subset T(F_x) \times T(F_x) \times T(F_x)\,.$$

Cela résulte en effet de la propriété (1) de compatibilité avec le passage aux termes constants.

Pour la démonstration de la conjecture :

Si x est une place archimédienne, toute représentation irréductible de $G(F_x)$ est un sous-quotient d'une représentation induite par un caractère du tore $T(F_x)$.

Il en résulte qu'il existe un unique opérateur de ρ-transformation de Fourier $f_x \mapsto \widehat{f}_x$ sur $G(F_x)$ qui soit compatible avec les translations à gauche et à droite au sens que

$$\widehat{f_x^g} = |\det_\rho(g)|_x^{-1} \cdot {}^{g^{-1}}\widehat{f}_x \,,$$
$$\widehat{{}^g f_x} = |\det_\rho(g)|_x^{-1} \cdot \widehat{f}_x^{g^{-1}} \,,$$

et qui vérifie la propriété (1) de compatibilité avec le passage aux termes constants.

De plus, cet opérateur est unitaire puisque la ρ_T-transformation de Fourier sur $T(F_x)$ est unitaire.

Il reste donc seulement à démontrer que son opérateur de convolution associé n'est autre que $*_\rho$ et, pour cela, qu'il stabilise le tore $T(F_x)$ de $G(F_x)$.

Si x est une place ultramétrique, notons $L^2(G(F_x))$ l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur $G(F_x)$ pour la mesure $d_\rho\, g$, et $L^2(G(F_x))^{\mathrm{tor}}$ le sous-espace de Hilbert défini comme l'adhérence dans $L^2(G(F_x))$ de l'espace des fonctions localement constantes à support compact

$$f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

dont la décomposition spectrale ne fait apparaître que des représentations induites de caractères du tore $T(F_x)$.

On dispose de l'opérateur de projection orthogonale

$$\begin{array}{rcl} L^2(G(F_x)) & \to & L^2(G(F_x))^{\mathrm{tor}} \,, \\ f_x & \mapsto & f_x^{\mathrm{tor}} \,. \end{array}$$

Il commute avec les translations à gauche et à droite.

On remarque que l'opérateur de ρ-transformation de Fourier recherché

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x$$

doit nécessairement préserver le sous-espace $L^2(G(F_x))^{\mathrm{tor}}$ de $L^2(G(F_x))$ et commuter avec le projecteur $f_x \mapsto f_x^{\mathrm{tor}}$.

De plus, la propriété (1) signifie que sa restriction au sous-espace $L^2(G(F_x))^{\mathrm{tor}}$ est déjà entièrement déterminée. C'est un opérateur unitaire puisque la ρ_T-transformation de Fourier sur $T(F_x)$ est unitaire.

Pour déterminer entièrement l'opérateur de ρ-transformation de Fourier sur $G(F_x)$, il suffit de connaître son action sur les fonctions de la forme

$$f_1 \cdot f_2$$

où f_1 et f_2 sont deux fonctions localement constantes à support compact sur $G(F_x)$ telles que $f_1^{\mathrm{tor}} = f_1$ et $f_2^{\mathrm{tor}} = f_2$, c'est-à-dire dont les décompositions spectrales ne font apparaître que des représentations de $G(F_x)$ induites de caractères du tore $T(F_x)$. En effet, ces produits suffisent à engendrer tout le spectre de $G(F_x)$.

Or on doit nécessairement avoir

$$\widehat{f_1 \cdot f_2} = \widehat{f}_1 *_\rho \widehat{f}_2$$

où $\widehat{f}_1, \widehat{f}_2$ et donc aussi $\widehat{f}_1 *_\rho \widehat{f}_2$ sont déjà déterminées.

Ainsi, on a montré la propriété d'unicité de la conjecture.

Pour la propriété d'existence, il faudra probablement recourir aux fonctions unitaires

$$\mathbb{I}^G_{\chi, c_x} : G(F_x) \hookrightarrow \overline{G}(F_x) \to (N_B^{\mathrm{op}} \backslash \overline{G} / N_B)(F_x) \to U(1) = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| = 1\}$$

qui seront introduites et étudiées dans le chapitre IV.

L'invariance de ces fonctions par $N_B(F_x)$ ou $N_B^{\mathrm{op}}(F_x)$ implique que leurs ρ-transformées de Fourier $\widehat{\mathbb{I}^G_{\chi, c_x}}$ sont bien définies a priori en tant que formes linéaires se factorisant à travers l'homomorphisme

$$f_x \mapsto f_x^{\mathrm{tor}} \mapsto \widehat{f_x^{\mathrm{tor}}} = \widehat{f}_x^{\mathrm{tor}}$$

sur l'espace des fonctions $f_x \in L^2(G(F_x))$ telles que la fonction $\widehat{f_x^{\mathrm{tor}}} = \widehat{f}_x^{\mathrm{tor}}$ est intégrable sur $G(F_x)$.

$\square$

Exposé IV.
Sur quelques opérateurs unitaires de multiplication
(Laurent Lafforgue, IHES, 8 juillet 2014)

1 Des fonctions unitaires sur les tores quotients

On considère toujours le groupe réductif G quasi-déployé sur F, muni de la paire de Borel (T, B), du caractère $\det_G : G \to \mathbb{G}_m$ et d'une représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) .$$

On suppose que Γ_F agit sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de ρ par permutation de ses r vecteurs de base, et on note E la F-algèbre séparable de degré r qui correspond à l'action de Γ_F sur $\{1, 2, \ldots, r\}$.

Le tore $T_E = \mathrm{Res}_{E/F}\, \mathbb{G}_m$ admet pour dual

$$\widehat{T}_E = \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$$

muni de l'action de Γ_F par permutation, si bien que le morphisme Γ_F-équivariant

$$\rho_T : \widehat{T} \to \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r = \widehat{T}_E$$

est dual d'un morphisme

$$\rho_T^\vee : T_E \to T$$

qui s'inscrit dans une suite exacte de tores sur F

$$1 \to T_\rho \to T_E \to T \to 1 .$$

On a encore introduit l'espace linéaire

$$\overline{T}_E = \mathrm{Res}_{E/F}\, \mathbb{A}^1$$

qui est une variété torique affine lisse de tore T_E.

On pose :

Définition IV.1. –

Dans la situation ci-dessus, on note $\overline{T}$ la variété torique affine normale de tore T associée au cône convexe saturé $X_{\overline{T}}^\vee$ de $X_T^\vee$ engendré par les composantes $\rho_T^i \in X_{\widehat{T}} = X_T^\vee$, $1 \leq i \leq r$, du morphisme $\rho_T : \widehat{T} \to \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$.

De manière équivalente, $\overline{T}$ est le quotient de $\overline{T}_E$ par l'action du sous-tore T_ρ de T_E.

Remarques :

(i) La variété torique $\overline{T}$ est définie sur F car la famille des ρ_T^i, $1 \leq i \leq r$, est stable par l'action de Γ_F, donc aussi le cône saturé $X_{\overline{T}}^\vee$ de $X_T^\vee$ qu'ils engendrent.

Comme la famille des ρ_T^i est également stable par l'action du groupe de Weyl W_G de G, l'action de W_G sur T se prolonge en une action sur $\overline{T}$.

(ii) L'équivalence des deux définitions de $\overline{T}$ provient de ce qu'un caractère arbitraire

$$\chi : T \to \mathbb{G}_m$$

se prolonge en un morphisme équivariant

$$\chi : \overline{T} \to \mathbb{A}^1$$

si et seulement si

$$\langle \chi, \rho_T^i \rangle \geq 0 \,, \quad 1 \leq i \leq r \,,$$

c'est-à-dire si et seulement si le caractère

$$\chi \circ \rho_T^\vee : T_E \to T \to \mathbb{G}_m$$

se prolonge en un morphisme

$$\chi \circ \rho_T^\vee : \overline{T}_E \to \mathbb{A}^1 \,.$$

□

On note $X_{\overline{T}} \subset X_T$ le cône saturé dual de $X_{\overline{T}}^\vee \subset X_T^\vee$ composé des caractères

$$\chi : T \to \mathbb{G}_m$$

qui se prolongent en un morphisme équivariant

$$\chi : \overline{T} \to \mathbb{A}^1 \,.$$

On a :

Lemme IV.2. –

Pour tout caractère $\chi \in X_{\overline{T}} \subset X_T$, notons E_χ le corps, extension finie séparable de F, qui correspond à l'orbite finie de χ sous l'action du groupe de Galois Γ_F.

Alors :

(i) *Pour tout tel χ, on a un morphisme de tores sur F induit par χ et ses transformés par Γ_F*

$$\chi_F : T \to \operatorname{Res}_{E_\chi/F} \mathbb{G}_m \,,$$

et il se prolonge en un morphisme équivariant

$$\chi_F : \overline{T} \to \operatorname{Res}_{E_\chi/F} \mathbb{A}^1$$

de variétés toriques sur F.

(ii) *Si χ décrit un ensemble fini de générateurs du cône saturé $X_{\overline{T}} \subset X_T$, alors le morphisme produit*

$$\prod_\chi \chi_F : \overline{T} \to \prod_\chi \operatorname{Res}_{E_\chi/F} \mathbb{A}^1$$

est une immersion fermée. □

Si χ est un caractère de $X_{\overline{T}} \subset X_T$, on dispose donc en toute place x de l'application équivariante induite

$$\chi_F : \overline{T}(F_x) \to (\mathrm{Res}_{E_\chi/F}\, \mathbb{A}^1)(F_x) = E_\chi \otimes_F F_x = E_{\chi,x}\,.$$

On dispose d'autre part du morphisme de trace

$$\mathrm{Tr} : E_{\chi,x} = E_\chi \otimes_F F_x \to F_x\,,$$

de la composante

$$\psi_x : F_x \to U(1) \subset \mathbb{C}^\times$$

du caractère

$$\psi : \mathbb{A}_F/F \to U(1) \subset \mathbb{C}^\times\,,$$

et des endomorphismes linéaires

$$\begin{array}{rcl} E_{\chi,x} & \to & E_{\chi,x} \\ a_x & \mapsto & c_x \cdot a_x \end{array}$$

de multiplication par des éléments $c_x \in E_{\chi,x} = E_\chi \otimes_F F_x$.

Cela permet de poser la définition suivante :

Définition IV.3. –

Pour tout caractère $\chi \in X_{\overline{T}} \subset X_T$ et pour toute place $x \in |F|$, on appellera χ-fonctions unitaires sur $\overline{T}(F_x)$,

$$\mathbb{1}_{\chi,c_x} : \overline{T}(F_x) \to U(1) \subset \mathbb{C}^\times\,,$$

les fonctions

$$\overline{T}(F_x) \ni t \mapsto \psi_x\left(\mathrm{Tr}\left(c_x \cdot \chi_F(t)\right)\right)$$

indexées par les éléments $c_x \in F_{\chi,x} = E_\chi \otimes_F F_x$.

Autrement dit, ce sont les fonctions composées

$$\overline{T}(F_x) \xrightarrow{\chi_F} E_{\chi,x} \xrightarrow{c_x \cdot \bullet} E_{\chi,x} \xrightarrow{\mathrm{Tr}} F_x \xrightarrow{\psi_x} U(1) \subset \mathbb{C}^\times\,.$$

□

On a :

Proposition IV.4. –

Soit x une place ultramétrique de F.

Alors les opérateurs de multiplication par les χ-fonctions unitaires

$$\mathbb{1}_{\chi,c_x} : \overline{T}(F_x) \to U(1) \subset \mathbb{C}^\times\,, \quad \chi \in X_{\overline{T}}\,, \quad c_x \in E_{\chi,x}\,,$$

préservent l'espace des ρ_T-fonctions sur $T(F_x)$.

