REPRÉSENTATIONS CRISTALLINES IRRÉDUCTIBLES DE $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$

Laurent BERGER et Christophe BREUIL

Institut des Hautes Études Scientifiques

35, route de Chartres

91440 – Bures-sur-Yvette (France)

Octobre 2004

IHES/M/04/46

REPRÉSENTATIONS CRISTALLINES IRRÉDUCTIBLES DE $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$

par

Laurent Berger & Christophe Breuil

Résumé. — Dans [**Bre03b**, §1.3], des représentations unitaires de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur des espaces de Banach p-adiques sont associées aux représentations cristallines irréductibles de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$. Certaines conjectures sur ces Banach y sont formulées (non nullité, irréductibilité topologique, admissibilité). Nous démontrons ces conjectures en réinterprétant ces espaces de Banach comme espaces de fonctions sur $\mathbb{Q}_p$ d'un certain type, puis en utilisant la théorie des (φ, Γ)-modules associés aux représentations cristallines correspondantes.

Abstract **(Irreducible crystalline representations of** $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$**).** — In [**Bre03b**, §1.3], some unitary representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ on p-adic Banach spaces are associated to 2-dimensional irreducible crystalline representations of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$. Some conjectures are formulated concerning those Banach spaces (non triviality, topological irreducibility, admissibility). We prove those conjectures by reinterpreting those Banach as spaces of functions of a certain type on $\mathbb{Q}_p$, and then by using the theory of (φ, Γ)-modules associated to the corresponding crystalline representations.

Table des matières

Classification mathématique par sujets **(2000).** — 11F.

1. Introduction et notations

1.1. Introduction. — Soit p un nombre premier et $n \in \mathbb{N}$. Dans la recherche d'une correspondance éventuelle entre (certaines) représentations p-adiques V de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ de dimension n et (certaines) représentations p-adiques $\Pi(V)$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, un des premiers cas à regarder est certainement celui où $n = 2$ et V est cristalline, absolument irréductible et φ-semi-simple. Cette dernière condition signifie que le Frobenius φ sur le φ-module filtré $D_{\mathrm{cris}}(V)$ associé par Fontaine à V est semi-simple. La représentation V a des poids de Hodge-Tate distincts $i_1 < i_2$ et, si l'on note $\mathrm{Alg}(V)$ la représentation algébrique de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ de plus haut poids $(i_1, i_2 - 1)$ et $\mathrm{Lisse}(V)$ la représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ associée par la correspondance locale de Hecke à la représentation non ramifiée de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ envoyant un Frobenius arithmétique sur φ^{-1}, la représentation $\Pi(V)$ est simplement le complété p-adique de la représentation localement algébrique $\mathrm{Alg}(V) \otimes \mathrm{Lisse}(V)$ par rapport à un réseau stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et de type fini sous l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Ainsi, $\Pi(V)$ est un espace de Banach p-adique muni d'une action continue unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ (i.e. laissant une norme invariante). Notons que, lorsque $\mathrm{Lisse}(V)$ est de dimension 1, cette définition de $\Pi(V)$ doit être modifiée.

Le problème est qu'il n'est pas du tout évident qu'un tel réseau existe, ou, de manière équivalente, que $\Pi(V)$ soit non nul ! Dans [**Bre03a**, théorème 1.3], la non nullité de $\Pi(V)$ est démontrée pour $i_2 - i_1 < 2p$ (essentiellement), et dans [**Bre03b**, théorème 1.3.3], son admissibilité (au sens de [**ST02b**]) et son irréductibilité topologique (avec une condition supplémentaire pour cette dernière). La méthode repose sur le calcul de la réduction d'une boule unité de $\Pi(V)$ modulo p (plus exactement modulo l'idéal maximal des coefficients). La restriction ci-dessus sur les poids n'est pas théorique mais simplement due au fait que les calculs deviennent de plus en plus difficiles quand les poids grandissent.

Lorsque V est de dimension 2, absolument irréductible mais cette fois semi-stable non-cristalline, $\Pi(V)$ est défini dans [**Bre03b**] et [**Bre03c**] et des conjectures analogues (non-nullité, admissibilité, etc.) formulées et très partiellement démontrées via la théorie globale dans [**Bre03c**] ou via des calculs de réduction modulo p sur le demi-plan p-adique dans [**BM04**]. P. Colmez dans [**Col04a**] a vu que la théorie des (φ,Γ)-modules de Fontaine permettait de démontrer élégamment ces conjectures dans le cas semi-stable en construisant un modèle de la restriction au Borel supérieur de la représentation duale $\Pi(V)^*$ à partir du (φ,Γ)-module de V.

Il était donc naturel de regarder si un tel modèle existait aussi dans le cas *a priori* plus simple des représentations V cristallines et s'il permettait de démontrer les conjectures ci-dessus. La réponse est affirmative et fait l'objet du présent article. Comme dans [**Col04a**], on démontre donc un isomorphisme Borel-équivariant entre $\Pi(V)^*$ et $(\varprojlim_{\psi} D(V))^{\mathrm{b}}$ (théorème 5.3.2) où $D(V)$ est le (φ,Γ)-module associé à la représentation cristalline V et où la limite projective consiste en les suites ψ-compatibles bornées d'éléments de $D(V)$. Pour montrer cet isomorphisme, il est nécessaire de passer par une autre description intermédiaire de $\Pi(V)$ comme espace fonctionnel p-adique, i.e. comme un espace de fonctions continues sur $\mathbb{Q}_p$ d'un certain type (théorème 4.3.1). Les résultats côté (φ,Γ)-modules permettent alors de déduire le résultat principal de cet article (§5.4) :

Théorème. — *Supposons V de dimension 2, cristalline, absolument irréductible et φ-semi-simple, alors $\Pi(V)$ est non nul, topologiquement irréductible et admissible.*

On obtient aussi deux autres corollaires, l'un concernant tous les réseaux possibles stables par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ dans $\mathrm{Alg}(V)\otimes \mathrm{Lisse}(V)$ (corollaire 5.4.4), l'autre concernant les vecteurs localement analytiques dans $\Pi(V)$ (corollaire 5.4.5).

Une version préliminaire des résultats de cet article a fait l'objet d'un cours à Hangzhou en août 2004 et les notes de ce cours sont disponibles (en anglais, voir [**BB04**]).

Terminons cette introduction en insistant sur le fait que des énoncés non triviaux sur des représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ (irréductibilité des $\Pi(V)$ etc.) se démontrent finalement en passant par des représentations de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$.

1.2. Notations. — On fixe $\overline{\mathbb{Q}}_p$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$, « val » la valuation sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$ telle que $\mathrm{val}(p)\overset{\text{déf}}{=}1$, $|\cdot|$ la norme p-adique $|x|\overset{\text{déf}}{=}p^{-\mathrm{val}(x)}$ et $\mathbb{C}_p$ le complété de $\overline{\mathbb{Q}}_p$ pour $|\cdot|$. On normalise l'isomorphisme de la théorie du corps de classes local en envoyant les uniformisantes sur les Frobenius géométriques. On note ε le caractère cyclotomique p-adique de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ vu aussi comme caractère de $\mathbb{Q}_p^\times$. En particulier, $\varepsilon(p)=1$ et $\varepsilon|_{\mathbb{Z}_p^\times}\colon \mathbb{Z}_p^\times\to\mathbb{Z}_p^\times$ est l'identité. On note $\mathrm{nr}(x)$ le caractère non ramifié de $\mathbb{Q}_p^\times$ envoyant p sur x. On désigne par L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, $\mathcal{O}_L$ son anneau d'entiers, k_L son corps résiduel et π_L une uniformisante. On note $\mathbb{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^n})$ l'extension finie de $\mathbb{Q}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ engendrée par les racines p^n-ièmes de l'unité et $\mathbb{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})\overset{\text{déf}}{=}\cup_{n\geq 0}\mathbb{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^n})$. On note V une représentation p-adique de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$, c'est-à-dire un L-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action linéaire et continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$, et T un $\mathcal{O}_L$-réseau de V stable par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$. Enfin, $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$ désigne les matrices triangulaires supérieures dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et $\mathrm{B}(\mathbb{Z}_p)$ le sous-groupe de ces matrices qui sont dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$.

2. Séries formelles et (φ, Γ)-modules

Le but de cette partie est de donner des préliminaires sur les (φ, Γ)-modules $D(V)$ et leurs treillis $D^\sharp(V)$ qui sont utilisés dans les parties suivantes pour l'étude des représentations cristallines de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

2.1. Quelques anneaux de séries formelles. — Le but de ce paragraphe est d'introduire certains anneaux de séries formelles ($\mathscr{O}_{\mathscr{E},L}$, $\mathscr{E}_L$ et $\mathscr{R}_L^+$), ainsi que certaines des structures dont ils sont munis et dont nous avons besoin dans la suite de cet article.

(i) On note $\mathscr{O}_{\mathscr{E},L}$ l'anneau formé des séries $\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i X^i$ telles que $a_i \in \mathcal{O}_L$ et $a_{-i} \to 0$ quand $i \to +\infty$. C'est un anneau local de corps résiduel $k_L((X))$.

(ii) On note $\mathscr{E}_L \overset{\text{déf}}{=} \mathscr{O}_{\mathscr{E},L}[1/p]$, c'est un corps local de dimension 2.

(iii) On note $\mathscr{R}_L^+$ l'anneau des séries formelles $f(X) \in L[[X]]$ qui convergent sur le disque unité, ce qui fait que $L \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_L[[X]]$ s'identifie au sous-anneau de $\mathscr{R}_L^+$ constitué des séries formelles à coefficients bornés.

Le corps $\mathscr{E}_L$ est muni de la norme de Gauss $\|\cdot\|_{\mathrm{Gauss}}$ définie par $\|f(X)\|_{\mathrm{Gauss}} \overset{\text{déf}}{=} \sup|a_i|$ si $f(X) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i X^i$. L'anneau des entiers de $\mathscr{E}_L$ pour cette norme est $\mathscr{O}_{\mathscr{E},L}$, et la norme de Gauss induit sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E},L}$ la topologie π_L-adique. L'application naturelle $\mathscr{O}_{\mathscr{E},L} \to k_L((X))$ est alors continue, si l'on donne à $\mathscr{O}_{\mathscr{E},L}$ la topologie π_L-adique et à $k_L((X))$ la topologie discrète.

On peut définir une topologie moins fine sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E},L}$, la topologie faible, définie par le fait que les $\{\pi_L^i \mathscr{O}_{\mathscr{E},L} + X^j \mathcal{O}_L[[X]]\}_{i,j\geq 0}$ forment une base de voisinages de zéro, et la topologie faible sur $\mathscr{E}_L = \cup_{k\geq 0} \pi_L^{-k} \mathscr{O}_{\mathscr{E},L}$ qui est la topologie de la limite inductive. Cette topologie induit la topologie (π_L, X)-adique sur $\mathcal{O}_L[[X]]$, et l'application naturelle $\mathscr{O}_{\mathscr{E},L} \to k_L((X))$ est alors continue, si l'on donne à $\mathscr{O}_{\mathscr{E},L}$ la topologie faible et à $k_L((X))$ la topologie X-adique.

Si $\rho < 1$, alors on peut définir une norme $\|\cdot\|_{D(0,\rho)}$ sur $\mathscr{R}_L^+$ par la formule :

$$\|f(X)\|_{D(0,\rho)} \overset{\text{déf}}{=} \sup_{\substack{z\in\mathbb{C}_p \\ |z|\leq\rho}} |f(z)| = \sup_{i\geq 0} |a_i|\rho^i, \tag{1}$$

si $f(X) = \sum_{i\geq 0} a_i X^i$. L'ensemble des normes $\{\|\cdot\|_{D(0,\rho)}\}_{0\leq\rho<1}$ définit une topologie sur $\mathscr{R}_L^+$ qui en fait un espace de Fréchet.

Définition 2.1.1. — Si $f(X) \in \mathscr{R}_L^+$ et $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, on dit que $f(X)$ est d'ordre r (il serait plus correct de dire « d'ordre $\leq r$ ») si pour un ρ tel que $0 < \rho < 1$, la suite $\{p^{-nr}\|f(X)\|_{D(0,\rho^{1/p^n})}\}_{n\geq 0}$ est bornée.

Il est facile de voir que si c'est vrai pour un choix de $0 < \rho < 1$, alors c'est vrai pour tout choix de $0 < \rho < 1$. Un exemple de série d'ordre 1 est donné par $f(X) = \log(1+X)$.

Soit $\Gamma \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p)$. Les anneaux $\mathscr{O}_{\mathscr{E},L}$, $\mathscr{E}_L$ et $\mathscr{R}_L^+$ définis ci-dessus sont munis d'une action de Γ, telle que si $\gamma \in \Gamma$, alors γ agit par un morphisme de L-algèbres, et $\gamma(X) \overset{\text{déf}}{=} (1+X)^{\varepsilon(\gamma)} - 1$ où $\varepsilon : \Gamma \to \mathbb{Z}_p^\times$ est le caractère cyclotomique. On vérifie facilement que Γ agit par des isométries, pour toutes les normes et topologies définies ci-dessus. Ces anneaux sont aussi munis d'un morphisme de Frobenius φ, qui est lui-aussi un morphisme de L-algèbres, tel que $\varphi(X) \overset{\text{déf}}{=} (1+X)^p - 1$. Cette application est continue pour toutes les topologies ci-dessus et commute à l'action de Γ. Remarquons enfin que φ et l'action de Γ stabilisent $L \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_L[[X]]$.

L'anneau $\mathscr{O}_{\mathscr{E},L}$ est un $\varphi(\mathscr{O}_{\mathscr{E},L})$-module libre de rang p, dont une base est donnée par $\{(1+X)^i\}_{0\leq i\leq p-1}$. Si $x \in \mathscr{O}_{\mathscr{E},L}$, on peut donc écrire $x = \sum_{i=0}^{p-1}(1+X)^i\varphi(x_i)$.

Définition 2.1.2. — On définit un opérateur $\psi : \mathscr{O}_{\mathscr{E},L} \to \mathscr{O}_{\mathscr{E},L}$ par la formule $\psi(x) \overset{\text{déf}}{=} x_0$ si $x = \sum_{i=0}^{p-1}(1+X)^i\varphi(x_i)$. On définit de manière similaire un opérateur $\psi : \mathscr{R}_L^+ \to \mathscr{R}_L^+$.

Cet opérateur vérifie alors $\psi(\varphi(x)y) = x\psi(y)$ et commute à l'action de Γ. Il ne commute pas à φ et n'est pas $\mathscr{O}_{\mathscr{E},L}$-linéaire.

2.2. Représentations p-adiques et (φ,Γ)-modules. — Rappelons qu'une représentation L-linéaire est un L-espace vectoriel V de dimension finie muni d'une action linéaire et continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$. Il est assez difficile de décrire un tel objet, et nous allons voir dans ce paragraphe qu'une certaine classe de « (φ,Γ)-modules sur $\mathscr{E}_L$ » permet d'en donner une description explicite.

Un φ-module sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E},L}$ est un $\mathscr{O}_{\mathscr{E},L}$-module de type fini D muni d'un morphisme φ-semi-linéaire $\varphi : D \to D$. On écrit $\varphi^*(D)$ pour le $\mathscr{O}_{\mathscr{E},L}$-module engendré par $\varphi(D)$ dans D et on dit que D est étale si $D = \varphi^*(D)$. Un φ-module sur $\mathscr{E}_L$ est un $\mathscr{E}_L$-espace vectoriel de dimension finie D muni d'un morphsime φ-semi-linéaire $\varphi : D \to D$. On dit que D est étale si D a un $\mathscr{O}_{\mathscr{E},L}$-réseau stable par φ et étale. Un (φ,Γ)-module est un φ-module muni d'une action de Γ par des morphismes semi-linéaires (par rapport à l'action de Γ sur les coefficients) et commutant à φ.

Si D est un (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{E}_L$, et si $\widehat{\mathscr{E}_L^{\mathrm{nr}}}$ est l'anneau construit par Fontaine dans [**Fon90**], alors $V(D) \overset{\text{déf}}{=} (\widehat{\mathscr{E}_L^{\mathrm{nr}}} \otimes_{\mathscr{E}_L} D)^{\varphi=1}$ est un L-espace vectoriel de dimension $\dim_{\mathscr{E}_L}(D)$

muni d'une action linéaire et continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$: c'est une représentation L-linéaire de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$. On a alors le résultat suivant ([**Fon90**]) :

Théorème 2.2.1. — *Le foncteur $D \mapsto V(D)$ est une équivalence de catégories*

(i) *de la catégorie des (φ,Γ)-modules étales sur $\mathscr{E}_L$ vers la catégorie des représentations L-linéaires de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ *;*

(ii) *de la catégorie des (φ,Γ)-modules étales sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E},L}$ vers la catégorie des $\mathcal{O}_L$-représentations de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$.

L'inverse de ce foncteur est noté $V \mapsto D(V)$. Les (φ,Γ)-modules étales nous donnent donc un moyen commode de travailler avec les représentations L-linéaires. En théorie, les (φ,Γ)-modules permettent de retrouver tous les objets que l'on peut associer aux représentations L-linéaires (et en pratique, c'est souvent le cas). Dans ce paragraphe et les suivants, nous allons rappeler quelques unes de ces constructions.

Si D est un φ-module étale et si $x \in D$, alors on peut écrire $x = \sum_{i=0}^{p-1}(1+X)^i\varphi(x_i)$ où les $x_i \in D$ sont bien déterminés.

Définition 2.2.2. — On définit un opérateur $\psi : D \to D$ par la formule $\psi(x) \overset{\text{déf}}{=} x_0$ si $x = \sum_{i=0}^{p-1}(1+X)^i\varphi(x_i)$.

Cet opérateur vérifie alors $\psi(\varphi(x)y) = x\psi(y)$ et $\psi(x\varphi(y)) = \psi(x)y$ si $x \in \mathscr{O}_{\mathscr{E},L}$ (ou $\mathscr{E}_L$) et $y \in D$, et commute à l'action de Γ si D est un (φ,Γ)-module. C'est cet opérateur qui permet de faire le lien entre les représentations L-linéaires, les représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, et la cohomologie d'Iwasawa, dont nous rappelons la définition ci-dessous. Pour alléger les notations, on pose $F_n \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^n})$ si $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Définition 2.2.3. — Si V est une représentation L-linéaire, si T est un $\mathcal{O}_L$-réseau $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$-stable de V, et $i \geq 0$, alors on définit :

$$H^i_{\mathrm{Iw}}(\mathbb{Q}_p,T) \overset{\text{déf}}{=} \varprojlim_{\mathrm{cor}_{F_{n+1}/F_n}} H^i(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_n),T).$$

Le groupe $H^i_{\mathrm{Iw}}(\mathbb{Q}_p,V) \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^i_{\mathrm{Iw}}(\mathbb{Q}_p,T)$ ne dépend alors pas du choix d'un $\mathcal{O}_L$-réseau $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$-stable T de V. Les $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$-modules $H^i_{\mathrm{Iw}}(\mathbb{Q}_p,V)$ ont été étudiés en détail par Perrin-Riou, qui a notamment montré (cf. [**Per94**, §3.2]) :

Proposition 2.2.4. — *Si V est une représentation p-adique de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$, *alors on a $H^i_{\mathrm{Iw}}(\mathbb{Q}_p,V) = 0$ si $i \neq 1,2$. De plus :*

(i) *le sous-module de $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$-torsion de $H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbb{Q}_p,V)$ est isomorphe à $V^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_\infty)}$ et $H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbb{Q}_p,V)/\{\text{torsion}\}$ est un $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$-module libre de rang* $\dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$ *;*

(ii) $H^2_{\mathrm{Iw}}(\mathbb{Q}_p,V) = (V^*(1)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_\infty)})^*$.

Les espaces $D(V)^{\psi=1}$ et $D(V)/(1-\psi)$ sont eux aussi des $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$-modules et on a le résultat suivant (cf. [**CC99**, §II.1]) :

Proposition 2.2.5. — *On a des isomorphismes canoniques de $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$-modules $H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbb{Q}_p, V) \simeq D(V)^{\psi=1}$ et $H^2_{\mathrm{Iw}}(\mathbb{Q}_p, V) \simeq D(V)/(1-\psi)$.*

En d'autres termes, la cohomologie du complexe $0 \to D(V) \xrightarrow{1-\psi} D(V) \to 0$ calcule la cohomologie d'Iwasawa de V.

Corollaire 2.2.6. — *Si V est une représentation L-linéaire, alors $D(V)^{\psi=1} \neq 0$.*

Remarquons que le corollaire I.7.6 de [**CC99**] affirme que $D(V)^{\psi=1}$ contient en fait une base de $D(V)$ sur $\mathscr{E}_L$. Nous donnerons dans le corollaire 3.3.4 une autre démonstration du corollaire 2.2.6, qui ne passe pas par la cohomologie d'Iwasawa (mais qui suppose que V est cristalline).

2.3. Topologie faible et treillis. — Nous allons maintenant nous intéresser à la topologie de D. Si D est un $\mathscr{O}_{\mathscr{E},L}$-module libre de rang d, alors le choix d'une base de D donne un isomorphisme $D \simeq \mathscr{O}_{\mathscr{E},L}^d$ et on peut munir D de la topologie faible. Un petit calcul montre qu'une application $\mathscr{O}_{\mathscr{E},L}$-linéaire $\mathscr{O}_{\mathscr{E},L}^d \to \mathscr{O}_{\mathscr{E},L}^d$ est nécessairement continue et donc que la topologie définie sur D par $D \simeq \mathscr{O}_{\mathscr{E},L}^d$ ne dépend pas du choix d'une base de D.

