LA MONODROMIE HAMILTONIENNE DES CYCLES ÉVANESCENTS

Mauricio GARAY

Institut des Hautes Études Scientifiques

35, route de Chartres

91440 – Bures-sur-Yvette (France)

Novembre 2004

IHES/M/04/50

LA MONODROMIE HAMILTONIENNE DES CYCLES ÉVANESCENTS

MAURICIO D. GARAY

Abstract. Nous montrons sous des hypothèses précisées dans l'énoncé que le premier groupe d'homologie évanescente d'une fibration lagrangienne singulière est librement engendré par les cycles évanescents. Nous en déduisons que l'opérateur de variation associé est un isomorphisme.

Introduction

La théorie de Picard-Lefschetz étudie les cycles évanescents et la monodromie associée à une intersection complète

$$f = (f_1, \dots, f_k) : (\mathbb{C}^m, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$$

supposée en général à singularité isolée avec comme cas particulier important celui des hypersurfaces (voir e.g. [2], [10]). Dans le cas où f est une application moment c'est à dire si $k = n$ et si les composantes de f sont en involution i.e. pour tout $i, j \leq n$, on a l'égalité

$$\{f_i, f_j\} = \sum_{i=1}^{n} \partial_{q_i} f \partial_{p_i} g - \partial_{p_i} f \partial_{q_i} g = 0$$

alors, en règle générale, la fibre L_0 de f au dessus de 0 n'est pas à singularité isolée. On peut, en effet, montrer que dans le cas où f admet une déformation infinitésimalement Lagrangienne verselle alors le premier espace de cohomologie évanescente de De Rham est isomorphe à l'espace de déformation verselle Lagrangienne de L_0 (voir [5]). Or la fibre de Milnor d'une intersection complète à singularité isolée de dimension n est homotope à un bouquet de sphères de dimension n. Donc dans un tel cas, f ne peut être à singularité que si $n = 1$ ou bien si la fibre de f en 0 est lisse (voir également [12]).

Dans cette note, nous montrons que (sous des hypothèses que nous préciserons par la suite)

(1) le premier groupe d'homologie évanescente est librement engendré par les cycles évanescents associés à une base distinguée de chemins dans S,

---

Date: November 2004.

Key words and phrases. Monodromie, Systèmes intégrables, Géometrie Symplectique, Variétés Lagrangiennes.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 32S50.

(2) l'opérateur de variation $Var : H^1(L, \partial L) \longrightarrow H^1(L)$ est un isomorphisme (ici L désigne une fibre de Milnor de f).

1. Enoncé des résultats.

Commençons par préciser nos hypothèses. Pour cela, notons $\bar{f} : M \longrightarrow S$ un représentant standard du germe $f = (f_1, \dots, f_n)$. Rappelons que cela signifie que

1. l'application $\bar{f}$ est la restriction d'un morphisme de Stein g de la boule $B_\delta \subset \mathbb{C}^{2n}$ de rayon δ à un voisinage de Stein de $g^{-1}(0) \cap B_\varepsilon$ avec $\varepsilon < \delta$,
2. les fibres de $\bar{f}$ sont munies d'une stratification de Whitney dont les strates sont transverses au bord de l'adhérence de la boule $B_{\varepsilon'}$ pour tout $\varepsilon' \leq \varepsilon$.

Dans le cas où f est une application moment, nous considèrerons la stratification de Whitney suivante. Posons $C_k = \{x \in M : rg(d\bar{f}_x) \leq k\}$. Nous dirons que $\bar{f}$ (resp. f) est *non-dégénérée* si (resp. le germe en 0 de) C_k est au plus de dimension $2k$ et nous supposerons par la suite que tel est le cas. Le flot des champs hamiltoniens des composantes de $\bar{f}$ donne alors une stratification de Whitney des fibres de $\bar{f}$. Par la suite, nous noterons abusivement de la même façon le germe et un représentant standard du germe. Notons $C \subset M$ l'espace analytique formé des points critiques de f et Σ son image par f: $C = \bigcup_{k=1}^{n-1} C_k$, $\Sigma = f(C)$. Nous dirons qu'un point critique $x \in M$ de f est *quadratique* si il existe un germe de symplectomorphisme $\varphi : (\mathbb{C}^{2n}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^{2n}, x)$ et un germe d'application biholomorphe $\psi : (\mathbb{C}^n, s) \longrightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$, $s = f(x)$, tels que

