# Représentations semi-stables de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$, demi-plan $p$-adique et réduction modulo $p$

**Christophe BREUIL et Ariane MÉZARD**

Institut des Hautes Études Scientifiques
35, route de Chartres
91440 – Bures-sur-Yvette (France)

Juillet 2005

IHES/M/05/23

# REPRÉSENTATIONS SEMI-STABLES DE $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, DEMI-PLAN $p$-ADIQUE ET RÉDUCTION MODULO $p$

*par*

Christophe Breuil & Ariane Mézard

***Résumé.*** — On calcule par voie cohomologique la réduction modulo $p$ de certaines représentations $p$-adiques semi-stables de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ([**4**]). Les calculs exploitent la géométrie du demi-plan $p$-adique. Ils permettent de retrouver certaines formules de la réduction modulo $p$ de représentations $p$-adiques semi-stables de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ ([**6**]).

***Abstract.*** — We compute by cohomological means the reduction modulo $p$ of certain $p$-adic semi-stable representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ([**4**]). The calculations use the geometry of the $p$-adic upper half plane. They allow to recover some of the formulae of the reduction modulo $p$ of $p$-adic semi-stable representations of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ ([**6**]).

## Table des matières

## 1. Introduction et notations

**1.1. Introduction.** — Soit $L$ une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, $\mathfrak{O}$ son anneau d'entiers, $\pi$ une uniformisante de $\mathfrak{O}$ et $\mathbb{F} \overset{\text{déf}}{=} \mathfrak{O}/(\pi)$. Dans [**13**], Teitelbaum calcule par voie cohomologique la réduction modulo $\pi$ d'un réseau invariant dans le dual (algébrique) de la représentation $|\det|^{k/2-1} \otimes \mathrm{Sym}^{k-2} L^2 \otimes_L$ Steinberg de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ pour $k \geq 2$ entier pair ($|\ |$ est la norme $p$-adique). Plus précisément, si $B(k)$ désigne le Banach $p$-adique complété de $|\det|^{k/2-1} \otimes \mathrm{Sym}^{k-2} L^2 \otimes_L$ Steinberg par rapport à un quelconque $\mathfrak{O}$-réseau stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ de type fini sur $\mathfrak{O}[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$, alors le dual $B(k)^*$ convenablement tordu est une représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ isomorphe à $H^0(\mathfrak{X}, \omega^{k/2}) \otimes L$ où $\mathfrak{X}$ est le schéma formel du demi-plan $p$-adique et $\omega$ le faisceau inversible des différentielles « régulières » sur $\mathfrak{X}$. La réduction modulo $\pi$ $H^0(\mathfrak{X}, \omega^{k/2}) \otimes \mathbb{F}$ ci-dessus est alors isomorphe à la représentation $H^0(\mathfrak{X}, \omega^{k/2} \otimes \mathbb{F})$ qui se calcule explicitement en utilisant la géométrie de la fibre spéciale de $\mathfrak{X}$.

Dans [**4**], d'autres complétés de $|\det|^{k/2-1} \otimes \mathrm{Sym}^{k-2} L^2 \otimes_L$ Steinberg par rapport à des réseaux invariants qui ne sont pas de type fini sur $\mathfrak{O}[\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)]$ ont été définis. Ils font intervenir un paramètre supplémentaire $\mathcal{L} \in L$ et sont notés $B(k, \mathcal{L})$. De plus, la réduction modulo $\pi$ de $B(k, \mathcal{L})$, ou du dual $B(k, \mathcal{L})^*$, est reliée à la réduction modulo $\pi$ des représentations $p$-adiques semi-stables non-cristallines de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ ([**4**], [**2**]) et est donc plus intéressante à étudier que celle de $B(k)$. Il était donc naturel d'essayer d'étendre le calcul cohomologique de [**13**] à ces nouvelles complétions. C'est l'objet du présent article.

On définit dans un premier temps pour $k$ pair, $2 \leq k \leq p+1$ et $\mathcal{L} \in L$ un faisceau de $\mathfrak{O}$-modules sans torsion $\omega(k, \mathcal{L})$ pour la topologie de Zariski sur le schéma formel $\mathfrak{X}$, extension d'un faisceau de $\mathfrak{O}$-modules libres de type fini par un faisceau cohérent. Il est muni d'une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et est construit de telle sorte que $B(k, \mathcal{L})^*$ convenablement tordu est une représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ isomorphe à $H^0(\mathfrak{X},\omega(k,\mathfrak{L}))\otimes L$. Dans cet article, nous calculons $H^0(\mathfrak{X},\omega(k,\mathfrak{L}))\otimes\mathbb{F}$ pour $k$ pair, $4\leq k\leq p+1$ et $\mathrm{val}(\mathfrak{L})\geq 0$. Le résultat principal est le suivant :

***Théorème 1.1.1***. — *Supposons $k$ pair, $4\leq k\leq p+1$ et $\mathrm{val}(\mathfrak{L})\geq 0$. Alors, on a une suite exacte de représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ :*

$$0\to\Big\{f\in\Big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\mathrm{Sym}^{p-3}\mathbb{F}^2\Big)\otimes\omega\circ\det, a(\mathfrak{L})T_pf=f\Big\}\to H^0(\mathfrak{X},\omega(k,\mathfrak{L}))\otimes\mathbb{F}\to$$
$$\Big\{f\in\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}1, T_pf=a(\mathfrak{L})f\Big\}\to 0$$

*où* $a(\mathfrak{L})\stackrel{\text{déf}}{=}(-1)^{\frac{k}{2}-1}\Big(1+\frac{k}{2}\big(\frac{k}{2}-1\big)\big(\mathfrak{L}-2(\sum_{i=1}^{k/2-2}\frac{1}{i})\big)\Big)\in\mathfrak{O}$, *où $\omega$ est le caractère cyclotomique modulo $p$ (vu comme caractère de $\mathbb{Q}_p^\times$), où $\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\mathrm{Sym}^i\mathbb{F}^2$ est l'induite compacte usuelle sans condition de support et où $T_p$ est un certain opérateur de Hecke sur cette induite (voir §1.2).*

Le cas $k=2$ est trivial mais se comporte un peu différemment (cf. [**4**, §4.5]) . Un corollaire immédiat de ce théorème est que, sous les conditions de l'énoncé, $B(k,\mathfrak{L})$ est non nul et admissible au sens de [**11**] (cf. [**4**, Prop.4.4.4]). Mais ces résultats sont maintenant connus sans restriction sur $k$ ou $\mathfrak{L}$ par une méthode complètement différente ([**7**]). Notons que, lorsque $\mathrm{val}(a(\mathfrak{L}))>0$, l'induite de gauche dans la suite exacte est nulle de sorte que l'on a dans ce cas $H^0(\mathfrak{X},\omega(k,\mathfrak{L}))\otimes\mathbb{F}\xrightarrow{\sim}\{f\in\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}1, T_pf=0\}$. Lorsque $k\leq p-1$ (et sous les autres conditions du théorème 1.1.1), la semi-simplifiée modulo $p$ de la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ correspondant à $B(k,\mathfrak{L})$ est, à une torsion convenable près, $\omega\mathrm{nr}(a(\mathfrak{L})^{-1})\oplus\mathrm{nr}(a(\mathfrak{L}))$ si $\mathrm{val}(a(\mathfrak{L}))=0$ (où $\mathrm{nr}(\lambda)(\mathrm{Frob\ arith})\stackrel{\text{déf}}{=}\lambda$) et la représentation irréductible de dimension 2 correspondant au caractère fondamental de niveau 2 si $\mathrm{val}(a(\mathfrak{L}))>0$ (voir [**6**]). Dans les deux cas, on retrouve bien exactement un cas particulier de la correspondance modulo $p$ définie dans [**3**] (dualisée), de sorte que les calculs de cet article sont en quelque sorte l'analogue côté $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ des calculs galoisiens de [**6**] pour $\mathrm{val}(\mathfrak{L})\geq 0$. Le théorème 1.1.1 se déduit aussi par une méthode complètement différente des résultats généraux de [**2**] (combinés avec les calculs de [**6**]) sur cette correspondance modulo $p$. Signalons que nous avons également calculé la représentation $H^0(\mathfrak{X},\omega(k,\mathfrak{L}))\otimes\mathbb{F}$ lorsque $\mathrm{val}(\mathfrak{L})<0$, ce qui fait apparaître des formules analogues à celles du théorème 1.1.1 mais différentes (voir [**6**] pour le côté Galois). Néanmoins, devant la technicité de ces calculs, nous avons finalement renoncé à les rédiger.

Donnons quelques brèves indications sur la preuve du théorème 1.1.1.

Le calcul se fait en deux étapes. Dans la première, on détermine la représentation $H^0(\mathcal{X},\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathbb{F})$, dans la deuxième, on détermine $H^0(\mathcal{X},\omega(k,\mathcal{L}))\otimes\mathbb{F}$. Contrairement au cas purement cohérent de [**13**], ces deux représentations sont ici différentes.

Commençons par $H^0(\mathcal{X},\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathbb{F})$. On calcule d'abord la $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$-représentation $H^0(\mathbb{P}^1,(\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathbb{F})|_{\mathbb{P}^1})$ où $\mathbb{P}^1$ est une composante irréductible de la fibre spéciale de $\mathcal{X}$, ce qui donne (cf. §4.2) :

***Proposition 1.1.2***. — *On a une suite exacte de représentations de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ *:*

$$0\rightarrow\bigoplus_{i=0}^{k/2-2}\mathrm{Sym}^{p-3-2i}\mathbb{F}^2\otimes\omega^{i+1}\circ\det\rightarrow H^0(\mathbb{P}^1,(\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathbb{F})|_{\mathbb{P}^1})\rightarrow\mathrm{ind}_{\mathrm{I}(\mathbb{Z}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)}1\rightarrow 0$$

*où* $\mathrm{I}(\mathbb{Z}_p)$ *est le sous-groupe de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ *des matrices triangulaires supérieures modulo* $p$.

Puis on utilise la suite exacte de Mayer-Vietoris associée au recouvrement de la fibre spéciale de $\mathcal{X}$ (un arbre infini de $\mathbb{P}^1$) par toutes ses composantes irréductibles. La condition de « recollement » aux points d'intersection des composantes fait apparaître une condition faisant intervenir l'opérateur de Hecke $T_p$ et on trouve (cf. §4.4) :

***Théorème 1.1.3***. — *On a une suite exacte de représentations de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *:*

$$0\rightarrow\bigoplus_{i=0}^{k/2-2}\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\mathrm{Sym}^{p-3-2i}\mathbb{F}^2\right)\otimes\omega^{i+1}\circ\det\rightarrow H^0(\mathcal{X},\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathbb{F})\rightarrow$$
$$\left\{f\in\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}1\mid T_pf=a(\mathcal{L})f\right\}\rightarrow 0$$

*où* $a(\mathcal{L})$ *est comme au théorème 1.1.1.*

Passons maintenant à $H^0(\mathcal{X},\omega(k,\mathcal{L}))\otimes\mathbb{F}$. Toutes les sections de $H^0(\mathcal{X},\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathbb{F})$ se relèvent dans $H^0(\mathcal{X},\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$. Mais toutes les sections de $H^0(\mathcal{X},\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$ ne se relèvent pas dans $H^0(\mathcal{X},\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathfrak{O}/p^2)$. Le calcul du défaut de recollement modulo $p^2$ des sections modulo $\pi$ du théorème 1.1.3 montre que, dans $\oplus_{i=0}^{k/2-2}\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\mathrm{Sym}^{p-3-2i}\mathbb{F}^2\big)\otimes\omega^{i+1}\circ\det$, seules se relèvent les sections $f$ de $\big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)\mathbb{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}\mathrm{Sym}^{p-3}\mathbb{F}^2\big)\otimes\omega\circ\det$ satisfaisant $a(\mathcal{L})T_pf=f$. Mais c'est là la seule obstruction, au sens où les sections qui se relèvent modulo $p^2$ se relèvent alors modulo $p^n$ pour tout $n$ (et finalement se relèvent dans $H^0(\mathcal{X},\omega(k,\mathcal{L}))$). On obtient ainsi le théorème 1.1.1.

L'article est organisé comme suit. Dans le paragraphe 2, on rappelle la définition des espaces $B(k)^*$ et $B(k,\mathcal{L})^*$ comme espaces de fonctions sur le demi-plan $p$-adique (§2.1), la définition du schéma formel $\mathcal{X}$ de ce demi-plan (§2.2) puis les calculs de Teitelbaum (§2.3). Dans le paragraphe 3, on définit les faisceaux $\omega(k,\mathcal{L})$ (§3.1) et quelques variantes (§3.2).