Remarque :

Réciproquement, on pourrait montrer que pour toute ρ_T-fonction non nulle

$$f_x : T(F_x) \to \mathbb{C}$$

et si χ décrit une famille de générateurs du cône saturé $X_{\overline{T}}$, alors l'espace des ρ_T-fonctions sur $T(F_x)$ est le plus petit espace de fonctions

$$T(F_x) \to \mathbb{C}$$

qui :

- contient la fonction f_x,
- est stable par les translations,
- est stable par la ρ_T-transformation de Fourier et son inverse,
- est stable par les opérateurs de multiplication par les χ-fonctions unitaires $\mathbb{1}_{\chi,c_x} : \overline{T}(F_x) \to U(1)$, $c_x \in E_{\chi,x}$.

Démonstration de la proposition :

Par définition, les ρ_T-fonctions sur $T(F_x)$ sont les combinaisons linéaires de translatées par des éléments de $T(F_x)$ de fonctions images directes

$$\varphi_x = (\varphi_T^\vee)_* \, f_x = \int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(\bullet)} dt_\rho \cdot f_x(t_\rho)$$

de fonctions localement constantes à support compact

$$f_x : \overline{T}_E(F_x) = E \otimes_F F_x = E_x \to \mathbb{C} \, .$$

Or, comme chaque

$$\chi_F : \overline{T}(F_x) \to E_{\chi,x}$$

est équivariant, l'ensemble des χ-fonctions unitaires

$$\mathbb{1}_{\chi,c_x} : \overline{T}(F_x) \to U(1)$$

est stable par translation par les éléments de $T(F_x)$.

Il suffit donc de prouver que si

$$\varphi_x = (\rho_T^\vee)_* \, f_x$$

est l'image directe d'une fonction localement constante à support compact

$$f_x : \overline{T}_E(F_x) \to \mathbb{C} \, ,$$

alors les produits $\varphi_x \cdot \mathbb{1}_{\chi,c_x}$ sont encore des ρ_T-fonctions. Mais ceci résulte de ce que

$$\varphi_x \cdot \mathbb{1}_{\chi,c_x} = (\rho_T^\vee)_* \, (f_x \cdot (\mathbb{1}_{\chi,c_x} \circ \rho_T^\vee))$$

où la fonction composée

$$\mathbb{1}_{\chi,c_x} \circ \rho_T^\vee : \overline{T}_E(F_x) \xrightarrow{\rho_T^\vee} \overline{T}(F_x) \xrightarrow{\mathbb{1}_{\chi,c_x}} U(1)$$

est localement constante et le produit $f_x \cdot (\mathbb{1}_{\chi,c_x} \circ \rho_T^\vee)$ est localement constant à support compact.

$\square$

Considérons maintenant les transformées de Fourier $\widehat{\mathbb{1}_{\chi,c_x}}$ des fonctions unitaires $\mathbb{1}_{\chi,c_x}$ sur $\overline{T}(F_x)$. Elles sont définies en le sens suivant :

Définition IV.5. –

Pour toute fonction mesurable bornée

$$\varphi_x : T(F_x) \to \mathbb{C} \, ,$$

sa ρ_T-transformée de Fourier $\widehat{\varphi}_x$ est bien définie en tant que forme linéaire

$$f_x \mapsto \widehat{\varphi}_x(f_x)$$

sur l'espace des fonctions de carré intégrable f_x dont la ρ_T-transformée de Fourier $\widehat{f_x}$ est intégrable sur $T(F_x)$.

Elle est caractérisée par la formule

$$\widehat{\varphi}_x(f_x) = \int_{T(F_x)} dt \cdot \varphi_x(t) \cdot \widehat{f}_x(t)$$

pour toute fonction f_x de carré intégrable et intégrable sur $T(F_x)$.

Remarque :

Si

$$\mathbb{1}_x : \overline{T}(F_x) \to \mathbb{C}$$

est une fonction continue à support compact qui vaut 1 dans un voisinage du point $0 \in \overline{T}(F_x)$, on a

$$\widehat{\varphi}_x(f_x) = \lim_{a \mapsto 0} \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot \widehat{(\varphi_x \cdot \mathbb{1}_x(a \cdot \bullet))}\ (g) \cdot f_x(g)$$

pour toute fonction f_x comme dans l'énoncé. □

On a :

Lemme IV.6. –

Considérons un caractère $\chi \in X_{\overline{T}}$, une place arbitraire $x \in |F|$, un élément $c_x \in E_{\chi,x}$, la χ-fonction unitaire

$$\mathbb{1}_{\chi,c_x} : \overline{T}(F_x) \to U(1) \subset \mathbb{C}$$

et sa ρ_T-transformée de Fourier $\widehat{\mathbb{1}_{\chi,c_x}}$ au sens ci-dessus, et enfin la fonction unitaire composée

$$\mathbb{1}_{\chi,c_x} \circ \rho_T^\vee : \overline{T}_E(F_x) = E_x \to \overline{T}(F_x) \to U(1) \subset \mathbb{C}^\times$$

et sa ρ_E-transformée de Fourier $\widehat{(\mathbb{1}_{\chi,c_x} \circ \rho_T^\vee)}$.

Alors :

(i) *La forme linéaire $\widehat{(\mathbb{1}_{\chi,c_x} \circ \rho_T^\vee)}$ est invariante par l'action du sous-tore $T_\rho(F_x)$ de $T_E(F_x)$.*

(ii) *Pour toute fonction de carré intégrable f_x sur $T_E(F_x)$ dont la ρ_E-transformée de Fourier est intégrable et dont l'image directe par ρ_T*

$$(\rho_T^\vee)_*\, f_x = \int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(\bullet)} dt_\rho \cdot f_x(t_\rho)$$

est bien définie et de carré intégrable sur $T(F_x)$, la ρ_T-transformée de Fourier de celle-ci est intégrable et on a

$$\widehat{\mathbb{1}_{\chi,c_x}}\,((\rho_T^\vee)_*\, f_x) = \widehat{(\mathbb{1}_{\chi,c_x} \circ \rho_T^\vee)}\,(f_x)\,.$$

Remarque :

La propriété (ii) ne détermine la distribution $\widehat{\mathbb{1}_{\chi,c_x}}$ que sur l'image de $T_E(F_x)$ dans $T(F_x)$ qui est un sous-groupe ouvert. Cette image est $T(F_x)$ tout entier si T et T_E sont déployés, mais pas en général.

Cependant, pour tout $t \in T(F_x)$, on a

$$\mathbb{1}^t_{\chi,c_x}(\bullet) = \mathbb{1}_{\chi,c_x}(\bullet\, t) = \mathbb{1}_{\chi,\chi_F(t)\cdot c_x}(\bullet)$$

et par conséquent

$$|\det_G(t)|_x^{-1} \cdot \left(\widehat{\mathbb{1}_{\chi,c_x}}\right)^{t^{-1}} = \widehat{\mathbb{1}_{\chi,\chi_F(t)\cdot c_x}}\,.$$

Ainsi, la restriction de la distribution $\widehat{\mathbb{1}_{\chi,c_x}}$ à

$$t \cdot \mathrm{Im}\,(\rho_T^\vee : T_E(F_x) \to T(F_x))$$

s'identifie à la restriction de la distribution $\widehat{\mathbb{1}_{\chi,\chi_F(t)\cdot c_x}}$ à

$$\mathrm{Im}\,(\rho_T^\vee)$$

multipliée par le facteur

$$|\det_G(t)|_x\,.$$

□

On s'intéresse aux supports des distributions $\widehat{\mathbb{1}_{\chi,c_x}}$. Rappelons d'abord le résultat général suivant sur les orbites des variétés toriques affines normales :

Lemme IV.7. –

Considérons la variété torique affine normale $\overline{T}$ de tore T sur le corps F. Alors :

(i) *Les orbites géométriques de $\overline{T}$ muni de l'action de T sont en nombre fini et naturellement indexées par les faces C du cône convexe polyédral saturé $X_{\overline{T}} \subset X_T$ qui définit $\overline{T}$. On les note T_C. Chaque orbite T_C est un sous-schéma localement fermé de $\overline{T}$ qui est défini sur toute extension F' de F dont le groupe de Galois $\Gamma_{F'}$ respecte la face C de $X_{\overline{T}}$.*

(ii) *Toute orbite T_C de $\overline{T}$ possède un unique "point base" en lequel tout caractère $\chi \in X_{\overline{T}}$ prend la valeur 1 si χ est élément de la face C et la valeur 0 sinon. Ce point base 1_C est défini sur tout corps $F' \supset F$ sur lequel T_C est définie, avec alors*

$$T_C(F') = T(F') \cdot 1_C\,.$$

La dimension de l'orbite T_C est égale à celle de la face correspondante C de $X_{\overline{T}}$.

(iii) *Une orbite T_C est contenue dans l'adhérence $\overline{T}_{C'}$ d'une orbite $T_{C'}$ si et seulement si C est contenue dans C' et donc est une face de celle-ci.*

□

Prouvons maintenant :

Proposition IV.8. –

On considère un caractère $\chi \in X_{\overline{T}} \subset X_T$, une place $x \in |F|$, un élément $c_x \in E_{\chi,x} = E_\chi \otimes_F F_x$ et une face C de $X_{\overline{T}}$ telle que :

- C *est définie sur* F_x,
- C *contient l'ensemble des images* $\sigma(\chi)$ *de* χ *par un élément* $\sigma \in \Gamma_F$ *telles que la coordonnée correspondante de* c_x *ne soit pas nulle.*

Alors, considérant les fonctions de carré intégrable

$$f_x : T(F_x) \to \mathbb{C}$$

dont la ρ_T*-transformée de Fourier est intégrable, on a*

$$\widehat{\mathbb{1}_{\chi,c_x}}(f_x) = 0$$

dès que f_x *est supportée par une partie compacte de* $\overline{T}(F_x)$ *qui ne rencontre pas la strate* $\overline{T}_C(F_x)$.

Démonstration :

Pour tout élément $t \in T(F_x)$, on peut considérer la fonction unitaire

$$\mathbb{1}_{\chi,\chi_F(t)\cdot c_x} \circ \rho_T^\vee = \mathbb{1}_{\chi\circ\rho_T^\vee,\chi_F(t)\cdot c_x}$$

sur $\overline{T}_E(F_x) = E_x = E \otimes_F F_x$. Elle est associée au caractère

$$\chi \circ \rho_T^\vee : \overline{T}_E \to \overline{T} \to \mathbb{A}^1 \, .$$

D'après le lemme IV.6 et la remarque qui le suit, on a

$$\text{support}\left(\widehat{\mathbb{1}_{\chi,c_x}}\right) = \bigcup_{t\in T(F_x)/\mathrm{Im}(\rho_T^\vee)} t \cdot (\rho_T^\vee)_* \left(\text{support}\left(\widehat{\mathbb{1}_{\chi\circ\rho_T^\vee,\chi_F(t)\cdot c_x}}\right)\right).$$

D'autre part, $X_{\overline{T}}$ est par définition le dual du cône convexe polyédral de $X_T^\vee$ engendré par les $\rho_T^i \in X_T^\vee = X_{\overline{T}}$, $1 \leq i \leq r$.