$$\psi \circ f \circ \varphi(q, p) = (q_1^2 + p_1^2, p_2, \dots, p_n).$$

Nous ferons les hypothèses suivantes:
(M1): l'ensemble des valeurs Σ' critiques non quadratiques forment un ensemble de codimension au moins 2 dans S,
(M2): pour tout $s \notin \Sigma'$, le lieu singulier d'une fibre singulière L_s est connexe.
On conjecture que ces propriétés sont génériques, en ce sens que pour tout germe d'application moment non-dégénérée, il existe une déformation dont le déploiement possède les propriétés (M1) et (M2). Dans le cas $n = 1$, une telle déformation est donnée par une morsification de f.
Expliquons à présent la façon d'obtenir une base de cycle évanescents d'une fibre de Milnor Lagrangienne.
On choisit des formes linéaires $u_1, \dots, u_{n-1} : \mathbb{C}^{2n} \longrightarrow \mathbb{C}$ et le domaine M de telle sorte que

1. l'application $F = (f, u_1, \dots, u_{n-1}) : (\mathbb{C}^{2n}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$ soit à singularité isolée,

(2) pour tout $k < n$, il existe des voisinages de l'origine $T_k \subset \mathbb{C}^k$ tels que les fibres de $(u_1, \dots, u_k)$ au dessus de T_k sont transverses aux fibres de f.
(3) les application $f^k : M \longrightarrow S_k$, $x \mapsto (f_1(x), \dots, f_k(x))$ sont des représentants standards de leurs germes en 0.

Quitte à faire un changement linéaire de coordonnées, on peut supposer que les points critiques de la restriction de f^k à une fibre de Milnor de f^{k-1} n'a que des points critiques isolés (cela résulte de la condition de non-dégénérescence).
Notons l (resp. L) la fibre de F (resp. f) au dessus d'un point régulier (b, b') (resp. b). On fixe une base de cycles évanescents $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_p \in H_1(l)$ de la courbe $l \subset L$ de la façon suivante (voir e.g. [2]).
On choisit $(t_1, \dots, t_{n-1}) \in T_{n-1}$ de telle sorte que la droite $D \subset S$ définie par
$D = \{s_1 = t_1, \dots, s_{n-1} = t_{n-1}\}$ n'intersecte pas Σ'.
On fixe une base distinguée de chemins joignant dans $S \cap D$ le point base b aux valeurs critiques de f contenues dans $S \cap D$. A chacun de ces chemins correspond au moins un cycle évanescent.
A priori, il est possible que deux classes d'homologie distinctes de $H^1(l)$ correspondent à la même valeur critique de f. Dans ce cas, on en choisit arbitrairement une. On note $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_k$ les classes d'homologie ainsi obtenues. Enfin, on note $\gamma_1, \dots \gamma_k$ les images dans $H_1(L)$ des $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_k$ par l'application $j : H_1(l) \longrightarrow H_1(L)$ induite par l'inclusion $l \subset L$. Ici comme par la suite, les homologies sont prises à coefficient dans $\mathbb{Z}$.

Théorème. *Si $f : M \longrightarrow S$ est une application moment non-dégérée alors les cycles évanescents $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ engendrent librement le groupe $H_1(L)$,*
$L = f^{-1}(b)$. En particulier le rang du groupe $H_1(L)$ est égal à la multiplicité à l'origine du discriminant Σ de f. Par ailleurs, la suite exacte du couple (L, A), $A = f^{-1}(S \cap D)$, donne un isomorphisme entre cycles évanescents et "onglets de Lefschetz" $H_1(L) \approx H_2(A, L)$

Remarque. Ce théorème montre que l'on peut définir une dualité des onglets de Lefschetz au sens de Pham ([11]).
Le théorème implique que $H_1(L)$ est un facteur direct de $H_1(l)$. Ceci permet de définir l'opérateur de variation

$$Var : H_1(L, \partial L) \longrightarrow H_1(L)$$

bien que la fibre de f au-dessus de 0 ne soit pas à singularité isolée.
Pour cela fixons un cycle $\delta \subset L$ définissant élément d'homologie relative $[\delta] \in H_1(L, \partial L)$ et notons γ un chemin qui parcoure le bord de S dans le sens direct. Le chemin γ se relève en un difféomorphisme h de l définit à isotopie près qui fixe le bord de l. On pose $Var[\delta] = [h(\delta) - \delta]$.