Dans le paragraphe 4, après des préliminaires sur les $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$-représentations $\mathrm{Sym}^i\mathbb{F}^2$ pour certains $i$ (§4.1), on détermine les $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$-représentations $H^0(\mathbb{P}^1,(\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathbb{F})|_{\mathbb{P}^1})$ (§4.2) et $H^1(\mathbb{P}^1,(\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathbb{F})|_{\mathbb{P}^1})$ (§4.3), puis $H^0(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathbb{F})$ et $H^1(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathbb{F})$ (§4.4). Dans le paragraphe 5, après des considérations de cohomologie de Čech (§5.1) et quelques calculs préliminaires (§5.2), on détermine le défaut de recollement des sections de $H^0(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathbb{F})$ modulo $p^2$, ce qui définit des classes de Čech dans $\check{H}^1(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$ que l'on identifie (§5.3), puis on en déduit par dévissage la $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-représentation $H^0(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L}))\otimes\mathbb{F}$ (§5.4). Deux appendices rassemblent les calculs les plus techniques de l'article. Le premier donne des résultats combinatoires et les calculs permettant de déterminer la $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$-représentation $H^0(\mathbb{P}^1,(\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathbb{F})|_{\mathbb{P}^1})$, le deuxième donne des calculs de classe de cohomologie de Čech dans $\check{H}^1(\mathbb{P}^1,(\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathbb{F})|_{\mathbb{P}^1})$ utilisés au §5.3.

Les calculs de cet article (pour la plupart présentés en appendice) sont parfois un peu techniques mais ont au moins l'avantage d'être entièrement géométriques. Nous ignorons si l'on peut définir un autre faisceau que $\omega(k,\mathcal{L})$ qui aurait les mêmes sections globales tensorisées par $L$ mais donnerait lieu à des calculs plus simples. Peut-on par exemple définir un tel faisceau cohérent, ou est-on condamné à travailler avec un faisceau analogue à $\omega(k,\mathcal{L})$, c'est-à-dire mélange d'un faisceau cohérent et d'un faisceau de type fini ? Y-a-t'il une théorie intéressante de tels faisceaux « hybrides » ? Peut-on simplifier les calculs en mettant des puissances divisées (par rapport à la fibre spéciale de $\mathfrak{X}$) dans la partie cohérente du faisceau $\omega(k,\mathcal{L})$ ?

Signalons pour finir que les calculs présentés dans cet article ont aussi une valeur historique. Ce sont eux qui ont suggéré, dès juillet 2002 ([**3**],[**4**]), la définition des représentations $B(k,\mathcal{L})$, ou de leur duale $B(k,\mathcal{L})^*=H^0(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L}))\otimes L$.

Le deuxième auteur remercie B. Edixhoven et V. Maillot pour plusieurs discussions.

**1.2. Notations.** — Dans tout cet article, on travaille avec des coefficients dans une extension finie $L$ de $\mathbb{Q}_p$ dont on note $\mathfrak{O}$ l'anneau des entiers, $\pi$ une uniformisante et $\mathbb{F}$ le corps résiduel.

On note $G\overset{\text{déf}}{=}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, $K\overset{\text{déf}}{=}\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$, $I\subset K$ le sous-groupe d'Iwahori, i.e. le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures modulo $p$, et $N$ le normalisateur de $I$ dans $G$. Le groupe $N$ est engendré par les scalaires, $K$ et la matrice $w_p\overset{\text{déf}}{=}\begin{pmatrix}0&1\\p&0\end{pmatrix}$.

On note val la valuation $p$-adique normalisée par $\mathrm{val}(p) = 1$, $|\ | \overset{\text{déf}}{=} p^{-\mathrm{val}}$ la norme $p$-adique et $\chi : G \to \{1, -1\}$ le caractère $\chi(g) \overset{\text{déf}}{=} (-1)^{\mathrm{val}(\det(g))}$. Si $n$, $m$ sont des entiers positifs ou nuls, on note $\sigma(n, m)$ la représentation de dimension $n+1$ de $K$ sur $\mathbb{F}$ donnée par l'action à gauche suivante sur le $\mathbb{F}$-espace vectoriel $\oplus_{i=0}^{n} \mathbb{F}u^i$ :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} u^i \overset{\text{déf}}{=} (ad - bc)^m (au + c)^i (bu + d)^{n-i}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Cette action se factorise en une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$. On étend cette action de manière tacite à $K\mathbb{Q}_p^{\times}$ en faisant agir $p$ par l'identité.

Si $x \in \mathbb{F}_p$, on note $[x] \in \mathbb{Z}_p^{\times}$ le représentant multiplicatif de $x$. Si $H \subset G$ est un sous-groupe ouvert contenant $\mathbb{Q}_p^{\times}$ et $\sigma$ une représentation de dimension finie de $H$ sur un $\mathbb{F}$-espace vectoriel $V$, on note $\mathrm{Ind}_H^G \sigma$ le $\mathbb{F}$-espace vectoriel des fonctions quelconques $f : G \to V$ telles que $f(hg) = h \cdot f(g)$ ($h \in H$, $g \in G$) muni de l'action à gauche de $G$ donnée par $(g \cdot f)(g') \overset{\text{déf}}{=} f(g'g)$. Si $g \in G$ et $v \in V$, on note $[g, v]$ l'unique fonction dans $\mathrm{Ind}_H^G \sigma$ à support dans $Hg^{-1}$ telle que $[g, v](g') \overset{\text{déf}}{=} g'g \cdot v$ si $g'g \in H$. Toute fonction dans $\mathrm{Ind}_H^G \sigma$ s'écrit de manière unique comme une somme (infinie en général) de fonctions $[g, v]$ où $g$ parcourt un système de représentants fixé de $H \backslash G$.

Lorsque $\sigma = \sigma(n, m)$ et $H = K\mathbb{Q}_p^{\times}$, on dispose d'un $G$-entrelacement canonique $T_p$ : $\mathrm{Ind}_H^G \sigma \to \mathrm{Ind}_H^G \sigma$ donné par linéarité sur chaque $[g, v]$ par la formule ([**1**], [**3**]) :

$$T_p([g, v]) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{g'H \in G/H} [gg', \varphi(g'^{-1})(v)]$$

où $\varphi : G \to \mathrm{End}_K(\sigma(n, m))$ est l'unique fonction à support dans $H\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/p \end{smallmatrix}\right)H$ telle que $\varphi(h_1 \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/p \end{smallmatrix}\right) h_2) = h_1 \circ \varphi(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/p \end{smallmatrix}\right)) \circ h_2$ avec $\varphi(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/p \end{smallmatrix}\right))(u^i) = 0$ si $0 < i \leq n$ et $\varphi(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/p \end{smallmatrix}\right))(1) = 1$. On en déduit en particulier la formule :

$$T_p([\mathrm{Id}, 1]) = \sum_{y \in \mathbb{F}_p} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & [y] \end{pmatrix} [\mathrm{Id}, u^n]. \tag{1}$$

On peut munir les représentations $\mathrm{Ind}_H^G \sigma$ d'une topologie « faible » naturelle pour laquelle l'espace sous-jacent est compact et les opérateurs $T_p$ ci-dessus continus. Néanmoins, dans cet article, nous avons pris le parti de ne pas insister sur ces aspects topologiques. Le lecteur scrupuleux pourra vérifier que toutes les applications $G$-équivariantes de cet article sont continues pour cette topologie.

Si $V$ est un $L$-espace vectoriel topologique localement convexe, on note $V^*$ son dual, c'est-à-dire le $L$-espace vectoriel des formes linéaires continues sur $V$.

On note $\mathbb{C}_p$ le complété $p$-adique de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ et, si $\mathcal{L} \in L$, $\log_{\mathcal{L}}$ l'unique logarithme $p$-adique sur $\mathbb{C}_p^\times$ tel que $\log_{\mathcal{L}}(p) \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{L}$. On note $\varepsilon$ le caractère cyclotomique $p$-adique $\mathbb{Q}_p^\times \to \mathbb{Z}_p^\times$ : il envoie $p$ sur 1 et est l'identité sur $\mathbb{Z}_p^\times$.

On note $H_0 \overset{\text{déf}}{=} 0$ et $H_n \overset{\text{déf}}{=} 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$ pour $n$ entier $> 0$. Pour des entiers $n, m$ tels que $0 \leq m \leq n$, on note $\binom{n}{m}$ les coefficients binômiaux habituels. Si $m < n$ ou si $m < 0$, on convient que $\binom{n}{m} = 0$.

## 2. Préliminaires

On rappelle la définition des représentations $B(k)^*$ et $B(k,\mathcal{L})^*$, la construction du modèle formel du demi-plan $p$-adique, et le calcul géométrique (dû à Teitelbaum) de la réduction modulo $\pi$ de $B(k)^*$.

**2.1. Rappels sur les $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-représentations $B(k)^*$ et $B(k,\mathcal{L})^*$.** — Dans ce paragraphe, on rappelle la définition des représentations $p$-adiques $B(k)^*$ et $B(k,\mathcal{L})^*$ de $G$ ([**4**],[**5**]) en termes de fonctions sur le demi-plan $p$-adique.

On munit $\mathbb{C}_p - \mathbb{Q}_p$ de l'action à gauche de $G$ donnée par $z \mapsto z|_g \overset{\text{déf}}{=} \frac{az+c}{bz+d}$ pour $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$. Soit $\mathfrak{W} \subset \mathbb{C}_p - \mathbb{Q}_p$ l'affinoïde des points $z$ tels que $0 < |z| < 1$, $|z - [x]| = 1$ et $|\frac{p}{z} - [x]| = 1$ pour $x \in \mathbb{F}_p^\times$. Pour $g \in G$, on pose $\mathfrak{W}_g \overset{\text{déf}}{=} \{z|_g, z \in \mathfrak{W}\} \subset \mathbb{C}_p - \mathbb{Q}_p$. Les ouverts rigides $\mathfrak{W}_g$ recouvrent $\mathbb{C}_p - \mathbb{Q}_p$ quand $g$ varie. On note $O(k)_{\mathfrak{W}_g}$ le $L$-espace vectoriel des fonctions rigides analytiques $L$-rationnelles $h$ sur $\mathfrak{W}_g$. C'est un espace de Banach pour la norme $\max_{z \in \mathfrak{W}_g} \mid h(z)|$ naturellement muni d'une action à gauche de $g^{-1}Ng$ par $h \mapsto h(z|_{g^{-1}ng})$. Il s'identifie aux fonctions sur $\mathfrak{W}_g$ de la forme $z \mapsto h(z|_{g^{-1}})$ avec $h \in O(k)_{\mathfrak{W}}$. On note $O(k)^0_{\mathfrak{W}}$ une boule unité quelconque de $O(k)_{\mathfrak{W}}$ stable par $N$ et $O(k)^0_{\mathfrak{W}_g} \overset{\text{déf}}{=} \{z \mapsto h(z|_{g^{-1}}), h \in O(k)^0_{\mathfrak{W}}\}$. C'est une boule unité de $O(k)_{\mathfrak{W}_g}$.

On définit $O(k,\mathcal{L})_{\mathfrak{W}}$ comme le $L$-espace vectoriel des fonctions $f : \mathfrak{W} \to \mathbb{C}_p$ de la forme :

$$f(z) = h(z) + \sum_{x \in \mathbb{F}_p} \sum_{i=0}^{k-2} c_{x,i} z^i \log_{\mathcal{L}}(z - [x]) + \sum_{x \in \mathbb{F}_p^\times} \sum_{i=0}^{k-2} d_{x,i} z^i \log_{\mathcal{L}}\big(\frac{p}{z} - [x]\big)$$

avec $h \in O(k)_{\mathfrak{W}}$ et $c_{x,i}$, $d_{x,i} \in L$. C'est encore un espace de Banach car $O(k)_{\mathfrak{W}}$ y est d'indice fini et on note $O(k,\mathfrak{L})^0_{\mathfrak{W}}$ une boule unité quelconque de $O(k,\mathfrak{L})_{\mathfrak{W}}$ stable par $N$ (pour l'action $f \mapsto (z \mapsto f(z|_n))$. Pour $g \in G$, on définit $O(k,\mathfrak{L})_{\mathfrak{W}_g}$ (resp. $O(k,\mathfrak{L})^0_{\mathfrak{W}_g}$) comme le $L$-espace vectoriel (resp. le $\mathfrak{O}$-module) des fonctions $\mathfrak{W}_g \to \mathbb{C}_p$, $z \mapsto f(z|_{g^{-1}})$ avec $f \in O(k,\mathfrak{L})_{\mathfrak{W}}$ (resp. $f \in O(k,\mathfrak{L})^0_{\mathfrak{W}}$). C'est encore naturellement un $L$-espace de Banach (resp. une boule unité). On pose enfin (cf. [**4**, §3 et §4]) :

$$\begin{aligned}
O(k) &\overset{\text{déf}}{=} \left\{f : \mathbb{C}_p - \mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}_p, f|_{\mathfrak{W}_g} \in O(k)_{\mathfrak{W}_g} \forall g \in G\right\}\\
O(k,\mathfrak{L}) &\overset{\text{déf}}{=} \left\{f : \mathbb{C}_p - \mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}_p, f|_{\mathfrak{W}_g} \in O(k,\mathfrak{L})_{\mathfrak{W}_g} \forall g \in G\right\}\\
O(k)^0 &\overset{\text{déf}}{=} \left\{f \in O(k), f|_{\mathfrak{W}_g} \in O(k)^0_{\mathfrak{W}_g} \forall g \in G\right\}\\
O(k,\mathfrak{L})^0 &\overset{\text{déf}}{=} \left\{f \in O(k,\mathfrak{L}), f|_{\mathfrak{W}_g} \in O(k,\mathfrak{L})^0_{\mathfrak{W}_g} \forall g \in G\right\}.
\end{aligned}$$