Notons I le sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, r\}$ constitué des indices i tels que $\langle \chi', \rho_T^i \rangle = 0$, $\forall \chi' \in C$. Ce sous-ensemble est stable par l'action de Γ_{F_x} et il définit C au sens que

$$C = \left\{\chi' \in X_{\overline{T}} \mid \langle \chi', \rho_T^i \rangle = 0 \, , \quad \forall\, i \in I\right\}.$$

Pour tout $\chi' \in C$, le caractère composé

$$\chi' \circ \rho_T^\vee : \overline{T}_E \to \overline{T} \to \mathbb{A}^1$$

est un monôme de la forme

$$Z_1^{m_1} \ldots Z_r^{m_r} \, ,$$

avec

$$m_1, m_2, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$$

et

$$m_i = 0 \, , \quad \forall\, i \in I \, .$$

Donc les fonctions unitaires

$$\mathbb{1}_{\chi\circ\rho_T^\vee,\chi_F(t)\cdot c_x} : \overline{T}_E(F_x) \to U(1) \subset \mathbb{C}$$

ne dépendent que des coordonnées Z_i de $\overline{T}_E(F_x)$ d'indices $i \notin I$, et leurs transformées de Fourier sur $\overline{T}_E(F_x)$

$$\widehat{\mathbb{1}_{\chi\circ\rho_T^\vee,\chi_F(t)\cdot c_x}}$$

sont supportées par le sous-espace défini par les équations

$$Z_i = 0\,, \quad \forall\, i \in I\,.$$

D'où la conclusion. $\square$

Enfin, nous souvenant que les ψ_x, $x \in |F|$, sont les composantes d'un caractère global

$$\psi = \prod_x \psi_x : \mathbb{A}_F \to \mathbb{A}_F/F \to U(1) \subset \mathbb{C}^\times\,,$$

on peut compléter la définition IV.3 par la définition globale suivante :

Définition IV.9. –

Pour tout caractère $\chi \in X_{\overline{T}} \subset X_T$, on appellera χ-fonctions unitaires sur $\overline{T}(\mathbb{A}_F)$

$$\mathbb{1}_{\chi,c} : \overline{T}(\mathbb{A}_F) \to U(1) \subset \mathbb{C}^\times\,,$$

les fonctions

$$\overline{T}(\mathbb{A}_F) \ni t \mapsto \psi\,(\mathrm{Tr}\,(c \cdot \chi_F(t)))$$

indexées par les éléments $c = (c_x)_{x\in|F|} \in \mathbb{A}_{E_\chi} = E_\chi \otimes_F \mathbb{A}_F = \prod\limits_{x\in|F|} E_{\chi,x}$.

Autrement dit, ce sont les fonctions composées

$$\overline{T}(\mathbb{A}_F) \xrightarrow{\chi_F} E_\chi \otimes_F \mathbb{A}_F \xrightarrow{c\cdot\bullet} E_\chi \otimes_F \mathbb{A}_F \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \mathbb{A}_F \xrightarrow{\psi} U(1) \subset \mathbb{C}^\times\,.$$

Remarque :

Comme le caractère ψ vaut 1 sur les éléments du sous-groupe discret F de $\mathbb{A}_F$ et que le morphisme $\mathrm{Tr} : E_\chi \otimes_F \mathbb{A}_F \to \mathbb{A}_F$ envoie E_χ dans F, on voit que si $c \in E_\chi$, la fonction unitaire

$$\mathbb{1}_{\chi,c} : \overline{T}(\mathbb{A}_F) \to U(1) \subset \mathbb{C}^\times$$

prend la valeur 1 en tous les points de $\overline{T}(F)$. $\square$

La remarque qui suit cette définition rend vraisemblable le résultat suivant :

Proposition IV.10. –

Pour tout caractère $\chi \in X_{\overline{T}}$, les opérateurs de multiplication par les χ-fonctions unitaires

$$\mathbb{1}_{\chi,c} = \prod_{x\in|F|} \mathbb{1}_{\chi,c_x} : \overline{T}(\mathbb{A}_F) \to U(1) \subset \mathbb{C}^\times\,, \quad c = (c_x)_{x\in|F|} \in \mathbb{A}_{E_{\chi'}}$$

vérifient les propriétés suivantes :

(i) *Ils stabilisent l'espace des ρ_T-fonctions globales sur $T(\mathbb{A}_F)$.*

(ii) *Lorsque $c \in E_\chi$, ils laissent invariante la fonctionnelle de Poisson*

$$f \mapsto \text{“}\sum_{\gamma\in\overline{T}(F)} f(\gamma)\text{”}$$

sur l'espace des ρ_T-fonctions globales f sur $T(\mathbb{A}_F)$.

Démonstration :

(i) On sait déjà que l'opérateur de multiplication par $\mathbb{1}_{\chi,c_x}$ respecte l'espace des ρ_T-fonctions sur $T(F_x)$ en toute place $x \in |F|$.

En effet, en les places ultramétriques, c'est le contenu de la proposition IV.4. Et, en les places archimédiennes, l'espace des ρ_T-fonctions est redéfini pour que cela soit vrai.

On conclut en remarquant que, en presque toute place ultramétrique x non ramifiée pour T et ρ_T, la fonction $\mathbb{1}_{\chi,c_x}$ vaut 1 sur le support $\overline{T}(O_x)$ de la ρ_T-fonction standard en cette place.

(ii) Cela résulte du lemme suivant :

Lemme IV.11. –

Pour toute ρ-fonction f sur $T(\mathbb{A})$, on peut écrire

$$\text{“}\sum_{\gamma\in\overline{T}(F)} f(\gamma)\text{”} = \sum_{\gamma\in T(F)} f(\gamma) + \sum_{\substack{k\geq 1\\ C_1,C_2,\dots,C_k}} \sum_{\gamma\in T_{C_k}(F)} f_{C_1,C_2,\dots,C_k}(\gamma)$$

où :

- *les $C_1, C_2, \dots, C_k$ décrivent les chaînes de faces définies sur F du cône convexe polyédral $C_0 = X_{\overline{T}}$ telles que, pour $1 \leq i \leq k$, C_i est une face de codimension 1 de C_{i-1},*
- *chaque $f_{C_1,C_2,\dots,C_k}$ est une fonction continue sur la strate $T_{C_k}(\mathbb{A})$ qui se déduit de la fonction $f_{C_1,C_2,\dots,C_{k-1}}$ sur $T_{C_{k-1}}(\mathbb{A})$ par un certain opérateur linéaire,*
- *pour tout point $t \in T_{C_k}(\mathbb{A})$, la valeur de la fonction $f_{C_1,\dots,C_k}$ en le point t ne dépend que de la restriction de la fonction $f_{C_1,\dots,C_{k-1}}$ à des voisinages arbitrairement petits de t dans $\overline{T}_{C_{k-1}}(\mathbb{A})$.*

Principe de démonstration :

On utilise le calcul de

$$\text{“}\sum_{\gamma\in\overline{T}(F)} f(\gamma)\text{”}$$

à partir de la décomposition spectrale de la fonction

$$T(F)\backslash T(\mathbb{A}) \ni t \mapsto \sum_{\gamma\in T(F)} f(t\cdot\gamma)\,.$$

La formation des termes $f_{C_1,C_2,\dots,C_k}$ vient de calculs de résidus successifs. □

Fin de la démonstration de la proposition IV.10(ii) :

Si F est un corps de fonctions, la fonction $\mathbb{1}_{\chi,c}$ vaut 1 au voisinage de tout point rationnel $\gamma \in \overline{T}(F)$.

On déduit alors du lemme, en procédant par récurrence sur k, que les fonctions $f_{C_1,\dots,C_k}$ et $(\mathbb{1}_{\chi,c}\cdot f)_{C_1,\dots,C_k}$ coïncident dans un voisinage suffisamment petit de tout point rationnel $\gamma \in \overline{T}_{C_k}(F)$.

Si F est un corps de nombres, on doit s'intéresser en plus à l'ordre du pôle des fonctions analytiques pour lesquelles un calcul de résidu en ce pôle définit l'opérateur

$$f_{C_1,C_2,\dots,C_{k-1}} \mapsto f_{C_1,C_2,\dots,C_k}\,.$$

Notons I l'ensemble des indices i, $1 \leq i \leq r$, tels que le cocaractère $\rho_T^i \in X_T^\vee$ ne s'annule pas sur la face C_{k-1} de $X_{\overline{T}} \subset X_T$ mais s'annule sur la face $C_k \subset C_{k-1}$.

Cet ensemble I est stable par l'action du groupe de Galois Γ_F, et l'ordre m des pôles considérés est égal au nombre d'orbites de Γ_F dans I.

Considérons la restriction de χ à la strate $\overline{T}_{C_{k-1}}$ de $\overline{T}$.

Si cette restriction est 0, la fonction $\mathbb{I}_{\chi,c}$ vaut uniformément 1 sur $\overline{T}_{C_{k-1}}(\mathbb{A})$ et l'opérateur

$$f_{C_1,\ldots,C_{k-1}} \mapsto f_{C_1,\ldots,C_k}$$

commute avec la multiplication par $\mathbb{I}_{\chi,c}$.

Si au contraire la restriction de χ à $\overline{T}_{C_{k-1}}$ n'est pas nulle,

$$t \cdot 1_{C_{k-1}} \mapsto \chi\,(t \cdot 1_{C_{k-1}})$$

est un caractère du tore $T_{C_{k-1}}$ quotient de T, et tous les entiers $\langle \chi, \rho_T^i \rangle$, $i \in I$, sont égaux.

S'ils valent tous 0, la fonction $\mathbb{I}_{\chi,c}$ ne dépend pas de la coordonnée qui définit T_{C_k} dans $\overline{T}_{C_{k-1}}$, si bien que l'opérateur

$$f_{C_1,\ldots,C_{k-1}} \mapsto f_{C_1,\ldots,C_k}$$

commute avec la multiplication par $\mathbb{I}_{\chi,c}$.

Sinon, la fonction $\mathbb{I}_{\chi,c_x}$ en chaque place x est le composé du caractère additif $\psi_x \circ \mathrm{Tr}$ et d'un caractère multiplicatif dont la dépendance en la coordonnée Z qui définit T_{C_k} dans $\overline{T}_{C_{k-1}}$ est de la forme

$$Z \mapsto Z^{m'} \quad \text{avec} \quad m' \geq m\,.$$

En les places ultramétriques, et comme dans le cas des corps de fonctions, la fonction $\mathbb{I}_{\chi,c_x}$ ne dépend plus de la coordonnée Z si Z devient assez petit.

En les places archimédiennes, le premier terme non constant dans le développement en Z de la fonction $\mathbb{I}_{\chi,c_x}$ est d'ordre m' qui est au moins égal à l'ordre m du pôle en lequel sont calculés les résidus. Donc l'opérateur

$$f_{C_1,\ldots,C_{k-1}} \mapsto f_{C_1,\ldots,C_k}$$

commute avec la multiplication par $\mathbb{I}_{\chi,c}$.

Comme $\mathbb{I}_{\chi,c}(\gamma) = 1$, $\forall\, \gamma \in \overline{T}(F)$, cela termine la démonstration également dans le cas où F est un corps de nombres.

□

2 Des fonctions unitaires sur les semi-groupes

On commence par la définition générale suivante :

Définition IV.12. –

Étant donné un groupe réductif G sur un corps k, un semi-groupe $\overline{G}$ de groupe G est une variété affine intègre qui contient G comme ouvert dense et telle que le morphisme de multiplication $G \times G \to G$ se prolonge en

$$\overline{G} \times \overline{G} \to \overline{G}\,.$$

On a les résultats classiques :

Proposition IV.13. –

Soit un groupe réductif quasi-déployé sur un corps k, muni d'une paire de Borel (T, B) définie sur k.