Lemme 2.3.1. — *Si P est une partie d'un $\mathscr{O}_{\mathscr{E},L}$-module libre D, et $M(P)$ est le $\mathcal{O}_L[[X]]$-module engendré par P, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *P est bornée pour la topologie faible ;*

(ii) *$M(P)$ est borné pour la topologie faible ;*

(iii) *pour tout $j \geq 1$, l'image de $M(P)$ dans $D/\pi_L^j D$ est un $\mathcal{O}_L[[X]]$-module de type fini.*

Démonstration. — Choisissons une base de D, et notons D^+ le $\mathcal{O}_L[[X]]$-module engendré par cette base, ce qui fait que la topologie faible sur D est définie par le fait que les $\{\pi_L^i D + X^j D^+\}_{i,j\geq 0}$ forment une base de voisinages de zéro. En particulier, une partie P de D est bornée si et seulement si pour tout $k \geq 0$, il existe $n(k,P) \in \mathbb{Z}$ tel que $P \subset \pi_L^k D + X^{n(k,P)} D^+$. Comme le $\mathcal{O}_L[[X]]$-module engendré par $\pi_L^k D + X^{n(k,P)} D^+$ est $\pi_L^k D + X^{n(k,P)} D^+$ lui-même, on voit que les propriétés (i) et (ii) sont équivalentes. Il reste donc à montrer que les $\mathcal{O}_L[[X]]$-modules bornés sont ceux qui satisfont (iii), c'est-à-dire qu'un $\mathcal{O}_L[[X]]$-module M est borné si et seulement si pour tout $j \geq 1$, l'image de M dans $D/\pi_L^j D$ est un $\mathcal{O}_L[[X]]$-module de type fini. Si M est borné alors par définition, pour tout $j \geq 1$, il existe $n(j,M)$ tel que $M \subset \pi_L^j D + X^{n(j,M)} D^+$ ce qui fait que l'image de M dans $D/\pi_L^j D$ est contenue dans celle de $X^{n(j,M)} D^+$ et est de type fini puisque $\mathcal{O}_L[[X]]$ est un anneau noetherien. Réciproquement, si M satisfait (iii), alors pour tout $j \geq 1$ l'image de M dans $D/\pi_L^j D$ est un $\mathcal{O}_L[[X]]$-module de type fini et est donc contenue dans $X^{n(j,M)}D^+$ pour un $n(j,M) \in \mathbb{Z}$, ce qui fait que $M \subset \pi_L^j D + X^{n(j,M)}D^+$ et donc que M est borné pour la topologie faible. □

Un treillis de D est un $\mathcal{O}_L[[X]]$-module borné $M \subset D$ tel que l'image de M dans $D/\pi_L D$ en est un $k_L[[X]]$-réseau. Un treillis d'un $\mathscr{E}_L$-module D est un treillis d'un $\mathscr{O}_{\mathscr{E},L}$-réseau de D. Les treillis font l'objet d'une étude détaillée dans [**Col04a**, §4]. Rappelons le résultat de base sur les treillis stables par ψ d'un φ-module D (c'est la proposition 4.29 de [**Col04a**]) :

Proposition 2.3.2. — *Si D est un φ-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E},L}$, il existe un unique treillis $D^\sharp$ de D vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) *quels que soient $x \in D$ et $k \in \mathbb{N}$, il existe $n(x,k) \in \mathbb{N}$ tel que $\psi^n(x) \in D^\sharp + p^k D$ si $n \geq n(x,k)$;*

(ii) *l'opérateur ψ induit une surjection de $D^\sharp$ sur lui-même.*

De plus :

(iii) *si N est un sous-$\mathcal{O}_L[[X]]$ module borné de D et $k \in \mathbb{N}$, il existe $n(N,k)$ tel que $\psi^n(N) \subset D^\sharp + p^k D$ si $n \geq n(N,k)$;*

(iv) *si N est un treillis de D stable par ψ tel que ψ induise une surjection de N sur lui-même, alors $N \subset D^\sharp$ et $D^\sharp/N$ est annulé par X.*

La fin de ce paragraphe est consacré au début de l'étude des limites projectives définies ci-dessous.

Définition 2.3.3. — (i) On note $(\varprojlim_\psi D(V))^{\mathrm{b}}$ le L-espace vectoriel des suites $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $D(V)$ telles que l'ensemble $\{x_n\}_{n\geq 0}$ est borné (d'où le « b ») pour la topologie faible et telles que $\psi(x_{n+1}) = x_n$.

(ii) Si T est un $\mathcal{O}_L$-réseau de V stable par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$, on note $\varprojlim_\psi D^\sharp(T)$ le $\mathcal{O}_L$-module des suites ψ-compatibles d'éléments de $D^\sharp(T)$, muni de la topologie de la limite projective.

Proposition 2.3.4. — *L'injection $D^\sharp(T) \hookrightarrow D(V)$ induit un isomorphisme topologique $L \otimes_{\mathcal{O}_L} \varprojlim_\psi D^\sharp(T) \xrightarrow{\sim} (\varprojlim_\psi D(V))^{\mathrm{b}}$.*

Démonstration. — Il est clair que l'application ci-dessus est injective. Si $x = (x_n)_{n\geq 0} \in (\varprojlim_\psi D(V))^{\mathrm{b}}$, alors par définition l'ensemble $P \overset{\text{déf}}{=} \{x_n\}_{n\geq 0}$ est borné pour la topologie faible et par le lemme 2.3.1, le $\mathcal{O}_L[[X]]$-module $M(P)$ engendré par P est borné (pour la topologie faible). Quitte à multiplier x par une puissance de π_L, on peut d'ailleurs supposer que $x_m \in D(T)$ pour tout $m \geq 0$. Si $k, m \geq 0$, alors la proposition 2.3.2 appliquée à $N = M(P)$ montre que $x_m = \psi^n(x_{m+n}) \in D^\sharp(T) + p^k D(T)$ si n est assez grand. Comme c'est vrai pour tout k, on en déduit que $x_m \in D^\sharp(T)$ pour tout m et donc que l'application $L \otimes_{\mathcal{O}_L} \varprojlim_\psi D^\sharp(T) \to (\varprojlim_\psi D(V))^{\mathrm{b}}$ est une bijection. C'est un homéomorphisme car la topologie de $D^\sharp(T)$ est la topologie induite par la topologie faible de $D(T)$ via l'inclusion $D^\sharp(T) \subset D(T)$. $\square$

Rappelons que $\psi : D^\sharp(T) \to D^\sharp(T)$ est surjective, ce qui fait que les applications de transition dans $\varprojlim_\psi D^\sharp(T)$ le sont. Le lemme ci-dessous et son corollaire seront utilisés dans le paragraphe 5.3.

Lemme 2.3.5. — *L'application naturelle* $(\varprojlim_\psi D^\sharp(T))/(1-\psi) \to D^\sharp(T)/(1-\psi)$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — Cette application est évidemment surjective, et nous allons montrer qu'elle est injective, c'est-à-dire que si $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \varprojlim_\psi D^\sharp(T)$, avec $x_0 \in (1-\psi)D^\sharp(T)$, alors $x \in (1-\psi)\varprojlim_\psi D^\sharp(T)$. Soit $y_0 \in D^\sharp(T)$ tel que $(1-\psi)y_0 = x_0$. Pour tout $m \geq 0$, il existe $y_m^0 \in D^\sharp(T)$ tel que $\psi^m(y_m^0) = y_0$ et on a alors $(1-\psi)y_m^0 - x_m \in D^\sharp(T)^{\psi^m=0}$. L'opérateur $1-\psi$ est bijectif sur $D^\sharp(T)^{\psi^m=0}$ (un inverse étant donné par $1+\psi+\psi^2+\cdots+\psi^{m-1}$) et il existe donc $y_m \in D^\sharp(T)$ tel que $(1-\psi)y_m = x_m$. Pour tout $k \geq 0$, soit $z_k \stackrel{\text{déf}}{=} (z_{k,n})_{n\geq 0} \in \varprojlim_\psi D^\sharp(T)$ tel que $z_{k,k} = y_k$. Comme $\varprojlim_\psi D^\sharp(T)$ est un espace topologique compact, la suite $\{z_k\}_{k\geq 0}$ a une valeur d'adhérence z et comme $(1-\psi)z_k \to x$ quand $k \to \infty$ (par la continuité de ψ, voir la proposition 3.4.2 ci-dessous), on voit que $(1-\psi)z = x$ et donc que $x \in (1-\psi)\varprojlim_\psi D^\sharp(T)$. $\square$

Corollaire 2.3.6. — *On a un isomorphisme de* $\mathcal{O}_L[[\Gamma]]$*-modules* $(\varprojlim_\psi D^\sharp(T))/(1-\psi) \simeq H^2_{\mathrm{Iw}}(\mathbb{Q}_p, T)$.

Démonstration. — La proposition 4.43 de [**Col04a**] affirme que $D^\sharp(T)/(1-\psi) = D(T)/(1-\psi)$, et la remarque II.3.2 de [**CC99**] nous dit que $D(T)/(1-\psi) = H^2_{\mathrm{Iw}}(\mathbb{Q}_p, T)$ ce qui fait que l'on a une succession d'isomorphismes :

$$(\varprojlim_\psi D^\sharp(T))/(1-\psi) \simeq D^\sharp(T)/(1-\psi)D^\sharp(T) \simeq D(T)/(1-\psi)D(T) \simeq H^2_{\mathrm{Iw}}(\mathbb{Q}_p, T).$$

$\square$

3. Représentations cristallines de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$

Le but de cette partie est de décrire explicitement $D^\sharp(V)$ en fonction de $D_{\mathrm{cris}}(V)$ lorsque V est une représentation L-linéaire cristalline de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ (et absolument irréductible). Un énoncé similaire est déjà paru dans [**Col03**, §4.4], mais sans preuve. Dans le dernier paragaphe de ce chapitre, nous définissons une action d'un sous-groupe du Borel $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$ sur $L \otimes_{\mathcal{O}_L} \varprojlim_{\psi} D^{\sharp}(T)$ et nous montrons qu'elle est continue, topologiquement irréductible, et que le lemme de Schur est vrai pour cette action.

3.1. Rappels sur $D_{\mathrm{cris}}(V)$. — Le but de ce paragraphe est de rappeler la classification des représentations cristallines φ-semi-simples V de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ en fonction de leur φ-module filtré $D_{\mathrm{cris}}(V)$.

Afin de classifier certaines représentations L-linéaires du groupe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$, Fontaine a introduit les anneaux $\mathbb{B}_{\mathrm{cris}}$ et $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$. Ces anneaux vérifient les propriétés suivantes :

(i) L'anneau $\mathbb{B}_{\mathrm{cris}}$ est une $\mathbb{Q}_p$-algèbre munie d'une action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$, telle que $\mathbb{B}_{\mathrm{cris}}^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)} = \mathbb{Q}_p$ et d'un Frobenius φ qui commute à l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$;

(ii) le corps $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$ est le corps des fractions d'un anneau complet de valuation discrète $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$ (dont le corps résiduel est $\mathbb{C}_p$), et il est donc muni de la filtration définie par les puissances de l'idéal maximal. Il est aussi muni d'une action continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$, telle que $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)} = \mathbb{Q}_p$ et la filtration est donc stable sous l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$;

(iii) on a une inclusion naturelle $\mathbb{B}_{\mathrm{cris}} \subset \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$ et une suite exacte (dite « fondamentale ») :
$$0 \to \mathbb{Q}_p \to \mathbb{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1} \to \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \to 0;$$

(iv) il existe $t \in \mathbb{B}_{\mathrm{cris}}$ tel que $\varphi(t) = pt$ et t est un générateur de l'idéal maximal de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Le choix d'un tel t détermine une application injective $\mathscr{R}_L^+ \to L \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\mathrm{cris}}$ telle que $t = \log(1+X)$, et cette injection commute à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ et à φ ;

(v) si $m \geq 0$, alors on a une application toujours injective $\varphi^{-m} : L \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\mathrm{cris}} \to \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$ et la filtration de $\mathscr{R}_L^+$ induite par cette application est donnée par la filtration « ordre d'annulation en $\zeta_{p^m} - 1$ » où ζ_{p^m} est une racine primitive p^m-ième de 1 déterminée par le choix de t.

Étant donnée une représentation L-linéaire V, on pose :

$$(2) \qquad D_{\mathrm{cris}}(V) \overset{\text{déf}}{=} (\mathbb{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)} \quad \text{et} \quad D_{\mathrm{dR}}(V) \overset{\text{déf}}{=} (\mathbb{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)}.$$

En général, ces $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels sont de dimensions inférieure ou égale à $\dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$ et on dit que V est cristalline (resp. de de Rham) si $\dim_{\mathbb{Q}_p} D_{\mathrm{cris}}(V)$ (resp. $\dim_{\mathbb{Q}_p} D_{\mathrm{dR}}(V)$) est égale à $\dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$. Comme $\mathbb{B}_{\mathrm{cris}} \subset \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$, une représentation cristalline est nécessairement de de Rham. Toutes les représentations que nous considérons dans cet article sont supposées cristallines.

Le Frobenius φ de $\mathbb{B}_{\mathrm{cris}}$ commute à l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ et la filtration de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$ est stable par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$, ce qui fait que $D_{\mathrm{cris}}(V)$ est un φ-module et que $D_{\mathrm{dR}}(V)$ est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel filtré. Si V est une représentation cristalline, alors l'application naturelle de $D_{\mathrm{cris}}(V)$ dans $D_{\mathrm{dR}}(V)$ est un isomorphisme et $D_{\mathrm{cris}}(V)$ est donc un φ-module filtré. Si V est L-linéaire, alors $D_{\mathrm{cris}}(V)$ et $D_{\mathrm{dR}}(V)$ sont naturellement des L-espaces vectoriels, et $\varphi : D_{\mathrm{cris}}(V) \to D_{\mathrm{cris}}(V)$ ainsi que la filtration sur $D_{\mathrm{dR}}(V)$ sont L-linéaires.

Si V est une représentation de de Rham, les poids de Hodge-Tate de V sont par définition les entiers h tels que $\mathrm{Fil}^{-h} D_{\mathrm{dR}}(V) \neq \mathrm{Fil}^{-h+1} D_{\mathrm{dR}}(V)$, comptés avec la multiplicité $\dim_L \mathrm{Fil}^{-h} D_{\mathrm{dR}}(V)/\mathrm{Fil}^{-h+1} D_{\mathrm{dR}}(V)$.

Si D est un φ-module de dimension 1, on définit $t_N(D) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{val}(\alpha)$ où α est la matrice de φ dans une base de D et si D est un espace vectoriel filtré de dimension 1, on définit $t_H(D)$ comme étant le plus grand $h \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathrm{Fil}^h D \neq 0$. Si D est un φ-module de dimension ≥ 1, on définit $t_N(D) \overset{\text{déf}}{=} t_N(\det D)$ et $t_H(D) \overset{\text{déf}}{=} t_H(\det D)$, ce qui fait que $t_H(D)$ est aussi l'opposé de la somme des poids de Hodge-Tate de V, comptés avec multiplicités.

Si D est un φ-module filtré, on dit que D est admissible si $t_N(D) = t_H(D)$ et si $t_N(D') - t_H(D') \geq 0$ pour tout sous-φ-module $D' \subset D$. Le fait que pour tout $h \geq 1$, on a $\mathrm{Fil}^{h+1}\mathbb{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=p^h} = 0$ permet de montrer que si V est une représentation cristalline, alors $D_{\mathrm{cris}}(V)$ est admissible, et on a alors le théorème de Colmez-Fontaine (voir [**CF00**, théorème A] et aussi [**Ber04**]) :

Théorème 3.1.1. — *Le foncteur $D_{\mathrm{cris}}(\cdot)$ est une équivalence de catégories de la catégorie des représentations L-linéaires cristallines dans la catégorie des φ-modules filtrés L-linéaires admissibles.*

Ce théorème nous permet de faire une « liste » des représentations cristallines qui nous intéressent dans cet article, qui sont les représentations cristallines L-linéaires φ-semi-simples dont les poids de Hodge-Tate sont 0 et $k-1$ avec $k \geq 2$. Soit V une telle représentation. Quitte à remplacer L par un corps plus gros, on peut supposer que L contient les valeurs propres α^{-1} et β^{-1} de l'opérateur $\varphi : D_{\mathrm{cris}}(V) \to D_{\mathrm{cris}}(V)$. Quitte à échanger α et β, on peut supposer $\mathrm{val}(\alpha) \geq \mathrm{val}(\beta)$. L'hypothèse de semi-simplicité de cet opérateur implique que l'on peut écrire $D_{\mathrm{cris}}(V) = L \cdot e_\alpha \oplus L \cdot e_\beta$ où $\varphi(e_\alpha) = \alpha^{-1} e_\alpha$ et $\varphi(e_\beta) = \beta^{-1} e_\beta$. Il existe alors une droite Δ de $D_{\mathrm{cris}}(V)$ telle que la filtration sur $D_{\mathrm{cris}}(V)$ est donnée par :

$$\mathrm{Fil}^i D_{\mathrm{cris}}(V) = \begin{cases} D_{\mathrm{cris}}(V) & \text{si } i \leq -(k-1)\,; \\ \Delta & \text{si } -(k-2) \leq i \leq 0\,; \\ 0 & \text{si } i \geq 1. \end{cases}$$

À isomorphisme près (et quitte à multiplier e_α ou e_β par un élément de L) cette droite est soit $L \cdot e_\alpha$, soit $L \cdot e_\beta$, soit $L \cdot (e_\alpha + e_\beta)$. Le fait que $D_{\mathrm{cris}}(V)$ est admissible se traduit par le fait que $0 \leq \mathrm{val}(\beta) \leq \mathrm{val}(\alpha) \leq k-1$ et par ces conditions sur Δ :

(i) Si $0 < \mathrm{val}(\beta) \leq \mathrm{val}(\alpha) < k-1$, alors $\alpha \neq \beta$, $\Delta = L \cdot (e_\alpha + e_\beta)$ et V est irréductible ;

(ii) si $0 = \mathrm{val}(\beta)$, alors $\Delta \neq L \cdot e_\alpha$ et :

1) si $\Delta = L \cdot (e_\alpha + e_\beta)$, V est réductible non-scindée ;

2) si $\Delta = L \cdot e_\beta$, V est réductible scindée.

Définition 3.1.2. — Si $0 < \mathrm{val}(\beta) \leq \mathrm{val}(\alpha) < k-1$, on note $D(\alpha, \beta)$ le φ-module filtré admissible construit en (i) ci-dessus.

3.2. Modules de Wach des représentations cristallines. — Dans ce paragraphe, nous faisons le lien entre la théorie des (φ, Γ)-modules et celle des représentations cristallines de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$. L'idée de départ est que si V est une représentation p-adique quelconque, alors son (φ, Γ)-module $D(V)$ est un objet assez compliqué, mais dans le cas où V est cristalline, il est possible d'en choisir une base particulièrement sympathique. Ce résultat est l'objet de la théorie des modules de Wach (voir [**Fon90, Wa96, Ber02**]). Rappelons le résultat principal de la théorie (cf. [**Ber02**, §II.1]).

Théorème 3.2.1. — *Si V est une représentation p-adique de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$*, alors V est cristalline à poids de Hodge-Tate dans un intervalle $[a; b]$ si et seulement s'il existe un sous-$L \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_L[[X]]$-module libre de rang fini $N(V) \subset D(V)$, tel que :*

(i) $D(V) = \mathscr{E}_L \otimes_{L \otimes \mathcal{O}_L[[X]]} N(V)$;

(ii) *$X^b N(V)$ est stable par φ et $X^b N(V)/\varphi^*(X^b N(V))$ est annulé par $(\varphi(X)/X)^{b-a}$;*

(iii) *$N(V)$ est stable sous l'action de Γ et celle-ci est triviale sur $N(V)/XN(V)$.*

Si T est un $\mathcal{O}_L$-réseau de V, alors $N(T) \overset{\text{déf}}{=} D(T) \cap N(V)$ est un $\mathcal{O}_L[[X]]$-module libre de rang fini qui satisfait l'analogue des propriétés (i), (ii), (iii) ci-dessus.

L'étude des modules de Wach fait l'objet d'une bonne partie de [**Ber02**]. À partir de maintenant, on suppose que V est une représentation cristalline. L'objet de ce paragraphe est de démontrer le théorème 3.2.2 ci-dessous. Avant de l'énoncer, nous devons faire un certain nombre de rappels.

Il existe (cf. [**Ber02**, §II.2]) une application injective naturelle (en particulier, $L \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_L[[X]]$-linéaire et commutant à φ, ψ et à l'action de Γ) :

$$N(V) \to \mathscr{R}_L^+[1/t] \otimes_L D_{\mathrm{cris}}(V),$$

application qui donne lieu à un isomorphisme (rappelons que $t = \log(1+X)$) :

$$\mathscr{R}_L^+[1/t] \otimes_{L \otimes \mathcal{O}_L[[X]]} N(V) \xrightarrow{\sim} \mathscr{R}_L^+[1/t] \otimes_L D_{\mathrm{cris}}(V). \tag{3}$$

Si les poids de Hodge-Tate de V sont positifs, on a en fait :

$$N(V) \subset \mathscr{R}_L^+ \otimes_L D_{\mathrm{cris}}(V),$$

et la question se pose alors de caractériser l'image de $N(V)$ dans $\mathscr{R}_L^+ \otimes_L D_{\mathrm{cris}}(V)$. C'est à cette question que répond le théorème 3.2.2.