Les espaces fonctionnels $O(k)$ et $O(k,\mathfrak{L})$ sont naturellement des espaces de Fréchet, tandis que les espaces fonctionnels $O(k)^0$ et $O(k,\mathfrak{L})^0$ sont naturellement des modules compacts (cf. [**4**]). De plus, $O(k)^0 \otimes L$ (resp. $O(k,\mathfrak{L})^0 \otimes L$) est topologiquement isomorphe et de façon $G$-équivariante au dual tordu (muni de la topologie faible) $B(k)^* \otimes \varepsilon^{\frac{k-2}{2}}$ (resp. $B(k,\mathfrak{L})^* \otimes \varepsilon^{\frac{k-2}{2}}$) d'un espace de Banach $p$-adique $B(k)$ (resp. $B(k,\mathfrak{L})$) muni d'une action continue de $G$. En fait, $B(k)$ (resp. $B(k,\mathfrak{L})$) est un $G$-Banach $p$-adique unitaire au sens de [**4**] et [**5**] et admet aussi une description directe qui ne passe pas par le demi-plan $p$-adique (voir [**5**, §3]). Par ailleurs, $B(k)$ s'identifie avec son action de $G$ au complété $p$-adique de la représentation localement algébrique $|\det|^{k/2-1} \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}L^2 \otimes_L$ Steinberg par rapport à un $\mathfrak{O}$-réseau invariant de type fini sur $\mathfrak{O}[G]$ (cf. [**4**, §4]).

**2.2. Rappels sur le modèle formel semi-stable de $\mathbb{C}_p - \mathbb{Q}_p$.** — Dans ce paragraphe, on rappelle brièvement la construction explicite du modèle formel semi-stable du demi-plan $p$-adique.

Chaque $\mathfrak{W}_g$ pour $g \in G$ (cf. §2.1) admet un modèle formel affine naturel $\mathcal{W}_g = \mathrm{Spf}(\mathcal{A}_g)$ sur $\mathrm{Spf}(\mathfrak{O})$ où :

$$\mathcal{A}_g \overset{\text{déf}}{=} \frac{\mathfrak{O}[u_g, v_g]}{(u_g v_g - p)}\left[\frac{1}{1-u_g^{p-1}}, \frac{1}{1-v_g^{p-1}}\right]^{\wedge}$$

($^\wedge$ désigne le complété $p$-adique). Notons $\mathcal{U}_g \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Spf}(\mathfrak{O}[u_g][\frac{1}{u_g-u_g^p}]^\wedge) \subset \mathcal{W}_g$ et $\mathcal{V}_g \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Spf}(\mathfrak{O}[v_g][\frac{1}{v_g-v_g^p}]^\wedge) \subset \mathcal{W}_g$. Les schémas formels $(\mathcal{W}_g)_{g\in G}$ se recollent (pour la topologie de Zariski) en un schéma formel $\mathfrak{X}$ sur $\mathrm{Spf}(\mathfrak{O})$ via les données de recollement suivantes (voir [**12**] pour plus de détails) :

(i) $\mathcal{W}_g \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}_{g'}$, $(u_{g'}, v_{g'}) \mapsto (v_g, u_g)$ si $g'g^{-1} = w_p$ et $(u_{g'}, v_{g'}) \mapsto (\frac{du_g - c}{-bu_g + a}, \frac{d'v_g - c'}{-b'v_g + a'})$ si $g'g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} = w_p \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d'\end{pmatrix} w_p \in I\mathbb{Q}_p^\times$ ;

(ii) $\mathcal{U}_g \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_{g'}$, $u_{g'} \mapsto \frac{du_g-c}{-bu_g+a}$ si $g'g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K\mathbb{Q}_p^\times$ ;

(iii) $\mathcal{V}_g \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_{g'}$, $v_{g'} \mapsto \frac{dv_g-c}{-bv_g+a}$ si $g'g^{-1} = w_p\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}w_p \in w_pK\mathbb{Q}_p^\times w_p$.

Lorsque $g = 1$, on oublie dans la suite l'indice 1 dans $\mathcal{W}_1$, $\mathcal{A}_1$, $u_1$, etc. On a une action à droite de $G$ sur $\mathfrak{X}$ induite par $g : \mathcal{W}_{g'} \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}_{g'g}$, $(u_{g'g}, v_{g'g}) \mapsto (u_{g'}, v_{g'})$. Elle est telle que $\mathcal{W}$ est stable sous l'action de $N$, $\mathcal{U}$ est stable sous l'action de $K\mathbb{Q}_p^\times$ et $\mathcal{V}$ est stable sous l'action de $w_pK\mathbb{Q}_p^\times w_p$. Explicitement, si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K\mathbb{Q}_p^\times$, l'action $g : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ est donnée sur $f \in \mathfrak{O}[u][\frac{1}{u-u^p}]^\wedge$ par $f(u) \mapsto f(\frac{au+c}{bu+d})$ et si $g = w_p\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}w_p \in w_pK\mathbb{Q}_p^\times w_p$, l'action $g : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ est donnée sur $f \in \mathfrak{O}[v][\frac{1}{v-v^p}]^\wedge$ par $f(v) \mapsto f(\frac{av+c}{bv+d})$.

On note $X \overset{\text{déf}}{=} \mathfrak{X} \times_{\mathrm{Spf}(\mathfrak{O})} \mathrm{Spf}(\mathbb{F})$ la fibre spéciale de $\mathfrak{X}$. On voit que $X$ est le changement de base de $\mathbb{F}_p$ à $\mathbb{F}$ d'un arbre infini de $\mathbb{P}^1$, chaque $\mathbb{P}^1$ étant coupé « perpendiculairement » par un $\mathbb{P}^1$ différent en chacun de ses points fermés rationnels sur $\mathbb{F}_p$ (de sorte que chaque $\mathbb{P}^1$ coupe exactement $p+1$ autres $\mathbb{P}^1$). On vérifie que $W_g \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{W}_g \times_{\mathrm{Spf}(\mathfrak{O})} \mathrm{Spf}(\mathbb{F}) = \mathrm{Spec}(A_g)$ où :

$$A_g \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{A}_g \otimes_{\mathfrak{O}} \mathbb{F} = \frac{\mathbb{F}[u_g, v_g]}{(u_g v_g)}\left[\frac{1}{1-u_g^{p-1}}, \frac{1}{1-v_g^{p-1}}\right]$$

est le changement de base de $\mathbb{F}_p$ à $\mathbb{F}$ de l'ouvert égal à deux $\mathbb{P}^1$ se coupant « perpendiculairement » au point $(u_g, v_g) = (0,0)$ privés de leurs autres points définis sur $\mathbb{F}_p$. De même, $U_g \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{U}_g \times_{\mathrm{Spf}(\mathfrak{O})} \mathrm{Spf}(\mathbb{F})$ est le changement de base de $\mathbb{F}_p$ à $\mathbb{F}$ du $\mathbb{P}^1$ « horizontal » de $W_g$ privé de tous ses points définis sur $\mathbb{F}_p$ et $V_g \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{V}_g \times_{\mathrm{Spf}(\mathfrak{O})} \mathrm{Spf}(\mathbb{F})$ est le changement de base de $\mathbb{F}_p$ à $\mathbb{F}$ du $\mathbb{P}^1$ « vertical » privé de ses points définis sur $\mathbb{F}_p$.

On note dans la suite $C$ une composante irréductible quelconque de $X$ et $P$ un point singulier quelconque de $X$. On appelle « ouvert central » l'ouvert affine $W = \mathrm{Spec}(A_1) = \mathrm{Spec}(A)$ et « composante centrale » la composante $C$ associée à la variable $u$ de $A$ (en termes d'arbre de Bruhat-Tits, l'ouvert central correspond à l'arête centrale non orientée et la composante centrale au sommet central). Pour chaque $C$, on note $d(C) \in \mathbb{N}$ la distance à la composante centrale, i.e. la longueur de la chaîne de $\mathbb{P}^1$ reliant $C$ à la composante centrale avec la convention $d(\text{composante centrale}) \overset{\text{déf}}{=} 0$.

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau de $\mathfrak{O}$-modules sur $\mathfrak{X}_{\mathrm{Zar}} = X_{\mathrm{Zar}}$, on dit que $\mathcal{F}$ est $G$-équivariant si pour tout $g \in G$ l'isomorphisme $g : \mathfrak{X} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}$ induit des isomorphismes de faisceaux de $\mathfrak{O}$-modules $g^{-1}\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$ vérifiant des relations de composition évidentes que l'on laisse au lecteur. Pour un tel faisceau, les groupes de cohomologie $H^i(\mathfrak{X}, \mathcal{F}) \overset{\text{déf}}{=} H^i(\mathfrak{X}_{\mathrm{Zar}}, \mathcal{F}) =$

$H^i(X,\mathcal{F}) \overset{\text{déf}}{=} H^i(X_{\text{Zar}},\mathcal{F})$ sont alors munis d'une action à gauche $\mathfrak{O}$-linéaire de $G$. Rappellons enfin que $X$ étant un schéma séparé, pour définir un faisceau sur $\mathcal{X}_{\text{Zar}} = X_{\text{Zar}}$ il suffit de le définir sur les ouverts affines de $X$.

**2.3. Rappels sur les résultats de Teitelbaum.** — Dans ce paragraphe, on rappelle le calcul cohomologique ([**13**]) pour $k \geq 4$ pair de la réduction modulo $\pi$ (et aussi modulo $p$) de $B(k)^*$.

On note $\omega$ le faisceau inversible sur $\mathcal{X}_{\text{Zar}}$ des « différentielles régulières », c'est-à-dire l'unique faisceau cohérent tel que $\Gamma(\text{Spf}(\mathcal{A}_g),\omega) \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{A}_g\frac{du_g}{u_g} = \mathcal{A}_g\frac{dv_g}{v_g}$ pour tout $g \in \text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\omega^n$ la puissance tensorielle $n$-ième de $\omega$. Les faisceaux $\omega^n$ sont $G$-équivariants de sorte que les groupes de cohomologie $H^i(\mathcal{X},\omega^n)$ sont munis d'une action $\mathfrak{O}$-linéaire de $G$.

***Théorème 2.3.1.*** — *Soit $k$ un entier pair positif et non nul.*
*(i) La $G$-représentation $H^0(\mathcal{X},\omega^{k/2})$ est un $\mathfrak{O}$-réseau invariant dans l'espace de Banach dual $B(k)^* \otimes \varepsilon^{\frac{k-2}{2}}$ (cf. §2.1).*
*(ii) On a $H^1(\mathcal{X},\omega^{k/2}) = 0$.*

*Démonstration.* — Le (i) résulte de [**13**, Theorem 17] (voir aussi [**9**, Theorem 4.2]) et de [**4**, Proposition 4.3.5 et Proposition 4.6.1] (on peut aussi procéder comme dans la proposition 3.1.2). Le (ii) est démontré dans [**13**, Corollary 24] (voir aussi [**9**, Theorem 2.1]). □

On note $\overline{\omega} \overset{\text{déf}}{=} \omega \otimes_{\mathfrak{O}} \mathbb{F}$ qui s'identifie au faisceau $G$-équivariant inversible des (vraies) différentielles régulières sur $X$ (cf. [**13**]) et, pour $k$ positif et pair, $\overline{\omega}^{k/2}$ la puissance tensorielle $k/2$-ième de $\overline{\omega}$. Si $C$ (resp. $P$) est une composante irréductible de $X$ (resp. un point singulier de $X$), on note $\overline{\omega}^{k/2}|_C \overset{\text{déf}}{=} i^*\overline{\omega}^{k/2}$ (resp. $\overline{\omega}^{k/2}|_P \overset{\text{déf}}{=} i^*\overline{\omega}^{k/2}$) où $i$ est l'immersion fermée $C \hookrightarrow X$ (resp. $P \hookrightarrow X$) et $i^*$ est au sens des faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules. Par exemple $\overline{\omega}^{k/2}|_P = \mathbb{F}(\frac{du_g}{u_g})^{k/2} = \mathbb{F}(\frac{dv_g}{v_g})^{k/2}$ pour $g \in G$ convenable. On a de plus une suite exacte évidente de faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules :

$$0 \to \overline{\omega}^{k/2} \to \prod_{i:C\hookrightarrow X} i_*(\overline{\omega}^{k/2}|_C) \to \prod_{i:P\hookrightarrow X} i_*(\overline{\omega}^{k/2}|_P) \to 0 \tag{2}$$

où la flèche $\overline{\omega}^{k/2} \to \prod i_*(\overline{\omega}^{k/2}|_C)$ est induite par les restrictions sur les diverses composantes irréductibles de $X$ et la flèche $\prod i_*(\overline{\omega}^{k/2}|_C) \to \prod i_*(\overline{\omega}^{k/2}|_P)$ est induite par les restrictions sur les divers points singuliers de $X$ multipliées par $(-1)^{d(C)}$ (pour chaque composante $C$).