(i) *Se donner un semi-groupe géométriquement normal $\overline{G}$ de groupe G sur k équivaut à se donner, dans le réseau X_T des caractères de T, un cône polyédral saturé $X_{\overline{T}}$ stable par l'action du groupe de Weyl W_G et par celle du groupe de Galois Γ_k ou, ce qui revient au même, son cône dual $X_{\overline{T}}^\vee$ dans le réseau $X_T^\vee$ des cocaractères de T.*

(ii) *Dans la correspondance de* (i), *la variété torique affine géométriquement normale $\overline{T}$ de tore T qui est associée au cône polyédral saturé $X_{\overline{T}}$ s'identifie à l'adhérence schématique de T dans $\overline{G}$.*

(iii) *Dans la correspondance de* (i), *et si N_B et $N_{B^{\mathrm{op}}}$ désignent les radicaux unipotents de B et de son sous-groupe de Borel opposé B^{op}, alors le quotient*

$$N_{B^{\mathrm{op}}}\backslash\overline{G}/N_B = \overline{T}^+ \,,$$

muni de l'action du tore T à gauche ou à droite, est la variété torique affine géométriquement normale associée au cône saturé

$$X_{\overline{T}^+} \subset X_{\overline{T}} \subset X_T$$

constitué des caractères de $X_{\overline{T}}$ qui sont dominants, c'est-à-dire vérifient les inégalités

$$\langle \chi, \alpha \rangle \geq 0 \,, \qquad \forall\, \alpha \in \Delta_B \,.$$

□

Revenons maintenant à notre groupe réductif quasi-déployé G sur le corps global F, avec sa paire de Borel (T, B) définie sur F et la représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) \,.$$

On suppose toujours que le groupe de Galois Γ_F agit sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de ρ par permutation de ses r vecteurs de base, si bien que l'homomorphisme Γ_F-équivariant

$$\rho_T = (\rho_T^1, \ldots, \rho_T^r) : \widehat{T} \hookrightarrow \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r = \widehat{T}_E$$

est dual d'un homomorphisme de tores sur F

$$\rho_T^\vee : T_E \to T \,.$$

Comme la famille des caractères $\rho_T^i \in X_{\widehat{T}} = X_T^\vee$ est stable par la double action du groupe de Weyl W_G et du groupe de Galois Γ_F, la proposition IV.13 permet de poser :

Définition IV.14. –

Dans la situation ci-dessus, on appelle "semi-groupe dual de la représentation ρ" le semi-groupe géométriquement normal $\overline{G}$ du groupe G associé au cône saturé

$$X_{\overline{T}} = \{\chi \in X_T \mid \langle \chi, \rho_T^i \rangle \geq 0 \,, \quad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, r\}\}$$

de X_T.

Remarques :

(i) Cette définition avait déjà été introduite par Braverman et Kazhdan, en des termes différents mais équivalents.

(ii) Ainsi, le cône $X_{\overline{T}}^\vee \subset X_T^\vee$ dual de $X_{\overline{T}} \subset X_T$ est par définition le cône saturé engendré par les ρ_T^i ou, ce qui revient au même, par les orbites sous W_G des plus hauts poids des facteurs irréductibles de $\rho : \widehat{G} \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$. □

Rappelons que, pour tout caractère $\chi \in X_{\overline{T}} \subset X_T$, on a noté E_χ le corps, extension finie séparable de F, qui correspond à l'orbite finie de χ sous l'action du groupe de Galois Γ_F. Cela s'applique en particulier aux éléments de $X_{\overline{T}^+} \subset X_{\overline{T}}$.

En remplaçant $X_{\overline{T}}$ par $X_{\overline{T}^+}$ dans l'énoncé du lemme IV.2, on obtient :

Corollaire IV.15. –

(i) *Pour tout $\chi \in X_{\overline{T}^+} \subset X_{\overline{T}} \subset X_T$, on a un morphisme de tores sur F induit par χ et ses transformés par Γ_F*

$$\chi_F : T \to \mathrm{Res}_{E_\chi/F}\, \mathbb{G}_m \,,$$

et il se prolonge en un morphisme équivariant

$$\chi_F : N_B^{\mathrm{op}} \backslash \overline{G} / N_B = \overline{T}^+ \to \mathrm{Res}_{E_\chi/F}\, \mathbb{A}^1$$

de variétés toriques sur F.

(ii) *Si χ décrit un ensemble fini de générateurs du cône saturé $X_{\overline{T}^+} \subset X_{\overline{T}} \subset X_T$, alors le morphisme produit*

$$\prod_\chi \chi_F : N_B^{\mathrm{op}} \backslash \overline{G} / N_B = \overline{T}^+ \to \prod_\chi \mathrm{Res}_{E_\chi/F}\, \mathbb{A}^1$$

est une immersion fermée. □

Si χ est un caractère de $X_{\overline{T}^+}$, on dispose donc en toute place x de l'application équivariante induite

$$N_B^{\mathrm{op}}(F_x) \backslash \overline{G}(F_x) / N_B(F_x) \to \overline{T}^+(F_x) \xrightarrow{\chi_F} (\mathrm{Res}_{E_\chi/F}\, \mathbb{A}^1)(F_x) = E_\chi \otimes_F F_x = E_{\chi,x} \,.$$

Comme dans la définition IV.3, on peut composer cette application avec le morphisme de trace

$$\mathrm{Tr} : E_{\chi,x} \to F_x \,,$$

le caractère

$$\psi_x : F_x \to U(1) \subset \mathbb{C}^\times$$

et n'importe quel endomorphisme linéaire de multiplication

$$\begin{array}{ccl} E_{\chi,x} & \to & E_{\chi,x} \\ a_x & \mapsto & c_x \cdot a_x \,, \quad \text{avec } c_x \in E_{\chi,x} \,, \end{array}$$

pour poser :

Définition IV.16. –

Pour tout caractère $\chi \in X_{\overline{T}^+} \subset X_{\overline{T}} \subset X_T$, et pour toute place $x \in |F|$, on appellera χ-fonctions unitaires sur $\overline{T}^+(F_x)$ ou $N_B^{\mathrm{op}}(F_x) \backslash \overline{G}(F_x) / N_B(F_x)$

$$\mathbb{I}^G_{\chi,c_x} : N_B^{\mathrm{op}}(F_x) \backslash \overline{G}(F_x) / N_B(F_x) \to \overline{T}^+(F_x) \to U(1) \subset \mathbb{C}^+ \,,$$

les fonctions

$$\overline{T}^+(F_x) \ni t \mapsto \psi_x \left(\mathrm{Tr} \left(c_x \cdot \chi_F(t) \right) \right)$$

indexées par les éléments $c_x \in E_{\chi,x} = E_\chi \otimes_F F_x$.

Autrement dit, ce sont les fonctions composées

$$\overline{T}^{+}(F_x) \xrightarrow{\ \chi_F\ } E_{\chi,x} \xrightarrow{\ c_x\cdot\bullet\ } E_{\chi,x} \xrightarrow{\ \mathrm{Tr}\ } F_x \xrightarrow{\ \psi_x\ } U(1) \subset \mathbb{C}^\times \,.$$

$\square$

Le tore maximal T de G est déjà muni, en toute place $x \in |F|$, d'un opérateur unitaire de ρ_T-transformation de Fourier sur $T(F_x)$

$$\varphi_x \mapsto \widehat{\varphi}_x = \int_{T(F_x)} dt \cdot k_x^{\rho_T}(t\,\bullet) \cdot \varphi_x(t)$$

induit par la ψ_x-transformation de Fourier linéaire sur $\overline{T}_E\,(F_x) = E_x$.

Supposant que G est également muni, en toute place x, d'un opérateur unitaire de ρ-transformation de Fourier compatible avec la ρ_T-transformation de Fourier sur $T(F_x)$, on peut considérer les transformées de Fourier $\widehat{\mathbb{1}^G_{\chi,c_x}}$ des fonctions unitaires $\mathbb{1}^G_{\chi,c_x}$ sur $\overline{G}(F_x)$. Elles sont définies au sens suivant :

Définition IV.17. –

Supposons dorénavant que, pour toute place $x \in |F|$, $G(F_x)$ est muni d'un opérateur de ρ-transformation de Fourier

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x = \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot k_x^\rho(g\,\bullet)\, f_x(g)$$

qui vérifie les deux propriétés suivantes :

(1) *Il est compatible avec la ρ_T-transformation de Fourier sur $T(F_x)$ au sens que, pour toute fonction continue à support compact,*

$$f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}\,,$$

le produit

$$|\det_B(\bullet)|_x^{1/2} \cdot f_{x,N_B} : T(F_x) \to \mathbb{C}$$

admet pour ρ_T-transformée de Fourier le produit

$$|\det_B(\bullet)|_x^{1/2} \cdot (\widehat{f}_x)_{N_B} : T(F_x) \to \mathbb{C}\,.$$

(2) *On a $\overline{k_x^\rho(g)} = k_x^\rho(-g)$, $\forall\, g \in G(F_x)$, et l'opérateur*

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x$$

est unitaire au sens qu'il préserve le produit hermitien

$$(f_1, f_2) \mapsto \langle f_1, f_2\rangle = \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f_1(g) \cdot \overline{f_2(g)}\,.$$

Alors, pour toute fonction mesurable bornée

$$\varphi_x : G(F_x) \to \mathbb{C}\,,$$

sa ρ-transformée de Fourier $\widehat{\varphi_x}$ est bien définie en tant que forme linéaire

$$f_x \mapsto \widehat{\varphi_x}\,(f_x)$$

sur l'espace des fonctions de carré intégrable f_x dont la ρ_T-transformée de Fourier $\widehat{f}_x$ est intégrable sur $G(F_x)$.

Elle est caractérisée par la formule

$$\widehat{\varphi_x}(f_x) = \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot \varphi_x(g) \cdot \widehat{f}_x(g)$$

pour toute fonction f_x de carré intégrable sur $G(F_x)$ dont la ρ-transformée de Fourier $\widehat{f}_x$ est intégrable.

□

Pour tout caractère $\chi \in X_{\overline{T}^+}$, toute place $x \in |F|$ et tout élément $c_x \in E_{\chi,x}$, on dispose donc de la distribution

$$\widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}$$

définie comme la ρ-transformée de Fourier de la fonction unitaire $\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}$ sur $G(F_x)$.

D'autre part, comme le caractère $\chi \in X_{\overline{T}^+}$ est élément de $X_{\overline{T}} \supset X_{\overline{T}^+}$, on dispose aussi de la fonction unitaire $\mathbb{I}_{\chi,c_x}$ sur $\overline{T}(F_x) \supset T(F_x)$ et de sa ρ_T-transformée de Fourier la distribution $\widehat{\mathbb{I}_{\chi,c_x}}$ sur $T(F_x)$.

Les deux distributions $\widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}$ sur $G(F_x)$ et $\widehat{\mathbb{I}_{\chi,c_x}}$ sur $T(F_x)$ sont reliées de la manière suivante :

Lemme IV.18. –

Considérons comme ci-dessus un caractère $\chi \in X_{\overline{T}^+}$, une place $x \in |F|$ et un élément c_x de $E_{\chi,x}$.

Alors :

(i) *La distribution $\widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}$ est invariante à droite par $N_B^{\mathrm{op}}(F_x)$ et invariante à gauche par $N_B(F_x)$.*

(ii) *Si C est une face du cône $X_{\overline{T}}$ définie sur F_x et qui contient ceux des $\sigma(\chi)$, $\sigma \in \Gamma_F$, tels que la coordonnée correspondante de c_x ne soit pas nulle, et si $T^C \subset T$ désigne le sous-tore fixateur des points de la strate $T_C \subset \overline{T}$, la distribution $\widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}$ est également invariante par le sous-tore $T^C(F_x) \subset T(F_x)$ agissant à droite ou à gauche.*

(iii) *Si f_x et φ_x sont deux fonctions de carré intégrable sur $G(F_x)$ et $T(F_x)$ respectivement, telles que $\widehat{f}_x$ et $\widehat{\varphi}_x$ sont intégrables, et qui sont reliées par la formule*

$$\widehat{\varphi}_x(t) = \int_{N_B^{\mathrm{op}}(F_x) \times N_B(F_x)} dv \cdot du \cdot \widehat{f}_x(v \cdot t \cdot u) \cdot |\delta_B(t)|_x \cdot |\det_B(t)|_x\,, \quad t \in T(F_x)\,,$$

où la mesure $d_\rho\, g$ de $G(F_x)$ est écrite sous la forme

$$d_\rho\, g = |\det_B(t)|_x \cdot |\delta_B(t)|_x \cdot dt \cdot dv \cdot du\,, \qquad \text{avec } g = v \cdot t \cdot u\,,$$

on a

$$\widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}(f_x) = \widehat{\mathbb{I}_{\chi,c_x}}(\varphi_x)\,.$$

Démonstration :

(i) résulte de ce que la fonction $\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}$ est invariante à gauche par $N_B^{\mathrm{op}}(F_x)$ et invariante à droite par $N_B(F_x)$.