Avant de donner cette caractérisation, rappelons que pour tout $m \geq 0$, on a une application injective de L-algèbres $\varphi^{-m} : \mathscr{R}_L^+ \to (\mathbb{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^m}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L)[[t]]$, qui est déterminée par le fait qu'elle envoie $\alpha \otimes X$ sur $\alpha \otimes (\zeta_{p^m} \exp(t/p^m) - 1)$ (ici ζ_{p^m} est une racine primitive p^m-ième de 1 qui dépend du choix de $t \in \mathbb{B}_{\mathrm{cris}}$, voir le (v) du début du paragraphe 3.1). Pour alléger les notations, on écrit L_m au lieu de $\mathbb{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^m}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} L$. L'anneau $L_m[[t]]$ est muni d'une filtration par les puissances de l'idéal engendré par t, et cela définit une filtration sur $L_m[[t]] \otimes_L D_{\mathrm{cris}}(V)$.

Rappelons (cf. définition 2.1.1) qu'un élément $w \in \mathscr{R}_L^+$ est d'ordre r si, pour un (ou de manière équivalente tous les) $0 < \rho < 1$, la suite $(p^{-nr} \|w\|_{D(0,\rho^{1/p^n})})_n$ est bornée. On pose alors $\|w\|_r \overset{\text{déf}}{=} \sup_{n \geq 0} p^{-nr} \|w\|_{D(0,\rho^{1/p^n})}$ (cette norme dépend bien sûr du choix de ρ, mais pas la topologie qu'elle définit). On renvoie au lemme 4.1.6 ci-dessous pour une caractérisation équivalente de la propriété « être d'ordre r ». On a alors le résultat suivant, qui précise le théorème D de [**Ber04**] (pour simplifier, on suppose que φ est semi-simple sur $D_{\mathrm{cris}}(V)$) :

Théorème 3.2.2. — *Soit V une représentation cristalline dont les poids de Hodge-Tate sont positifs ou nuls et $D_{\mathrm{cris}}(V) = \oplus_{i=1}^d L \cdot e_i$ avec $\varphi(e_i) = \alpha_i^{-1} e_i$ et $\alpha_i \in L$. Si $x = \sum_{i=1}^d x_i \otimes e_i \in \mathscr{R}_L^+ \otimes_L D_{\mathrm{cris}}(V)$, alors $x \in N(V)$ si et seulement si :*

(i) *pour tout $1 \leq i \leq d$, x_i est d'ordre $r_i \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{val}(\alpha_i)$;*

(ii) *pour tout $m \geq 1$, $\sum_{i=1}^d \varphi^{-m}(x_i) \otimes \alpha_i^m e_i \in \mathrm{Fil}^0(L_m[[t]] \otimes_L D_{\mathrm{cris}}(V))$.*

Démonstration. — Afin de démontrer ce théorème, nous devons utiliser certains résultats et notations que nous n'avons pas rappelés dans cet article car ils ne sont pas utilisés ailleurs. Commençons par montrer que si $x \in N(V)$, alors il satisfait les conditions (i) et (ii). On peut supposer que $x \in N(T)$ où T est un réseau $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$-stable de V. Nous allons utiliser le fait que $N(T)$ est naturellement un sous-ensemble de $\widetilde{\mathbb{A}}^+[1/X] \otimes_{\mathbb{Z}_p} T$ où $\widetilde{\mathbb{A}}^+$ est un sous-anneau de $\mathbb{B}_{\mathrm{cris}}^+$ tel que $\varphi : \widetilde{\mathbb{A}}^+ \to \widetilde{\mathbb{A}}^+$ est bijectif, et qui est borné pour la topologie p-adique. En particulier, si $x \in N(T)$, alors l'ensemble $\{\varphi^{-m}(x)\}_{m \geq 0}$ est borné et si $x = \sum_{i=1}^d x_i \otimes e_i$, alors $\varphi^{-m}(x) = \sum_{i=1}^d \varphi^{-m}(x_i) \otimes \alpha_i^m e_i$ ce qui fait que pour tout $i \in \{1, \cdots, d\}$, la suite des $\{\varphi^{-m}(x_i) \alpha_i^m\}_{m \geq 0}$ est bornée, et x_i est donc d'ordre $r_i = \mathrm{val}(\alpha_i)$ parce que si $\rho \geq p^{-1/(p-1)}$ et $f(X) \in \mathscr{R}_L^+$, alors $\|f(X)\|_{D(0,\rho)} = \|\varphi(f(X))\|_{D(0,\rho^{1/p})}$. Cela montre le (i). Le (ii) résulte du fait que, comme $x \in \widetilde{\mathbb{A}}^+[1/X] \otimes_{\mathbb{Z}_p} T$, on a $\varphi^{-m}(x) \in \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbb{Z}_p} T$ pour tout $m \geq 1$ et donc :

$$\varphi^{-m}(x) \in \mathrm{Fil}^0(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} T) \cap L_m[[t]] \otimes_L D_{\mathrm{cris}}(V) = \mathrm{Fil}^0(L_m[[t]] \otimes_L D_{\mathrm{cris}}(V)).$$

Montrons maintenant que si $x \in \mathscr{R}_L^+ \otimes_L D_{\mathrm{cris}}(V)$ satisfait (i) et (ii), alors $x \in N(V)$. Pour cela, remarquons que x satisfait les conditions (1), (2) et (3) du théorème D de [**Ber04**] (la condition (1) est automatique car V est cristalline, la condition (2) est équivalente à (ii) et la condition (3) à (i)). On en déduit que, dans les notations de [**Ber04**], $x \in D^\dagger(V)$ où $D^\dagger(V)$ est un certain sous-ensemble de $D(V)$. Nous allons utiliser le fait que si V est cristalline, alors $D^\dagger(V) = \mathscr{E}_L^\dagger \otimes_{L\otimes \mathcal{O}_L[[X]]} N(V)$ où $\mathscr{E}_L^\dagger$ est le sous-corps de $\mathscr{E}_L$ constitué des séries formelles $f(X) \in \mathscr{E}_L$ ayant la propriété qu'il existe $0 \leq r(f) < 1$ tel que $f(X)$ converge sur la couronne $\{z \in \mathbb{C}_p,\ r(f) \leq |z| < 1\}$. Le fait que $x \in \mathscr{R}_L^+ \otimes_L D_{\mathrm{cris}}(V)$ et que, comme on l'a rappelé plus haut, $\mathscr{R}_L^+[1/t] \otimes_L D_{\mathrm{cris}}(V) = \mathscr{R}_L^+[1/t] \otimes_{L\otimes \mathcal{O}_L[[X]]} N(V)$ montre que :

$$x \in (\mathscr{R}_L^+[1/t] \cap \mathscr{E}_L^\dagger) \otimes_{L\otimes \mathcal{O}_L[[X]]} N(V).$$

Les coefficients de x dans une base de $N(V)$ sont donc des fonctions appartenant à $\mathscr{R}_L^+[1/t] \cap \mathscr{E}_L^\dagger$. Si $f(X) \in \mathscr{R}_L^+[1/\log(1+X)] \cap \mathscr{E}_L^\dagger$, alors il existe $\ell \geq 0$ tel que $f \in (L \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_L[[X]])[1/\varphi^\ell(X)]$. En effet, le fait que $f \in \mathscr{E}_L^\dagger$ implique que f ne peut avoir qu'un nombre fini de pôles, et donc, puisque l'ensemble des zéros de $\log(1+X)$ est la réunion de l'ensemble des zéros des $\{\varphi^\ell(X)\}_{\ell \geq 0}$, qu'il existe $\ell \geq 0$ tel que $f \in \mathscr{R}_L^+[1/\varphi^\ell(X)]$. Le fait que $f \in (L \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_L[[X]])[1/\varphi^\ell(X)]$ résulte alors du fait que $\mathscr{R}_L^+ \cap \mathscr{E}_L^\dagger = L \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_L[[X]]$. Il existe donc $\ell \geq 0$ tel que $x \in N(V)[1/\varphi^\ell(X)]$. Le dernier résultat que nous allons utiliser sans démonstration (mais qui suit des résultats de [**Ber02**, §3.3]) est que si $m \geq 1$, alors $\varphi^{-m}(N(V))$ contient une base de $\mathrm{Fil}^0(L_m[[t]] \otimes_L D_{\mathrm{cris}}(V))$ sur $L_m[[t]]$, ce qui fait que la condition (ii) du théorème implique que les coefficients de x dans une base de $N(V)$ ne peuvent pas avoir de pôles ailleurs qu'en zéro, et donc que $x \in N(V)[1/X]$. En effet, la filtration induite sur $\varphi^{-m}(\mathscr{R}_L^+[1/t] \otimes N(V))$ correspond à « l'ordre d'annulation » en $\zeta_{p^m} - 1$, et le fait d'être dans le Fil^0 correspond donc à l'absence de pôle. On termine en remarquant que les calculs de [**Ber02**, §II.3 et §III.2] montrent que les diviseurs élémentaires de l'inclusion :

$$\mathscr{R}_L^+ \otimes_{L\otimes \mathcal{O}_L[[X]]} N(V) \subset \mathscr{R}_L^+ \otimes_L D_{\mathrm{cris}}(V)$$

sont premiers à X et donc que si $x \in \mathscr{R}_L^+ \otimes_L D_{\mathrm{cris}}(V)$, et $x \in N(V)[1/X]$, alors $x \in N(V)$. $\square$

Soit $\prod_{i=1}^d \mathcal{H}^{r_i}$ l'espace de Banach des d-uplets de fonctions holomorphes $(h_1, \cdots, h_d)$ où $h_i \in \mathscr{R}_L^+$ est d'ordre r_i, muni de la norme $\|(h_1, \cdots, h_d)\| \overset{\text{déf}}{=} \sup_{1 \leq i \leq d} \|h_i\|_{r_i}$, et soit N le sous-espace de $\prod_{i=1}^d \mathcal{H}^{r_i}$ formé des fonctions qui satisfont la condition (ii) du théorème 3.2.2. Remarquons que $N(V)$ muni de la topologie p-adique est un espace de Banach (on peut par exemple décider que $N(T)$ en est la boule unité). Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.2.3. — *L'espace vectoriel N est fermé dans $\prod_{i=1}^d \mathcal{H}^{r_i}$ et l'application naturelle $N(V) \to N$ est un isomorphisme topologique d'espaces de Banach.*

Démonstration. — Si $m \geq 1$, alors $\mathrm{Fil}^0(L_m[[t]] \otimes_L D_{\mathrm{cris}}(V))$ est de codimension finie dans $L_m[[t]] \otimes_L D_{\mathrm{cris}}(V)$ et le noyau de l'application :

$$\prod_{i=1}^d \mathcal{H}^{r_i} \to L_m[[t]] \otimes_L D_{\mathrm{cris}}(V)/\mathrm{Fil}^0(L_m[[t]] \otimes_L D_{\mathrm{cris}}(V))$$

qui à $(h_1, \cdots, h_d)$ associe l'image de $\sum_{i=1}^d \varphi^{-m}(h_i) \otimes \alpha_i^m e_i$ est donc un sous-espace fermé N_m de $\prod_{i=1}^d \mathcal{H}^{r_i}$ ce qui fait que $N = \cap_{m\geq 1} N_m$ est lui aussi fermé dans $\prod_{i=1}^d \mathcal{H}^{r_i}$. L'application naturelle $N(V) \to N$ est un isomorphisme par le théorème 3.2.2. Par le théorème de l'image ouverte, pour montrer que $N(V) \to N$ est un isomorphisme topologique, il suffit de montrer que l'application $N(V) \to \prod_{i=1}^d \mathcal{H}^{r_i}$ est continue, c'est-à-dire qu'elle est bornée. Pour cela, il suffit d'observer qu'une boule unité de $N(V)$ (pour la topologie p-adique) est donnée par $N(T)$, qui est un $\mathcal{O}_L[[X]]$-module de type fini. □

Le lemme 3.2.3 montre que l'application $N(V) \to \mathscr{R}_L^+ \otimes_L D_{\mathrm{cris}}(V)$ est continue pour la topologie forte.

Remarque 3.2.4. — L'application $N(V) \to \mathscr{R}_L^+ \otimes_L D_{\mathrm{cris}}(V)$ est continue si l'on donne à $N(V)$ la topologie faible et à $\mathscr{R}_L^+$ sa topologie de Fréchet.

Démonstration. — Cela résulte du fait que l'application $L \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_L[[X]] \to \mathscr{R}_L^+$ est continue, et du fait que $N(V)$ est un $L \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_L[[X]]$-module de type fini. □

3.3. D'un monde à l'autre. — Le but de ce paragraphe est de donner une description explicite du $L\otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_L[[X]]$-module $D^\sharp(V)$ en fonction du L-espace vectoriel $D_{\mathrm{cris}}(V)$. Étant donnés les calculs du paragraphe précédent, il suffit de faire le lien entre $N(V)$ et $D^\sharp(V)$. On suppose tout au long de ce paragraphe que V est une représentation cristalline dont les poids de Hodge-Tate sont dans un intervalle $[0; h]$. La proposition 3.3.2 ci-dessous nous dit qu'alors $X^h N(V) \subset D^\sharp(V) \subset N(V)$ (sous une petite condition technique pour la deuxième inclusion).

Lemme 3.3.1. — *Si les poids de Hodge-Tate de V sont positifs ou nuls et si T est un $\mathcal{O}_L$-réseau de V stable par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$, alors les modules de Wach $N(V)$ et $N(T)$ sont stables par ψ.*

Démonstration. — Rappelons que h est un entier tel que les poids de Hodge-Tate de V sont dans l'intervalle $[0; h]$. Si $y \in N(T)$, alors par le (ii) du théorème 3.2.1, on a $(\varphi(X)/X)^h (X^h y) \in \varphi^*(X^h N(T))$ et donc $\varphi(X)^h y \in \varphi(X)^h \varphi^*(N(T))$ ce qui fait que

$y \in \varphi^*(N(T))$. Ceci étant vrai pour tout $y \in N(T)$, on a donc $N(T) \subset \varphi^*(N(T))$ et donc $\psi(N(T)) \subset N(T)$. Le fait que $\psi(N(V)) \subset N(V)$ en résulte en inversant p. $\square$

Proposition 3.3.2. — *Si les poids de Hodge-Tate de V sont positifs ou nuls, alors on a $X^h N(T) \subset D^\sharp(T) \subset X^{-1}N(T)$. Si les pentes de φ sur $D_{\mathrm{cris}}(V)$ sont de plus toutes strictement négatives, alors on a $D^\sharp(T) \subset N(T)$.*

Démonstration. — Comme $N(T)$ est un $\mathcal{O}_L[[X]]$-module qui engendre $D(T)$, c'est un treillis de $D(T)$ et le lemme 3.3.1 montre que $N(T)$ est en plus stable par ψ. Il suit alors de [**Col04a**, lemme 4.27, (iv) et proposition 4.29] que $D^\sharp(T) \subset X^{-1}N(T)$. Par le théorème 3.2.1, on a $\varphi(X^h N(T)) \subset X^h N(T)$, ce qui fait que $X^h N(T) \subset \psi(X^h N(T))$. On sait par ailleurs (par le lemme 3.3.1) que $\psi(N(T)) \subset N(T)$, et on conclut de ces deux observations que la suite des $\psi^n(X^h N(T))$ est une suite croissante de $\mathcal{O}_L[[X]]$-modules tous contenus dans $N(T)$, ce qui fait qu'il existe $m(T) \geq 0$ tel que $\psi^{m+1}(X^h N(T)) = \psi^m(X^h N(T))$ pour tout $m \geq m(T)$, et donc que $\psi^{m(T)}(X^h N(T))$ est un treillis qui contient $X^h N(T)$ et sur lequel ψ est surjectif. Le lemme résulte alors du (iv) de la proposition 2.3.2. Montrons finalement que si les pentes de φ sur $D_{\mathrm{cris}}(V)$ sont toutes < 0, alors $D^\sharp(T) \subset N(T)$. On vient de voir que $D^\sharp(T) \subset X^{-1}N(T)$. Pour terminer la démonstration, nous allons montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $n(k)$ tel que si $x \in N(T)$, alors $\psi^n(x) \in N(T) + p^k X^{-1} N(T)$ si $n \geq n(k)$. Le fait que $D^\sharp(T) = \psi^n(D^\sharp(T))$ implique alors que $D^\sharp(T) \subset N(T) + p^k X^{-1}N(T)$, et comme c'est vrai pour tout $k \geq 0$, c'est que $D^\sharp(T) \subset N(T)$. Nous allons donc montrer que $\psi^n \to 0$ sur le L-espace vectoriel de dimension finie $X^{-1}N(V)/N(V)$. Pour cela, rappelons que, par [**Ber02**, théorème III.4.4], on a un isomorphisme de φ-modules $N(V)/XN(V) = D_{\mathrm{cris}}(V)$. Si $x \in X^{-1}N(V)$, alors on peut écrire $x = X^{-1}\sum_{i=1}^d \lambda_i \varphi(y_i)$ puisque $N(V) \subset \varphi^*(N(V))$, ce qui fait que $\psi(x) = X^{-1}\sum_{i=1}^d \lambda_i(0) y_i \mod N(V)$ et donc que, via l'identification $X^{-1}N(V)/N(V) = D_{\mathrm{cris}}(V)$ qui à $\overline{X^{-1}x}$ associe $\overline{x}$, l'application $\psi : X^{-1}N(V)/N(V) \to X^{-1}N(V)/N(V)$ correspond à $\varphi^{-1} : D_{\mathrm{cris}}(V) \to D_{\mathrm{cris}}(V)$. Comme on a supposé que toutes les pentes de φ sont < 0, on a bien $\psi^n \to 0$ sur $X^{-1}N(V)/N(V)$, ce qui fait que $D^\sharp(T) \subset N(T)$. $\square$

Remarque 3.3.3. — La topologie faible sur $D(T)$ induit une topologie sur $N(T)$ qui n'est autre que la topologie (p, X)-adique, ce qui donne une description plus agréable de la topologie faible sur $D^\sharp(T)$. Ceci montre d'autre part qu'une partie de $N(V)$ est bornée pour la topologie p-adique si et seulement si elle est bornée pour la topologie faible.

Corollaire 3.3.4. — *Les modules $D^\sharp(T)^{\psi=1}$ et donc $D(V)^{\psi=1}$ sont non nuls (comparer avec le corollaire 2.2.6).*

Démonstration. — Il suffit de montrer que $N(T)^{\psi=1} \neq 0$. Si x est non nul dans $N(T)$, alors $y \overset{\text{déf}}{=} (1+X)\varphi(X^{h+1}x) \in (\varphi(X)N(T))^{\psi=0}$ comme on le vérifie aisément, et la série $\sum_{j=0}^{\infty} \varphi^j(y)$ converge pour la topologie faible vers un élément z non nul dans $N(T)$ tel que $(1-\varphi)z = y$. On a donc $\psi(z) = z$ et $N(T)^{\psi=1} \neq 0$. □

Nous en venons maintenant au dernier point de ce paragraphe, la description de $\varprojlim_{\psi}(D^\sharp(T))$ en termes de fonctions à valeurs dans $D_{\mathrm{cris}}(V)$. De l'application $N(V) \to \mathscr{R}_L^+ \otimes_L D_{\mathrm{cris}}(V)$, on déduit une application encore injective :

$$L \otimes_{\mathcal{O}_L} \varprojlim_{\psi}(D^\sharp(T)) \to \varprojlim_{\psi} \mathscr{R}_L^+ \otimes_L D_{\mathrm{cris}}(V). \tag{4}$$

On suppose comme ci-dessus que φ est semi-simple sur $D_{\mathrm{cris}}(V)$, et de plus que φ est de pentes strictement négatives sur $D_{\mathrm{cris}}(V)$.

Corollaire 3.3.5. — *Soient $D_{\mathrm{cris}}(V) = \oplus_{i=1}^d L\cdot e_i$ avec $\varphi(e_i) = \alpha_i^{-1}e_i$ et $\alpha_i \in \pi_L\mathcal{O}_L$, et soient $\{(w_{i,n})_{n\geq 0}\}_{1\leq i\leq d}$ d suites d'éléments de $\mathscr{R}_L^+$ telles que $(v_n)_{n\geq 0} \overset{\text{déf}}{=} (\sum_{i=1}^d w_{i,n}\otimes e_i)_{n\geq 0} \in \varprojlim(\mathscr{R}_L^+ \otimes_L D_{\mathrm{cris}}(V))$. Alors $(v_n)_{n\geq 0} \in L\otimes_{\mathcal{O}_L} \varprojlim_{\psi} D^\sharp(T)$ si et seulement si :*

(i) *Pour tout $n \geq 0$ et tout $1 \leq i \leq d$, la fonction $w_{i,n}$ est d'ordre* $\mathrm{val}(\alpha_i)$ *et $\|w_{i,n}\|_{\mathrm{val}(\alpha_i)}$ est borné indépendamment de n ;*

(ii) *pour tous $n \geq 0$, $m \geq 1$, on a :*
$$\sum_{i=1}^d \varphi^{-m}(w_{i,n}\otimes e_i) \in \mathrm{Fil}^0(L_m[[t]] \otimes_L D_{\mathrm{cris}}(V));$$

(iii) *pour tout $n \geq 1$ et tout $1 \leq i \leq d$, $\psi(w_{i,n}) = \alpha_i^{-1}w_{i,n-1}$.*

Démonstration. — Par le théorème 3.2.2, les conditions (i) et (ii) entraînent $v_n \in N(V)$. De plus, le fait que $\|w_{i,n}\|_{\mathrm{val}(\alpha_i)}$ est borné indépendamment de n est alors équivalent, par le lemme 3.2.3, à ce que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est bornée dans $N(V)$ pour la topologie p-adique, et donc aussi pour la topologie faible (cf. remarque 3.3.3). Enfin, la condition (iii) est équivalente à ce que $\psi(v_{n+1}) = v_n$ ce qui équivaut à $(v_n)_n \in (\varprojlim_{\psi} N(V))^{\mathrm{b}}$ et donc finalement à $(v_n)_n \in L\otimes_{\mathcal{O}_L} \varprojlim_{\psi} D^\sharp(T)$ par la proposition 2.3.4. □

3.4. Une action du Borel supérieur. — Le but de ce paragraphe est de définir une action du groupe :
$$G \overset{\text{déf}}{=} \left\{\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Q}_p \\ 0 & \mathbb{Q}_p^\times \end{pmatrix}\right\} \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$$
sur $\varprojlim_{\psi} D^\sharp(T)$ et de montrer que cette action est continue et topologiquement irréductible et que le lemme de Schur est vérifié. On suppose toujours que V est une représentation cristalline absolument irréductible dont les poids de Hodge-Tate sont dans un intervalle $[0;h]$.