***Remarque 2.3.2.*** — L'action naturelle de $G$ sur le faisceau $\prod i_*(\overline{\omega}^{k/2}|_P)$ dans (2) (induite par $g : (du_g/u_g)^{k/2} \mapsto (du/u)^{k/2}$) doit être tordue par le caractère $\chi$ pour que la suite (2) soit $G$-équivariante.

On suppose maintenant et jusqu'à la fin de ce paragraphe $k \geq 4$ et $k$ pair. Soit $D \stackrel{\text{déf}}{=} \amalg P$ le diviseur des points singuliers de $X$ et $\overline{\omega}^{k/2}(1) \stackrel{\text{déf}}{=} \overline{\omega}^{k/2}(-D)$ le sous-faisceau $G$-équivariant inversible de $\overline{\omega}^{k/2}$ des différentielles s'annulant aux points singuliers. On définit comme précédemment $\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C \stackrel{\text{déf}}{=} i^*(\overline{\omega}^{k/2}(1))$ si $i : C \hookrightarrow X$ et les restrictions induisent dans ce cas un isomorphisme $G$-équivariant :

$$\overline{\omega}^{k/2}(1) \xrightarrow{\sim} \prod_{i:C\hookrightarrow X} i_*(\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C). \tag{3}$$

On a de plus les deux suites exactes, respectivement $K$-équivariante et $G$-équivariante :

$$0 \to \overline{\omega}^{k/2}(1)|_C \to \overline{\omega}^{k/2}|_C \to \prod_{i:P\hookrightarrow C} i_*(\overline{\omega}^{k/2}|_P) \to 0 \tag{4}$$

$$0 \to \overline{\omega}^{k/2}(1) \to \overline{\omega}^{k/2} \to \prod_{i:P\hookrightarrow X} i_*(\overline{\omega}^{k/2}|_P) \to 0 \tag{5}$$

où le produit dans (4) est sur les points singuliers $P$ de $X$ contenus dans $C$ et dans (5) sur les points singuliers $P$ de $X$.

***Lemme 2.3.3.*** — *On a* $H^1(X, \overline{\omega}^{k/2}) = H^1(X, \overline{\omega}^{k/2}(1)) = H^1(C, \overline{\omega}^{k/2}(1)|_C) = 0$.

*Démonstration.* — La nullité des deux premiers est démontrée dans [**13**, Lemma 28] et [**9**, Theorem 2.1]. Pour le dernier, on a $\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C \simeq \mathcal{O}_C((k/2-1)(p+1)-k)$ et $H^1(C, \mathcal{O}_C((k/2-1)(p+1)-k)) = 0$ car $(k/2-1)(p+1)-k \geq -1$ si $k \geq 4$. □

Du lemme 2.3.3 et de (2), (3), (4) et (5), on déduit immédiatement :

***Corollaire 2.3.4.*** — *(i) On a un isomorphisme $G$-équivariant* $H^0(\mathcal{X}, \omega^{k/2}) \otimes_{\mathfrak{O}} \mathbb{F} \xrightarrow{\sim} H^0(X, \overline{\omega}^{k/2})$.
*(ii) Pour chaque composante $C$, on a une suite exacte :*

$$0 \to H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}(1)|_C) \to H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}|_C) \to \prod_{P\in C} H^0(P, \overline{\omega}^{k/2}|_P) \to 0.$$

*(iii) On a un diagramme commutatif de suites exactes de $G$-représentations :*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & \prod_{P\in X} H^0(P,\overline{\omega}^{k/2}|_P) & \to & \prod_C \prod_{P\in C} H^0(P,\overline{\omega}^{k/2}|_P) & \to & \prod_{P\in X} H^0(P,\overline{\omega}^{k/2}|_P) & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & H^0(X,\overline{\omega}^{k/2}) & \to & \prod_C H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}|_C) & \to & \prod_{P\in X} H^0(P,\overline{\omega}^{k/2}|_P) & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & H^0(X,\overline{\omega}^{k/2}(1)) & \to & \prod_C H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C) & \to & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

*où les deux surjections de droite sont les restrictions multipliées par $(-1)^{d(C)}$ (comparer avec la remarque 2.3.2).*

Nous allons préciser les $K$-représentations et $G$-représentations supportées par certains des groupes du corollaire 2.3.4.

***Proposition 2.3.5***. — *(i) Soit $C$ la composante centrale et $n_k \overset{\text{déf}}{=} (p-1)(k/2-1)-2$. L'application :*

$$\frac{u^i(du)^{k/2}}{(u-u^p)^{(k-2)/2}} \mapsto u^i,\ 0 \leq i \leq n_k$$

*induit un isomorphisme $K$-équivariant :*

$$H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C) \xrightarrow{\sim} \sigma(n_k,1).$$

*(ii) L'application :*

$$\prod_{C\hookrightarrow X} H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C) \to \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$$

*qui envoie $(s_g(u_g))_{g\in J}$ où $J$ est un système de représentants quelconque de $K\mathbb{Q}_p^\times\backslash G$ sur l'unique fonction $f$ dans l'induite telle que $f(g) = s_g(u)$ pour tout $g \in J$ induit via (i) un isomorphisme $G$-équivariant :*

$$\prod_{C\hookrightarrow X} H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G \sigma(n_k,1).$$

*Démonstration.* — Voir [**13**, Proposition 27] et aussi [**9**, §3]. Notons que $p \in \mathbb{Q}_p^\times$ agit trivialement sur $H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ et que l'application définie en (ii) ne dépend bien sûr pas du choix de $J$. □

On en déduit par ce qui précède :

***Corollaire 2.3.6***. — *On a un isomorphisme de $G$-représentations $H^0(X,\overline{\omega}^{k/2}(1)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G \sigma(n_k,1)$.*

***Lemme 2.3.7.*** — *On a une suite exacte $G$-équivariante, scindée si $p > 2$ :*

$$0 \to \mathrm{Ind}_N^G 1 \to \mathrm{Ind}_{I\mathbb{Q}_p^\times}^G 1 \to \mathrm{Ind}_N^G \chi \to 0. \tag{6}$$

*Démonstration.* — Si $f \in \mathrm{Ind}_{I\mathbb{Q}_p^\times}^G 1$, on note $\sigma(f) \overset{\text{déf}}{=} (g \mapsto f(w_p g)) \in \mathrm{Ind}_{I\mathbb{Q}_p^\times}^G 1$. La flèche de gauche dans la suite exacte est l'injection canonique et celle de droite donnée par $f \mapsto f - \sigma(f)$. L'exactitude de la suite (pour tout $p$) est laissée au lecteur. Si $p > 2$, un scindage s'obtient en écrivant $f = \frac{f+\sigma(f)}{2} + \frac{f-\sigma(f)}{2}$. □

***Corollaire 2.3.8.*** — *La suite exacte de $G$-représentations :*

$$0 \to \prod_{P\in X} H^0(P, \overline{\omega}^{k/2}|_P) \to \prod_C \prod_{P\in C} H^0(P, \overline{\omega}^{k/2}|_P) \to \prod_{P\in X} H^0(P, \overline{\omega}^{k/2}|_P) \to 0$$

*du (iii) du corollaire 2.3.4 est isomorphe à la suite exacte (6) tordue par $\chi^{k/2}$.*

*Démonstration.* — L'application $\prod_C \prod_{P\in C} H^0(P, \overline{\omega}^{k/2}|_P) \to \mathrm{Ind}_{I\mathbb{Q}_p^\times}^G \mathbb{F}(\frac{du}{u})^{k/2}$ qui envoie $(c_g(\frac{du_g}{u_g})^{k/2})_{g\in J}$ où $J$ est un système de représentants quelconque de $I\mathbb{Q}_p^\times\backslash G$ et $c_g \in \mathbb{F}$ sur l'unique fonction $f$ dans l'induite telle que $f(g) = c_g(\frac{du}{u})^{k/2}$ pour tout $g \in J$ induit un isomorphisme $G$-équivariant indépendant de $J$ :

$$\prod_C \prod_{P\in C} H^0(P, \overline{\omega}^{k/2}|_P) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{I\mathbb{Q}_p^\times}^G 1 \simeq \chi^{k/2} \otimes \mathrm{Ind}_{I\mathbb{Q}_p^\times}^G 1.$$

On définit de manière similaire un isomorphisme $G$-équivariant $\prod_{P\in X} H^0(P, \overline{\omega}^{k/2}|_P) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_N^G \chi^{k/2}$ et la commutation du diagramme avec la suite exacte (6) est laissée au lecteur. Noter que la torsion par $\chi$ dans le terme de droite de (6) est bien compatible avec la torsion par $\chi$ de la remarque 2.3.2. □

La colonne verticale de gauche dans le (iii) du corollaire 2.3.4 se récrit donc :

***Corollaire 2.3.9.*** — *On a une suite exacte $G$-équivariante :*

$$0 \to \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G \sigma(n_k, 1) \to H^0(\mathfrak{X}, \omega^{k/2}) \otimes_{\mathfrak{O}} \mathbb{F} \to \mathrm{Ind}_N^G \chi^{k/2} \to 0.$$

Nous reprendrons cette suite exacte au §4.1.

## 3. Définition des faisceaux

**3.1. Les faisceaux $\omega(k, \mathfrak{L})$ et $\overline{\omega}(k, \mathfrak{L})$.** — Dans ce paragraphe, on définit pour $2 \leq k \leq p+1$, $k$ pair et $\mathfrak{L} \in L$ un faisceau $G$-équivariant de $\mathfrak{O}$-modules $\omega(k, \mathfrak{L})$ sur $\mathfrak{X}_{\mathrm{Zar}} = X_{\mathrm{Zar}}$ muni d'un morphisme $\mathfrak{O}$-linéaire $G$-équivariant $\omega(k, \mathfrak{L}) \to \omega^{k/2}$. On montre que les sections globales $H^0(\mathfrak{X}, \omega(k, \mathfrak{L}))$ sont isomorphes à un $\mathfrak{O}$-réseau invariant dans $B(k, \mathfrak{L})^* \otimes \varepsilon^{\frac{k-2}{2}}$.

Soit $(\frac{u_g}{du_g})^{k/2-1}$ (resp. $(\frac{v_g}{dv_g})^{k/2-1}$) l'unique section de $\omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathcal{W}_g) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_g}(\omega^{\frac{k}{2}-1}(\mathcal{W}_g), \mathcal{A}_g)$ telle que $\langle(\frac{u_g}{du_g})^{k/2-1}, (\frac{du_g}{u_g})^{k/2-1}\rangle = 1$ (resp. $\langle(\frac{v_g}{dv_g})^{k/2-1}, (\frac{dv_g}{v_g})^{k/2-1}\rangle = 1$) avec la convention $(\frac{u_g}{du_g})^{k/2-1} = 1$ (resp. $(\frac{v_g}{dv_g})^{k/2-1} = 1$) si $k = 2$. On a $(\frac{u_g}{du_g})^{k/2-1} = (-1)^{k/2-1}(\frac{v_g}{dv_g})^{k/2-1}$. On note aussi $\frac{1}{du_g^{k/2-1}}$ (resp. $\frac{1}{dv_g^{k/2-1}}$) l'unique section de $\omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathcal{U}_g)$ (resp. $\omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathcal{V}_g)$) telle que $\left\langle \frac{1}{du_g^{k/2-1}}, du_g^{k/2-1} \right\rangle = 1$ (resp. $\left\langle \frac{1}{dv_g^{k/2-1}}, dv_g^{k/2-1} \right\rangle = 1$) avec encore $\frac{1}{du_g^{k/2-1}} = 1$ (resp. $\frac{1}{dv_g^{k/2-1}} = 1$) si $k = 2$.