Corollaire. *L'opérateur de variation* $Var : H_1(L, \partial L) \longrightarrow H_1(L)$ *est un isomorphisme.*

Proof. Notons $\delta_1, \dots, \delta_k \in H_1(L, \partial L)$ la base duale d'une base distinguée $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ choisie comme dans le théorème. Dans ces bases, la formule de Picard-Lefschetz entraîne que la matrice de l'opérateur de variation est triangulaire avec des 1 sur la diagonale (voir e.g. [1], Chapitre I, section 2.5). Ce qui démontre le corollaire. □

2. Démonstration du théorème.

Nous supposerons, pour des raisons de notation, que $n > 1$. Dans le cas $n = 1$, le théorème et son corollaire sont des résultats classiques (voir e.g. [1]). Le lemme suivant est une variante du théorème de section hyperplane de Lefschetz.

Lemme 1. *Soit* $g = (g_1, \dots, g_p) : (\mathbb{C}^m, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$, $p < m$ *un germe d'application holomorphe. Notons* Y *la fibre de Milnor de* $\tilde{g} = (g_1, \dots, g_{p-1})$ *et supposons que les points critiques de la restriction de* g_p *à* Y *soient isolés. Alors* Y *s'obtient à partir de la fibre de Milnor* $X = Y \cap \{g_p = s_p\}$ *en y ajoutant des cellules de dimension réelle au moins égale à la dimension complexe de* Y.

Proof. Il suffit de répéter la variante due à Bott de la démonstration de Thom du théorème de Lefschetz ([4]). Posons $X = \{g^{-1}(s_1, \dots, s_p)\}$ et considérons la fonction

$$h : Y \longrightarrow \mathbb{R}, \quad z \mapsto \mid g_p(z) \mid^2 .$$

Une valeur critique $\varepsilon > 0$ de h est une valeur pour laquelle il existe $t \in \mathbb{C}$ de module ε tel que $(s_1, \dots, s_{p-1}, t)$ soit une valeur critique de g. Un calcul local montre que l'indice des points critiques de h est au moins égal à la dimension de Y. Par ailleurs, comme les fibres de $\tilde{g}, g_p$ et g sont transverses au bord de $\bar{M}$, le gradient de h est lui aussi transverse au bord de $\bar{Y}$. La théorie de Morse entraîne alors que Y est obtenu à partir de X en y ajoutant des cellules de dimension au moins égale à celle de Y. □

On applique le lemme précédent à des sections hyperplanes successives de L i.e. en prenant $g = (f, u_1, \dots, u_k)$ avec $k = 1, \dots, n-1$. On en déduit que l'application $j : H_1(l) \longrightarrow H_1(L)$ induite par l'inclusion $l \subset L$ est surjective. Nous allons à présent décrire le noyau de cette application.

Lemme 2. *Soit* $\alpha, \beta \in H^1(L)$ *deux classes d'homologie qui sont évanescentes pour la même valeur critique alors* $\alpha = \beta$.

Proof. Notons Δ le lieu singulier de la fibre $L_s = f^{-1}(s)$, $s \in D \cap \Sigma$, où s est la valeur critique pour laquelle les classes d'homologie α et β sont évanescentes. Le lemme est une propriété locale au voisinage de Δ, on peut donc se restreindre à un voisinage tubulaire de Δ dans M.
Les hypothèses (M1) et (M2) entraînent respectivement que la variété Δ est

lisse et connexe. De plus, l'espace tangent en chaque point est engendré par les champs hamiltonien de $(n-1)$ fonctions contenues dans l'idéal engendré par les f_i. Les cycles α, β sont associés à des points critiques $x, x' \in L_s$ et on a $f(x) = f(x') = s$. Quitte à renuméroter les f_i on peut supposer que les hamiltoniens $X_1, \ldots, X_{n-1}$ des fonctions $f_1, \ldots f_{n-1}$ sont linéairement indépendants en chaque point d'un voisinage $U \subset M$ de x.
Commençons par démontrer le lemme dans le cas où $x' \in U$.
Notons $\varphi_i^t : L \longrightarrow L$ le flot du champ hamiltonien de f_i au temps $t \in \mathbb{C}$. Considérons l'application