Tout élément de $g \in G$ peut s'écrire :

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où $k \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Z}_p^\times$ et $z \in \mathbb{Q}_p$. Si $v = (v_n)_{n\geq 0} \in \varprojlim_\psi D^\sharp(T)$, on étend la fonction $n \mapsto v_n$ à $\mathbb{Z}$ en posant $v_n \overset{\text{déf}}{=} \psi^m(v_{n+m})$ pour $n+m \geq 0$. Si $a \in \mathbb{Z}_p^\times$, on note $[a] \in \Gamma$ l'unique élément tel que $\varepsilon([a]) = a$.

Définition 3.4.1. — Si $v = (v_n)_{n\geq 0} \in \varprojlim_\psi D^\sharp(T)$, on pose pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^k \end{pmatrix} \cdot v\right)_n \overset{\text{déf}}{=} v_{n-k} = \psi^k(v_n)$$
$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot v\right)_n \overset{\text{déf}}{=} [a](v_n)$$
$$\left(\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v\right)_n \overset{\text{déf}}{=} \psi^m((1+X)^{p^{n+m}z} v_{n+m}),\ n+m \geq -\mathrm{val}(z).$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier que les formules ci-dessus définissent bien une action du groupe G sur $\varprojlim_\psi D^\sharp(T)$. On définit aussi une structure de $\mathcal{O}_L[[X]]$-module sur $\varprojlim_\psi D^\sharp(T)$ en posant $(1+X)^z \cdot v \overset{\text{déf}}{=} \left(\begin{smallmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot v$ pour $z \in \mathbb{Z}_p$.

Proposition 3.4.2. — *L'application $G \times \varprojlim_\psi D^\sharp(T) \to \varprojlim_\psi D^\sharp(T)$ est continue.*

Démonstration. — On vérifie qu'il suffit de montrer que l'application $\psi : \varprojlim_\psi D^\sharp(T) \to \varprojlim_\psi D^\sharp(T)$ est continue et que l'application $\mathrm{B}(\mathbb{Z}_p) \times \varprojlim_\psi D^\sharp(T) \to \varprojlim_\psi D^\sharp(T)$ est continue. Si E et $\{X_i\}_{i\in I}$ sont des espaces topologiques et si pour tout i, on se donne une application continue $f_i : E \times X_i \to E \times X_i$, alors l'application $E \times \prod_{i\in I} X_i \to \prod_{i\in I} X_i$ donnée par $(e, (x_i)_i) \mapsto (f_i(e, x_i))_i$ est continue. En effet, la diagonale Δ_E de $\prod_{i\in I} E$ y est fermée, et l'application $(e, (x_i)_i) \mapsto (f_i(e, x_i))_i$ est la composition des applications :

$$E \times \prod_{i\in I} X_i = \Delta_E \times \prod_{i\in I} X_i \subset \prod_{i\in I}(E \times X_i) \xrightarrow{\prod_{i\in I} f_i} \prod_{i\in I}(E \times X_i) \xrightarrow{\prod_{i\in I} \mathrm{pr}_i} \prod_{i\in I} X_i.$$

On se ramène donc à montrer que si chaque f_i est continue, alors $\prod_{i\in I} f_i$ est continue (pour la topologie produit) ce qui est laissé en exercice facile au lecteur. Afin de montrer la proposition, il suffit donc de montrer que l'application $\psi : D^\sharp(T) \to D^\sharp(T)$ est continue, et que l'application $\mathrm{B}(\mathbb{Z}_p) \times D^\sharp(T) \to D^\sharp(T)$ est continue. Commençons par montrer que si V est une représentation cristalline, alors (a) l'ensemble $\{p^j D(T) + X^k D^\sharp(T)\}_{j,k\geq 0}$ est une base de voisinages de zéro pour la topologie faible et (b) l'ensemble $\{p^j D(T) + \varphi(X)^k D^\sharp(T)\}_{j,k\geq 0}$ est aussi une base de voisinages de zéro pour la topologie faible. La proposition 3.3.2 montre que $X^h N(T) \subset D^\sharp(T) \subset N(T)$, ce qui montre le point (a) puisque $N(T)$ est un $\mathcal{O}_L[[X]]$-module libre qui engendre $D(T)$ sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E},L}$. Pour montrer le point (b), et comme $p^j D(T) + \varphi(X)^k D^\sharp(T) \subset p^j D(T) + X^k D^\sharp(T)$, il suffit de montrer (par exemple) que pour tout $k \geq 0$, il existe ℓ tel que $p^j D(T) + X^\ell D^\sharp(T) \subset p^j D(T) + \varphi(X)^k D^\sharp(T)$. Pour cela, remarquons que si $m \geq j$ est tel que $p^m \geq k$, alors $p^j D(T) + X^{p^{m+1}} D^\sharp(T) \subset p^j D(T) + \varphi(X)^{p^m} D^\sharp(T) \subset p^j D(T) + \varphi(X)^k D^\sharp(T)$ et on peut donc prendre $\ell = p^{m+1}$. Le fait que l'opérateur $\psi : D^\sharp(T) \to D^\sharp(T)$ est continu pour la topologie faible résulte alors du fait que $\psi\left(p^j D(T) + \varphi(X)^k D^\sharp(T)\right) = p^j D(T) + X^k D^\sharp(T)$. Montrons maintenant que l'application naturelle $\mathrm{B}(\mathbb{Z}_p) \times D^\sharp(T) \to D^\sharp(T)$ est continue (pour la topologie faible). Comme $\mathrm{B}(\mathbb{Z}_p)$ agit par multiplication par des éléments de $\mathcal{O}_L[[X]]$ ou par action de Γ, et que la topologie faible de $D^\sharp(T)$ est définie par une base de voisinages de 0 qui sont des $\mathcal{O}_L[[X]]$-modules stables par Γ, on voit pour chaque $g \in \mathrm{B}(\mathbb{Z}_p)$ l'action de g sur $D^\sharp(T)$ est continue. Il reste donc à montrer que si W est un voisinage de zéro dans $D^\sharp(T)$, alors il existe un sous-groupe normal ouvert U de $\mathrm{B}(\mathbb{Z}_p)$ tel que $u(x) - x \in W$ pour tous $(u, x) \in U \times D^\sharp(T)$. Cela résulte des faits suivants :

(i) si $a \in \mathbb{Z}_p$ et $n \geq 0$, alors $(1+X)^{p^n a} - 1 \in (p, X)^{n+1}$;

(ii) si $\gamma \in \Gamma$ et $n \geq 0$, alors $(\gamma^{(p-1)p^{n-1}} - 1) N(T) \subset (p, X)^n N(T)$,

que nous laissons en exercices au lecteur. □

La proposition suivante est le « lemme de Schur » pour la représentation de G que l'on vient de définir.

Proposition 3.4.3. — *Toute application continue G-équivariante :*

$$f : \varprojlim_{\psi} D^\sharp(T) \longrightarrow \varprojlim_{\psi} D^\sharp(T)$$

est scalaire, i.e. est la multiplication par un élément de L.

Démonstration. — Notons $\mathrm{pr} : \varprojlim_\psi D^\sharp(T) \to D^\sharp(T)$ l'application $v \mapsto v_0$. Commençons par montrer que si $v = (v_n)_{n \geq 0}$, alors $\mathrm{pr} \circ f(v)$ ne dépend que de $v_0 = \mathrm{pr}(v)$. Soit K_n l'ensemble des $v \in \varprojlim_\psi D^\sharp(T)$ dont les n premiers termes sont nuls, ce qui fait que pour $n \geq 1$, K_n est un sous-$\mathcal{O}_L[[X]]$-module fermé et stable par ψ et Γ de $\varprojlim_\psi D^\sharp(T)$ et que $\psi(K_n) = K_{n+1}$. On en déduit que $\mathrm{pr} \circ f(K_n)$ est un sous-$\mathcal{O}_L[[X]]$-module fermé et stable par ψ et Γ de $D^\sharp(T)$. Par [**Col04a**, lemme 4.56], et comme V est absolument irréductible, il existe une constante $\alpha(n) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ telle que $\mathrm{pr} \circ f(K_n) = p^{\alpha(n)} D^\sharp(T)$. Le fait que $\psi(K_n) = K_{n+1}$ et que $\psi(D^\sharp(T)) = D^\sharp(T)$ implique $\alpha(n) = \alpha(n+1)$. Enfin, on voit que $K_n \to 0$ (en ce sens que tout voisinage ouvert de 0 dans $\varprojlim_\psi D^\sharp(T)$ contient K_n pour $n \gg 0$), ce qui fait que $\alpha(n) \to +\infty$, et donc finalement que $\alpha(n) = +\infty$ pour tout $n \geq 1$, ce qui veut dire que $\mathrm{pr} \circ f(K_1) \subset K_1$ et donc que $\mathrm{pr} \circ f(v)$ ne dépend que de v_0. Pour tout $w \in D^\sharp(T)$, soit $\widetilde{w}$ un élément de $\varprojlim_\psi D^\sharp(T)$ tel que $\widetilde{w}_0 = w$. Les calculs précédents montrent que l'application $h : D^\sharp(T) \to D^\sharp(T)$ donnée par $h(w) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{pr} \circ f(\widetilde{w})$ est bien définie, et qu'elle est $\mathcal{O}_L[[X]]$-linéaire et commute à ψ et à l'action de Γ. Par [**Col04a**, proposition 4.7], elle s'étend en une application de (φ, Γ)-modules $h : D(V) \to D(V)$ qui est scalaire car V est irréductible. Comme $f(v)_n = h(\psi^{-n} v)$ car f commute à ψ^{-n}, on en déduit que f est aussi scalaire. □

On a également :

Proposition 3.4.4. — *L'action de* $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$ *sur* $\varprojlim_\psi D^\sharp(T)$ *est topologiquement irréductible.*

Démonstration. — C'est la réunion de la démonstration du corollaire 4.59 et du (iii) de la remarque 5.5 de [**Col04a**] (puisque V et donc V^* est absolument irréductible). □

4. Représentations cristallines irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$

Le but de cette partie est de définir des espaces de Banach p-adiques $\Pi(V)$ munis d'une action linéaire continue de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et d'en commencer l'étude. Les représentations $\Pi(V)$ sont associées aux représentations cristallines irréductibles φ-semi-simples V de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$.

4.1. Fonctions de classe $\mathcal{C}^r$ et distributions d'ordre r. — Le but de ce paragraphe est de rappeler sans preuve les définitions et énoncés (classiques) d'analyse p-adique utilisés dans la suite.

Soit L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Si $f : \mathbb{Z}_p \to L$ est une fonction quelconque, on pose pour n entier positif ou nul :

$$a_n(f) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} f(n-i).$$

Soit r un nombre réel positif ou nul.

Définition 4.1.1. — Une fonction $f : \mathbb{Z}_p \to L$ est de classe $\mathcal{C}^r$ si $n^r |a_n(f)| \to 0$ dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$ quand $n \to +\infty$.

Rappelons que f est continue si et seulement si $a_n(f)$ tend p-adiquement vers 0 quand n tend vers l'infini, de sorte que les fonctions de classe $\mathcal{C}^0$ au sens de la définition 4.1.1 sont précisément les fonctions continues sur $\mathbb{Z}_p$. Toute fonction de classe $\mathcal{C}^r$ est aussi de classe $\mathcal{C}^s$ pour $0 \leq s \leq r$ et est donc en particulier toujours continue. On note $\mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, L)$ le L-espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{Z}_p \to L$ de classe $\mathcal{C}^r$.

Toute fonction continue $f : \mathbb{Z}_p \to L$ s'écrit (développement de Mahler) :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f) \binom{z}{n} \tag{5}$$

où $z \in \mathbb{Z}_p$ et $\binom{z}{0} \overset{\text{déf}}{=} 1$, $\binom{z}{n} = \frac{z(z-1)\cdots(z-n+1)}{n!}$ si $n \geq 1$. De plus, $\|f\|_0 \overset{\text{déf}}{=} \sup_{z\in\mathbb{Z}_p}|f(z)|$ coïncide avec $\sup_{n\geq 0}|a_n(f)|$. On vérifie facilement que l'espace $\mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, L)$ est un espace de Banach pour la norme $\|f\|_r \overset{\text{déf}}{=} \sup_{n\geq 0}(n+1)^r|a_n(f)|$.

La terminologie « de classe $\mathcal{C}^r$ » provient du fait que, lorsque r est entier strictement positif, les fonctions de $\mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, L)$ sont aussi les fonctions sur $\mathbb{Z}_p$ qui, moralement, admettent r dérivées avec la r-ième dérivée continue, ce qui explique la terminologie. Par exemple, les fonctions localement analytiques sur $\mathbb{Z}_p$ sont de classe $\mathcal{C}^r$ pour tout $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Théorème 4.1.2 **(Amice-Vélu, Vishik)**. — *Soit d un entier tel que $r-1 < d$. Le sous-L-espace vectoriel $\mathrm{Pol}^d(\mathbb{Z}_p, L)$ de $\mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, L)$ des fonctions $f : \mathbb{Z}_p \to L$ localement polynomiales de degré (local) au plus d est dense dans $\mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, L)$.*

Définition 4.1.3. — On appelle distribution tempérée d'ordre r un élément de l'espace $\mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, L)^*$, c'est-à-dire une forme linéaire continue sur l'espace de Banach des fonctions de classe $\mathcal{C}^r$.

On dit parfois aussi distribution tempérée d'ordre $\leq r$. Nous donnons maintenant deux descriptions des distributions tempérées d'ordre r.

Par le théorème 4.1.2, l'inclusion $\mathrm{Pol}^d(\mathbb{Z}_p, L) \subsetneq \mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, L)$ induit lorsque $r-1 < d$ une injection :

$$\mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, L)^* \hookrightarrow \mathrm{Pol}^d(\mathbb{Z}_p, L)^*$$

où $\mathrm{Pol}^d(\mathbb{Z}_p, L)^*$ est l'espace vectoriel dual de $\mathrm{Pol}^d(\mathbb{Z}_p, L)$.

Théorème 4.1.4 **(Amice-Vélu, Vishik)**. — *Soit $\mu \in \mathrm{Pol}^d(\mathbb{Z}_p, L)^*$ et supposons que $r-1 < d$. Alors $\mu \in \mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, L)^*$ si et seulement s'il existe une constante $C_\mu \in L$ telle que, $\forall\, a \in \mathbb{Z}_p$, $\forall\, j \in \{0, \cdots, d\}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$:*

$$\int_{a+p^n\mathbb{Z}_p} (z-a)^j d\mu(z) \in C_\mu p^{n(j-r)}\mathcal{O}_L \tag{6}$$

où $\int_{a+p^n\mathbb{Z}_p}(z-a)^j d\mu(z) \overset{\text{déf}}{=} \mu\big(\mathbf{1}_{a+p^n\mathbb{Z}_p}(z)(z-a)^j\big)$ ($\mathbf{1}_{a+p^n\mathbb{Z}_p}$ est la fonction caractéristique de $a+p^n\mathbb{Z}_p$).

Notons que le plus petit entier d tel que le théorème 4.1.4 s'applique est la partie entière de r. Lorsque μ est d'ordre r et $r-1 < d$, on pose :

$$\|\mu\|_{r,d} \overset{\text{déf}}{=} \sup_{a\in\mathbb{Z}_p}\sup_{j\in\{0,\cdots,d\}}\sup_{n\in\mathbb{N}}\left(p^{n(j-r)}\left|\int_{a+p^n\mathbb{Z}_p}(z-a)^j d\mu(z)\right|\right). \tag{7}$$

On peut montrer que $\|\mu\|_{r,d}$ est une norme sur $\mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, L)^*$ qui redonne la topologie d'espace de Banach de $\mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, L)^*$ et qui est équivalente à la norme :

$$\|\mu\|_r \overset{\text{déf}}{=} \sup_{a\in\mathbb{Z}_p}\sup_{j,n\in\mathbb{N}}\left(p^{n(j-r)}\left|\int_{a+p^n\mathbb{Z}_p}(z-a)^j d\mu(z)\right|\right). \tag{8}$$

En particulier, la majoration (6) est équivalente à la même majoration pour tout $j \in \mathbb{N}$ (et tout $a \in \mathbb{Z}_p$, $n \in \mathbb{N}$), quitte peut-être à modifier C_μ.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 4.1.5. — *Soit $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ et d la partie entière de r. Soit $n \in \mathbb{N}$ et :*

$$f(z) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{a\in\{0,\cdots,p^n-1\}} \mathbf{1}_{a+p^n\mathbb{Z}_p}(z)\sum_{i=0}^{d}\lambda_{a,i}(z-a)^i \in \mathrm{Pol}^d(\mathbb{Z}_p, L)$$

où $\lambda_{a,i} \in L$. Alors :

$$\sup_{\mu\in\mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p,L)^*}\frac{\left|\int_{\mathbb{Z}_p}f(z)d\mu(z)\right|}{\|\mu\|_{r,d}} = \sup_{a\in\{0,\cdots,p^n-1\}}\ \sup_{i\in\{0,\cdots,d\}}|\lambda_{a,i}|\, p^{n(r-i)}. \tag{9}$$

Démonstration. — Par (7), on voit que le réel de gauche est plus petit que celui de droite. Pour $(a,i) \in \{0,\cdots,p^n-1\}\times\{0,\cdots,d\}$, il n'est pas difficile de construire une forme linéaire $\mu_{a,i} \in \mathrm{Pol}^d(\mathbb{Z}_p, L)^*$ à support dans $a + p^n\mathbb{Z}_p$ satisfaisant (6) telle que $\int_{a+p^n\mathbb{Z}_p}(z-a)^j d\mu_{a,i}(z) = 0$ si $j \neq i$ ($j \in \{0,\cdots,d\}$), $\int_{a+p^n\mathbb{Z}_p}(z-a)^i d\mu_{a,i}(z) = p^{n(i-r)}$ et $\|\mu_{a,i}\|_{r,d} = 1$ (les détails sont laissés en exercice au lecteur). En particulier, $\frac{\left|\int_{a+p^n\mathbb{Z}_p}f(z)d\mu_{a,i}(z)\right|}{\|\mu_{a,i}\|_{r,d}} = |\lambda_{a,i}|\,p^{n(r-i)}$ est inférieur au réel de gauche. Comme cela est vrai pour tout $(a,i) \in \{0,\cdots,p^n-1\}\times\{0,\cdots,d\}$, on en déduit le résultat. □

L'espace vectoriel des fonctions localement analytiques sur $\mathbb{Z}_p$, $\mathrm{An}(\mathbb{Z}_p, L)$ (muni de sa topologie d'espace de Fréchet, cf. [**Sch01**, §16]), est *a fortiori* dense dans $\mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, L)$ et on dispose donc aussi d'une injection continue entre duaux continus :

$$\mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, L)^* \hookrightarrow \mathrm{An}(\mathbb{Z}_p, L)^*.$$

La transformée d'Amice-Mahler :

$$\mu \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty}\mu\left(\binom{z}{n}\right)X^n \tag{10}$$

induit un isomorphisme topologique entre $\mathrm{An}(\mathbb{Z}_p, L)^*$ et $\mathscr{R}_L^+$. Rappelons que (voir §2.1) :

$$\mathscr{R}_L^+ \overset{\text{déf}}{=} \left\{\sum_{n=0}^{+\infty}a_nX^n \mid a_n \in L,\ \lim_n|a_n|\rho^n = 0\ \forall\ \rho\in[0,1[\right\}$$

et que cet espace est muni de la topologie d'espace de Fréchet induite par la collection des normes $\|\cdot\|_{D(0,\rho)} = \sup_n(|a_n|\rho^n)$ pour $0 < \rho < 1$. Rappelons également (définition

2.1.1) qu'un élément $w \in \mathscr{R}_L^+$ est d'ordre r si, pour un (ou de manière équivalente tous les) $\rho \in]0,1[$, la suite $\left(p^{-nr}\|w\|_{D(0,\rho^{1/p^n})}\right)_n$ est bornée dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Lemme 4.1.6. — *Soit $w = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in \mathscr{R}_L^+$.*

(i) *Un élément $w = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in \mathscr{R}_L^+$ est d'ordre r si et seulement si $\{n^{-r}|a_n|\}_{n\geq 1}$ est borné (dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$) lorsque n varie.*

(ii) *Les normes $\sup_n \left(p^{-nr}\|w\|_{D(0,\rho^{1/p^n})}\right)$ et $\sup_n ((n+1)^{-r}|a_n|)$ sont équivalentes pour tout $\rho \in]0,1[$.*

Démonstration. — Voir [**Col04a**, §1.1.4]. □

Le résultat suivant découle immédiatement des définitions et du lemme 4.1.6 :

Proposition 4.1.7. — *Soit $\mu \in \mathrm{An}(\mathbb{Z}_p, L)^*$. Alors $\mu \in \mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, L)^*$ si et seulement l'élément $\sum_{n=0}^{+\infty} \mu\left(\binom{z}{n}\right) X^n$ est d'ordre r dans $\mathscr{R}_L^+$.*

On peut montrer que $\|\mu\|'_r \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_n((n+1)^{-r}\left|\mu\left(\binom{z}{n}\right)\right|)$ est une norme sur $\mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, L)^*$ qui redonne la topologie d'espace de Banach de $\mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, L)^*$.