Soit $[\mathfrak{L}^{-1}] \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } \mathrm{val}(\mathfrak{L}) \geq 0 \\ \mathfrak{L}^{-1} & \text{si } \mathrm{val}(\mathfrak{L}) < 0 \end{cases}$, de sorte que l'on a toujours $[\mathfrak{L}^{-1}] \in \mathfrak{O}$ et $[\mathfrak{L}^{-1}]\mathfrak{L} \in \mathfrak{O}$. Dans la définition des $\mathfrak{O}$-modules ci-dessous, on convient que $\sum_{i=0}^{j} \overset{\text{déf}}{=} 0$ si $j < 0$. On définit pour $g \in G$ les $\mathfrak{O}$-modules :

$$\begin{aligned}\omega(k,\mathfrak{L})(\mathcal{W}_g) \overset{\text{déf}}{=} \omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathcal{W}_g) &\oplus \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\bigoplus_{i=0}^{k-2} \mathfrak{O}\cdot[\mathfrak{L}^{-1}]\left(\log_{\mathfrak{L}}(u_g - [x]) + \sum_{j=1}^{k/2-2-i} \frac{([x]^{-1}u_g)^j}{j}\right)\frac{u_g^i}{du_g^{k/2-1}} \\ &\oplus \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\bigoplus_{i=0}^{k-2} \mathfrak{O}\cdot[\mathfrak{L}^{-1}]\left(\log_{\mathfrak{L}}(v_g - [x]) + \sum_{j=1}^{k/2-2-i} \frac{([x]^{-1}v_g)^j}{j}\right)\frac{v_g^i}{dv_g^{k/2-1}} \\ &\oplus \bigoplus_{i=k/2-1}^{k-2} \mathfrak{O}\cdot[\mathfrak{L}^{-1}]\log_{\mathfrak{L}}(u_g)\frac{u_g^i}{du_g^{k/2-1}} \\ &\oplus \bigoplus_{i=k/2}^{k-2} \mathfrak{O}\cdot[\mathfrak{L}^{-1}]\log_{\mathfrak{L}}(v_g)\frac{v_g^i}{dv_g^{k/2-1}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega(k,\mathfrak{L})(\mathcal{U}_g) &\overset{\text{déf}}{=} \omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathcal{U}_g) \oplus \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p}\bigoplus_{i=0}^{k-2} \mathfrak{O}\cdot[\mathfrak{L}^{-1}]\log_{\mathfrak{L}}(u_g - [x])\frac{u_g^i}{du_g^{k/2-1}} \\ \omega(k,\mathfrak{L})(\mathcal{V}_g) &\overset{\text{déf}}{=} \omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathcal{V}_g) \oplus \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p}\bigoplus_{i=0}^{k-2} \mathfrak{O}\cdot[\mathfrak{L}^{-1}]\log_{\mathfrak{L}}(v_g - [x])\frac{v_g^i}{dv_g^{k/2-1}}.\end{aligned}$$

Pour le moment, les formules à droite avec des $\log_{\mathfrak{L}}$ sont juste des symboles formels qui vont prendre leur sens avec les flèches de restriction et les flèches de recollement. Si $\mathcal{Z}_g \subseteq \mathcal{W}_g$ est un ouvert affine tel que $\mathcal{Z}_g$ n'est inclus ni dans $\mathcal{U}_g$ ni dans $\mathcal{V}_g$, on pose :

$$\omega(k,\mathfrak{L})(\mathcal{Z}_g) \overset{\text{déf}}{=} \omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathcal{Z}_g) \oplus_{\omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathcal{W}_g)} \omega(k,\mathfrak{L})(\mathcal{W}_g).$$

Si $\mathcal{Z}_g \subseteq \mathcal{U}_g$ est un ouvert affine non vide, on pose :

$$\omega(k,\mathfrak{L})(\mathcal{Z}_g) \overset{\text{déf}}{=} \omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathcal{Z}_g) \oplus_{\omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathcal{U}_g)} \omega(k,\mathfrak{L})(\mathcal{U}_g)$$

et si $\mathcal{Z}_g \subseteq \mathcal{V}_g$ est un ouvert affine non vide, on pose :

$$\omega(k,\mathfrak{L})(\mathcal{Z}_g) \overset{\text{déf}}{=} \omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathcal{Z}_g) \oplus_{\omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathcal{V}_g)} \omega(k,\mathfrak{L})(\mathcal{V}_g).$$

Soit $\mathcal{Z}_g \subseteq \mathcal{W}_g$ un ouvert affine qui n'est ni dans $\mathcal{U}_g$ ni dans $\mathcal{V}_g$, on définit une application de $\mathfrak{O}$-modules $\omega(k,\mathcal{L})(\mathcal{Z}_g) \to \omega(k,\mathcal{L})(\mathcal{Z}_g \cap \mathcal{U}_g)$ comme la restriction usuelle sur le faisceau $\omega^{-\frac{k-2}{2}}$ et comme suit sur les « symboles » :

$$[\mathcal{L}^{-1}]\left(\log_{\mathcal{L}}(u_g-[x])+\sum_{j=1}^{k/2-2-i}\frac{([x]^{-1}u_g)^j}{j}\right)\frac{u_g^i}{du_g^{k/2-1}} \mapsto [\mathcal{L}^{-1}]\left(\sum_{j=1}^{k/2-2-i}\frac{([x]^{-1}u_g)^j}{j}\right)\frac{u_g^i}{du_g^{k/2-1}} \oplus [\mathcal{L}^{-1}]\log_{\mathcal{L}}(u_g-[x])\frac{u_g^i}{du_g^{k/2-1}}$$

$$[\mathcal{L}^{-1}]\left(\log_{\mathcal{L}}(v_g-[x])+\sum_{j=1}^{k/2-2-i}\frac{([x]^{-1}v_g)^j}{j}\right)\frac{v_g^i}{dv_g^{k/2-1}} \mapsto (-1)^{k/2-1}[\mathcal{L}^{-1}]\left(\sum_{j\geq\frac{k}{2}-1-i}\frac{p^{j+i-\frac{k-2}{2}}}{j[x]^j u_g^j}\right)\times\frac{u_g^{k-2-i}}{du_g^{k/2-1}}$$

$$\begin{aligned}[\mathcal{L}^{-1}]\log_{\mathcal{L}}(u_g)\frac{u_g^i}{du_g^{k/2-1}} &\mapsto [\mathcal{L}^{-1}]\log_{\mathcal{L}}(u_g)\frac{u_g^i}{du_g^{k/2-1}}\\ [\mathcal{L}^{-1}]\log_{\mathcal{L}}(v_g)\frac{v_g^i}{dv_g^{k/2-1}} &\mapsto (-1)^{k/2-1}[\mathcal{L}^{-1}]\mathcal{L}p^{i-\frac{k-2}{2}}\frac{u_g^{k-2-i}}{du_g^{k/2-1}}\\ &\qquad\oplus(-1)^{\frac{k}{2}}[\mathcal{L}^{-1}]\log_{\mathcal{L}}(u_g)p^{i-\frac{k-2}{2}}\frac{u_g^{k-2-i}}{du_g^{k/2-1}}.\end{aligned}$$

Noter que, pour les termes en $v_g$, on a juste écrit $v_g = \frac{p}{u_g}$ et développé $\log_{\mathcal{L}}(\frac{p}{u_g}-[x]) = \log_{\mathcal{L}}(1-\frac{p}{[x]u_g})$. On définit de manière strictement analogue $\omega(k,\mathcal{L})(\mathcal{Z}_g) \to \omega(k,\mathcal{L})(\mathcal{Z}_g\cap\mathcal{V}_g)$ en remplaçant $(u_g,v_g)$ par $(v_g,u_g)$. On vérifie facilement que cela définit un faisceau $\omega(k,\mathcal{L})|_{\mathcal{W}_g}$ sur $\mathcal{W}_{g,\mathrm{Zar}}$ qui est extension d'un faisceau de $\mathfrak{O}$-modules libres de type fini (engendré par les « symboles » avec des $\log_{\mathcal{L}}$) par le faisceau cohérent $\omega^{-\frac{k-2}{2}}|_{\mathcal{W}_g}$.

***Proposition 3.1.1***. — *Les faisceaux $(\omega(k,\mathcal{L})|_{\mathcal{W}_g})_{g\in G}$ se recollent en un faisceau $G$-équivariant $\omega(k,\mathcal{L})$ sur $\mathcal{X}_{\mathrm{Zar}}$ qui est extension d'un faisceau de $\mathfrak{O}$-modules libres de type fini par le faisceau inversible $\omega^{-\frac{k-2}{2}}$.*

*Démonstration*. — Nous allons recoller les $\omega(k,\mathcal{L})|_{\mathcal{W}_g}$ suivant les données de recollement (i), (ii) et (iii) du §2.2.

(i) Soit $(g,g') \in G^2$ tels que $g'g^{-1} = w_p$, $\mathcal{Z}_g \subseteq \mathcal{W}_g$ un ouvert affine qui n'est ni dans $\mathcal{U}_g$ ni dans $\mathcal{V}_g$ et $\mathcal{Z}_{g'} \subseteq \mathcal{W}_{g'}$ l'ouvert affine image par l'isomorphisme $\mathcal{W}_g \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}_{g'}$ du §2.2. On définit un isomorphisme de $\mathfrak{O}$-modules $\omega(k,\mathcal{L})(\mathcal{Z}_{g'}) \xrightarrow{\sim} \omega(k,\mathcal{L})(\mathcal{Z}_g)$ comme l'isomorphisme induit par $\mathcal{Z}_g \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}_{g'}$ sur le faisceau cohérent $\omega^{-\frac{k-2}{2}}$ et comme $(u_{g'},v_{g'}) \mapsto (v_g,u_g)$ dans les logarithmes, en remplaçant $[\mathcal{L}^{-1}]\log_{\mathcal{L}}(v_g)(\frac{v_g}{dv_g})^{k/2-1}$ lorsque ce terme apparaît par $(-1)^{k/2-1}([\mathcal{L}^{-1}]\mathcal{L} - [\mathcal{L}^{-1}]\log_{\mathcal{L}}(u_g))(\frac{u_g}{du_g})^{k/2-1}$. Soit $(g,g') \in G^2$ tels que $g'g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = w_p \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} w_p \in I\mathbb{Q}_p^{\times}$, on définit un isomorphisme de $\mathfrak{O}$-modules $\omega(k,\mathcal{L})(\mathcal{W}_{g'}) \xrightarrow{\sim} \omega(k,\mathcal{L})(\mathcal{W}_g)$ comme l'isomorphisme déjà défini sur $\omega^{-\frac{k-2}{2}}$ et comme $(u_{g'}, v_{g'}) \mapsto (\frac{du_g - c}{-bu_g + a}, \frac{d'v_g - c'}{-b'v_g + a'})$ dans les logarithmes (en les développant). Explicitons le calcul pour les trois types de matrices qui engendrent $I$. Si $g'g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & [y](1+pz) \end{pmatrix}$ avec $y \in \mathbb{F}_p^{\times}$ et $z \in \mathbb{Z}_p$, on développe formellement :

$$\begin{aligned} \log_{\mathcal{L}}([y](1+pz)u_g - [x]) &= \log_{\mathcal{L}}(u_g - [xy^{-1}]) + \log_{\mathcal{L}}\left(1 + pz\frac{u_g}{u_g - [xy^{-1}]}\right) \\ &= \log_{\mathcal{L}}(u_g - [xy^{-1}]) - \sum_{j\geq 1} \frac{p^j(-z)^j u_g^j}{j(u_g - [xy^{-1}])^j} \end{aligned}$$

où $x \in \mathbb{F}_p^{\times}$. Un calcul (formel) donne alors pour $i \in \{0, \cdots, k-2\}$ :

$$\begin{aligned} \log_{\mathcal{L}}([y](1+pz)u_g - [x]) + \sum_{j=1}^{k/2-2-i} \frac{[x^{-1}y]^j(1+pz)^j u_g^j}{j} &= \log_{\mathcal{L}}(u_g - [xy^{-1}]) + \sum_{j=1}^{k/2-2-i} \frac{[x^{-1}y]^j u_g^j}{j} \\ &\quad + \sum_{j_1+j_2 \geq k/2-2-i} * \cdot p^{j_1} u_g^{j_2} \end{aligned}$$

où $* \in \mathcal{A}_g$. En multipliant par $[\mathcal{L}^{-1}]([y](1+pz))^{i-k/2+1} \frac{u_g^i}{du_g^{k/2-1}}$, on obtient bien au final une expression dans :

$$\omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathcal{W}_g) \oplus \mathfrak{O} \cdot [\mathcal{L}^{-1}] \left( \log_{\mathcal{L}}(u_g - [xy^{-1}]) + \sum_{j=1}^{k/2-2-i} \frac{[x^{-1}y]^j u_g^j}{j} \right) \frac{u_g^i}{du_g^{k/2-1}}.$$