(ii) Le sous-tore T^C de T est l'intersection des noyaux des caractères éléments de C. Donc le sous-tore $T^C(F_x)$ de $T(F_x)$ laisse invariante la fonction $\mathbb{I}^G_{\chi,c_x} : G(F_x) \to U(1)$ et il transforme la forme linéaire

$$f_x \mapsto \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f_x(g) \cdot \mathbb{I}^G_{\chi,c_x}(g) = \mathbb{I}^G_{\chi,c_x}(f_x)$$

par le caractère

$$T^C(F_x) \ni t \mapsto |\det_\rho(t)|_x^{-1} .$$

Donc il laisse invariante la forme linéaire

$$f_x \mapsto \widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}(f_x) = \mathbb{I}^G_{\chi,c_x}(\widehat{f}_x) .$$

(iii) résulte de ce que

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}(f_x) &= \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot \mathbb{I}^G_{\chi,c_x}(g) \cdot \widehat{f}_x(g) \\ &= \int_{T(F_x)\times N_B^{\mathrm{op}}(F_x)\times N_B(F_x)} dt \cdot dv \cdot du \cdot |\det_B(t)|_x \cdot |\delta_B(t)|_x \cdot \mathbb{I}_{\chi,c_x}(t) \cdot \widehat{f}_x(v \cdot t \cdot u) \end{aligned}$$

puisque $\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}(v \cdot t \cdot u) = \mathbb{I}_{\chi,c_x}(t)$ pour tous $v \in N_B^{\mathrm{op}}(F_x)$, $u \in N_B(F_x)$. $\square$

En ce qui concerne les ρ-transformés de Fourier des opérateurs de multiplication par les fonctions unitaires $\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}$, on a :

Corollaire IV.19. –

Considérons encore un caractère $\chi \in X_{\overline{T}^+}$, une place $x \in |F|$ et un élément $c_x \in E_{\chi,x}$.

Alors :

(i) *Le ρ-transformé de Fourier de l'opérateur unitaire de multiplication par la fonction $\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}$ sur $G(F_x)$ est $N_B^{\mathrm{op}}(F_x)$-équivariant à droite et $N_B(F_x)$-équivariant à gauche.*

(ii) *Soient f_1 et f_2 deux fonctions de carré intégrable sur $G(F_x)$ reliées par la formule*

$$\widehat{f}_2 = \widehat{f}_1 \cdot \mathbb{I}^G_{\chi,c_x} .$$

Si les termes constants

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= |\det_B(\bullet)|_x^{1/2} \cdot f_{1,N_B} \\ \varphi_2 &= |\det_B(\bullet)|_x^{1/2} \cdot f_{2,N_B} \end{aligned}$$

sont bien définis et de carré intégrable sur $T(F_x)$, ils sont reliés par la formule

$$\widehat{\varphi}_2 = \widehat{\varphi}_1 \cdot \mathbb{I}_{\chi,c_x} .$$

$\square$

Intéressons-nous maintenant aux supports des distributions $\widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}$.

On a vu que si C est une face du cône $X_{\overline{T}}$ définie sur F_x et qui contient ceux des $\sigma(\chi)$, $\sigma \in \Gamma_F$, tels que la coordonnée correspondante de c_x ne soit pas nulle, alors la distribution $\widehat{\mathbb{I}_{\chi,c_x}}$ est supportée par la strate $\overline{T}_C(F_x)$ de $\overline{T}(F_x)$ au sens de la proposition IV.8.

Si $\chi \in X_{\overline{T}^+} \subset X_{\overline{T}}$, on se demande s'il ne pourrait pas arriver aussi que la distribution $\widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}$ sur $G(F_x)$ soit supportée dans la strate $\overline{T}_C(F_x) \subset \overline{T}(F_x) \subset \overline{G}(F_x)$.

D'après le lemme IV.18(i), une condition nécessaire pour cela est certainement que les points de la strate

$$\overline{T}_C \hookrightarrow \overline{T} \hookrightarrow \overline{G}$$

soient invariants par l'action à droite de $N_{B^{\mathrm{op}}}$ et par l'action à gauche de N_B.

Or on a le lemme suivant :

Lemme IV.20. –

Soit C une face du cône saturé $X_{\overline{T}}$ dont tous les éléments sont des caractères dominants.

Alors les points de la strate

$$\overline{T}_C \hookrightarrow \overline{T} \hookrightarrow \overline{G}$$

sont invariants par l'action à droite de N_B^{op} et par l'action à gauche de N_B.

Remarque :

Le cône saturé $X_{\overline{T}}$ compte nécessairement au moins une arête (c'est-à-dire une face de dimension 1) dont les éléments sont des caractères dominants.

Démonstration :

L'assertion est géométrique donc, quitte à remplacer F par une extension finie, on peut supposer qu'il n'y a pas d'action de Γ_F, autrement dit que T et G sont déployés.

Il suffit de démontrer que, pour toute racine positive $\alpha \in \Phi_G^+$, les points de $\overline{T}_C \hookrightarrow \overline{T} \hookrightarrow \overline{G}$ sont invariants par l'action à gauche du sous-groupe additif $U_\alpha \subset N_B$ associé à α et invariants à droite par $U_{-\alpha} \subset N_{B^{\mathrm{op}}}$.

On note T_α la composante neutre du noyau de $\alpha : T \to \mathbb{G}_m$. C'est un sous-tore de T de codimension 1. Son commutateur G_α dans G est un sous-groupe de Levy standard. On peut supposer que $G = G_\alpha$, autrement dit que α et $-\alpha$ sont les seules racines de G et que $U_\alpha = N_B$, $U_{-\alpha} = N_B^{\mathrm{op}}$.

Il existe une représentation injective $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_d$ de G telle que $\overline{G}$ s'identifie à l'adhérence schématique de $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_d$ dans M_d.

Comme $G = G_\alpha$, le sous-groupe dérivé $[G, G] = G^{\mathrm{der}} = G_\alpha^{\mathrm{der}}$ est isomorphe à SL_2 ou PGL_2. La représentation $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_d$ est somme directe de représentations $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_k$ dont la restriction à G^{der} est irréductible, donc est isomorphe à la représentation sym^{k-1} de SL_2 ou PGL_2.

On peut choisir pour l'espace $\mathbb{A}^d$ de GL_d des coordonnées affines qui soient compatibles avec la décomposition de $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_d$ comme somme directe de représentations irréductibles, et telles que T, $N_B = U_\alpha$ et $N_B^{\mathrm{op}} = U_{-\alpha}$ s'envoient respectivement dans T_d, N_d et N_d^{op}.

Pour tout facteur irréductible $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_k$ de $G \hookrightarrow \mathrm{GL}_d$, notons $X_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq k$ les k^2 coordonnées affines de $M_k \supset \mathrm{GL}_k$. Ainsi, les coordonnées diagonales $X_{i,i}$, $1 \leq i \leq k$, définissent des caractères de T qui sont éléments du cône $X_{\overline{T}}$.

Si $k \geq 2$, le caractère $X_{k,k} \in X_{\overline{T}}$ ne peut pas être dominant. Par conséquent, les caractères $X_{j,j}$, $2 \leq j \leq k$, ne peuvent pas être éléments de la face C de $X_{\overline{T}}$, et ils s'annulent nécessairement sur la strate $\overline{T}_C \hookrightarrow \overline{T}$.

Comme l'image de $N_B = U_\alpha$ [resp. $N_B^{\mathrm{op}} = U_{-\alpha}$] dans GL_k est contenue dans N_k [resp. N_k^{op}], on en conclut comme voulu que les points de la strate $\overline{T}_C$ sont invariants à gauche par N_B et invariants à droite par N_B^{op}.

□

Nous pouvons maintenant prouver :

Proposition IV.21. –

On considère un caractère $\chi \in X_{\overline{T}} \subset X_T$, une place $x \in |F|$, un élément $c_x \in E_{\chi,x} = E_\chi \otimes_F F_x$ et une face C du cône polyédral $X_{\overline{T}}$ définie sur F_x et qui contient l'ensemble des images $\sigma(\chi)$ de χ par un élément $\sigma \in \Gamma_F$ telles que la coordonnée correspondante de c_χ ne soit pas nulle.

Alors :

(i) *La distribution* $\widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}$ *sur* $G(F_x)$ *est supportée par*

$$N_B(F_x)\cdot \overline{T}_C(F_x)\cdot N_B^{\mathrm{op}}(F_x)\subset \overline{G}\,(F_x)$$

au sens que, pour toute fonction f_x *sur* $G(F_x)$ *telle que*

$$\begin{cases} \bullet\ f_x \text{ est de carré intégrable et } \widehat{f_x} \text{ est intégrable,} \\ \bullet\ f_x \text{ se prolonge en une fonction continue sur } \overline{G}(F_x) \text{ supportée par une partie compacte qui ne} \\ \text{rencontre pas } N_B(F_x)\cdot \overline{T}_C(F_x)\cdot N_B^{\mathrm{op}}(F_x), \end{cases}$$

on a nécessairement

$$\widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}(f_x)=0\,.$$

(ii) *En particulier, si tous les éléments de* C *sont des caractères dominants, la distribution* $\widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}$ *est supportée par*

$$\overline{T}_C(F_x)\subset \overline{T}(F_x)\subset \overline{G}(F_x)\,.$$

Démonstration :

(i) La distribution $\widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}$ est une forme linéaire en les fonctions de carré intégrable

$$f_x : G(F_x)\to \mathbb{C}\,,$$

telle que

$$\left|\widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}(f_x)\right| \le \int_{G(F_x)} d_\rho\, g\cdot \left|\widehat{f}_x(g)\right|\,,$$

et qui est invariante à gauche par $N_B(F_x)$ et à droite par $N_B^{\mathrm{op}}(F_x)$.

Or, pour toute f_x et tout $v\in N_B^{\mathrm{op}}(F_x)$, la fonction

$$T(F_x)\ni t\mapsto |\det_B(t)|_x^{1/2}\cdot|\delta_B(t)|_x^{-1/2}\cdot \int_{N_B(F_x)} du\cdot f_x(u\cdot t\cdot v)$$

admet pour ρ_T-transformée de Fourier la fonction

$$T(F_x)\ni t\mapsto |\det_B(t)|_x^{1/2}\cdot|\delta_B(t)|_x^{1/2}\cdot \int_{N_B(F_x)} du\cdot \widehat{f}_x(v\cdot t\cdot u)\,.$$

On en déduit que la forme linéaire $\widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}$ se factorise à travers l'opérateur linéaire

$$f_x\mapsto \varphi_x=\left[t\mapsto |\det_B(t)|_x^{1/2}\cdot|\delta_B(t)|_x^{-1/2}\cdot \int_{N_B(F_x)} du\cdot f_x(u\cdot t\cdot v)\right]$$

en une forme linéaire encore notée

$$\varphi_x\mapsto \widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}(\varphi_x)$$

sur l'espace des fonctions de carré intégrable

$$\varphi_x : T(F_x)\to \mathbb{C}$$

avec

$$\left|\widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}(\varphi_x)\right| \le \int_{T(F_x)} dt\cdot|\widehat{\varphi}_x(t)|\cdot|\det_B(t)|_x^{1/2}\cdot|\delta_B(t)|_x^{1/2}\,.$$

De plus, le sous-tore $T^C(F_x) \subset T(F_x)$ agit sur la forme linéaire

$$\varphi_x \mapsto \widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}(\varphi_x)$$

par le caractère

$$T^C(F_x) \ni t \mapsto |\det_B(t)|_x^{-1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{1/2} .$$

On a :

Lemme IV.22. –
Les caractères $\det_B \cdot \delta_B$ *et* $\det_B \cdot \delta_B^{-1}$ *sont éléments du cône polyédral* $X_{\overline{T}}$.