4.2. Définition de $\Pi(V)$. — Le but de ce paragraphe est de donner une première définition de $\Pi(V)$ comme espace fonctionnel.

Soit V une représentation cristalline φ-semi-simple absolument irréductible comme au §3.1 (rappelons que V à pour poids de Hodge-Tate $(0, k-1)$ avec nécessairement $k \geq 2$ sinon V n'est pas absolument irréductible). Les valeurs propres α^{-1} et β^{-1} de φ sur $D_{\mathrm{cris}}(V) = D(\alpha, \beta)$ sont alors telles que $\alpha \neq \beta$, $\mathrm{val}(\alpha) > 0$, $\mathrm{val}(\beta) > 0$, $\mathrm{val}(\alpha) + \mathrm{val}(\beta) = k-1$ et $\mathrm{val}(\alpha) \geq \mathrm{val}(\beta)$ (quitte à échanger α et β).

Soit $B(\alpha)$ l'espace de Banach suivant. Son L-espace vectoriel sous-jacent est formé des fonctions $f : \mathbb{Q}_p \to L$ vérifiant les deux conditions :

(i) $f|_{\mathbb{Z}_p}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^{\mathrm{val}(\alpha)}$;

(ii) $(\frac{\alpha p}{\beta})^{\mathrm{val}(z)} z^{k-2} f(1/z)|_{\mathbb{Z}_p - \{0\}}$ se prolonge sur $\mathbb{Z}_p$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^{\mathrm{val}(\alpha)}$.

Comme espace vectoriel, on a donc :

$$B(\alpha) \simeq \mathcal{C}^{\mathrm{val}(\alpha)}(\mathbb{Z}_p, L) \oplus \mathcal{C}^{\mathrm{val}(\alpha)}(\mathbb{Z}_p, L), \ f \mapsto f_1 \oplus f_2 \tag{11}$$

où, pour $z \in \mathbb{Z}_p$, $f_1(z) \stackrel{\text{déf}}{=} f(pz)$ et $f_2(z) \stackrel{\text{déf}}{=} (\alpha p \beta^{-1})^{\mathrm{val}(z)} z^{k-2} f(1/z)$. On munit $B(\alpha)$ de la norme :

$$\|f\| \stackrel{\text{déf}}{=} \max\left(\|f_1\|_{\mathrm{val}(\alpha)}, \|f_2\|_{\mathrm{val}(\alpha)}\right),$$

qui en fait un espace de Banach en vertu du §4.1. On fait agir L-linéairement $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ à gauche sur les fonctions de $B(\alpha)$ comme suit :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot f(z) = \alpha^{-\mathrm{val}(ad-bc)} \left(\frac{\alpha p}{\beta}\right)^{\mathrm{val}(-cz+a)} (-cz+a)^{k-2} f\left(\frac{dz-b}{-cz+a}\right). \tag{12}$$

Notons que $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ agit par la multiplication par $\varepsilon^{k-2}(a)(\frac{p^{k-1}}{\alpha\beta})^{\mathrm{val}(a)} \in \mathcal{O}_L^\times$.

Lemme 4.2.1. — *Si $f \in B(\alpha)$ et $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, alors $g \cdot f \in B(\alpha)$ et l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $B(\alpha)$ se fait par automorphismes continus.*

Démonstration. — On pose $r \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{val}(\alpha)$, d la partie entière de r (donc $d \leq k-2$) et on munit l'espace de Banach $\mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, L)$ de la norme induite par son bidual, c'est-à-dire :

$$\|f\| \overset{\text{déf}}{=} \sup_{\mu \in \mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p,L)^*} \frac{\left|\int_{\mathbb{Z}_p} f(z) d\mu(z)\right|}{\|\mu\|_{r,d}}$$

qui redonne la topologie d'espace de Banach de $\mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, L)$ par [**Sch01**, lemme 9.9] et les résultats du §4.1. L'assertion du lemme est triviale si g est scalaire. Par la décomposition de Bruhat et le cas scalaire, on est réduit à montrer la stabilité et la continuité pour les matrices g de la forme $\begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ($\lambda \in \mathbb{Q}_p^\times$). Le premier cas est évident puisqu'il envoie $f = (f_1, f_2) \in B(\alpha)$ sur $(f_2, f_1) \in B(\alpha)$ (cf. (11)). Quitte à conjuguer par $\begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et à multiplier par un scalaire convenable, on peut prendre $\lambda \in \mathbb{Z}_p - \{0\}$ dans le deuxième et g envoie alors $(f_1(z), f_2(z)) \in B(\alpha)$ sur $(f_1(\lambda z), f_2(\lambda z))$ (à multiplication par des scalaires près). Il suffit donc de montrer que l'application $f(\cdot) \mapsto f(\lambda \cdot)$ est bien définie et continue de $\mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, L)$ dans $\mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, L)$. Par le théorème 4.1.2, il suffit de montrer qu'il existe $c \in |L^\times|$ tel que, si $f \in \mathrm{Pol}^d(\mathbb{Z}_p, L) \subset \mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, L)$, alors $\|f(\lambda\cdot)\| \leq c\|f(\cdot)\|$. En écrivant, pour un $n \in \mathbb{N}$ assez petit et des $\lambda_{n,a,i} \in L$ convenables :

$$f(z) = \sum_{a \in \{0,\cdots,p^n-1\}} \mathbf{1}_{a+p^n\mathbb{Z}_p}(z) \sum_{i=0}^{d} \lambda_{a,i}(z-a)^i,$$

un calcul donne :

$$f(\lambda z) = \sum_{\substack{a \in \{0,\cdots,p^n-1\} \\ \mathrm{val}(a) \geq \mathrm{val}(\lambda)}} \mathbf{1}_{\frac{a}{\lambda}+p^{n-\mathrm{val}(\lambda)}\mathbb{Z}_p}(z) \sum_{i=0}^{d} \lambda_{a,i}\lambda^i \left(z - \frac{a}{\lambda}\right)^i.$$

On en déduit grâce à (7) :

$$\begin{aligned} \|f(\lambda\cdot)\| &\leq \sup_{\substack{a \in \{0,\cdots,p^n-1\} \\ \mathrm{val}(a) \geq \mathrm{val}(\lambda)}} \sup_{i \in \{0,\cdots,d\}} \left|\lambda_{a,i}\lambda^i\right| p^{(n-\mathrm{val}(\lambda))(r-i)} \\ &\leq \sup_{a \in \{0,\cdots,p^n-1\}} \sup_{i \in \{0,\cdots,d\}} |\lambda_{a,i}| \, p^{n(r-i)} p^{-r\mathrm{val}(\lambda)} \\ &\leq \|f(\cdot)\| \end{aligned}$$

où la dernière inégalité résulte du lemme 4.1.5 et du fait que $\mathrm{val}(\lambda) \geq 0$. Passons au dernier cas. Quitte à conjuguer $g = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ par un élément convenable de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbb{Q}_p^\times \end{pmatrix}$, on peut supposer $\lambda = p$ et g envoie alors (f_1, f_2) sur $(f_1(z+1), (1+pz)^{k-2} f_2(z/(1+pz)))$ (à multiplication par des scalaires près). Il suffit donc de montrer que les applications

$f(\cdot) \mapsto f(\cdot+1)$ et $f(\cdot) \mapsto (1+pz)^{k-2} f(\cdot/(1+p\cdot))$ sont bien définies et continues de $\mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, L)$ dans $\mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, L)$. Cela se vérifie par un argument analogue au précédent avec un calcul utilisant (7) et (8) dont on laisse les détails au lecteur. □

La représentation $B(\alpha)$ doit être pensée comme une induite parabolique. Sans donner un sens formel à ce qui suit, on a un isomorphisme $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant :

$$\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{nr}(\alpha^{-1}) \otimes d^{k-2}\mathrm{nr}(p\beta^{-1})\right)^{\mathcal{C}^{\mathrm{val}(\alpha)}} \simeq B(\alpha)$$

où l'espace de gauche est celui des fonctions $F : \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \to L$ qui sont de classe $\mathcal{C}^{\mathrm{val}(\alpha)}$ (oublions que nous n'avons pas défini de telles fonctions dans ce cadre !) telles que :

$$F\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} g\right) = \alpha^{-\mathrm{val}(a)} p^{\mathrm{val}(d)} \beta^{-\mathrm{val}(d)} d^{k-2} F(g) \tag{13}$$

avec action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ donnée par $(g \cdot F)(g') \overset{\text{déf}}{=} F(g'g)$. On passe de F à une fonction $f \in B(\alpha)$ en posant :

$$f(z) \overset{\text{déf}}{=} F\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & z \end{pmatrix}\right). \tag{14}$$

On définit de même $B(\beta)$ muni d'une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ par automorphismes en échangeant partout α et β.

Voici des exemples importants de fonctions dans $B(\alpha)$:

Lemme 4.2.2. — *Pour $0 \leq j < \mathrm{val}(\alpha)$ et $a \in \mathbb{Q}_p$, les fonctions $z \mapsto z^j$ et les fonctions :*

$$z \longmapsto \left(\frac{\alpha p}{\beta}\right)^{\mathrm{val}(z-a)} (z-a)^{k-2-j}$$

(prolongées par 0 en a) sont dans $B(\alpha)$.

Démonstration. — En faisant agir $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ sur z^j, il suffit de traiter les deuxièmes fonctions. En faisant agir $\left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, il suffit même par le lemme 4.2.1 de traiter le cas $a = 0$ et comme $z \mapsto z^j$ est clairement de classe $\mathcal{C}^{\mathrm{val}(\alpha)}$ sur $\mathbb{Z}_p$, il suffit de montrer que $z \mapsto f(z) \overset{\text{déf}}{=} (\alpha p \beta^{-1})^{\mathrm{val}(z)} z^{k-2-j}$ est de classe $\mathcal{C}^{\mathrm{val}(\alpha)}$ sur $\mathbb{Z}_p$. Soit f_0 la fonction nulle sur $\mathbb{Z}_p$ et, pour $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$, posons $f_n(z) \overset{\text{déf}}{=} (\alpha p \beta^{-1})^{\mathrm{val}(z)} z^{k-2-j}$ si $\mathrm{val}(z) < n$, $f_n(z) \overset{\text{déf}}{=} 0$ sinon. La fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^{\mathrm{val}(\alpha)}$ sur $\mathbb{Z}_p$ puisqu'elle est localement polynomiale. Il suffit de montrer que $f_{n+1} - f_n \to 0$ dans $\mathcal{C}^{\mathrm{val}(\alpha)}(\mathbb{Z}_p, L)$ quand $n \to +\infty$ (car $\sum_{n=0}^{\infty}(f_{n+1} - f_n) = f \in \mathcal{C}^{\mathrm{val}(\alpha)}(\mathbb{Z}_p, L)$ puisque $\mathcal{C}^{\mathrm{val}(\alpha)}(\mathbb{Z}_p, L)$ est complet). Par [**Sch01**, lemme 9.9], il suffit de vérifier que $f_{n+1} - f_n \to 0$ dans $(B(\alpha)^*)^*$, i.e. que :

$$\sup_{\mu \in \mathcal{C}^{\mathrm{val}(\alpha)}(\mathbb{Z}_p, L)^*} \frac{\left|\int_{\mathbb{Z}_p} (f_{n+1}(z) - f_n(z)) d\mu(z)\right|}{\|\mu\|_{\mathrm{val}(\alpha)}} \longrightarrow 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

Mais :

$$\int_{\mathbb{Z}_p}(f_{n+1}(z)-f_n(z))d\mu(z)=\left(\frac{\alpha p}{\beta}\right)^n\left(\int_{p^n\mathbb{Z}_p}z^{k-2-j}d\mu(z)-\int_{p^{n+1}\mathbb{Z}_p}z^{k-2-j}d\mu(z)\right)$$

d'où :

$$\left|\int_{\mathbb{Z}_p}(f_{n+1}(z)-f_n(z))d\mu(z)\right|\leq c\|\mu\|_{\mathrm{val}(\alpha)}p^{-n(2\mathrm{val}(\alpha)-k+2)}p^{-n(k-2-j-\mathrm{val}(\alpha))}$$

où $c \stackrel{\text{déf}}{=} \max(1,p^{-(k-2-j-\mathrm{val}(\alpha))})$ en utilisant (8) et en se rappelant que $\mathrm{val}(\alpha)+\mathrm{val}(\beta)=k-1$. Cela implique $|\int_{\mathbb{Z}_p}(f_{n+1}(z)-f_n(z))d\mu(z)|\leq c\|\mu\|_{\mathrm{val}(\alpha)}p^{n(j-\mathrm{val}(\alpha))}$ d'où le résultat puisque $j<\mathrm{val}(\alpha)$. □

On a un lemme analogue en échangeant α et β. On note $L(\alpha)$ l'adhérence dans $B(\alpha)$ du sous-L-espace vectoriel engendré par les fonctions z^j et $(\alpha p\beta^{-1})^{\mathrm{val}(z-a)}(z-a)^{k-2-j}$ pour $a\in\mathbb{Q}_p$ et j entier, $0\leq j<\mathrm{val}(\alpha)$. De même, on note $L(\beta)$ l'adhérence dans $B(\beta)$ du sous-L-espace vectoriel engendré par les fonctions z^j et $(\beta p\alpha^{-1})^{\mathrm{val}(z-a)}(z-a)^{k-2-j}$ pour $a\in\mathbb{Q}_p$ et j entier, $0\leq j<\mathrm{val}(\beta)$. Notons que, lorsque $\alpha=p\beta$, $L(\beta)$ est de dimension finie et s'identifie aux polynômes en z de degré au plus $k-2$.

Lemme 4.2.3. — *Le sous-espace $L(\alpha)$ (resp. $L(\beta)$) est stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ dans $B(\alpha)$ (resp. $B(\beta)$.*

Démonstration. — Exercice. □

Définition 4.2.4. — On pose $\Pi(V)\stackrel{\text{déf}}{=}B(\alpha)/L(\alpha)$.

Il s'agit encore d'un L-espace de Banach (avec la topologie quotient) muni d'une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ par automorphismes continus. Nous allons voir que l'application $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)\times\Pi(V)\to\Pi(V)$ est continue, que $\Pi(V)$ est unitaire et que l'on a un morphisme continu $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant $\widehat{I}:B(\beta)/L(\beta)\to\Pi(V)$ qui est un isomorphisme lorsque $\alpha\neq p\beta$.

4.3. Autre description de $\Pi(V)$. — Le but de ce paragraphe est de donner une description plus intrinsèque de $\Pi(V)=B(\alpha)/L(\alpha)$ pour en déduire certaines propriétés de l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ (continuité, unitarité, entrelacements) peu évidentes sur la définition précédente. On conserve les notations du §4.2.

Soit :

$$\pi(\alpha)\stackrel{\text{déf}}{=}\mathrm{Sym}^{k-2}L^2\otimes_L\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\mathrm{nr}(\alpha^{-1})\otimes\mathrm{nr}(p\beta^{-1})$$

la représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ produit tensoriel de la représentation algébrique $\mathrm{Sym}^{k-2}L^2$ par l'induite parabolique lisse $\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\mathrm{nr}(\alpha^{-1})\otimes\mathrm{nr}(p\beta^{-1})$ (c'est-à-dire l'espace des fonctions localement constantes $h:\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)\to L$ vérifiant une égalité analogue à (13) avec action à gauche de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ par translation à droite). On munit $\pi(\alpha)$ de l'unique topologie localement convexe (au sens de [**Sch01**]) telle que les ouverts sont les sous-$\mathcal{O}_L$-modules générateurs (sur L). La représentation $\pi(\alpha)$ est dite localement algébrique (cf. l'appendice de [**ST01**]) et n'est autre que la représentation $\mathrm{Alg}(V) \otimes_L \mathrm{Lisse}(V)$ de l'introduction.

On identifie $\mathrm{Sym}^{k-2}L^2$ à l'espace vectoriel des polynômes $P(z)$ de degré au plus $k-2$ à coefficients dans L munis de l'action à gauche de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot P(z) = (-cz+a)^{k-2} P\left(\frac{dz-b}{-cz+a}\right). \tag{15}$$

Comme en (14), on identifie $\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{nr}(\alpha^{-1}) \otimes \mathrm{nr}(p\beta^{-1})$ à l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{Q}_p \to L$ localement constantes telles que $(\frac{\alpha p}{\beta})^{\mathrm{val}(z)} f(1/z)$ se prolonge sur $\mathbb{Q}_p$ en une fonction localement constante avec action à gauche de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ comme en (12) mais sans le facteur $(-cz+a)^{k-2}$. On en déduit une injection $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante continue :

$$\pi(\alpha) \hookrightarrow B(\alpha), \ P(z) \otimes f(z) \mapsto P(z)f(z). \tag{16}$$

Par le théorème 4.1.2, l'image de $\pi(\alpha)$ est dense dans $B(\alpha)$. En particulier, on a une injection continue $B(\alpha)^* \hookrightarrow \pi(\alpha)^*$. On définit de même $\pi(\beta)$ et une injection $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante continue d'image dense $\pi(\beta) \hookrightarrow B(\beta)$. Ces injections induisent des applications $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariantes continues $\pi(\alpha) \to B(\alpha)/L(\alpha)$ et $\pi(\beta) \to B(\beta)/L(\beta)$.

Si π^0 est un sous-$\mathcal{O}_L$-module générateur d'un L-espace vectoriel π, rappelons qu'on appelle complété de π par rapport à π^0 l'espace de Banach :

$$\Pi \overset{\text{déf}}{=} (\varprojlim_n \pi^0/\pi_L^n \pi^0) \otimes_{\mathcal{O}_L} L.$$

On a un morphisme canonique d'image dense $\pi \to \Pi$ qui n'est pas injectif en général (si $\pi^0 = \pi$, on a $\Pi = 0$). Le dual continu Π^* de Π s'identifie en tant qu'espace de Banach à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_L}(\pi^0, \mathcal{O}_L) \otimes_{\mathcal{O}_L} L$ (avec $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_L}(\pi^0, \mathcal{O}_L)$ comme boule unité). Si π est un espace localement convexe tonnelé (cf. [**Sch01**, §6]) muni d'une action continue d'un groupe topologique localement compact G telle que π^0 est ouvert et stable par G, il est facile de vérifier en utilisant le théorème de Banach-Steinhaus (cf. [**Sch01**, proposition 6.15]) que Π et Π^* sont des G-Banach unitaires et que la flèche canonique $\pi \to \Pi$ est continue.