$$T : U \longrightarrow \Delta, \quad (t_1, \ldots, t_{n-1}) \mapsto (\varphi_1^{t_1}(x), \ldots, \varphi_{n-1}^{t_{n-1}}(x))$$

le domaine $U \subset \mathbb{C}^{n-1}$ étant choisi de telle sorte que cette application est surjective. Choisissons un chemin analytique $\gamma : [0,1] \longrightarrow U$ dans U dont l'image par T est un chemin plongé joignant x et x'. A l'aide des champs hamiltoniens $X_1, \ldots, X_{n-1}$ prolongeons l'image du champ tangent à γ par T en un champ hamiltonien X défini un voisinage tubulaire $V \subset M$ du chemin $T \circ \gamma([0,1])$ joignant x à x'. Le flot du champ X donne une homotopie entre les cycles α et β. Le lemme est démontré pour x' voisin de x.
Dans le cas général, on découpe le chemin joignant x à x' en petit segments et on applique le raisonnement ci-dessus à chacun de ces petits segments. □

Notons $G \subset H^1(l)$ un sous groupe engendré par un nombre maximum de cycles évanescents correspondant à des valeurs critiques différentes. En reprenant les notations du théorème, on peut prendre par exemple
$G =< \gamma_1, \ldots, \gamma_k >$. Les deux lemmes précédents montrent que l'inclusion induit une application surjective $j : G \longrightarrow H_1(L)$. Nous allons montrer que cette application est injective. Pour cela nous avons besoin d'un lemme préliminaire.
Notons $A \subset M$ la préimage de $S \cap D$ par $f : M \longrightarrow S$. L'hypothèse (M1) nous assure que A est une variété lisse.

Lemme 3. *Les groupes $H_1(A)$ et $H_2(A)$ sont nuls.*

Proof. Pour $n = 2$, A est la fibre de Milnor du germe d'application à point critique isolée (ou bien sans point critique) $f^{n-1} = f_1 : (\mathbb{C}^4, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$. D'après Milnor, A est donc ou bien homotope à un bouquet de sphère de dimension 3 ou bien contractile ([8]). Ce qui démontre le lemme pour $n = 2$.
Soit $n > 2$, l'application $f^{n-1} = f_n$ a ou bien un point critique isolé en 0 ou bien un point régulier. Donc sa fibre de Milnor, soit B, est ou bien homotope à un bouquet de sphères de dimension $2n-1$ ou bien contractile. Par ailleurs, le lemme du type Lefschetz (Lemme 1) entraîne que la fibre de Milnor de $f^{k+1} = (f_1, \ldots, f_{k+1})$ s'obtient à partir de celle de f^k en y ajoutant des cellules de dimension au moins égale à $2n-k$. Donc B s'obtient à partir de A en y ajoutant des cellules de dimension au moins égale à $dim_{\mathbb{C}} A + 1 = n+1$ donc $H_i(A) = H_i(B) = 0$ pour $i \leq n$. Le lemme est démontré. □

Nous pouvons à présent démontrer que l'application $j : G \longrightarrow H_1(L)$ est injective.
Pour cela, considérons la suite exacte du couple (A, L)

$$\ldots \longrightarrow H_k(L) \longrightarrow H_k(A) \longrightarrow H_k(A, L) \longrightarrow \ldots$$

Les égalités $H_1(A) = 0,\ H_2(A) = 0$ entraînent l'isomorphisme

$$H_1(L) \approx H_2(A, L).$$

Soient $D_1, \ldots, D_k \subset (S \cap D)$ des voisinages des valeurs critiques de f et $B_1, \ldots, B_k \subset A$ leurs préimages par f. Par excision, on a un isomorphisme

$$H_2(A, L) \approx \oplus_{i=1}^k H_2(B_i, L_i)$$

où L_i est la fibre de f au dessus d'un point du bord de $\bar{D}_i$.
Reprenons à présent les notations du théorème, et notons V l'espace affine de dimension $n+1$ d'équation $\left\{u_1 = b'_1, \ldots, u_{n-1} = b'_{n-1}\right\}$, de telle sorte que $l = L \cap V$. Comme précédemment, on a les isomorphismes