Démonstration du lemme :
Comme $X_{\overline{T}}$ est stable par l'action du groupe de Weyl W_G, il suffit de traiter le cas de $\det_B \cdot \delta_B^{-1}$.

Pour tout poids ρ_T^i qui est le plus haut poids d'un facteur irréductible de la représentation de transfert $\rho : \widehat{G} \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, on a par définition du caractère $\det_B$

$$\langle \det_B, \rho_T^i \rangle = \langle \delta_B, \rho_T^i \rangle .$$

Comme $\det_B$ est un caractère de G et δ_B est un caractère dominant, on a pour tout poids ρ_T^j qui est une image par W_G d'un tel plus haut poids ρ_T^i

$$\langle \det_B, \rho_T^j \rangle = \langle \det_B, \rho_T^i \rangle = \langle \delta_B, \rho_T^i \rangle \geq \langle \delta_B, \rho_T^j \rangle .$$

Comme ces ρ_T^j images par W_G des plus hauts poids ρ_T^i engendrent le cône saturé $X_{\overline{T}}^\vee$ dual de $X_{\overline{T}}$, le lemme est démontré.

□

Suite de la démonstration de la proposition IV.21 :
Comme le caractère $\det_B \cdot \delta_B$ est élément de $X_{\overline{T}}$ et donc aussi de $T_{\overline{E}}$, il induit une fonction continue

$$|\det_B \cdot \ \delta_B(\bullet)|_x^{1/2} : T_{\overline{E}}(F_x) \to T(F_x) \to \mathbb{R}_+ .$$

La borne

$$\varphi_x \mapsto \int_{T(F_x)} dt \cdot |\widehat{\varphi}_x(t)|_x \cdot |\det_B(t)|_x^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{1/2}$$

a le sens d'une condition de régularité locale pour les fonctions

$$\varphi_x : T(F_x) \to \mathbb{C}$$

ou pour les fonctions

$$\varphi'_x : T_E(F_x) \to \mathbb{C}$$

si l'on compose la forme linéaire

$$\varphi_x \mapsto \widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}(\varphi_x)$$

avec l'opérateur

$$\varphi'_x \mapsto \varphi_x = \int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(\bullet)} dt_\rho \cdot \varphi'_x(t_\rho) .$$

De plus, on a

$$\widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}(\varphi_x) = |\det_B(t)|_x^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{1/2} \cdot \widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}(\varphi_x(t\,\bullet))$$

pour tout $t \in T^C(F_x)$.

En faisant tendre $t \in T^C(F_x)$ vers le point base de la strate $T_C(F_x)$ dans $\overline{T}(F_x)$, on obtient que la forme linéaire

$$\varphi_x \mapsto \widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}(\varphi_x)$$

est supportée par la strate $\overline{T}_C(F_x)$ dans $\overline{T}(F_x)$.

Donc la distribution

$$f_x \mapsto \widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c_x}}(f_x)$$

est supportée par

$$N_B(F_x) \cdot \overline{T}_C(F_x) \cdot N_B^{\mathrm{op}}(F_x) \subset \overline{G}(F_x)$$

ce qui est la conclusion de (i).

(ii) résulte de (i) et du lemme IV.20. □

À partir de maintenant, supposons que l'opérateur de ρ-transformation de Fourier sur $G(F_x)$

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x = \int_{G(F_x)} d_\rho\, g \cdot f_x(g) \cdot k_x^\rho(g\, \bullet)$$

est non seulement unitaire et compatible avec la ρ_T-transformation de Fourier sur $T(F_x)$ mais qu'il "préserve le tore $T(F_x)$ par convolution" :

Cela signifie que pour toute fonction mesurable unitaire

$$\mathbb{I}_x : G(F_x) \to U(1) \subset \mathbb{C}^\times$$

dont la transformée de Fourier $\widehat{\mathbb{I}_x}$ est une distribution supportée par $\overline{T}(F_x) \subset \overline{G}(F_x)$, et pour toutes fonctions continues et de carré intégrable

$$f_1, f_2 : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

reliées par la formule

$$\widehat{f_2} = \widehat{f_1} \cdot \mathbb{I}_x\,,$$

alors la restriction de f_2 à $T(F_x)$ ne dépend que de la restriction de f_1 à $T(F_x)$.

On a la conséquence de la proposition IV.21 :

Corollaire IV.23. –

On suppose comme ci-dessus que la ρ-transformation de Fourier sur $G(F_x)$ préserve le tore $T(F_x)$ par convolution.

On considère un caractère $\chi \in X_{\overline{T}} \subset X_T$, une place $x \in |F|$, un élément $c_x \in E_{\chi,x} = E_\chi \otimes_F F_x$ et une face C du cône polyédral $X_{\overline{T}}$ définie sur F_x et qui contient l'ensemble des $\sigma(\chi)$, $\sigma \in \Gamma_F$, telles que la coordonnée correspondante de c_x ne soit pas nulle.

On suppose enfin que la face C est constituée de caractères dominants.

Alors, pour toutes fonctions continues et de carré intégrable

$$f_1, f_2 : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

reliées par la formule sur $G(F_x)$

$$\widehat{f_2} = \widehat{f_1} \cdot \mathbb{I}^G_{\chi,c_x}\,,$$

et pour tous éléments $u \in N_B(F_x)$, $v \in N_B^{\mathrm{op}}(F_x)$, les fonctions

$$\begin{array}{rcl} T(F_x) & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & f_1^{u,v}(t) = f_1(u \cdot t \cdot v) \cdot |\det_B(t)|_x^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{-1/2} \\ t & \mapsto & f_2^{u,v}(t) = f_2(u \cdot t \cdot v) \cdot |\det_B(t)|_x^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{-1/2} \end{array}$$

sont reliées par la formule sur $T(F_x)$

$$\widehat{f_2^{u,v}} = \widehat{f_1^{u,v}} \cdot \mathbb{I}_{\chi,c_x} \,.$$

Remarques :

(i) En revanche, le ρ-transformé de Fourier de l'opérateur de multiplication par $\mathbb{I}_{\chi,c_x}^G$ ne préserve pas les autres cellules de Bruhat de $B(F_x)\backslash G(F_x)/N_B^{\mathrm{op}}(F_x)$.

(ii) Dans le cas de la transformation de Fourier linéaire sur $G = \mathrm{GL}_r$, associée à la représentation standard $\rho = \mathrm{Id}$ de $\widehat{G} = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, on peut prendre pour χ le caractère

$$\begin{array}{rcl} \chi : T = T_r = \mathbb{G}_m^r & \to & \mathbb{G}_m \,, \\ t = (t_1, t_2, \ldots, t_r) & \mapsto & t_1 \,. \end{array}$$

On a alors, pour toute place $x \in |F|$ et tout élément $c_x \in F_x$,

$$\begin{array}{l} \mathbb{I}_{\chi,c_x}(t) = \psi_x(c_x \cdot t_1) \,, \quad \forall\, t = (t_1, \ldots, t_r) \in T(F_x) \,, \\ \mathbb{I}_{\chi,c_x}^G(g) = \psi_x(c_x \cdot g_{1,1}) \,, \quad \forall\, g = (g_{i,j})_{1 \le i,j \le r} \in G(F_x) \,. \end{array}$$

Le transformé de Fourier de l'opérateur de multiplication par $\mathbb{I}_{\chi,c_x}$ est l'opérateur de translation additive par $(c_x, 0, \ldots, 0)$.

Dans ce cas, cet opérateur commute avec l'opérateur de multiplication par le caractère

$$t = (t_1, \ldots, t_r) \mapsto |\det_B(t)|^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{-1/2} = |t_1 \ldots t_r|_x^{\frac{r-1}{2}} \cdot \left| \prod_{1 \le i \le r} t_i^{r+1-2i} \right|_x^{-\frac{1}{2}} = \prod_{2 \le i \le r} |t_i|_x^{i-1} \,.$$

Mais cette dernière propriété n'est plus vérifiée dans le cas général.

Démonstration :

Par hypothèse, il existe un opérateur linéaire U tel que la restriction $T(F_x) \ni t \mapsto f_2(t)$ soit la transformée par U de la restriction $T(F_x) \ni t \mapsto f_1(t)$. Comme la fonction $\mathbb{I}_{\chi,c_x}^G$ est invariante à gauche par $N_B^{\mathrm{op}}(F_x)$ et invariante à droite par $N_B(F_x)$, on a également que, pour tous $u \in N_B(F_x)$ et $v \in N_B^{\mathrm{op}}(F_x)$, la fonction $T(F_x) \ni (t) \mapsto f_2(u \cdot t \cdot v)$ est la transformée par U de la fonction $T(F_x) \ni t \mapsto f_1(u \cdot t \cdot v)$. Autrement dit, il existe un opérateur linéaire U' tel que, pour tous $u \in N_B(F_x)$ et $v \in N_B^{\mathrm{op}}(F_x)$, la fonction $f_2^{u,v}$ est la transformée par U' de la fonction $f_1^{u,v}$ sur $T(F_x)$.

On conclut d'après le corollaire IV.19(ii). $\square$

3 Espaces de ρ-fonctions

On suppose dorénavant que le cône $X_{\overline{T}}$ admet une face C définie sur F, c'est-à-dire stable par Γ_F, constituée de caractères dominants et "génératrice" au sens qu'elle n'est contenue dans aucun sous-espace propre de $X_T \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ respecté par l'action de W_G.

Une telle face existe en particulier si G est déployé sur F ou, plus généralement, si G est de la forme

$$G = \mathrm{Res}_{F'/F}\, G_0$$

où F' est une extension finie séparable de F et G_0 est un groupe réductif déployé sur F'.

On a :

Lemme IV.24. –

Soit C une face génératrice de $X_{\overline{T}}$ qui est définie sur F et constituée de caractères dominants.

Alors :

(i) *Le sous-réseau de X_T engendré par C et ses transformées par l'action du groupe de Weyl W_G est d'indice fini.*

Il est constitué des caractères de T qui sont triviaux sur un certain sous-groupe fini Z_C du centre de G défini sur F.

(ii) *La famille des coordonnées*

$$\chi_F : N_B^{\mathrm{op}}\backslash\overline{G}/N_B \to \mathrm{Res}_{E_\chi/F}\,\mathbb{A}^1\,, \quad \chi \in C\,,$$

et de leurs translatées à gauche et à droite par des éléments de $G(F)$ engendre l'algèbre de structure du semi-groupe normal

$$\overline{G}/Z_C$$

du groupe G/Z_C.

Exemple :

Si $\widehat{G} = \widehat{\mathrm{GL}}_2/\mu_k$ et $\rho = \mathrm{sym}^k : \widehat{G} \hookrightarrow \mathrm{GL}_{k+1}(\mathbb{C})$ si bien que G s'inscrit dans le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{GL}_2 \arrow[d, "\det"] \\ \mathbb{G}_m \arrow[r, "\lambda\mapsto\lambda^k"'] & \mathbb{G}_m \end{tikzcd}$$

et $X_T = \big\{(n_1,n_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid n_1+n_2 \in k\,\mathbb{Z}\big\}$, on a

$$X_{\overline{T}} = \big\{(n_1,n_2) \in \mathbb{N}^2 \mid n_1+n_2 \in k\,\mathbb{Z}\big\}\ .$$

On peut prendre pour C l'arête engendrée par l'élément $(k,0)$. Alors G/Z_C s'identifie à GL_2 et $\overline{G}/Z_C$ s'identifie à M_2.