Théorème 4.3.1. — *L'application $\pi(\alpha) \to B(\alpha)/L(\alpha)$ induit un isomorphisme topologique $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant entre $B(\alpha)/L(\alpha)$ et le complété de $\pi(\alpha)$ par rapport à un quelconque sous-$\mathcal{O}_L$-module générateur de $\pi(\alpha)$ stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et de type fini comme $\mathcal{O}_L[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$-module. On a le même résultat en remplaçant α par β.*

Démonstration. — Notons que le complété ne dépend pas du choix du sous-$\mathcal{O}_L[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$-module de type fini générateur de $\pi(\alpha)$ car ces $\mathcal{O}_L$-modules sont tous commensurables dans $\pi(\alpha)$. En utilisant $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ et le fait que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ est compact, on voit facilement qu'il suffit de compléter par rapport à un sous-$\mathcal{O}_L[\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)]$-module de type fini générateur quelconque, par exemple :

$$\sum_{j=0}^{k-2}\mathcal{O}_L[\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)](\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}(z)z^j)+\sum_{j=0}^{k-2}\mathcal{O}_L[\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)]\left(\left(\frac{p\alpha}{\beta}\right)^{\mathrm{val}(z)}\mathbf{1}_{\mathbb{Q}_p-\mathbb{Z}_p}(z)z^j\right)\subset\pi(\alpha)$$

où $\mathbf{1}_U$ est la fonction caractéristique de l'ouvert U. Le dual du complété cherché est donc isomorphe au Banach :

$$(17)\quad \{\mu\in\pi(\alpha)^*\mid\forall\, g\in\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p),\forall\, j\in\{0,\cdots,k-2\},|\mu(g(\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}(z)z^j))|\leq 1$$
$$\text{et }\left|\mu(g(\mathbf{1}_{\mathbb{Q}_p-\mathbb{Z}_p}(z)(\alpha p\beta^{-1})^{\mathrm{val}(z)}z^j))\right|\leq 1\}\otimes_{\mathcal{O}_L}L.$$

En utilisant l'intégralité du caractère central, il est équivalent de prendre $g\in\left(\begin{smallmatrix}1&\mathbb{Q}_p\\0&\mathbb{Q}_p^\times\end{smallmatrix}\right)$ dans (17). Pour $f\in\pi(\alpha)$, vue comme fonction sur $\mathbb{Q}_p$ via (16), et U ouvert de $\mathbb{Q}_p$, on écrit $\int_U f(z)d\mu(z)$ pour $\mu(\mathbf{1}_U(z)f(z))$. Un calcul donne alors que les conditions sur μ dans (17) sont équivalentes à l'existence d'une constante $C\in L$ indépendante de μ telle que, pour tout $a\in\mathbb{Q}_p$, tout $j\in\{0,\cdots,k-2\}$ et tout $n\in\mathbb{Z}$:

$$(18)\qquad \int_{a+p^n\mathbb{Z}_p}(z-a)^jd\mu(z)\ \in\ Cp^{n(j-\mathrm{val}(\alpha))}\mathcal{O}_L$$

$$(19)\qquad \int_{\mathbb{Q}_p-(a+p^n\mathbb{Z}_p)}\left(\frac{\alpha p}{\beta}\right)^{\mathrm{val}(z-a)}(z-a)^{k-2-j}d\mu(z)\ \in\ Cp^{n(\mathrm{val}(\alpha)-j)}\mathcal{O}_L$$

(si $g=\left(\begin{smallmatrix}1&\lambda\\0&\mu\end{smallmatrix}\right)$, poser $n=-\mathrm{val}(\mu)$ et $a=\lambda/\mu$; en fait, on peut prendre $C=1$). De (18), on déduit facilement en notant que $\mathrm{val}(z-a)=n-1$ si $z\in(a+p^{n-1}\mathbb{Z}_p)-(a+p^n\mathbb{Z}_p)$ et quitte à modifier C :

$$(20)\qquad \int_{(a+p^{n-1}\mathbb{Z}_p)-(a+p^n\mathbb{Z}_p)}\left(\frac{\alpha p}{\beta}\right)^{\mathrm{val}(z-a)}(z-a)^{k-2-j}d\mu(z)\in Cp^{n(\mathrm{val}(\alpha)-j)}\mathcal{O}_L.$$

En décomposant $\mathbb{Q}_p-(a+p^n\mathbb{Z}_p)=\mathbb{Q}_p-(a+p^{n+1}\mathbb{Z}_p)\setminus(a+p^n\mathbb{Z}_p)-(a+p^{n+1}\mathbb{Z}_p)$, puis $\mathbb{Q}_p-(a+p^{n+1}\mathbb{Z}_p)=\mathbb{Q}_p-(a+p^{n+2}\mathbb{Z}_p)\setminus(a+p^{n+1}\mathbb{Z}_p)-(a+p^{n+2}\mathbb{Z}_p)$ etc. jusqu'à arriver à $\mathbb{Q}_p-(a+p^{n+m}\mathbb{Z}_p)$ avec $n+m\geq 0$, on déduit de (20) que (19) pour $j<\mathrm{val}(\alpha)$ découle de (18) et de (19) pour $n\geq 0$ (utiliser (20) pour les morceaux compacts dans la décomposition et (19) avec $n'=n+m\geq 0$ pour le restant). Si $a\neq 0$, en décomposant $\mathbb{Q}_p-(a+p^n\mathbb{Z}_p)=\mathbb{Q}_p-(a+p^{n-1}\mathbb{Z}_p)\amalg(a+p^{n-1}\mathbb{Z}_p)-(a+p^n\mathbb{Z}_p)$, puis $\mathbb{Q}_p-(a+p^{n-1}\mathbb{Z}_p)=\mathbb{Q}_p-(a+p^{n-2}\mathbb{Z}_p)\amalg(a+p^{n-2}\mathbb{Z}_p)-(a+p^{n-1}\mathbb{Z}_p)$ etc. jusqu'à arriver à $\mathbb{Q}_p-(a+p^{n-m}\mathbb{Z}_p)$ avec $n-m<\mathrm{val}(a)$ et $n\leq m$, on déduit de (20) que (19) pour $a\neq 0$ et $j\geq\mathrm{val}(\alpha)$ découle de (18) et de (19) pour $a=0$ et $n\leq 0$ (utiliser (20) pour les morceaux compacts dans la décomposition puis développer $(z-a)^{k-2-j}$ et utiliser (19) avec $a=0$ et $n'=n-m\leq 0$ pour le restant). Autrement dit, (18) et (19) sont équivalents à :

(i) (18) ;

(ii) (19) pour $n \geq 0$;

(iii) (19) pour $a = 0$ et $n \leq 0$.

Par ailleurs, tout $\mu \in \pi(\alpha)^*$ s'écrit $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ où $\mu_i \in \mathrm{Pol}^{k-2}(\mathbb{Z}_p, L)^*$ (si $f \in \pi(\alpha)$, $\int_{\mathbb{Q}_p} f(z)d\mu(z) = \int_{\mathbb{Z}_p} f_1(z)d\mu_1(z) + \int_{\mathbb{Z}_p} f_2(z)d\mu_2(z)$). Un calcul facile (laissé au lecteur) montre que μ_1 et μ_2 vérifient (6) pour $r = \mathrm{val}(\alpha)$ et $d = k-2$ avec $\|\mu_i\|_{\mathrm{val}(\alpha),k-2} \leq C$ (i.e. $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{C}^{\mathrm{val}(\alpha)}(\mathbb{Z}_p, L)$ par le théorème 4.1.4 avec leurs normes bornées, i.e. μ est dans une boule de $B(\alpha)^* \subset \pi(\alpha)^*$) si et seulement si μ vérifie (quitte à modifier C) :

$$\int_{a+p^n\mathbb{Z}_p} (z-a)^j d\mu(z) \in Cp^{n(j-\mathrm{val}(\alpha))}\mathcal{O}_L \tag{21}$$

pour tout $a \in p\mathbb{Z}_p$, tout $j \in \{0, \cdots, k-2\}$ et tout entier $n \geq 1$, puis :

$$\int_{a^{-1}+p^{n-2\mathrm{val}(a)}\mathbb{Z}_p} \left(\frac{p\alpha}{\beta}\right)^{\mathrm{val}(z)} z^{k-2-j}(1-az)^j d\mu(z) \in Cp^{n(j-\mathrm{val}(\alpha))}\mathcal{O}_L \tag{22}$$

pour tout $a \in \mathbb{Z}_p - \{0\}$, tout $j \in \{0, \cdots, k-2\}$ et tout entier $n > \mathrm{val}(a)$, et enfin :

$$\int_{\mathbb{Q}_p - p^n\mathbb{Z}_p} \left(\frac{p\alpha}{\beta}\right)^{\mathrm{val}(z)} z^{k-2-j} d\mu(z) \in Cp^{n(\mathrm{val}(\alpha)-j)}\mathcal{O}_L \tag{23}$$

pour tout $j \in \{0, \cdots, k-2\}$ et tout entier $n \leq 0$. En développant $z^{k-2-j} = ((z-a^{-1}) + a^{-1})^{k-2-j}$ dans (22), un calcul montre que, quitte à modifier C, (21), (22) et (23) sont équivalents à :

(iv) (18) pour $a \neq 0$;

(v) (18) pour $a = 0$ et $n \geq 0$;

(vi) (19) pour $a = 0$ et $n \leq 0$.

Si μ est comme en (17), i.e. si μ vérifie (i) à (iii), alors *a fortiori* μ vérifie (iv) à (vi) et donc $\mu \in B(\alpha)^* \subset \pi(\alpha)^*$. Mais on a plus. En faisant tendre n vers $-\infty$ dans (18) lorsque $a = 0$, on voit que (18) pour $j < \mathrm{val}(\alpha)$ et $a = 0$ implique que μ annule les fonctions $z^j \in B(\alpha)$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans (19), on voit que (19) pour $j < \mathrm{val}(\alpha)$ implique que μ annule les fonctions $\left(\frac{\alpha p}{\beta}\right)^{\mathrm{val}(z-a)}(z-a)^{k-2-j} \in B(\alpha)$. Un examen plus approfondi (sans difficulté mais que nous omettons pour ne pas allonger la preuve) montre que les conditions (i) à (iii) précédentes sont en fait *équivalentes* aux conditions (iv) à (vi) avec les deux conditions supplémentaires que μ annule les fonctions z^j pour $j < \mathrm{val}(\alpha)$ et les fonctions $\left(\frac{\alpha p}{\beta}\right)^{\mathrm{val}(z-a)}(z-a)^{k-2-j}$ pour $a \in \mathbb{Q}_p$ et $j < \mathrm{val}(\alpha)$, c'est-à-dire les fonctions de $L(\alpha)$. Autrement dit, on obtient que le Banach dual du complété cherché est isomorphe dans $\pi(\alpha)^*$ au sous-espace de Banach de $B(\alpha)^*$ formé des μ qui annulent $L(\alpha)$, c'est-à-dire à $(B(\alpha)/L(\alpha))^*$. En particulier, $(B(\alpha)/L(\alpha))^*$ est un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire. Comme les Banach ne sont pas réflexifs, nous allons devoir faire un passage par les topologies faibles pour déduire l'isomorphisme de l'énoncé. L'injection $B(\alpha)/L(\alpha) \hookrightarrow ((B(\alpha)/L(\alpha))^*)^*$

étant une immersion fermée $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante, $B(\alpha)/L(\alpha)$ est aussi un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire. Cela entraîne facilement que l'application $\pi(\alpha) \to B(\alpha)/L(\alpha)$ induit un morphisme $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant continu du complété unitaire ci-dessus de $\pi(\alpha)$ vers $B(\alpha)/L(\alpha)$, donc un morphisme continu sur les duaux munis de leur topologie faible (qui sont des « modules compacts à isogénie près » au sens de [**ST02b**]). Mais on vient de voir que ce morphisme sur les duaux était bijectif (et même un isomorphisme topologique pour les topologies fortes). Par [**Bre03b**, lemme 4.2.2], on en déduit que c'est aussi un isomorphisme topologique pour les topologies faibles. Par dualité (cf. [**ST02b**, théorème 1.2]), on obtient l'isomorphisme topologique $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant de l'énoncé. Le cas β se traite de même. □

Rappelons qu'il existe, à multiplication par un scalaire non nul près, un unique morphisme non nul $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant :

$$I^{\mathrm{lisse}} : \mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{nr}(\beta^{-1}) \otimes \mathrm{nr}(p\alpha^{-1}) \to \mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{nr}(\alpha^{-1}) \otimes \mathrm{nr}(p\beta^{-1}) \tag{24}$$

qui est un isomorphisme lorsque $\alpha \neq p\beta$ et qui a un noyau et un conoyau de dimension 1 lorsque $\alpha = p\beta$ (voir [**Bum98**, §4.5] par exemple). En termes de fonctions localement constantes sur $\mathbb{Q}_p$, ce morphisme est donné explicitement par :

$$\begin{aligned} I^{\mathrm{lisse}}(h)(z) = \int_{\mathbb{Q}_p} \Big(\frac{p\beta}{\alpha}\Big)^{\mathrm{val}(x)} h(z+x^{-1})dx \ &= \int_{\mathbb{Q}_p} \Big(\frac{p\alpha}{\beta}\Big)^{\mathrm{val}(x)} h(z+x)dx \\ &= \int_{\mathbb{Q}_p} \Big(\frac{p\alpha}{\beta}\Big)^{\mathrm{val}(z-x)} h(x)dx \end{aligned} \tag{25}$$

où dx est la mesure de Haar sur $\mathbb{Q}_p$ (à valeurs dans $\mathbb{Q} \subset L$). Comme la théorie des représentations lisses est algébrique, il n'y a pas de problèmes de convergence dans les intégrales ci-dessus car on peut toujours remplacer les sommes infinies aux voisinages de 0 ou de $-\infty$ par des expressions algébriques en $\alpha p\beta^{-1}$ parfaitement définies. En tensorisant par l'application identité sur $\mathrm{Sym}^{k-2}L^2$, on en déduit un morphisme non nul $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant :

$$I : \pi(\beta) \longrightarrow \pi(\alpha) \tag{26}$$

qui est un isomorphisme lorsque $\alpha \neq p\beta$.

Corollaire 4.3.2. — *Les représentations $B(\alpha)/L(\alpha)$ et $B(\beta)/L(\beta)$ sont des $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaires et on a un diagramme commutatif $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant :*

$$\begin{array}{ccc} B(\beta)/L(\beta) & \xrightarrow{\widehat{I}} & B(\alpha)/L(\alpha) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \pi(\beta) & \xrightarrow{I} & \pi(\alpha) \end{array}$$

où I est le morphisme $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$*-équivariant de (26). Lorsque $\alpha \neq p\beta$, les flèches I et $\widehat{I}$ sont des isomorphismes.*

Démonstration. — Cela découle du théorème 4.3.1 car l'image par une flèche $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante d'un $\mathcal{O}_L[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$-module de type fini est aussi un $\mathcal{O}_L[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$-module de type fini. □

Lorsque $\alpha = p\beta$ (ce qui implique $\mathrm{val}(\beta) = (k-2)/2$), il est évident que $B(\beta)/L(\beta)$ est non nul puisque $L(\beta)$ est dans ce cas une représentation de dimension finie (isomorphe via (15) à la représentation algébrique $\mathrm{Sym}^{k-2}L^2$ à une torsion non ramifiée près). Dans les autres cas, le théorème 4.3.1 ne démontre en rien que les espaces de Banach $B(\alpha)/L(\alpha)$ et $B(\beta)/L(\beta)$ sont non nuls. Mais on a :

Proposition 4.3.3. — *Si $\alpha \neq p\beta$, le Banach $B(\alpha)/L(\alpha)$ (resp. $B(\beta)/L(\beta)$) est non nul si et seulement si $\pi(\alpha)$ (resp. $\pi(\beta)$) possède un $\mathcal{O}_L$-réseau stable par* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$*. Si $\alpha = p\beta$, le Banach $B(\alpha)/L(\alpha)$ est non nul si et seulement si $\pi(\alpha)$ possède un $\mathcal{O}_L$-réseau stable par* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

Démonstration. — Rappelons qu'un $\mathcal{O}_L$-réseau est par définition un sous-$\mathcal{O}_L$-module générateur qui ne contient pas de L-droite. Supposons d'abord $\alpha \neq p\beta$, de sorte que les représentations $\pi(\alpha)$ et $\pi(\beta)$ sont (algébriquement) irréductibles. Si $B(\alpha)/L(\alpha) \neq 0$, l'application canonique $\pi(\alpha) \to B(\alpha)/L(\alpha)$ est injective car non nulle (car d'image dense) et une boule unité de $B(\alpha)/L(\alpha)$ stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ induit un réseau stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur $\pi(\alpha)$. Inversement, supposons que $\pi(\alpha)$ possède un $\mathcal{O}_L$-réseau stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, alors pour tout f non nul dans $\pi(\alpha)$, $\mathcal{O}_L[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]f \subset \pi(\alpha)$ est un $\mathcal{O}_L$-réseau de $\pi(\alpha)$ de type fini comme $\mathcal{O}_L[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$-module. Il est générateur car $\pi(\alpha)$ est irréductible et il ne contient pas de $\mathcal{O}_L$-droite car, à multiplication près par un scalaire, il est contenu dans un $\mathcal{O}_L$-réseau stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ de $\pi(\alpha)$. L'application de $\pi(\alpha)$ dans son complété par rapport à $\mathcal{O}_L[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]f$, qui est $B(\alpha)/L(\alpha)$ par le théorème 4.3.1, est alors injective et en particulier $B(\alpha)/L(\alpha) \neq 0$. Lorsque $\alpha = p\beta$, ce qui suppose $k > 2$, $\pi(\alpha)$ n'est plus irréductible et a un quotient isomorphe à $\mathrm{Sym}^{k-2}L^2$. Si $B(\alpha)/L(\alpha) \neq 0$, l'application non nulle $\pi(\alpha) \to B(\alpha)/L(\alpha)$ reste injective sinon elle induirait une injection non nulle $\mathrm{Sym}^{k-2}L^2 \hookrightarrow B(\alpha)/L(\alpha)$ ce qui est impossible car, pour $k > 2$, $\mathrm{Sym}^{k-2}L^2$ ne possède pas de $\mathcal{O}_L$-réseau stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. □

Notons que, lorsque $\alpha = p\beta$, $\pi(\beta)$ ne peut posséder de $\mathcal{O}_L$-réseau stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ car sa sous-représentation irréductible $\mathrm{Sym}^{k-2}L^2$ n'en possède pas. Dans ce cas, l'application $\pi(\beta) \to B(\beta)/L(\beta)$ est non injective (son noyau est précisément $\mathrm{Sym}^{k-2}L^2$). Via la proposition 4.3.3, on peut montrer pour des petites valeurs de k ou pour les valeurs de (k, α, β) provenant des formes modulaires que les Banach $B(\alpha)/L(\alpha)$ et $B(\beta)/L(\beta)$ sont non nuls, voir par exemple [**Bre03a**], [**Bre03b**, §1.3], [**Bre03c**], [**Eme04**]. On va voir dans la suite que la non nullité pour tout k (et tout α, β) découle de la théorie des (φ,Γ)-modules. Une autre approche possible, purement en termes de théorie des représentations, est présentée dans [**Eme04**, §2].

5. Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et (φ,Γ)-modules

Le but de cette partie est de démontrer l'existence d'un isomorphisme topologique canonique entre $(\varprojlim_{\psi} D(V))^{\mathrm{b}}$ et le dual $\Pi(V)^*$ (muni de sa topologie faible) et d'en déduire que $\Pi(V)$ est toujours non nul, topologiquement irréductible et admissible. Ces énoncés étaient conjecturés (et des cas particuliers démontrés) dans [**Bre03a**] et [**Bre03b**]. Le fait remarquable est que ces énoncés, entièrement du côté GL_2, se démontrent en passant par le côté *galoisien*. On fixe une fois pour toutes une représentation cristalline irréductible V comme au §3.1 avec $D_{\mathrm{cris}}(V) = D(\alpha,\beta)$.

5.1. Deux lemmes. — Le but de ce paragraphe est de démontrer deux lemmes techniques mais importants utilisés dans les paragraphes suivants. On utilise sans commentaire certaines notations du §3.2.

Lemme 5.1.1. — *Soit $m \in \mathbb{N}-\{0\}$, w_α, $w_\beta \in \mathscr{R}_L^+$ et μ_α, μ_β les distributions localement analytiques sur $\mathbb{Z}_p$ correspondantes par (10). La condition :*

$$\varphi^{-m}(w_\alpha \otimes e_\alpha + w_\beta \otimes e_\beta) \in \mathrm{Fil}^0(L_m[[t]] \otimes_L D(\alpha,\beta))$$

est équivalente aux égalités dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$:

$$\alpha^m \int_{\mathbb{Z}_p} z^j \zeta_{p^m}^z d\mu_\alpha(z) = \beta^m \int_{\mathbb{Z}_p} z^j \zeta_{p^m}^z d\mu_\beta(z)$$

pour tout $j \in \{0,\cdots,k-2\}$ et toute racine primitive p^m-ième ζ_{p^m} de 1.

Démonstration. — On a :

$$\varphi^{-m}(X) = \zeta_{p^m}\exp(t/p^m) - 1 = \zeta_{p^m}(\exp(t/p^m)-1) + \zeta_{p^m} - 1$$

dans $\mathbb{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^m})[[t]]$ (voir §3.2). En posant $w_\alpha = \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i X^i$ et $w_\beta = \sum_{i=0}^{+\infty} \beta_i X^i$ (α_i, $\beta_i \in L$), la condition sur Fil^0 est équivalente à :

$$\alpha^m \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i \varphi^{-m}(X)^i e_\alpha + \beta^m \sum_{i=0}^{+\infty} \beta_i \varphi^{-m}(X)^i e_\beta \in L_m[[t]](e_\alpha + e_\beta) \oplus (\exp(t/p^m)-1)^{k-1}(L_m[[t]]e_\alpha) \tag{27}$$

en notant que $\exp(t/p^m)-1$ engendre $\mathrm{gr}^1(\mathbb{Q}_p[[t]])=\mathbb{Q}_p\bar{t}$. On peut supposer L aussi grand que l'on veut en (27), et en particulier contenant $\mathbb{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^m})$. En utilisant :

$$L_m=\mathbb{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^m})\otimes_{\mathbb{Q}_p}L=\prod_{\mathbb{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^m})\hookrightarrow L}L$$

et en développant $\varphi^{-m}(X)^i=(\zeta_{p^m}(\exp(t/p^m)-1)+\zeta_{p^m}-1)^i$, un calcul facile montre que la condition (27) est équivalente aux égalités dans L :

$$\alpha^m\sum_{i=j}^{+\infty}\alpha_i\binom{i}{j}(\zeta_{p^m}-1)^{i-j}=\beta^m\sum_{i=j}^{+\infty}\beta_i\binom{i}{j}(\zeta_{p^m}-1)^{i-j}\tag{28}$$

pour tout $j\in\{0,\cdots,k-2\}$ et *toute* racine primitive p^m-ième ζ_{p^m} de 1. Noter que les séries en (28) convergent bien car $\mathrm{val}(\zeta_{p^m}-1)>0$. En se souvenant que $\alpha_i=\int_{\mathbb{Z}_p}\binom{z}{i}d\mu_\alpha(z)$ et en utilisant le développement de Mahler (5) :

$$\binom{z}{j}\zeta_{p^m}^{z-j}=\sum_{i=j}^{+\infty}\binom{i}{j}(\zeta_{p^m}-1)^{i-j}\binom{z}{i}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{i=j}^{+\infty}\alpha_i\binom{i}{j}(\zeta_{p^m}-1)^{i-j} &= \int_{\mathbb{Z}_p}\Big(\sum_{i=j}^{+\infty}\binom{z}{i}\binom{i}{j}(\zeta_{p^m}-1)^{i-j}\Big)d\mu_\alpha(z)\\ &= \zeta_{p^m}^{-j}\int_{\mathbb{Z}_p}\binom{z}{j}\zeta_{p^m}^{z}d\mu_\alpha(z)\end{aligned}$$

(la série $\sum_{i=j}^{n}\binom{i}{j}(\zeta_{p^m}-1)^{i-j}\binom{z}{i}$ convergeant vers $\sum_{i=j}^{+\infty}\binom{i}{j}(\zeta_{p^m}-1)^{i-j}\binom{z}{i}$ dans $\mathrm{An}(\mathbb{Z}_p,L)$ (cf. [**Col04a**, §2.1.2]), on peut inverser $\int$ et $\sum$). On a la même égalité avec β_i et μ_β. Avec (28), on déduit le résultat. $\square$

Via l'identification $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p=\mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$, on peut définir le nombre complexe algébrique $e^{2i\pi z}$ pour tout $z\in\mathbb{Q}_p$ (par exemple, $e^{2i\pi z}=1$ si $z\in\mathbb{Z}_p$). En fixant des plongements $\overline{\mathbb{Q}}\hookrightarrow\mathbb{C}$ et $\overline{\mathbb{Q}}\hookrightarrow\overline{\mathbb{Q}}_p$, on peut voir $e^{2i\pi z}$ comme un élément de $\overline{\mathbb{Q}}_p$. On obtient ainsi un caractère additif localement constant $\mathbb{Q}_p\to\overline{\mathbb{Q}}_p^\times$, $z\mapsto e^{2i\pi z}$ trivial sur $\mathbb{Z}_p$. Ce que l'on fera dans la suite ne dépendra pas du choix de ce caractère, i.e. du choix des plongements.