$$H_1(l) \approx H_2(A \cap V, l) \approx \oplus_{i=1}^k H_2(B_i \cap V, l_i)$$

où l'on a noté $l_i = L_i \cap V$. Il est clair que cette décomposition est compatible avec l'application

$$j : H_1(l) \longrightarrow H_1(L),$$

en ce sens que l'image par j de $H_2(B_i \cap V, l_i)$ pour $i \leq k$ est contenue dans $H_2(B_i, L_i)$.
Par définition du groupe G, pour chaque i, on a choisi une composante connexe C_i de $B_i \cap V$ de telle sorte que G soit isomorphe à $\oplus_{i=1}^k H_2(C_i, l_i)$. Par ailleurs, l'hypothèse (M1) implique que $H_2(C_i, l_i) \approx \mathbb{Z}$ est engendré par la classe de C_i. Il reste donc à montrer que l'application

$$j_i : H_2(C_i, l_i) \longrightarrow H_2(B_i, L_i)$$

induite par j est injective. Ce dernier point est du au fait que l'aire du disque C_i est non nulle. En effet si l'on note σ_i le bord de C_i et $\alpha = pdq$ la forme d'action, on a par Stokes

$$\int_{\sigma_i} \alpha = \int_{C_i} d\alpha \neq 0$$

donc la classe de σ_i dans $H^1(L)$ est non nulle. Il découle par conséquent de l'isomorphisme $H_1(L) \approx H_2(A, L)$ que la classe de C_i est non nulle. Ce lemme conclut la démonstration du théorème.

Remerciements. Je remercie D. van Straten pour les discussions que nous avons eues sur les variétés Lagrangiennes singulières, Le Dung Trang pour ses explications sur le théorème de Lefschetz-Zariski, F. Pham pour ses explications sur son travail ainsi que V.I. Arnold qui m'a enseigné la théorie de Picard-Lefschetz alors que j'étais étudiant.
Je remercie également le Deutsche Forschungsgemeinshaft pour avoir financé

ce travail via une bourse Forschungsstipendium et l'Institut des Hautes Études Scientifiques pour m'avoir accueilli d'Octobre à Décembre 2004.

References

1. V.I. Arnold, A.N. Varchenko, and S. Goussein-Zade, *Singularity of differentiable mapping, vol. II*, Nauka:Moscow, 1982, English transl.: Birkhauser, 382p., Basel(1986).
2. V.I. Arnold, V.A. Vassiliev, V.V. Goryunov, and O.V. Lyashko, *Singularity theory I, dynamical systems VI*, VINITI, Moscow, 1988, English transl.:Springer-Verlag, 245p., (1993).
3. M. Audin, *Hamiltonian monodromy via Picard-Lefschetz theory*, Commun. Math. Phys. **229** (2002), 459–489.
4. R. Bott, *On a theorem of Lefschetz*, Michigan Math. J. **6** (1959), 211–216.
5. M.D. Garay and D. van Straten, *On the topology of Lagrangian Milnor fibres*, Int. Math. Research Notices **35** (2003), 1933–1943.
6. H. Hamm and Le Dung Trang, *Un théorème de Zariski du type Lefschetz*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **6** (1973), 317–366.
7. S. Lefschetz, *L'analysis situs et la géométrie algébrique*, Gauthier-Villars, 1924.
8. J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Ann. Math. Studies. 61. Princ. Univ. Press, 1968.
9. T.Z. Nguyen, *A note on focus-focus singularities*, Differential Geom; Appl. **7** (1997), 123–130.
10. F. Pham, *Formules de Picard-Lefschetz généralisées et ramification des intégrales*, Bull. Soc. Math. France **93** (1965), 333–36.
11. ———, *La descente des cols par les onglets de Lefchetz, avec vues sur Gauss-Manin*, Astérisque **130** (1985), 11–47.
12. D. van Straten and Sevenheck C., *Rigid and complete intersection lagrangian singularities*, Manuscripta Mathematica **114** (2004), no. 2, 197–209.

Fachbereich Mathematik (17), Staudingerweg 9, Johannes Gutenberg-Universität, 55099 Mainz, Germany

E-mail address: garay@mathematik.uni-mainz.de