□

Rappelons que, en toute place ultramétrique x de F, on voudrait définir un espace de ρ-fonctions qui satisfasse les conditions du problème I.7.

En particulier, cet espace doit être stable par les translations à gauche et à droite ainsi que par la ρ-transformation de Fourier, et sa projection dans l'espace des fonctions dont la décomposition spectrale ne fait apparaître que des représentations $\pi \in \{\pi\}_x^G$ induites de caractères $\chi_\pi \in \{\pi\}_x^T$ est complètement déterminée a priori.

Proposons de demander en plus la condition que l'espace des ρ-fonctions soit stable par les opérateurs de multiplication par les fonctions unitaires associées aux $\chi \in C$ et $c_x \in E_\chi$,

$$\mathbb{1}_{\chi,c_x}^G : \overline{G}(F_x) \to N_B^{\mathrm{op}}(F_x)\backslash\overline{G}(F_x)/N_B(F_x) \to U(1) \subset \mathbb{C}^\times\,,$$

et donc aussi par les translatées à gauche et à droite de ces fonctions par des éléments de $G(F_x)$.

Or on a :

Lemme IV.25. –

Soit toujours une face génératrice C de $X_{\overline{T}}$ qui est définie sur F et constituée de caractères dominants. Et soit x une place ultramétrique de F.

Alors :

(i) *Un espace de ρ-fonctions*

$$G(F_x) \to \mathbb{C}$$

qui satisfait les conditions du problème I.7 *est nécessairement constitué de fonctions supportées par des parties compactes de $\overline{G}(F_x)$.*

(ii) *Demander qu'un espace de fonctions*

$$G(F_x) \to \mathbb{C}$$

supportées par des parties compactes de $\overline{G}(F_x)$ soit stable par multiplication par les fonctions

$$\mathbb{1}^G_{\chi,c_x} : \overline{G}(F_x) \to U(1)\,, \quad \chi \in C\,, \quad c_x \in E_{\chi,x}\,,$$

et par leurs translatées à gauche et à droite par des éléments de $G(F_x)$, équivaut à demander qu'il soit stable par multiplication par les fonctions localement constantes à support compact

$$\overline{G}(F_x) \to (\overline{G}/Z_C)(F_x) \to \mathbb{C}\,.$$

Démonstration :

(i) résulte de ce que, d'après la condition (4) du problème I.7, les ρ-fonctions sont supportées par des parties de $G(F_x)$ dont les restrictions aux fibres de

$$|\det_G(\bullet)|_x : G(F_x) \to q_x^{\mathbb{Z}}$$

sont compactes, et de la forme des fonctions $L_x(\rho,\pi,Z)$ dans les conditions (3) et (4).

(ii) résulte du lemme IV.24 qui précède. □

Compte tenu de ce lemme, la seule définition compatible avec la condition supplémentaire de stabilité par les fonctions $\mathbb{1}^G_{\chi,c_x}$, $\chi \in C$, $c_x \in E_{\chi,x}$, est :

Définition IV.26. –

Soit toujours une face génératrice C de $X_{\overline{T}}$ qui est définie sur F et constituée de caractères dominants. Alors, pour toute place ultramétrique x de F, proposons d'appeler ρ-fonctions sur $G(F_x)$ les fonctions

$$f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

telles que :

- *f_x est invariante à gauche et à droite par un sous-groupe ouvert compact de $G(F_x)$,*
- *f_x est supportée par une partie compacte de $\overline{G}(F_x)$,*

- *pour tous éléments $g, g' \in G(F_x)$ et pour toute fonction localement constante à support compact*

$$\mathbb{1}_x : \overline{G}(F_x) \to (\overline{G}/Z_C)(F_x) \to \mathbb{C}\,,$$

  le terme constant

$$T(F_x) \ni t \mapsto |\det_B(t)|_x^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{-1/2} \cdot \int_{N_B(F_x)} du \cdot f_x(g \cdot u \cdot t \cdot g') \cdot \mathbb{1}_x(u \cdot t)$$

  est une ρ_T-fonction sur $T(F_x)$.

Remarque :

Comme Z_C est un sous-groupe fini du centre de G, cette définition ne dépend pas du choix de C.

□

Par définition, l'espace des ρ_T-fonctions est stable par les opérateurs de multiplication par les fonctions unitaires

$$\mathbb{1}^G_{\chi,c_x}\,, \quad \chi \in C\,, \quad c_x \in E_\chi \otimes_F F_x = E_{\chi,x}\,.$$

On conjecture qu'il est également stable par les ρ-transformés de Fourier de ces opérateurs :

Conjecture IV.27. –

Soient $f_1, f_2 : G(F_x) \to \mathbb{C}$ deux fonctions de carré intégrable reliées par une formule de la forme

$$\widehat{f_2} = \widehat{f_1} \cdot \mathbb{1}^G_{\chi,c_x}\,, \qquad \textit{avec } \chi \in C\,, \quad c_x \in E_{\chi,x}\,.$$

Alors, si f_1 est une ρ-fonction, f_2 est aussi une ρ-fonction.

Remarque :

Démonstration en cours ...

On doit utiliser le corollaire IV.23 qui dit que pour tous $u \in N_B(F_x)$, $v \in N_B^{\mathrm{op}}(F_x)$, les fonctions

$$\begin{aligned} t &\mapsto f_1^{u,v}(t) = f_1(u \cdot t \cdot v) \cdot |\det_B(t)|_x^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{-1/2} \\ t &\mapsto f_2^{u,v}(t) = f_2(u \cdot t \cdot v) \cdot |\det_B(t)|_x^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{-1/2} \end{aligned}$$

sont reliées par la formule sur $T(F_x)$

$$\widehat{f_2^{u,v}} = \widehat{f_1^{u,v}} \cdot \mathbb{1}_{\chi,c_x}\,,$$

combiné avec le fait que le ρ_T-transformé de Fourier de l'opérateur de multiplication par $\mathbb{1}_{\chi,c_x}$ sur $T(F_x)$ préserve le sous-espace des ρ_T-fonctions.

□

Il n'est pas clair a piori que l'espace des ρ-fonctions sur $G(F_x)$ de la définition IV.26 n'est pas 0.

On s'intéresse d'abord aux ρ-fonctions qui sont "de type torique", c'est-à-dire dont la décomposition spectrale ne fait apparaître que des représentations induites du tore $T(F_x)$ de $G(F_x)$ ou des sous-quotients de telles représentations.

On conjecture encore :

Conjecture IV.28. –

Une fonction

$$f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

qui est

- *invariante à gauche et à droite par un sous-groupe ouvert compact de $G(F_x)$,*
- *supportée par une partie compacte de $\overline{G}(F_x)$,*
- *de type torique,*

est une ρ-fonction si et seulement si, pour tous $g, g' \in G(F_x)$, le terme constant

$$T(F_x) \ni t \mapsto |\det_B(t)|_x^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{-1/2} \cdot \int_{N_B(F_x)} du \cdot f_x(g \cdot u \cdot t \cdot g')$$

est une ρ_T-fonction sur $T(F_x)$.

Remarques :

(i) La nécessité de la condition est évidente.

(ii) **Très important :** En revanche, la suffisance de la condition est une propriété subtile de $\rho_T^\vee : T_E \to T$ ou, si l'on préfère, de l'homomorphisme Γ_F-équivariant

$$\rho_T : \widehat{T} \to \widehat{T}_E = (\mathbb{C}^\times)^r .$$

C'est certainement ici qu'intervient l'hypothèse que ρ_T provient d'une représentation de transfert $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$.

(iii) Démonstration en cours dans le cas où $\widehat{G} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mu_k$ et $\rho = \mathrm{sym}^k : \widehat{G} \to \mathrm{GL}_{k+1}(\mathbb{C}) \ldots$

□

On peut démontrer à partir de ces deux conjectures :

Corollaire conditionnel IV.29. –

Si les conjectures IV.27 *et* IV.28 *ci-dessus sont vraies, alors l'espace des ρ-fonctions sur $G(F_x)$ au sens de la définition* IV.26 *satisfait toutes les conditions du problème* I.7*.*

En particulier, sa connaissance est équivalente à celle de facteurs

$$L_x(\rho, \pi, Z) \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_x(\rho, \pi, Z)$$

pour toute $\pi \in \{\pi\}_x^G$. □

En les places $x \in |F|$ archimédiennes, les facteurs $L_x(\rho, \pi, Z)$ et $\varepsilon_x(\rho, \pi, Z)$, $\pi \in \{\pi\}_x^G$, sont déjà connus de toute façon.

On pose quand même :

Définition IV.30. –

Soit x une place archimédienne de F.

(i) *On appelle désormais espace des ρ_T-fonctions sur $T(F_x)$ le plus petit espace de fonctions sur $G(F_x)$ qui*
   - *contient les ρ_T- fonctions sur $T(F_x)$ au sens du chapitre* II *(corollaire* II.9*),*
   - *est stable par les opérateurs de multiplication par les fonctions unitaires $\mathbb{1}_{\chi, c_x}$, $\chi \in X_{\overline{T}}$, $c_x \in E_{\chi,x}$,*
   - *est stable par la ρ_T-transformation de Fourier.*

(ii) *On appelle ρ-fonctions sur $G(F_x)$ les fonctions*

$$f_x : G(F_x) \to \mathbb{C}$$

de classe C^∞, à décroissance rapide sur les complémentaires des parties compactes de $\overline{G}(F_x)$ et telles que, pour tous $g, g' \in G(F_x)$, le terme constant

$$T(F_x) \ni t \mapsto |\det_B(t)|_x^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{-1/2} \cdot \int_{N_B(F_x)} du \cdot f_x(g \cdot u \cdot t \cdot g')$$

est une ρ_T-fonction sur $T(F_x)$.

Remarques :

(i) La forme de la définition de (ii) est justifiée par le fait que toutes les représentations $\pi \in \{\pi\}_x^G$ proviennent de caractères du tore $T(F_x)$, puisque la place x est archimédienne.

(ii) Ici encore, on doit pouvoir montrer que l'espace des ρ-fonctions sur $G(F_x)$ est stable par les opérateurs de multiplication par les fonctions unitaires

$$\mathbb{I}^G_{\chi, c_x}\,, \quad \chi \in C\,, \quad c_x \in E_{\chi, x}\,,$$

et donc aussi par les ρ-transformés de Fourier de ces opérateurs. □

4 Formule de Poisson

Supposons vérifés tous les énoncés des paragraphes précédents.

On dispose donc en chaque place $x \in |F|$ d'un espace de ρ-fonctions sur $G(F_x)$.

Cet espace contient la ρ-fonction "standard" de la définition I.8(i) en toute place ultramétrique x où G et ρ sont non ramifiés.

On dispose donc d'un espace des ρ-fonctions globales, tel qu'introduit dans la définition I.8(ii).

Il est stable par translation à gauche ou à droite, ainsi que par la ρ-transformation de Fourier globale $f \mapsto \widehat{f}$.