Notons $\mathrm{Pol}^d(\mathbb{Q}_p,L)$ le L-espace vectoriel des fonctions localement polynomiales à support compact $f:\mathbb{Q}_p\to L$ de degré (local) au plus d. Si μ est une forme linéaire sur $\mathrm{Pol}^d(\mathbb{Q}_p,L)$, U un ouvert compact de $\mathbb{Q}_p$ et $f:\mathbb{Q}_p\to L$ une fonction localement polynomiale de degré au plus d à support quelconque, on note comme d'habitude $\int_U f(z)d\mu(z)\overset{\text{déf}}{=}\mu(\mathbf{1}_U(z)f(z))$.

Lemme 5.1.2. — *Soit μ_α et μ_β deux formes linéaires sur $\mathrm{Pol}^{k-2}(\mathbb{Q}_p,L)$. Les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) *Pour tout* $j \in \{0, \cdots, k-2\}$*, tout* $y \in \mathbb{Q}_p^\times$ *et tout* $N > \mathrm{val}(y)$*, on a :*

$$\int_{p^{-N}\mathbb{Z}_p} z^j e^{2i\pi zy} d\mu_\beta(z) = \Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{\mathrm{val}(y)} \int_{p^{-N}\mathbb{Z}_p} z^j e^{2i\pi zy} d\mu_\alpha(z). \tag{29}$$

(ii) *Pour tout* $f \in \pi(\alpha)$ *à support compact (comme fonction sur* $\mathbb{Q}_p$ *via (16)) tel que* $I(f) \in \pi(\beta)$ *est aussi à support compact (comme fonction sur* $\mathbb{Q}_p$ *via (16)), on a :*

$$\int_{\mathbb{Q}_p} f(z) d\mu_\beta(z) = \frac{1-\frac{\alpha}{\beta}}{1-\frac{\beta}{p\alpha}} \int_{\mathbb{Q}_p} I(f)(z) d\mu_\alpha(z). \tag{30}$$

Démonstration. — Comme $\alpha \neq \beta$ et $\beta \neq p\alpha$, la constante dans (30) est bien définie et non nulle. Soit $h : \mathbb{Q}_p \to L$ une fonction localement constante à support compact et $\widehat{h}$ la transformée de Fourier (usuelle) de h. Rappelons que $\widehat{h}$ est aussi une fonction localement constante sur $\mathbb{Q}_p$ à support compact telle que $\widehat{h}(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} h(z) e^{-2i\pi zx} dz$ et $h(z) = \int_{\mathbb{Q}_p} \widehat{h}(x) e^{2i\pi zx} dx$ où dx, dz désignent la mesure de Haar sur $\mathbb{Q}_p$. Pour $|z| \gg 0$, on a $I^{\mathrm{lisse}}(h)(z) = (\alpha p \beta^{-1})^{\mathrm{val}(z)} \int_{\mathbb{Q}_p} h(x) dx = (\alpha p \beta^{-1})^{\mathrm{val}(z)} \widehat{h}(0)$ et on voit que $I^{\mathrm{lisse}}(h)$ est à support compact dans $\mathbb{Q}_p$ si et seulement si $\widehat{h}(0) = 0$. Supposons donc $\widehat{h}(0) = 0$ et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que h et $I^{\mathrm{lisse}}(h)$ ont leur support dans $p^{-N}\mathbb{Z}_p$ et tel que $\widehat{h}|_{p^N\mathbb{Z}_p} = 0$. Pour $j \in \{0, \cdots, k-2\}$ et $z \in p^{-N}\mathbb{Z}_p$, on a :

$$\begin{aligned}
I(z^j h)(z) &= z^j I^{\mathrm{lisse}}(h)(z) = z^j \int_{p^{-N}\mathbb{Z}_p} (\alpha p \beta^{-1})^{\mathrm{val}(x)} h(z+x) dx \\
&= z^j \int_{p^{-N}\mathbb{Z}_p} (\alpha p \beta^{-1})^{\mathrm{val}(x)} \Big(\int_{\mathbb{Q}_p - p^N\mathbb{Z}_p} \widehat{h}(y) e^{2i\pi y(z+x)} dy \Big) dx \\
&= z^j \int_{\mathbb{Q}_p - p^N\mathbb{Z}_p} \widehat{h}(y) e^{2i\pi zy} \Big(\int_{p^{-N}\mathbb{Z}_p} (\alpha p \beta^{-1})^{\mathrm{val}(x)} e^{2i\pi xy} dx \Big) dy.
\end{aligned}$$

En décomposant $p^{-N}\mathbb{Z}_p = p^{-N}\mathbb{Z}_p^\times \amalg p^{-N+1}\mathbb{Z}_p^\times \amalg \cdots$, un calcul facile (laissé au lecteur) donne pour $N > \mathrm{val}(y)$:

$$\int_{p^{-N}\mathbb{Z}_p} (\alpha p \beta^{-1})^{\mathrm{val}(x)} e^{2i\pi xy} dx = \sum_{i=-N}^{+\infty} (\alpha p \beta^{-1})^i \int_{p^i\mathbb{Z}_p^\times} e^{2i\pi xy} dx = \frac{1-\frac{\beta}{p\alpha}}{1-\frac{\alpha}{\beta}} \Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{\mathrm{val}(y)}$$

d'où :

$$I(z^j h)(z) = \frac{1-\frac{\beta}{p\alpha}}{1-\frac{\alpha}{\beta}} \int_{\mathbb{Q}_p - p^N\mathbb{Z}_p} \widehat{h}(y) z^j e^{2i\pi zy} \Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{\mathrm{val}(y)} dy \tag{31}$$

pour $z \in p^{-N}\mathbb{Z}_p$ et $I(z^j h)(z) = 0$ sinon. De même, on a :

$$z^j h(z) = \int_{\mathbb{Q}_p - p^N\mathbb{Z}_p} \widehat{h}(y) z^j e^{2i\pi zy} dy \tag{32}$$

pour $z \in p^{-N}\mathbb{Z}_p$ et $z^j h(z) = 0$ sinon. Notons que (31) and (32) sont en fait des sommes finies sur le même ensemble (fini) de valeurs de y. En remplaçant $I(z^j h)(z)$ et $z^j h(z)$ dans (33) ci-dessous par les sommes finies (31) et (32), on voit que (i) entraîne (ii).

Réciproquement, supposons que pour tout $j \in \{0, \cdots, k-2\}$, tout $N \in \mathbb{N}$ et toute fonction h comme ci-dessus localement constante à support dans $p^{-N}\mathbb{Z}_p$, on a :

$$\int_{p^{-N}\mathbb{Z}_p} I(z^j h)(z) d\mu_\alpha(z) = \frac{1-\frac{\beta}{p\alpha}}{1-\frac{\alpha}{\beta}} \int_{p^{-N}\mathbb{Z}_p} z^j h(z) d\mu_\beta(z). \tag{33}$$

Soit $y \in \mathbb{Q}_p^\times$ tel que $N > \mathrm{val}(y)$, $\widehat{h}(z) \overset{\text{déf}}{=} \mathbf{1}_{y+p^N\mathbb{Z}_p}(z)$ et :

$$h(z) \overset{\text{déf}}{=} \int_{\mathbb{Q}_p} \widehat{h}(x) e^{2i\pi zx} dx = \int_{p^N\mathbb{Z}_p} e^{2i\pi z(y+x)} dx = \frac{1}{p^N} \mathbf{1}_{p^{-N}\mathbb{Z}_p}(z) e^{2i\pi zy}.$$

Alors $I(z^j h)$ est aussi à support compact car $\widehat{h}|_{p^N\mathbb{Z}_p} = 0$ et un calcul via (31) montre que :

$$I(z^j h)(z) = \frac{1}{p^N} \frac{1-\frac{\beta}{p\alpha}}{1-\frac{\alpha}{\beta}} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\mathrm{val}(y)} \mathbf{1}_{p^{-N}\mathbb{Z}_p}(z) z^j e^{2i\pi zy}.$$

On peut donc appliquer l'égalité (33) à h qui est alors exactement l'égalité (29) multipliée par p^{-N}. Cela montre que (ii) entraîne (i) et achève la preuve. $\square$

5.2. De $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ **vers** $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$**.** — Le but de ce paragraphe est de construire une application continue $(\varprojlim_\psi D(V))^{\mathrm{b}} \to \Pi(V)^*$.

Soit $T \subset V$ un $\mathcal{O}_L$-réseau stable par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$. On reprend les notations du §2, en particulier on dispose du $\mathcal{O}_L[[X]]$-module de type fini $D^\sharp(T)$ muni de la surjection $\psi : D^\sharp(T) \twoheadrightarrow D^\sharp(T)$ et de l'action semi-linéaire de Γ qui commute à ψ. On dispose aussi de l'isomorphisme topologique de la proposition 2.3.4 qui permet de remplacer $(\varprojlim_\psi D(V))^{\mathrm{b}}$ par $(\varprojlim_\psi D^\sharp(T)) \otimes_{\mathcal{O}_L} L$ et on sait par le corollaire 3.3.5 que $(\varprojlim_\psi D^\sharp(T)) \otimes_{\mathcal{O}_L} L$ coïncide avec les suites d'éléments $w_{\alpha,n} \otimes e_\alpha + w_{\beta,n} \otimes e_\beta$ de $\mathscr{R}_L^+ \otimes_L D_{\mathrm{cris}}(V)$ telles que :

(i) $\forall\, n \geq 0$, $w_{\alpha,n}$ (resp. $w_{\beta,n}$) est d'ordre $\mathrm{val}(\alpha)$ (resp. $\mathrm{val}(\beta)$) dans $\mathscr{R}_L^+$ et $\|w_{\alpha,n}\|_{\mathrm{val}(\alpha)}$ (resp. $\|w_{\beta,n}\|_{\mathrm{val}(\beta)}$) est borné indépendamment de n ;

(ii) $\forall\, n \geq 0$ et $\forall\, m \geq 1$, on a :

$$\varphi^{-m}(w_{\alpha,n} \otimes e_\alpha + w_{\beta,n} \otimes e_\beta) \in \mathrm{Fil}^0(L_m)[[t]] \otimes_L D_{\mathrm{cris}}(V));$$

(iii) $\forall\, n \geq 1$, $\psi(w_{\alpha,n}) = \alpha^{-1} w_{\alpha,n-1}$ et $\psi(w_{\beta,n}) = \beta^{-1} w_{\beta,n-1}$.

Nous allons d'abord définir une application L-linéaire $(\varprojlim_\psi D^\sharp(T)) \otimes_{\mathcal{O}_L} L \to \pi(\alpha)^*$. Soit $\mu_{\alpha,n}$ et $\mu_{\beta,n}$ les distributions sur $\mathbb{Z}_p$ correspondant à $\alpha^n w_{\alpha,n}$ et $\beta^n w_{\beta,n}$ par la transformée d'Amice-Mahler (10). On associe à $(\mu_{\alpha,n})_n$ et $(\mu_{\beta,n})_n$ deux distributions localement analytiques μ_α et μ_β sur $\mathbb{Q}_p$ à support compact (i.e. deux formes linéaires continues sur l'espace vectoriel des fonctions localement analytiques sur $\mathbb{Q}_p$ à support compact) en posant :

$$\int_U f(z) d\mu_\alpha(z) \overset{\text{déf}}{=} \int_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{1}_U(z/p^N) f(z/p^N) d\mu_{\alpha,N}(z) \tag{34}$$

(resp. avec β au lieu de α) où $f : \mathbb{Q}_p \to L$ est localement analytique (à support quelconque) et U est un ouvert compact de $\mathbb{Q}_p$ contenu dans $p^{-N}\mathbb{Z}_p$.

Lemme 5.2.1. — *La valeur $\int_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{1}_U(z/p^N)f(z/p^N)d\mu_{\alpha,N}(z)$ ne dépend pas du choix de N tel que U est contenu dans $p^{-N}\mathbb{Z}_p$.*

Démonstration. — Si μ est une distribution localement analytique sur $\mathbb{Z}_p$ correspondant à $w \in \mathscr{R}_L^+$ par (10), il est facile de voir que la distribution localement analytique $\psi(\mu)$ correspondant à $\psi(w)$ vérifie :

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(z)d\psi(\mu)(z) = \int_{p\mathbb{Z}_p} f(z/p)d\mu(z). \tag{35}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{1}_U(z/p^N)f(z/p^N)d\mu_{\alpha,N}(z) &= \int_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{1}_U(z/p^N)f(z/p^N)d\psi(\mu_{\alpha,N+1})(z)\\ &\overset{(35)}{=} \int_{p\mathbb{Z}_p} \mathbf{1}_U(z/p^{N+1})f(z/p^{N+1})d\mu_{\alpha,N+1}(z)\\ &= \int_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{1}_U(z/p^{N+1})f(z/p^{N+1})d\mu_{\alpha,N+1}(z),\end{aligned}$$

en remarquant que $\mathbf{1}_U(z/p^{N+1})f(z/p^{N+1})$ est à support dans $p\mathbb{Z}_p$. □

Par le lemme 5.1.1, la condition (ii) précédente sur $(w_{\alpha,n}, w_{\beta,n})_n$ est équivalente aux égalités :

$$\alpha^{m-n}\int_{\mathbb{Z}_p} z^j\zeta_{p^m}^z d\mu_{\alpha,n}(z) = \beta^{m-n}\int_{\mathbb{Z}_p} z^j\zeta_{p^m}^z d\mu_{\beta,n}(z) \tag{36}$$

pour tout $j \in \{0, \cdots, k-2\}$, tout $n \geq 0$ et tout $m \geq 1$.

Corollaire 5.2.2. — *Avec les notations précédentes, la condition (ii) ci-dessus sur $(w_{\alpha,n}, w_{\beta,n})_n$ est équivalente aux égalités dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$:*

$$\int_{p^{-N}\mathbb{Z}_p} z^j e^{2i\pi zy}d\mu_\alpha(z) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mathrm{val}(y)}\int_{p^{-N}\mathbb{Z}_p} z^j e^{2i\pi zy}d\mu_\beta(z)$$

pour tout $j \in \{0, \cdots, k-2\}$, tout $y \in \mathbb{Q}_p^\times$ et tout $N > \mathrm{val}(y)$.

Démonstration. — Cela résulte de (34) et de (36) en remarquant que $e^{2i\pi y/p^N}$ est une racine primitive d'ordre $p^{N-\mathrm{val}(y)}$ de 1. □

Par le lemme 5.1.2, on a donc :

$$\int_{\mathbb{Q}_p} f(z)d\mu_\beta(z) = \frac{1-\frac{\alpha}{\beta}}{1-\frac{\beta}{p\alpha}}\int_{\mathbb{Q}_p} I(f)(z)d\mu_\alpha(z)$$

pour $f \in \pi(\alpha)$ à support compact tel que $I(f) \in \pi(\beta)$ est aussi à support compact.

Lemme 5.2.3. — *Il y a une manière unique de prolonger μ_β et μ_α comme éléments respectivement de $\pi(\beta)^*$ et $\pi(\alpha)^*$ telle que, pour tout $f \in \pi(\beta)$ (vue comme fonction sur $\mathbb{Q}_p$ par (16)) :*

$$\int_{\mathbb{Q}_p} f(z)d\mu_\beta(z) = \frac{1-\frac{\alpha}{\beta}}{1-\frac{\beta}{p\alpha}}\int_{\mathbb{Q}_p} I(f)(z)d\mu_\alpha(z). \tag{37}$$

Démonstration. — Un calcul facile à partir de (25) donne pour $j \in \{0, \cdots, k-2\}$:

$$I(z^j\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}) = \frac{1-\frac{1}{p}}{1-\frac{\alpha}{\beta}}z^j\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}(z) + z^j\Big(\frac{p\alpha}{\beta}\Big)^{\mathrm{val}(z)}(z-\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}(z)) \tag{38}$$

$$I\Big(z^j\Big(\frac{p\beta}{\alpha}\Big)^{\mathrm{val}(z)}(z-\mathbf{1}_{p\mathbb{Z}_p}(z))\Big) = z^j\mathbf{1}_{p\mathbb{Z}_p}(z) + \frac{1-\frac{1}{p}}{1-\frac{\alpha}{\beta}}z^j\Big(\frac{p\alpha}{\beta}\Big)^{\mathrm{val}(z)}(z-\mathbf{1}_{p\mathbb{Z}_p}(z)). \tag{39}$$

Comme $\int_{\mathbb{Q}_p} z^j\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}d\mu_\beta(z)$ et $\int_{\mathbb{Q}_p} z^j\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}d\mu_\alpha(z)$ sont bien définis, on voit en utilisant (37) et (38) que :

$$\int_{\mathbb{Q}_p} z^j\Big(\frac{p\alpha}{\beta}\Big)^{\mathrm{val}(z)}(z-\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p}(z))d\mu_\alpha(z)$$

est uniquement déterminé, puis en utilisant (39) (et (37)) que :

$$\int_{\mathbb{Q}_p} z^j\Big(\frac{p\beta}{\alpha}\Big)^{\mathrm{val}(z)}(z-\mathbf{1}_{p\mathbb{Z}_p}(z))d\mu_\beta(z)$$

est aussi uniquement déterminé. Il est facile de vérifier que cela définit bien un prolongement unique de μ_β et μ_α comme formes linéaires sur respectivement $\pi(\beta)$ et $\pi(\alpha)$. □

Lorsque $\alpha = p\beta$, on peut voir que la distribution $\mu_\beta \in \pi(\beta)^*$ du lemme 5.2.3 est nulle contre $\mathrm{Sym}^{k-2}L^2 \subset \pi(\beta)$.

Avec les notations précédentes, on déduit du lemme 5.2.3 une application L-linéaire :

$$\begin{aligned} (\varprojlim_{\psi} D^\sharp(T)) \otimes_{\mathcal{O}_L} L &\longrightarrow \pi(\alpha)^* \\ (w_{\alpha,n}\otimes e_\alpha + w_{\beta,n}\otimes e_\beta)_n &\longmapsto \mu_\alpha \text{ prolongé} \end{aligned} \tag{40}$$

Lemme 5.2.4. — *Soit $\gamma = [a] \in \Gamma \simeq \mathbb{Z}_p^\times$ (cf. §3.4), $z \in \mathbb{Z}_p$, $(v_n)_n \in \varprojlim_\psi D^\sharp(T)$ et $\mu_\alpha \in \pi(\alpha)^*$ l'image de $(v_n)_n$ par (40). Alors :*

(i) *$(\psi(v_n))_n$ s'envoie sur* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p\end{pmatrix}\cdot\mu_\alpha$;

(ii) *$(\gamma(v_n))_n$ s'envoie sur* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a\end{pmatrix}\cdot\mu_\alpha$;

(iii) *$(\varphi^n((1+X)^z)v_n)_n$ s'envoie sur* $\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\mu_\alpha$.

Démonstration. — Cela découle de (34) et de propriétés simples de la transformée d'Amice-Mahler (voir par exemple [**Col04a**, §2.2.2]). Nous laissons les détails en exercice au lecteur. □

En particulier, le lemme 5.2.4 induit une action du groupe $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$ sur $\varprojlim_\psi D^\sharp(T)$, qui coïncide bien sûr avec celle de la définition 3.4.1 (en faisant agir les scalaires par multiplication par le caractère central de $\pi(\alpha)^*$).