On a un calcul similaire avec les termes en $\log_{\mathcal{L}}(v_g - [x])$. Noter que, si $x = 0$ (et $i \geq k/2 - 1$), le calcul devient trivial en écrivant $\log_{\mathcal{L}}([y](1+pz)u_g) = \log_{\mathcal{L}}([y](1+pz)) + \log_{\mathcal{L}}(u_g)$. Si $g'g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ pz & 1 \end{pmatrix}$ avec $z \in \mathbb{Z}_p$, on développe encore formellement :

$$\log_{\mathcal{L}}(u_g - pz - [x]) = \log_{\mathcal{L}}(u_g - [x]) - \sum_{j\geq 1} \frac{p^j z^j}{j(u_g - [x])^j}$$

si $x \neq 0$, et un calcul donne encore pour $i \in \{0, \cdots, k-2\}$ :

$$\begin{aligned} \log_{\mathcal{L}}(u_g - pz - [x]) + \sum_{j=1}^{k/2-2-i} \frac{[x^{-1}]^j(u_g - pz)^j}{j} &= \log_{\mathcal{L}}(u_g - [x]) + \sum_{j=1}^{k/2-2-i} \frac{[x^{-1}]^j u_g^j}{j} \\ &\quad + \sum_{j_1+j_2 \geq k/2-2-i} * \cdot p^{j_1} u_g^{j_2} \end{aligned}$$

avec $* \in \mathcal{A}_g$. En multipliant par $[\mathcal{L}^{-1}] \frac{(u_g - pz)^i}{du_g^{k/2-1}}$ et en développant $(u_g - pz)^i$, on obtient bien après un calcul simple une expression dans :

$$\omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathcal{W}_g) \oplus \bigoplus_{\ell=0}^{i} \mathfrak{O} \cdot [\mathcal{L}^{-1}] \left( \log_{\mathcal{L}}(u_g - [x]) + \sum_{j=1}^{k/2-2-\ell} \frac{[x^{-1}]^j u_g^j}{j} \right) \frac{u_g^{\ell}}{du_g^{k/2-1}}.$$

Si $x = 0$, on écrit pour $i \geq k/2 - 1$ :

$$[\mathcal{L}^{-1}]\log_{\mathcal{L}}(u_g - pz)\frac{(u_g - pz)^i}{du_g^{k/2-1}} = [\mathcal{L}^{-1}]\log_{\mathcal{L}}(u_g)\frac{(u_g - pz)^i}{du_g^{k/2-1}} + [\mathcal{L}^{-1}]\log_{\mathcal{L}}(1 - zv_g)\frac{(u_g - pz)^i}{du_g^{k/2-1}}.$$

En développant $(u_g - pz)^i \frac{1}{du_g^{k/2-1}}$ et en remplaçant $\frac{p^{i-j}u_g^j}{du_g^{k/2-1}}$ dans le développement par $(-1)^{k/2-1}p^{i-k/2+1}\frac{v_g^{k-2-j}}{dv_g^{k/2-1}}$ si $j \leq k/2 - 2$, le premier terme se récrit comme un élément de :

$$\bigoplus_{j=k/2}^{k-2} \mathfrak{O} \cdot ([\mathcal{L}^{-1}]\mathcal{L} - [\mathcal{L}^{-1}]\log_{\mathcal{L}}(v_g))\frac{v_g^j}{dv_g^{k/2-1}} \oplus \bigoplus_{j=k/2-1}^{i} \mathfrak{O} \cdot [\mathcal{L}^{-1}]\log_{\mathcal{L}}(u_g)\frac{u_g^j}{du_g^{k/2-1}}.$$

Pour le deuxième, si $z \in p\mathbb{Z}_p$, on écrit $\log_{\mathcal{L}}(1 - zv_g) = -\sum_{j\geq 1} \frac{z^j v_g^j}{j}$ et si $z \in \mathbb{Z}_p^\times$, on écrit $\log_{\mathcal{L}}(1 - zv_g) = \log_{\mathcal{L}}(z) + \log_{\mathcal{L}}(v_g - z^{-1})$, $\frac{(u_g - pz)^i}{du_g^{k/2-1}} = (-1)^{k/2-1}p^{i-k/2+1}\frac{(1-v_g)^i v_g^{k-2-i}}{dv_g^{k/2-1}}$ puis on corrige $[\mathcal{L}^{-1}]\log_{\mathcal{L}}(v_g - z^{-1})p^{i-k/2+1}\frac{(1-v_g)^i v_g^{k-2-i}}{dv_g^{k/2-1}}$ par des éléments de $\omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathcal{Z}_g)$ de manière à faire apparaître $[\mathcal{L}^{-1}]\left(\log_{\mathcal{L}}(v_g - [x]) + \sum_{j=1}^{\frac{k}{2}-2-\ell}\frac{[x^{-1}]^j v_g^j}{j}\right)\frac{v_g^\ell}{dv_g^{k/2-1}}$ où $x \overset{\text{déf}}{=} z^{-1}$ modulo $p$. On a un calcul similaire avec les termes en $\log_{\mathcal{L}}(v_g - [x])$ que l'on épargne au lecteur. Enfin, si $g'g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $z \in \mathbb{Z}_p$, les calculs sont strictement analogues en échangeant $u_g$ et $v_g$.

(ii) Soit $(g, g') \in G^2$ tels que $g'g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K\mathbb{Q}_p^\times$, $\mathcal{Z}_g \subseteq \mathcal{U}_g$ un ouvert affine et $\mathcal{Z}_{g'} \subseteq \mathcal{U}_{g'}$ l'ouvert affine image par l'isomorphisme $\mathcal{U}_g \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_{g'}$ du §2.2. On définit un isomorphisme de $\mathfrak{O}$-modules $\omega(k, \mathcal{L})(\mathcal{Z}_{g'}) \xrightarrow{\sim} \omega(k, \mathcal{L})(\mathcal{Z}_g)$ comme l'isomorphisme induit par $\mathcal{Z}_g \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}_{g'}$ sur $\omega^{-\frac{k-2}{2}}$ et comme $u_{g'} \mapsto \frac{du_g - c}{-bu_g + a}$ dans les logarithmes (que l'on développe). Les calculs sont analogues au cas (i) en plus simples car il n'y a plus à distinguer entre $x = 0$ et $x \neq 0$.

(iii) Soit $(g, g') \in G^2$ tels que $g'g^{-1} = w_p\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}w_p \in w_pK\mathbb{Q}_p^\times w_p$, $\mathcal{Z}_g \subseteq \mathcal{V}_g$ un ouvert affine et $\mathcal{Z}_{g'} \subseteq \mathcal{V}_{g'}$ l'ouvert affine image par l'isomorphisme $\mathcal{V}_g \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_{g'}$ du §2.2. On définit un isomorphisme de $\mathfrak{O}$-modules $\omega(k, \mathcal{L})(\mathcal{Z}_{g'}) \xrightarrow{\sim} \omega(k, \mathcal{L})(\mathcal{Z}_g)$ comme l'isomorphisme induit par $\mathcal{Z}_g \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}_{g'}$ sur $\omega^{-\frac{k-2}{2}}$ et comme $v_{g'} \mapsto \frac{dv_g - c}{-bv_g + a}$ dans les logarithmes.

Ces isomorphismes de recollement sont compatibles avec les flèches de restriction (vérification formelle) et permettent donc de définir un faisceau $\omega(k, \mathcal{L})$ sur $\mathcal{X}_{\mathrm{Zar}}$ qui est clairement $G$-équivariant. □

En particulier, on a une action $\mathfrak{O}$-linéaire de $G$ sur $H^0(\mathcal{X}, \omega(k, \mathcal{L}))$. Le faisceau $\omega(k, \mathcal{L})$ a été fabriqué pour satisfaire la proposition suivante :

***Proposition 3.1.2***. — *Soit $k$ un entier pair compris entre 2 et $p+1$. La $G$-représentation $H^0(\mathcal{X}, \omega(k, \mathcal{L}))$ est isomorphe à un $\mathfrak{O}$-réseau invariant dans l'espace de Banach dual $B(k, \mathcal{L})^* \otimes \varepsilon^{\frac{k-2}{2}}$ (cf. §2.1).*

*Démonstration.* — Tout élément de $\omega(k,\mathcal{L})(\mathcal{W})$ s'écrit (formellement) de manière unique sous la forme $\frac{s(u)}{du^{k/2-1}}+\frac{t(v)}{dv^{k/2-1}}$ où $s(u)$ (resp. $t(v)$) est somme d'un élément de $\mathcal{A}$ avec uniquement des $u$ (resp. des $v$) et de termes $[\mathcal{L}^{-1}]\left(\log_{\mathcal{L}}(u-[x])+\sum_{j=1}^{k/2-2-i}\frac{([x]^{-1}u)^j}{j}\right)u^i$ ou $[\mathcal{L}^{-1}]\log_{\mathcal{L}}(u)u^i$ (resp. avec $u$ à la place de $v$). À tout élément de $\omega(k,\mathcal{L})(\mathcal{W})$, on associe la fonction $f:\mathfrak{W}\to\mathbb{C}_p,\ z\mapsto s(z)+(-p)^{k/2-1}t(p/z)z^{2-k}$. Il est facile de voir que cela définit un isomorphisme $N$-équivariant entre $\omega(k,\mathcal{L})(\mathcal{W})$ et un $\mathfrak{O}$-réseau ouvert $O(k,\mathcal{L})^0_{\mathfrak{W}}$ stable par $N$ dans le Banach $O(k,\mathcal{L})_{\mathfrak{W}}$ (cf. §2.1). Si $g=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in G$, à tout élément $\frac{s(u_g)}{du_g^{k/2-1}}+\frac{t(v_g)}{dv_g^{k/2-1}}\in\omega(k,\mathcal{L})(\mathcal{W}_g)$ on associe de même une fonction $f:\mathfrak{W}_g\to\mathbb{C}_p,\ z\mapsto(ad-bc)^{1-k/2}(-bz+a)^{k-2}\left(s(\frac{dz-c}{-bz+a})+(-p)^{k/2-1}t(\frac{p(-bz+a)}{dz-c})(\frac{-bz+a}{dz-c})^{k-2}\right)$ qui induit un isomorphisme entre $\omega(k,\mathcal{L})(\mathcal{W}_g)$ et $g^{-1}\cdot O(k,\mathcal{L})^0_{\mathfrak{W}}\subset O(k,\mathcal{L})_{\mathfrak{W}_g}$ (où, si $f\in O(k,\mathcal{L})_{\mathfrak{W}}$, $g^{-1}.f\in O(k,\mathcal{L})_{\mathfrak{W}_g}$ est la fonction $z\mapsto f(z|_{g^{-1}})$). Avec les définitions de $O(k,\mathcal{L})$ et $O(k,\mathcal{L})^0$ données au §2.1, on a donc clairement un isomorphisme $\mathfrak{O}$-linéaire $G$-équivariant :

$$\begin{aligned}H^0(\mathcal{X},\omega(k,\mathcal{L}))&\ \overset{\sim}{\to}\ \{f\in O(k,\mathcal{L})\ \mid\ f|_{\mathfrak{W}_g}\in g^{-1}\cdot O(k,\mathcal{L})^0_{\mathfrak{W}}\ \forall\, g\in G\}\\&=\ O(k,\mathcal{L})^0\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Soit $\mathcal{P}(k)\subset\omega^{-\frac{k-2}{2}}$ l'unique sous-faisceau $G$-équivariant tel que, si $\mathcal{Z}_g\subseteq\mathcal{W}_g$ est un ouvert affine non vide, on a :

$$\mathcal{P}(k)(\mathcal{Z}_g)\overset{\text{déf}}{=}\bigoplus_{i=k/2-1}^{k-2}\mathfrak{O}\frac{u_g^i}{du_g^{k/2-1}}\oplus\bigoplus_{i=k/2}^{k-2}\mathfrak{O}\frac{v_g^i}{dv_g^{k/2-1}}\subset\omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathcal{Z}_g)$$

lorsque $\mathcal{Z}_g$ n'est ni dans $\mathcal{U}_g$ ni dans $\mathcal{V}_g$, $\mathcal{P}(k)(\mathcal{Z}_g)\overset{\text{déf}}{=}\bigoplus_{i=0}^{k-2}\mathfrak{O}\frac{u_g^i}{du_g^{k/2-1}}$ lorsque $\mathcal{Z}_g\subseteq\mathcal{U}_g$ est non vide et $\mathcal{P}(k)(\mathcal{Z}_g)\overset{\text{déf}}{=}\bigoplus_{i=0}^{k-2}\mathfrak{O}\frac{v_g^i}{dv_g^{k/2-1}}$ lorsque $\mathcal{Z}_g\subseteq\mathcal{V}_g$ est non vide.

***Proposition 3.1.3.*** — *La différentiation $k-1$-ième induit un morphisme $\mathfrak{O}$-linéaire $G$-équivariant $\omega(k,\mathcal{L})\to\omega^{k/2}$ de noyau $\mathcal{P}(k)$.*

*Démonstration.* — C'est le même argument que celui à la base de la construction du complexe $\omega^{-k/2+1}\xrightarrow{d^{k-1}}\omega^{k/2}$ en notant que les logarithmes disparaissent en différentiant (la différentiation sur les "logarithmes formels" étant celle naturelle). □

***Remarque 3.1.4.*** — Le lecteur aura remarqué que la définition des faisceaux $\omega(k,\mathcal{L})|_{\mathcal{W}_g}$ et de leur recollement nécessite seulement $k/2-1<p$. Néanmoins, les calculs de cet article sont strictement limités à $k\le p+1$.