Enfin, il est stable par les opérateurs

$$f \mapsto f \cdot \mathbb{I}^G_{\chi, c}$$

de multiplication par les fonctions unitaires

$$\mathbb{I}^G_{\chi, c} = \prod_x \mathbb{I}^G_{\chi, c_x} : \overline{G}(\mathbb{A}) \to U(1) \subset \mathbb{C}^\times\,, \quad \chi \in C\,, \quad c = (c_x)_{x \in |F|} \in \mathbb{A}_{E_\chi}$$

et donc aussi par les ρ-transformés de Fourier de ces opérateurs, notés

$$f \mapsto \widehat{\mathbb{I}^G_{\chi, c}} *_\rho f\,.$$

D'après le théorème II.11, on dispose sur l'espace des ρ-fonctions globales de deux formes linéaires

$$f \mapsto S_B(f)$$

et

$$f \mapsto S'_B(f)\,.$$

La première [resp. la seconde] est invariante à droite [resp. à gauche] par $G(F)$ et invariante à gauche [resp. à droite] par $N_B(\mathbb{A})$.

Elles sont reliées par la formule de Poisson approchée

$$S_B(f) = S'_B(\widehat{f}) \, , \qquad \forall \, f \, .$$

Enfin, on a

$$S_B(f) = \int_{N_B(\mathbb{A})/N_B(F)} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \widehat{f}\,(\gamma \, u^{-1})$$

$$[\text{resp.} \quad S'_B(f) = \int_{N_B(\mathbb{A})/N_B(F)} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \widehat{f}\,(u \, \gamma) \ ]$$

si f admet un facteur local à support compact dans $G(F_x)$ en au moins une place ultramétrique x.

On peut noter

$$\begin{aligned} \text{``} \sum_{\gamma \in (N_B \backslash \overline{G})(F)} \int_{N_B(\mathbb{A})} du \cdot f(u\,\gamma)\text{''} \ &= \ \left(\sum_{\gamma \in (N_B \backslash G)(F)} \int_{N_B(\mathbb{A})} du \cdot f(u\,\gamma) \right) \\ &+ \ \left(\sum_{\gamma \in (G/N_B)(F)} \int_{N_B(\mathbb{A})} du \cdot \widehat{f}\,(\gamma\, u^{-1}) \right) - S_B(f) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{``} \sum_{\gamma \in (\overline{G}/N_B)(F)} \int_{N_B(\mathbb{A})} du \cdot f(\gamma\, u^{-1})\text{''} \ &= \ \left(\sum_{\gamma \in (G/N_B)(F)} \int_{N_B(\mathbb{A})} du \cdot f(\gamma\, u^{-1}) \right) \\ &+ \ \left(\sum_{\gamma \in (N_B \backslash G)(F)} \int_{N_B(\mathbb{A})} du \cdot \widehat{f}\,(u\,\gamma) \right) - S'_B(f) \, . \end{aligned}$$

On devrait pouvoir montrer :

Conjecture IV.31. –

(i) *Il existe sur l'espace des ρ-fonctions globales*

$$f : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$$

une unique forme linéaire

$$f \mapsto \text{``} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} f(\gamma) \text{''}$$

telle que :

- *cette forme est invariante par les translations à gauche ou à droite par les éléments de $G(F)$,*
- *elle est invariante par les opérateurs de multiplication par les fonctions unitaires*

$$\mathbb{1}^G_{\chi,c} : \overline{G}(\mathbb{A}) \to U(1) \subset \mathbb{C}^\times \, , \quad \chi \in C \, , \quad c \in E_\chi \, ,$$

- *pour toute ρ-fonction f, on a*

$$\int_{N_B(\mathbb{A})/N_B(F)} du \cdot \text{``} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} f(u\,\gamma) \text{''} = \text{``} \sum_{\gamma \in (N_B \backslash \overline{G})(F)} \int_{N_B(\mathbb{A})} du \cdot f(u\,\gamma) \text{''}.$$

(ii) *Pour toute fonction f, on a aussi*

$$\int_{N_B(\mathbb{A})/N_B(F)} du \cdot \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} f(\gamma\, u^{-1}) \text{”} = \text{“} \sum_{\gamma \in (\overline{G}/N_B)(F)} \int_{N_B(\mathbb{A})} du \cdot f(\gamma\, u^{-1}) \text{”} .$$

(iii) *Enfin, on a*

$$\text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} f(\gamma) \text{”} = \sum_{\gamma \in G(F)} f(\gamma)$$

si f admet un facteur local à support compact dans $G(F_x)$ en au moins une place ultramétrique x.

Remarques :

(i) Il faut bien sûr remarquer que

$$\mathbb{1}^G_{\chi,c}(\gamma) = 1\,, \quad \forall\, \gamma \in \overline{G}(F)\,, \quad \forall\, c \in E_\chi\,.$$

(ii) Réciproquement, tout élément $u \in N_B(\mathbb{A})$ tel que

$$\mathbb{1}^G_{\chi,c}(\gamma \cdot u \cdot \gamma') = 1\,, \quad \forall\, \chi \in C\,, \quad \forall\, \gamma, \gamma' \in G(F)\,, \quad \forall\, c \in E_\chi$$

est nécessairement élément de $N_B(F)$.

(iii) La démonstration doit être fondée sur les deux remarques précédentes et sur le fait que, d'après la proposition IV.10(ii), les opérateurs

$$\varphi \mapsto \varphi \cdot \mathbb{1}_{\chi,c}$$

de multiplication par les fonctions unitaires

$$\mathbb{1}_{\chi,c} : \overline{T}(\mathbb{A}) \to U(1) \subset \mathbb{C}^\times\,, \quad \chi \in X_{\overline{T}}\,, \quad c \in E_\chi\,,$$

préservent la forme linéaire

$$\varphi \mapsto \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{T}(F)} \varphi(\gamma) \text{”}$$

de l'espace des ρ_T-fonctions globales φ sur $T(\mathbb{A})$. □

On devrait aussi pouvoir montrer :

Conjecture IV.32. –
La forme linéaire

$$f \mapsto \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} f(\gamma) \text{”}$$

est invariante non seulement par les opérateurs

$$f \mapsto f \cdot \mathbb{1}^G_{\chi,c}$$

de multiplication par les fonctions unitaires

$$\mathbb{1}^G_{\chi,c} : \overline{G}(\mathbb{A}) \to U(1)\,, \quad \chi \in C\,, \quad c \in E_\chi\,,$$

mais aussi par leurs ρ-transformés de Fourier

$$f \mapsto \widehat{\mathbb{1}^G_{\chi,c}} *_\rho f\,.$$

Remarque :

La démonstration doit être fondée sur les deux faits suivants :

- D'après le corollaire IV.23, pour tous éléments $u \in N_B(\mathbb{A}) \supset N_B(F)$ et $v \in N_B^{\rm op}(\mathbb{A}) \supset N_B(F)$, les fonctions

$$\begin{array}{rcl} T(\mathbb{A}) \ni t & \mapsto & f^{u,v}(t) = f(u \cdot t \cdot v) \cdot |\det_B(t)|^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|^{-1/2} \\ T(\mathbb{A}) \ni t & \mapsto & \left(\widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c}} *_\rho f\right)^{u,v}(t) \end{array}$$

  sont reliées par la formule sur $T(\mathbb{A})$

$$\left(\widehat{\mathbb{I}^G_{\chi,c}} *_\rho f\right)^{u,v} = \widehat{\mathbb{I}_{\chi,c}} *_{\rho_T} f^{u,v}$$

  où

$$\varphi \mapsto \widehat{\mathbb{I}_{\chi,c}} *_{\rho_T} \varphi$$

  désigne le ρ_T-transformé de Fourier de l'opérateur

$$\varphi \mapsto \varphi \cdot \mathbb{I}_{\chi,c}$$

  de multiplication par la fonction unitaire $\mathbb{I}_{\chi,c}$ sur $T(\mathbb{A})$.
- Comme la forme linéaire

$$\varphi \mapsto \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{T}(F)} \varphi(\gamma)\text{”}$$

  est préservée à la fois par la ρ_T-transformation de Fourier des ρ_T-fonctions globales sur $T(\mathbb{A})$ et par les opérateurs

$$\varphi \mapsto \varphi \cdot \mathbb{I}_{\chi,c}$$

  de multiplication par les fonctions unitaires

$$\mathbb{I}_{\chi,c} : \overline{T}(\mathbb{A}) \to U(1)\,, \quad \chi \in X_{\overline{T}}\,, \quad c \in E_\chi\,,$$

  elle est préservée par les ρ_T-transformés de Fourier

$$\varphi \mapsto \widehat{\mathbb{I}_{\chi,c}} *_{\rho_T} \varphi$$

  de ces opérateurs. □

L'énoncé de cette conjecture, combiné avec la formule

$$\text{“} \sum_{\gamma \in (N_B \backslash \overline{G})(F)} \int_{N_B(\mathbb{A})} du \cdot f(u\,\gamma)\text{”} = \text{“} \sum_{\gamma \in (\overline{G}/N_B)(F)} \int_{N_B(\mathbb{A})} du \cdot f(\gamma\, u^{-1})\text{”}\,, \quad \forall f\,,$$

signifie que la ρ-transformée de Fourier de la forme linéaire

$$f \mapsto \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} f(\gamma)\text{”}$$

satisfait toutes les propriétés de la conjecture IV.31.

L'assertion d'unicité dans la conjecture IV.31 implique alors :

Corollaire conditionnel IV.33. –

Si les conjectures IV.31 *et* IV.32 *ci-dessus sont vraies, ainsi que les énoncés antérieurs qu'elles supposent, on a pour toute ρ-fonction globale f sur $G(\mathbb{A})$*

$$\text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} f(\gamma)\text{”} = \text{“} \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} \widehat{f}(\gamma)\text{”}.$$

□

Bibliographie

• A. Braverman et D. Kazhdan, “γ-functions of representations and lifting”. With an appendix by V. Vologodsky, in “GAFA 2000, Visions in Mathematics”, Geom. Funct. Anal. 2000, Special Volume, Part I, Birkhäuser Verlag, 2000, p. 237-278.

• J.W. Cogdell et J.J. Piatetski-Shapiro, “Converse theorems for GL_n”, Publications mathématiques de l'IHES numéro 79, p. 157-214, 1994.

• R. Godement et H. Jacquet, “Zeta functions of simple algebras”, LNM 260, Springer-Verlag, 1972.

• H. Jacquet, “A remark on “Construire un noyau de la fonctorialité” by Lafforgue”, Annales de l'Institut Fourier 62, numéro 3, p. 899-935, 2012.

• L. Lafforgue, “Construire un noyau de la fonctorialité ? Le cas de l'induction automorphe sans ramification de GL_1 à GL_2”, Annales de l'Institut Fourier 60, numéro 2, p. 87-147, 2010.

• L. Lafforgue, “Noyaux du transfert automorphe de Langlands et formules de Poisson non linéaires”, prépublication de l'IHES numéro M/12/28, 2012. (http ://preprints.ihes.fr/2012/M/M-12-28.pdf)

• L. Lafforgue, “Noyaux du transfert automorphe de Langlands et formules de Poisson non linéaires”, Japan J. Math. 9, p. 1-68, 2014.

• L. Lafforgue, “Du transfert automorphe de Langlands aux formules de Poisson non linéaires”, prépublication de l'IHES numéro M/14/05, 2014. (http ://preprints.ihes.fr/2014/M/M-14-05.pdf)

• L. Lafforgue, “Formules de Poisson non linéaires et principe de fonctorialité de Langlands”, notes d'exposés du séminaire Takagi (Tokyo, 25 et 26 mai 2013) et du séminaire Loo-Keng Hua de l'Université Tsinghua (Pékin, 8 novembre 2013), à paraître dans un volume de textes de conférences publié par l'Université Tsinghua, 2014. (http ://preprints.ihes.fr/~lafforgue/math/TokyoPekin2013.pdf)

• J. Tate, “Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta-functions”, Ph. D. Thesis, Princeton Univ. 1950, in : “Algebraic Number Theory” (éditeurs : J. Cassels et A. Fröhlich), Academic Press, 1967, p. 305-347.