Lemme 5.2.5. — *L'application (40) se factorise par une injection continue* $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$*-équivariante :*

$$(\varprojlim_{\psi} D^\sharp(T)) \otimes_{\mathcal{O}_L} L \hookrightarrow (B(\alpha)/L(\alpha))^*$$

(pour la topologie faible sur $(B(\alpha)/L(\alpha))^*$*).*

Démonstration. — L'injectivité découle via (34) de l'injectivité dans l'isomorphisme $\mathscr{R}_L^+ \xrightarrow{\sim} \mathrm{An}(\mathbb{Z}_p, L)^*$ (cf. (10)) et la $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$-équivariance du lemme 5.2.4. Montrons que l'application $\varprojlim_\psi D^\sharp(T) \to \pi(\alpha)^*$ est continue. Notons $\pi(\alpha)_{\mathrm{c}} \subset \pi(\alpha)$ (resp. $\pi(\beta)_{\mathrm{c}} \subset \pi(\beta)$) le sous-$L$-espace vectoriel des fonctions $f \in \pi(\alpha)$ (resp. $f \in \pi(\beta)$) à support compact dans $\mathbb{Q}_p$. Par (38), on voit que la flèche $\pi(\alpha)_{\mathrm{c}} \oplus \pi(\beta)_{\mathrm{c}} \xrightarrow{\mathrm{incl}\oplus I} \pi(\alpha)$ est surjective et induit une immersion fermée entre espaces de Fréchet :

$$\pi(\alpha)^* \hookrightarrow \pi(\alpha)_{\mathrm{c}}^* \oplus \pi(\beta)_{\mathrm{c}}^*.$$

Il suffit donc de montrer la continuité des deux applications $\varprojlim_\psi D^\sharp(T) \to \pi(\alpha)_{\mathrm{c}}^*$ et $\varprojlim_\psi D^\sharp(T) \to \pi(\beta)_{\mathrm{c}}^*$, ce qui découle après passage à la limite projective via (34) de la continuité de $\mathscr{R}_L^+ \xrightarrow{\sim} \mathrm{An}(\mathbb{Z}_p, L)^*$ et de celle de l'injection $D^\sharp(T) \hookrightarrow \mathscr{R}_L^+ \otimes_L D_{\mathrm{cris}}(V)$ (cf. remarques 3.2.4 et 3.3.3). Notons $B(V)$ l'espace de Banach dual du module compact $\varprojlim_\psi D^\sharp(T)$ par l'anti-équivalence de catégorie de [**ST02b**, §1]. Il est muni d'une action continue unitaire de $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$ par la proposition 3.4.2 (on peut utiliser les arguments de dualité de la preuve de [**ST02b**, proposition 1.6] pour la continuité de l'action) et on a par ce qui précède un morphisme $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$-équivariant (continu) $\pi(\alpha) \to B(V)$. Par la propriété universelle du complété de $\pi(\alpha)$ par rapport à un sous-$\mathcal{O}_L[\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)]$-module générateur de type fini et par le théorème 4.3.1, ce morphisme s'étend par continuité en un morphisme $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$-équivariant continu $B(\alpha)/L(\alpha) \to B(V)$. En redualisant, ce dernier induit un morphisme continu $(\varprojlim_\psi D^\sharp(T)) \otimes_{\mathcal{O}_L} L \to (B(\alpha)/L(\alpha))^*$ qui est le morphisme de l'énoncé. □

5.3. De $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ **vers** $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$**.** — Le but de ce paragraphe est de construire une application continue $\Pi(V)^* \to (\varprojlim_\psi D(V))^{\mathrm{b}}$ inverse de la précédente.

Soit $\mu_\alpha \in (B(\alpha)/L(\alpha))^*$ et $\mu_\beta \overset{\text{déf}}{=} \frac{1-\frac{\alpha}{\beta}}{1-\frac{\beta}{p\alpha}} \widehat{I} \circ \mu_\alpha \in (B(\beta)/L(\beta))^*$ où $\widehat{I}$ est le morphisme $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariant du corollaire 4.3.2. On définit une suite $(\mu_{\alpha,n})_n$ de distributions localement analytiques sur $\mathbb{Z}_p$ en posant :

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(z)d\mu_{\alpha,n}(z) \overset{\text{déf}}{=} \int_{p^{-n}\mathbb{Z}_p} f(p^n z)d\mu_\alpha(z) \tag{41}$$

et on définit de même $(\mu_{\beta,n})_n$. Soit $w_{\alpha,n},\ w_{\beta,n} \in \mathscr{R}_L^+$ les éléments correspondant à $\alpha^{-n}\mu_{\alpha,n},\ \beta^{-n}\mu_{\beta,n}$ par (10).

Lemme 5.3.1. — *La suite d'éléments $w_{\alpha,n} \otimes e_\alpha + w_{\beta,n} \otimes e_\beta$ de $\mathscr{R}_L^+ \otimes_L D_{\mathrm{cris}}(V)$ satisfait les conditions (i), (ii) et (iii) du corollaire 3.3.5.*

Démonstration. — La condition (iii) est évidente à partir de (35) et la condition (ii) découle des définitions, du lemme 5.1.2 et du corollaire 5.2.2. Vérifions la condition (i). Revenant à la preuve du théorème 4.3.1, on a en particulier que μ_α satisfait (18) ce qui entraîne :

$$\begin{aligned}\alpha^{-N}\int_{a+p^n\mathbb{Z}_p}(z-a)^j d\mu_{\alpha,N}(z) &= \alpha^{-N}p^{Nj}\int_{p^{-N}a+p^{n-N}\mathbb{Z}_p}(z-p^{-N}a)^j d\mu_\alpha(z)\\ &\in C_{\mu_\alpha}p^{-N\mathrm{val}(\alpha)}p^{Nj}p^{(n-N)(j-\mathrm{val}(\alpha))}\mathcal{O}_L\\ &\in C_{\mu_\alpha}p^{n(j-\mathrm{val}(\alpha))}\mathcal{O}_L.\end{aligned}$$

pour tout $a \in \mathbb{Z}_p$, tout $j \in \{0,\cdots,k-2\}$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Avec les notations du §4.1, cela entraîne pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\|\alpha^{-N}\mu_{\alpha,N}\|_{\mathrm{val}(\alpha),k-2} \leq c|C_{\mu_\alpha}|$$

pour une constante $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. On a une borne analogue pour les $\mu_{\beta,N}$. On en déduit (i). $\square$

Par le lemme 5.3.1 et le corollaire 3.3.5, on a une application L-linéaire :

$$(B(\alpha)/L(\alpha))^* \longrightarrow (\varprojlim_{\psi} D^\sharp(T)) \otimes_{\mathcal{O}_L} L$$

et il est immédiat à partir des définitions et du lemme 5.2.3 de vérifier qu'elle est inverse de celle du lemme 5.2.5.

Théorème 5.3.2. — *Il y a un unique isomorphisme topologique (à multiplication près par un scalaire non nul) entre les L-espaces vectoriels localement convexes (pour la topologie faible des deux côtés) :*

$$\big(\varprojlim_{\psi} D(V)\big)^{\mathrm{b}} \xrightarrow{\sim} \Pi(V)^*$$

tel que l'action de $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & p^{\mathbb{Z}}\end{smallmatrix}\right)$ sur $\Pi(V)^*$ correspond à $(v_n)_n \mapsto (\psi^{\mathbb{Z}}(v_n))_n$, l'action de $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathbb{Z}_p^\times\end{smallmatrix}\right)$ à celle de Γ et l'action de $\left(\begin{smallmatrix}1 & \mathbb{Z}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ à $(v_n)_n \mapsto ((1+X)^{p^n\mathbb{Z}_p}v_n))_n$.

Démonstration. — L'existence d'un tel isomorphisme découle des résultats précédents, sachant qu'une application bijective continue entre deux « modules compacts à isogénie près » est un isomorphisme topologique (c'est la version duale par [**ST02b**] du théorème de l'image ouverte entre espaces de Banach). Il reste à démontrer l'unicité (à scalaire près) mais cela résulte de la proposition 3.4.3. □

Rappelons que $H^i_{\mathrm{Iw}}(\mathbb{Q}_p, V) \overset{\text{déf}}{=} L \otimes_{\mathcal{O}_L} \varprojlim_n H^i(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F_n), T)$ où T est un $\mathcal{O}_L$-réseau quelconque de V stable par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ (voir la définition 2.2.3).

Corollaire 5.3.3. — *On a un isomorphisme de $\mathcal{O}_L[[\mathbb{Z}_p^\times]]$-modules :*

$$H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbb{Q}_p, V) \simeq \Pi(V)^{*\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & p^{\mathbb{Z}}\end{pmatrix}}$$

où $\mathbb{Z}_p^\times$ agit via l'action de Γ à gauche et via l'action de $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathbb{Z}_p^\times\end{pmatrix}$ à droite.

Démonstration. — Cela découle du théorème 5.3.2 et de la proposition 2.2.5. □

Remarque 5.3.4. — Le $\mathcal{O}_L[[\mathbb{Z}_p^\times]]$-module $H^2_{\mathrm{Iw}}(\mathbb{Q}_p, V)$ s'identifie aussi aux coinvariants de $\Pi(V)^*$ sous l'action de $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & p^{\mathbb{Z}}\end{pmatrix}$ et en fait, ces deux espaces sont nuls par le (ii) de la proposition 2.2.4 parce que V est irréductible. En effet, le théorème 5.3.2 et le corollaire 2.3.6 nous disent que les coinvariants d'un réseau de $\Pi(V)^*$ sous l'action de $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & p^{\mathbb{Z}}\end{pmatrix}$ s'identifient à $H^2_{\mathrm{Iw}}(\mathbb{Q}_p, T)$.

5.4. Irréductibilité et admissibilité. — Le but de ce paragraphe est de déduire de tous les résultats précédents la non nullité, l'irréductibilité (topologique) et l'admissibilité de $\Pi(V)$.

Corollaire 5.4.1. — *L'espace de Banach $\Pi(V)$ est non nul.*

Démonstration. — Cela résulte du théorème 5.3.2 et du corollaire 3.3.4. □

Le corollaire 5.4.1 était conjecturé (via la proposition 4.3.3) et démontré pour $k \leq 2p$ si $p \neq 2$ et $k < 4$ si $p = 2$ dans [**Bre03a**, §3.3] par un calcul explicite de réseaux.

Corollaire 5.4.2. — *Le $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire $\Pi(V)$ est topologiquement irréductible.*

Démonstration. — Cela résulte du théorème 5.3.2 et de la proposition 3.4.4. □

La proposition 3.4.4 montre que $\Pi(V)$ est en fait topologiquement irréductible comme $\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)$-représentation.

Corollaire 5.4.3. — *Le $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-Banach unitaire $\Pi(V)$ est admissible.*

Démonstration. — On ignore si le $\mathcal{O}_L$-module compact $\varprojlim_\psi D^\sharp(T)$ est stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ dans $\Pi(V)^*$ (via le théorème 5.3.2) mais on peut le remplacer par le $\mathcal{O}_L$-réseau de $\Pi(V)^*$:

$$\mathcal{M} \stackrel{\text{déf}}{=} \cap_{g\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)} g(\varprojlim_{\psi} D^\sharp(T)) \subset \varprojlim_{\psi} D^\sharp(T)$$

qui est un sous-$\mathcal{O}_L[[X]]$-module compact stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ dans $\Pi(V)^*$ (on vérifie qu'il est stable par $B(\mathbb{Q}_p)$ en utilisant la décomposition d'Iwasawa de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$). Le $\mathcal{O}_L$-module $\mathcal{M}$ possède alors *deux* structures naturelles de $\mathcal{O}_L[[X]]$-modules : l'une est celle déjà définie et l'autre est :

$$(\lambda, v) \in \mathcal{O}_L[[X]] \times \mathcal{M} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v.$$

La première structure est telle que la multiplication par $(1+X)^{\mathbb{Z}_p}$ correspond à l'action de $\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et la deuxième est telle que la multiplication par $(1+X)^{\mathbb{Z}_p}$ correspond à l'action de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbb{Z}_p & 1 \end{pmatrix}$. Soit $\mathrm{pr} : \mathcal{M} \to D^\sharp(T)$ la projection sur la première composante et $M \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{pr}(\mathcal{M})$: M est un sous-$\mathcal{O}_L[[X]]$-module (de type fini) de $D^\sharp(T)$. Posons $\mathcal{N} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Ker}(\mathrm{pr}) \subsetneq \mathcal{M}$. L'application :

$$\mathcal{N} \to M,\ v \mapsto \mathrm{pr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v\right) \tag{42}$$

est injective : si v a pour image 0, sa distribution associée $\mu_\alpha \in B(\alpha)^* \simeq \mathcal{C}^{\mathrm{val}(\alpha)}(\mathbb{Z}_p, L)^* \oplus \mathcal{C}^{\mathrm{val}(\alpha)}(\mathbb{Z}_p, L)^*$ par (40) et (11) est nulle sur les deux copies de $\mathcal{C}^{\mathrm{val}(\alpha)}(\mathbb{Z}_p, L)$, donc est nulle dans $\Pi(V)^*$. En pensant encore en termes de distributions, on voit que $\mathcal{N}$ est un $\mathcal{O}_L[[X]]$-module pour la première structure mais seulement un $\varphi(\mathcal{O}_L[[X]])$-module pour la deuxième structure. De plus, pour cette deuxième structure, l'injection (42) est $\varphi(\mathcal{O}_L[[X]])$-linéaire. Comme M est de type fini sur $\mathcal{O}_L[[X]]$, donc sur $\varphi(\mathcal{O}_L[[X]])$, on obtient que le $\varphi(\mathcal{O}_L[[X]])$-module $\mathcal{N}$ pour la deuxième action de $\varphi(\mathcal{O}_L[[X]])$ est de type fini. Fixons maintenant des éléments $(e_1, \cdots, e_m) \in \mathcal{M}$ (resp. $(f_1, \cdots, f_n) \in \mathcal{N}$) tels que les $\mathrm{pr}(e_i)$ (resp. les f_i) engendrent M sur $\mathcal{O}_L[[X]]$ (resp. $\mathcal{N}$ sur $\varphi(\mathcal{O}_L[[X]])$). Soit $v \in \mathcal{M}$. Il existe $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ dans $\mathcal{O}_L[[X]]$ tels que $v - \sum \lambda_i e_i \in \mathcal{N}$ et il existe $\mu_1, \cdots, \mu_n$ dans $\varphi(\mathcal{O}_L[[X]])$ tels que $v - \sum \lambda_i e_i = \sum \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mu_i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} f_i$. Comme les λ_i correspondent à l'action d'éléments de l'algèbre de groupe de $\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et les $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mu_i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ à l'action d'éléments de l'algèbre de groupe de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p\mathbb{Z}_p & 1 \end{pmatrix}$, on voit que $\mathcal{M}$ est *a fortiori* de type fini sur l'algèbre de groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$, d'où l'admissibilité. □

Les corollaires 5.4.2 et 5.4.3 étaient conjecturés et démontrés par un argument de réduction modulo p pour $k \leq 2p$ (et $k < 4$ si $p = 2$) dans [**Bre03b**, §1.3] avec l'hypothèse supplémentaire $\mathrm{val}(\alpha + \beta) \neq 1$ pour le premier.

On peut déduire des résultats précédents deux autres corollaires, l'un sur les réseaux dans $\pi(\alpha)$ et $\pi(\beta)$, l'autre sur les vecteurs localement analytiques dans $\Pi(V)$.

Corollaire 5.4.4. — *Supposons $\alpha \neq p\beta$, alors $\pi(\alpha)$ (resp. $\pi(\beta)$) possède des $\mathcal{O}_L$-réseaux stables par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et tous les $\mathcal{O}_L$-réseaux stables par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ dans $\pi(\alpha)$ (resp. $\pi(\beta)$) sont commensurables entre eux. Supposons $\alpha = p\beta$, alors on a le même résultat pour $\pi(\alpha)$.*

Démonstration. — L'existence de tels $\mathcal{O}_L$-réseaux résulte du corollaire 5.4.1 et de la proposition 4.3.3. Pour montrer qu'ils sont tous commensurables entre eux, il est équivalent de montrer qu'ils sont tous commensurables aux $\mathcal{O}_L$-réseaux de type fini sur $\mathcal{O}_L[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$. Le $\mathcal{O}_L$-dual d'un $\mathcal{O}_L$-réseau stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ est toujours contenu dans le $\mathcal{O}_L$-dual d'un $\mathcal{O}_L$-réseau de type fini sur $\mathcal{O}_L[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$. Par le théorème 4.3.1 et le corollaire 5.4.3, ce dernier dual est de type fini sur l'algèbre de groupe complétée de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$. Comme c'est une algèbre noethérienne, il en est de même du premier dual. Cela entraîne que le complété de $\pi(\alpha)$ (ou $\pi(\beta)$ si $\alpha \neq p\beta$) par rapport à un $\mathcal{O}_L$-réseau stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ quelconque est aussi admissible, et donc topologiquement isomorphe à $\Pi(V)$ par le corollaire 5.4.2 et le fait que la catégorie des $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$-Banach admissibles est abélienne ([**ST02b**, §3]). Tous les $\mathcal{O}_L$-réseaux stables par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ induisent donc des normes équivalentes sur $\pi(\alpha)$ (ou $\pi(\beta)$ si $\alpha \neq p\beta$) ce qui achève la preuve. □

Comme dans [**ST03**, §7], on note $\Pi(V)_{\mathrm{an}}$ le sous-L-espace vectoriel de $\Pi(V)$ des vecteurs localement analytiques, i.e. des vecteurs $v \in \Pi(V)$ tels que l'application orbite $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \to \Pi(V)$, $g \mapsto g \cdot v$ est localement analytique. Il est muni d'une topologie naturelle d'espace localement convexe de type compact (cf. [**ST03**, §7]).

Soit :

$$A(\alpha) \overset{\text{déf}}{=} \left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \mathrm{nr}(\alpha^{-1}) \otimes d^{k-2}\mathrm{nr}(p\beta^{-1})\right)^{\mathrm{an}}$$

l'induite parabolique localement analytique au sens de [**ST02a**]. On définit de même $A(\beta)$ en échangeant α et β. On a des injections naturelles continues $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariantes $A(\alpha) \hookrightarrow B(\alpha)$ et $A(\beta) \hookrightarrow B(\beta)$.

Corollaire 5.4.5. — *Supposons $\alpha \neq p\beta$. On a une injection continue $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-équivariante :*

$$\mathrm{A}(\beta) \oplus_{\pi(\beta)} \mathrm{A}(\alpha) \hookrightarrow \Pi(V)_{\mathrm{an}}$$

où $\pi(\beta)$ s'envoie dans $A(\alpha)$ via l'entrelacement (26).

Démonstration. — Par [**ST01**, §4], $\pi(\alpha)$ (resp. $\pi(\beta)$) est le seul sous-objet topologiquement irréductible non nul dans $A(\alpha)$ (resp. $A(\beta)$). Par le théorème 4.3.1, on déduit que les injections ci-dessus induisent encore des injections $A(\alpha) \hookrightarrow B(\alpha)/L(\alpha)$ et $A(\beta) \hookrightarrow B(\beta)/L(\beta)$. Le résultat découle alors du corollaire 4.3.2. □

Le corollaire 5.4.5 admet une version lorsque $\alpha = p\beta$ que l'on laisse en exercice au lecteur. Terminons avec une conjecture :

Conjecture 5.4.6. — *Supposons* $\alpha \neq p\beta$*. L'application* $\mathrm{A}(\beta) \oplus_{\pi(\beta)} \mathrm{A}(\alpha) \hookrightarrow \Pi(V)_{\mathrm{an}}$ *du corollaire 5.4.5 est un isomorphisme topologique.*

Références

[Ber02] Berger L., *Limites de représentations cristallines*, à paraître à Compositio Math, disponible à l'adresse : `www.ihes.fr/~lberger`.

[Ber04] Berger L., *Équations différentielles p-adiques et* (φ, N)*-modules filtrés*, prépublication 2004, disponible à l'adresse : `www.ihes.fr/~lberger`.

[BB04] Berger L., Breuil C., *Towards a p-adic Langlands programme*, notes d'un cours donné à l'École d'été de Hangzhou (août 2004), disponibles à l'adresse : `www.ihes.fr/~breuil/publications.html`

[Bre03a] Breuil C., *Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *II*, J. Institut Math. Jussieu 2, 2003, 23-58.

[Bre03b] Breuil C., *Invariant* $\mathfrak{L}$ *et série spéciale p-adique*, à paraître aux Ann. Scient. E.N.S.

[Bre03c] Breuil C., *Série spéciale p-adique et cohomologie étale complétée*, prépublication 2003, disponible à l'adresse : `www.ihes.fr/~breuil/publications.html`.

[BM04] Breuil C., Mézard A., *En préparation.*

[Bum98] Bump D., *Automorphic forms and representations*, Cambridge Studies in Advanced Math. 55, Cambridge University Press, 1998.

[CC99] Cherbonnier F., Colmez P., *Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques d'un corps local*, J. Amer. Math. Soc. 12, 1999, 241–268.

[Col03] Colmez P., *La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer p-adique*, Séminaire Bourbaki 919, juin 2003.

[Col04a] Colmez P., *Une correspondance de Langlands locale p-adique pour les représentations semi-stables de dimension* 2, prépublication 2004.

[CF00] Colmez P., Fontaine J.-M., *Construction des représentations p-adiques semi-stables*, Inv. Math. 140, 2000, 1–43.

[Eme04] Emerton M., *p-adic L-functions and unitary completions of representations of p-adic reductive groups*, prépublication 2004.

[Fon90] Fontaine J-M., *Représentations p-adiques des corps locaux I*, The Grothendieck Festschrift, Vol. II, 249–309, Progr. Math. 87, Birkhäuser Boston, Boston, MA 1990.

[Per94] Perrin-Riou B., *Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local*, Inv. Math. 115, 1994, 81–161.

[Sch01] Schneider P., *Nonarchimedean Functional Analysis*, Springer-Verlag, 2001.

[ST01] Schneider P., Teitelbaum J. (with an appendix by D. Prasad), $U(\mathfrak{g})$*-finite locally analytic representations*, Representation Theory 5, 2001, 111–128.

[ST02a] Schneider P., Teitelbaum J., *Locally analytic distributions and p-adic representation theory, with applications to* GL_2, J. Amer. Math. Soc. 15, 2002, 443-468.

[ST02b] Schneider P., Teitelbaum J., *Banach space representations and Iwasawa theory*, Israel J. Math. 127, 2002, 359–380.

[ST03] Schneider P., Teitelbaum J., *Algebras of p-adic distributions and admissible representations*, Inv. Math. 153, 2003, 145–196.

[Wa96] Wach N., *Représentations p-adiques potentiellement cristallines*, Bull. Soc. Math. France 124, 1996, 375–400.

L. Berger, C.N.R.S. & I.H.É.S., Le Bois-Marie, 35 route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette, France
E-mail : `lberger@ihes.fr` • *Url :* `www.ihes.fr/~lberger/`

C. Breuil, C.N.R.S. & I.H.É.S., Le Bois-Marie, 35 route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette, France
E-mail : `breuil@ihes.fr` • *Url :* `www.ihes.fr/~breuil/`