On note dans la suite $\overline{\omega}(k,\mathcal{L})\overset{\text{déf}}{=}\omega(k,\mathcal{L})\otimes_{\mathfrak{O}}\mathbb{F}$ le faisceau modulo $\pi$ sur $X_{\mathrm{Zar}}$.

**3.2. Les faisceaux $\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C$ et $\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_P$.** — Dans ce paragraphe, on définit des faisceaux de $\mathbb{F}$-espaces vectoriels $\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C$ (resp. $\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_P$) pour la topologie de Zariski sur une composante $C$ (resp. un point singulier $P$) et on montre que l'on a une suite exacte de faisceaux sur $X_{\mathrm{Zar}}$ : $0 \to \overline{\omega}(k,\mathcal{L}) \to \Pi_C i_*(\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C) \to \Pi_P i_*(\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_P) \to 0$ où $i : C \hookrightarrow X$ (resp. $P \hookrightarrow X$).

Soit $C \simeq \mathbb{P}^1$ une composante de $X$ et $i : C \hookrightarrow X$ l'immersion fermée correspondante. On note $\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C \overset{\text{déf}}{=} i^*(\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}})$. Pour $P \in C$ un point singulier quelconque de $X$, on note $W_P \subset C$ l'ouvert affine $C \setminus \{\text{points singuliers autres que } P\}$ et $u_{g_P}$ une coordonnée sur $C$ nulle au point $P$. On pose :

$$\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C(W_P) \overset{\text{déf}}{=} \overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C(W_P) \oplus \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\bigoplus_{i=0}^{k-2}\mathbb{F}\cdot[\mathcal{L}^{-1}]\left(\log_{\mathcal{L}}(u_{g_P}-x)+\sum_{j=1}^{k/2-2-i}\frac{(x^{-1}u_{g_P})^j}{j}\right)\frac{u_{g_P}^i}{du_{g_P}^{k/2-1}}$$
$$\oplus \bigoplus_{i=\frac{k}{2}-1}^{k-2}\mathbb{F}\cdot[\mathcal{L}^{-1}]\log_{\mathcal{L}}(u_{g_P})\frac{u_{g_P}^i}{du_{g_P}^{k/2-1}}.$$

Si $u_{g'_P}$ est une autre coordonnée sur $C$ nulle au point $P$, on a $u_{g'_P} = \frac{du_{g_P}-c}{-bu_{g_P}+a}$ pour $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in I\mathbb{Q}_p^\times$ et en développant les logarithmes exactement comme dans le (i) de la preuve de la proposition 3.1.1, on voit que l'on reste bien dans $\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C(W_P)$ de sorte que $\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C(W_P)$ ne dépend pas du choix de la coordonnée $u_{g_P}$. Si $Z \subseteq W_P$ est un ouvert affine contenant $P$, on pose :

$$\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C(Z) \overset{\text{déf}}{=} \overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C(Z) \oplus_{\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C(W_P)} \overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C(W_P).$$

Si $Z \subseteq W_P$ est un ouvert affine ne contenant pas $P$ (donc $Z \subseteq C \setminus \{\text{points singuliers}\} = U$), on pose $\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C(Z) \overset{\text{déf}}{=} \overline{\omega}(k,\mathcal{L})(Z)$. Les applications de restriction $\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C(Z) \to \overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C(Z\cap U)$ sont définies comme au §3.1 et permettent par recollement de définir un faisceau de $\mathbb{F}$-espaces vectoriel $\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C$ sur $C$, extension d'un faisceau de $\mathbb{F}$-espaces vectoriels de dimension finie par le faisceau inversible $\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C$. On a de plus une application naturelle de faisceaux $\overline{\omega}(k,\mathcal{L}) \to i_*(\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C)$ définie comme suit sur les ouverts $W_{g_P}$ de $X$ (cf. §2.2) où $g_P \in G$ est tel que $i^{-1}(W_{g_P}) = W_P$ : sur $\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}$, c'est l'application canonique de restriction, sur les termes $u_{g_P}$, c'est l'identité (i.e. on garde la même formule), les termes $[\mathcal{L}^{-1}]\log_{\mathcal{L}}(v_{g_P})\frac{v_{g_P}^i}{dv_{g_P}^{k/2-1}}$ (pour $i \geq k/2$) sont envoyés sur 0 et les termes $[\mathcal{L}^{-1}]\left(\log_{\mathcal{L}}(v_{g_P}-x)+\sum_{j=1}^{k/2-1-i}\frac{(x^{-1}v_{g_P})^j}{j}\right)\frac{v_{g_P}^i}{dv_{g_P}^{k/2-1}}$ pour $x\in\mathbb{F}_p^\times$ sont envoyés sur 0 (noter la sommation jusqu'à $k/2-1-i$ et pas $k/2-2-i$ et voir §3.1 pour la définition de $\overline{\omega}(k,\mathcal{L})(W_{g_P}) = \omega(k,\mathcal{L})(\mathcal{W}_{g_P})\otimes\mathbb{F}$).

Soit $P \in X$ un point singulier, $u_{g_P}$ une coordonnée sur une composante $C$ contenant $P$ qui est nulle au point $P$ et $\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_P \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{F}(\frac{u_{g_P}}{du_{g_P}})^{k/2-1}$. On pose :

$$\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_P \overset{\text{déf}}{=} \overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_P \oplus \mathbb{F}\cdot[\mathcal{L}^{-1}]\log_{\mathcal{L}}(u_{g_P})\frac{u_{g_P}^{k/2-1}}{du_{g_P}^{k/2-1}}$$

qui ne dépend pas du choix de la coordonnée $u_{g_P}$ par les formules de développement du logarithme comme précédemment et en écrivant :

$$[\mathcal{L}^{-1}]\log_{\mathcal{L}}(u_{w_pg_P})\frac{u_{w_pg_P}^{k/2-1}}{du_{w_pg_P}^{k/2-1}} = (-1)^{k/2-1}[\mathcal{L}^{-1}]\mathcal{L}\frac{u_{g_P}^{k/2-1}}{du_{g_P}^{k/2-1}} \oplus (-1)^{k/2}[\mathcal{L}^{-1}]\log_{\mathcal{L}}(u_{g_P})\frac{u_{g_P}^{k/2-1}}{du_{g_P}^{k/2-1}}.$$

On a de même une application naturelle évidente $\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C \to i_*(\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_P)$ où $i: P \hookrightarrow C$ qui est l'application canonique sur $\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}$ et qui, sur les ouverts contenant $P$, envoie les termes $[\mathcal{L}^{-1}]\left(\log_{\mathcal{L}}(u_{g_P}-x) + \sum_{j=1}^{k/2-1-i}\frac{(x^{-1}u_{g_P})^j}{j}\right)\frac{u_{g_P}^i}{du_{g_P}^{k/2-1}}$ pour $x \in \mathbb{F}_p^\times$ sur $0$ (noter la sommation jusqu'à $k/2-1-i$), les termes $[\mathcal{L}^{-1}]\log_{\mathcal{L}}(u_{g_P})\frac{u_{g_P}^i}{du_{g_P}^{k/2-1}}$ pour $i \leq k/2$ sur $0$ et est l'identité sur $\mathbb{F}\cdot[\mathcal{L}^{-1}]\log_{\mathcal{L}}(u_{g_P})\frac{u_{g_P}^{k/2-1}}{du_{g_P}^{k/2-1}}$.

***Proposition 3.2.1***. — *On a une suite exacte naturelle $G$-équivariante de faisceaux de $\mathbb{F}$-espaces vectoriels :*

$$0 \to \overline{\omega}(k,\mathcal{L}) \to \prod_{i:C\hookrightarrow X} i_*(\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C) \to \prod_{i:P\hookrightarrow X} i_*(\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_P) \to 0.$$

*Démonstration*. — Il suffit de montrer que la suite est exacte en restriction à chaque ouvert $W_g$ de $X$ (car ces ouverts recouvrent $X$), ce qui est évident. Noter que, comme au §2.3, $\prod i_*(\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C) \to \prod i_*(\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_P)$ est l'application induite par les restrictions ci-dessus sur les divers points singuliers de $X$ multipliées par $(-1)^{d(C)}$ et que l'action de $G$ sur le faisceau $\prod i_*(\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_P)$ doit être tordue par $\chi$ (voir la remarque 2.3.2). □

## 4. La $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-représentation $H^0(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathbb{F})$ pour $\mathrm{val}(\mathcal{L}) \geq 0$

L'objet de ce paragraphe est le calcul de la $G$-représentation $H^0(X,\overline{\omega}(k,\mathcal{L}))$ pour $4 \leq k \leq p+1$, $k$ pair et $\mathrm{val}(\mathcal{L}) \geq 0$.

**4.1. La $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$-représentation $\sigma(n_k,1)$.** — On commence par l'étude des facteurs de Jordan-Hölder de la $K$-représentation $\sigma(n_k,1)$ (cf. proposition 2.3.5).

Pour $0 \leq n \leq p-1$ et $m$ quelconque, rappelons que la représentation $\sigma(n,m)$ (cf. §1.2) est irréductible (voir par exemple [**1**]). Rappelons aussi les deux lemmes suivants :

***Lemme 4.1.1*** ([**3**]). — *Soit $n \in \{p+1, \cdots, 2p-2\}$. On a une suite exacte de représentations de $K$ :*

$$0 \to \sigma(n-p-1,1) \oplus \sigma(n+1-p,0) \to \sigma(n,0) \to \sigma(2p-n-2,n+1-p) \to 0$$

*où l'injection $\sigma(n-p-1,1) \hookrightarrow \sigma(n,0)$ est donnée par $u^{n-p-1-i} \mapsto (u^p-u)u^{n-p-1-i}$ et où $\sigma(n+1-p,0)$ est la sous-représentation engendrée par $1 \in \sigma(n,0)$.*

***Lemme 4.1.2*** ([**8**]). — *Soit $n \geq 2p-1$ et écrivons $n = j+m(p-1)$ avec $p+1 \leq j \leq 2p-1$. On a une suite exacte de représentations de $K$ :*

$$0 \longrightarrow \sigma(n-p-1,1) \stackrel{\times(u-u^p)}{\longrightarrow} \sigma(n,0) \longrightarrow \sigma(n,0)/\sigma(n-p-1,1) \longrightarrow 0$$

*où $\sigma(n,0)/\sigma(n-p-1,1)$ est isomorphe à $\sigma(j,0)/\sigma(j-p-1,1)$.*

On rappelle que $n_k = (k/2-1)p - k/2 - 1 = (k/2-2)(p+1)+p+1-k$. Si $k=4$, on voit que $\sigma(n_k,1)$ est irréductible et vaut $\sigma(p-3,1)$. Pour $k \geq 6$, on a :

***Lemme 4.1.3***. — *Supposons $6 \leq k \leq p+1$, on a une suite exacte de représentations de $K$ :*

$$0 \longrightarrow \sigma(n-(i+1)(p+1),1) \stackrel{\times(u-u^p)}{\longrightarrow} \sigma(n-i(p+1),0) \longrightarrow \sigma \longrightarrow 0$$

*où $\sigma$ est une extension de $\sigma(2(i+1),p-3-2i)$ par $\sigma(p-3-2i,0)$.*

*Démonstration.* — On écrit $n-i(p+1) = (k/2-3-i)(p-1)+2p-2i-4$. Pour $j = 2p-2i-4$, on a $p+1 \leq j \leq 2p-4$ et, d'après le lemme 4.1.2, on a la suite exacte :

$$0 \to \sigma(n-(i+1)(p+1),1)) \to \sigma(n-i(p+1),0) \to \sigma(j,0)/\sigma(j-p-1,1) \to 0.$$

Par le lemme 4.1.1 appliqué à $\sigma(2p-2i-4,0) = \sigma(j,0)$, on a :

$$0 \to \sigma(p-2i-5,1)) \oplus \sigma(p-3-2i,0) \to \sigma(j,0) \to \sigma(2(i+1),p-3-2i) \to 0$$

avec $\sigma(j-p-1,1) \simeq \sigma(p-2i-5,1)$. On en déduit le résultat annoncé. $\square$

D'après le lemme 4.1.3, les composantes de Jordan-Hölder de $\sigma(n_k,1)$ pour $6 \leq k \leq p+1$ sont donc d'une part $\sigma(p-3,1)$, $\sigma(p-5,2)$ etc. jusqu'à $\sigma(p-3-2(k/2-2),k/2-1)$ et d'autre part $\sigma(2,-1)$, $\sigma(4,-2)$ etc. jusqu'à $\sigma(k-4,2-k/2)$. On a en fait une structure assez simple de la $K$-représentation $\sigma(n_k,1)$ :

***Lemme 4.1.4***. — *Supposons $6 \leq k \leq p+1$, on a une suite exacte de représentations de $K$ :*

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow \sigma(p-3,1) \oplus \sigma(p-5,2) \oplus \cdots \oplus \sigma(p-k+1,k/2-1) \longrightarrow \sigma(n_k,1) \longrightarrow \\ \sigma(2,-1) \oplus \sigma(4,-2) \oplus \cdots \oplus \sigma(k-4,2-k/2) \longrightarrow 0\end{aligned}$$

*où $\sigma(p-3-2i, i+1)$ pour $0 \leq i \leq k/2-2$ est la sous-$K$-représentation de $\sigma(n_k, 1)$ engendrée par $(u-u^p)^i$.*

*Démonstration.* — Soit $n$ un entier positif ou nul de la forme $n = rp - s$ avec $r$ et $s$ entiers tels que $0 < r < s \leq p$, alors le sous-$\mathbb{F}$-espace vectoriel de $\sigma(n, 0)$ engendré sous $K$ par 1 est de dimension $p-(s-r)$ (développer $(bu+d)^n = (bu^p+d)^{r-1}(bu+d)^{p-s}$ et regrouper les mêmes puissances de $b^i d^{n-i}$). En prenant $n = n_k - i(p+1) = (k/2-1-i)p - (k/2+1+i)$ pour $0 \leq i \leq k/2-2$ et en utilisant le lemme 4.1.3, on en déduit que la sous-représentation de $\sigma(n_k, 1)$ engendrée sous $K$ par $(u-u^p)^i$ est de dimension $p-2(i+1)$ et est isomorphe à $\sigma(p-3-2i, i+1)$. La somme directe $\sigma(p-3,1) \oplus \sigma(p-5,2) \oplus \cdots \oplus \sigma(p-k+1, k/2-1)$ est donc une sous-représentation de $\sigma(n_k, 1)$. Le quotient admet les facteurs de Jordan-Hölder restants, et on verra dans la preuve du lemme 4.3.4 qu'il s'agit encore d'une somme directe. $\square$

**4.2. La $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$-représentation $H^0(\mathbb{P}^1, \overline{\omega}(k, \mathcal{L})|_{\mathbb{P}^1})$.** — Dans cette partie, on se place sur la composante centrale $C \simeq \mathbb{P}^1$ de $X$ et on détermine la représentation $H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ de $K$ sous les conditions du §4 en utilisant le §4.1 et la proposition 2.3.5.

Notons $\overline{\omega}^{k/2}|_C \overset{\text{déf}}{=} i^*([\mathcal{L}^{-1}]\overline{\omega}^{k/2})$ (resp. $\overline{\omega}^{k/2}|_P \overset{\text{déf}}{=} i^*(\overline{\omega}^{k/2})$) où $i : C \hookrightarrow X$ (resp. $i : P \hookrightarrow X$). Comme dans la proposition 3.1.3 et sachant que $k-2 \leq p-1$, la différentiation $(k-1)$-ième induit un morphisme $\mathbb{F}$-linéaire $K$-équivariant $\overline{\omega}(k, \mathcal{L})|_C \to \overline{\omega}^{k/2}|_C$ (resp. un morphisme $\mathbb{F}$-linéaire $\overline{\omega}(k, \mathcal{L})|_P \to \overline{\omega}^{k/2}|_P$) de noyau contenu dans $\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C$ (resp. $\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_P$).

***Lemme 4.2.1.*** — *La différentiation $k-1$-ième $\overline{\omega}(k, \mathcal{L})|_C \to \overline{\omega}^{k/2}|_C$ induit une injection de $K$-représentations :*

$$H^0(C, \overline{\omega}(k, \mathcal{L})|_C) \hookrightarrow H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}|_C).$$

*Démonstration.* — Notons $\overline{\mathcal{P}}(k)|_C$ le noyau de $\overline{\omega}(k, \mathcal{L})|_C \to \overline{\omega}^{k/2}|_C$, on a donc une suite exacte :

$$0 \to H^0(C, \overline{\mathcal{P}}(k)|_C) \to H^0(C, \overline{\omega}(k, \mathcal{L})|_C) \to H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}|_C).$$

De plus, $\overline{\mathcal{P}}(k)|_C$ est contenu dans $\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C$. Or $H^0(C, \overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C) = 0$ car $\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C \cong \mathcal{O}_C(-\frac{k-2}{2}(p+1)+k-2)$ et $-\frac{k-2}{2}(p+1)+k-2 < 0$. D'où aussi $H^0(C, \overline{\mathcal{P}}(k)|_C) = 0$ et l'injection voulue. $\square$

Pour déterminer la $K$-représentation $H^0(C, \overline{\omega}(k, \mathcal{L})|_C)$, nous allons déterminer les sections de $H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}|_C)$ qui se relèvent en des sections de $H^0(C, \overline{\omega}(k, \mathcal{L})|_C)$ via l'application du lemme 4.2.1. On note dans la suite $y \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p \cup \{\infty\}$ un point de $C$ défini sur $\mathbb{F}_p$ et $W_y \subset C$ l'ouvert affine $C \setminus \{\text{points définis sur } \mathbb{F}_\mathrm{p} \text{ autres que } y\}$. Rappelons que

$U = C \setminus \{\text{points définis sur } \mathbb{F}_p\}$ (cf. §2.2). On note $u_y$ une coordonnée sur $C$ nulle en $y$ et telle que $u_y|_U = u - y$ si $y \neq \infty$, $u_y|_U = u^{-1}$ si $y = \infty$ (où $u$ est la variable sur $U$, cf. §2.2). Par abus de notation, on note aussi $u = u_0$.

Pour les calculs qui vont suivre, nous utiliserons la description alternative suivante de $\overline{\omega}(k, \mathcal{L})|_C(W_y)$ (où $\mathrm{val}(\mathcal{L}) \geq 0$) :

$$\begin{aligned}\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C(W_y) = \overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C(W_y) &\oplus \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\bigoplus_{i=0}^{k-2}\mathbb{F}\left(\log_{\mathcal{L}}(u_y-x)+\sum_{j=1}^{k/2-2}\frac{(u_yx^{-1})^j}{j}\right)\frac{(u_y-x)^i}{du_y^{k/2-1}}\\ &\oplus \bigoplus_{i=k/2-1}^{k-2}\mathbb{F}(\log_{\mathcal{L}}(u_y))\frac{u_y^i}{du_y^{k/2-1}}\end{aligned}$$

(pour revenir à la description du §3.2, il suffit de développer $(u_y - x)^i$ en facteur des logarithmes à droite et de remarquer que $\frac{u_y^{j+i}}{du_y^{k/2-1}}$ est déjà dans $\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C(W_y)$ pour $j > k/2 - 2 - i$).

Pour $\alpha \in \{1, \cdots, k/2 - 1\}$, considérons les sections $\frac{(du)^{k/2}}{(u-u^p)^\alpha} \in H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ (cf. proposition 2.3.5). En prenant une « primitive $(k-1)$-ième » sur chaque ouvert $W_y$ de la section globale $(k-1-\alpha)!(\alpha-1)!(-1)^{\alpha-1}\frac{(du)^{k/2}}{(u-u^p)^\alpha}$, définissons les sections locales suivantes $s_{\alpha,y} \in H^0(W_y, \overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C)$ pour $y \in \mathbb{F}_p \cup \{\infty\}$ :

$$\begin{aligned}s_{\alpha,\infty} &\stackrel{\text{déf}}{=} (-1)^{k/2-\alpha}u_\infty^{\alpha-1}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\left(\log_{\mathcal{L}}(u_\infty-x)+\sum_{j=1}^{k/2-2}\frac{(u_\infty x^{-1})^j}{j}\right)\frac{((u_\infty-x)x^{-1})^{k-1-\alpha}}{du_\infty^{k/2-1}}\\ s_{\alpha,y} &\stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\left(\log_{\mathcal{L}}(u_y-x)+\sum_{j=1}^{k/2-2}\frac{(u_yx^{-1})^j}{j}\right)\frac{(u_y-x)^{k-1-\alpha}}{du_y^{k/2-1}}+\log_{\mathcal{L}}(u_y)\frac{u_y^{k-1-\alpha}}{du_y^{k/2-1}}\\ &\quad+\sum_{j=1}^{k/2-2}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-\alpha}{j}\frac{u_y^{k-1-\alpha}}{du_y^{k/2-1}}.\end{aligned}$$

***Lemme 4.2.2***. — *Le $(p+1)$-uplet $(s_{\alpha,y})_{y\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)}$ définit une section $s_\alpha \in H^0(C, \overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C)$.*

*Démonstration*. — Il suffit de vérifier que les restrictions $s_{\alpha,y}|_U$ ne dépendent pas de $y$. Les sections locales $s_{\alpha,y}|_U$ se récrivent :

$$\begin{aligned}s_{\alpha,\infty}|_U &= (-1)^{k/2-\alpha}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}u_\infty^{\alpha-1}x^{-k+1+\alpha}\log_{\mathcal{L}}(u_\infty-x)\frac{(u_\infty-x)^{k-1-\alpha}}{du_\infty^{k/2-1}}\\ s_{\alpha,y}|_U &= \sum_{x\in\mathbb{F}_p}\log_{\mathcal{L}}(u_y-x)\frac{(u_y-x)^{k-1-\alpha}}{du_y^{k/2-1}}\end{aligned}$$

car $\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}(\sum_{j=1}^{k/2-2}\frac{(u_\infty x^{-1})^j}{j})\frac{((u_\infty-x)x^{-1})^{k-1-\alpha}}{du_\infty^{k/2-1}}=0$ et $\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}(u_y-x)^{k-1-\alpha}\sum_{j=1}^{k/2-2}\frac{(u_yx^{-1})^j}{j}=-u_y^{k-1-\alpha}\sum_{j=1}^{k/2-2}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-\alpha}{j}$ modulo $p$. On vérifie alors que :

$$s_{\alpha,\infty}|_U=s_{\alpha,y}|_U=\sum_{x\in\mathbb{F}_p}\log_{\mathcal{L}}(u-x)\frac{(u-x)^{k-1-\alpha}}{du^{k/2-1}}\in H^0(U,\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C)$$

d'où le résultat. □

Nous renvoyons à la fin de l'appendice A.2 pour la preuve de la proposition qui suit :

***Proposition 4.2.3***. — *(i) Soit* $2\leq\alpha\leq k/2-1$ *et :*

$$r_\alpha\overset{\text{déf}}{=}\Big(\frac{u^{p-1}}{(u-u^p)^\alpha}+f(u)\Big)(du)^{k/2}\in H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$$

*avec* $f(u)(du)^{k/2}$ *un élément de la sous-représentation :*

$$\sigma(n_k-(k/2-\alpha)(p+1),k/2-\alpha)=\bigoplus_{r=0}^{n_k-(k/2-\alpha)(p+1)}\mathbb{F}\frac{u^r(du)^{k/2}}{(u-u^p)^\alpha}$$

*de* $H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$*. Alors* $r_\alpha$ *n'admet pas d'antécédent dans* $H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C)$ *via l'injection du lemme 4.2.1.*

*(ii) Il existe une section* $r_{k/2}\in H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}|_C)$ *de la forme :*

$$r_{k/2}\overset{\text{déf}}{=}\Big(\frac{1}{u(u-u^p)^{k/2-1}}+f(u)\Big)(du)^{k/2}$$

*avec* $f(u)(du)^{k/2}\in H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ *qui admet un antécédent* $s_{k/2}$ *dans* $H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C)$ *via l'injection du lemme 4.2.1.*

***Corollaire 4.2.4***. — *On a une suite exacte de représentations de* $K$ *:*

$$0\to H\to H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C)\to\mathrm{ind}_I^K\chi^{k/2}\to 0$$

*où* $H\subseteq\sigma(n_k,1)$ *est la sous-*$K$*-représentation (cf. lemme 4.1.4) :*

$$H\overset{\text{déf}}{=}\bigoplus_{i=0}^{k/2-2}\sigma(p-3-2i,i+1).$$

*Démonstration.* — Pour alléger les notations, nous omettons les torsions par les caractères centraux. D'après le lemme 4.1.3, pour $0\leq i\leq k/2-2$, $\sigma(n_k-i(p+1))$ est une sous-représentation de $H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$. Soit $H_i$ son image inverse dans $H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C)$ via l'injection du lemme 4.2.1 (ne pas confondre avec $H_i=1+\cdots+1/i\,!$). Nous allons démontrer par récurrence descendante sur $0\leq i\leq k/2-2$ que $H_i=\oplus_{j=i}^{k/2-2}\sigma(p-3-2j)$. Pour $i=k/2-2$, la sous-représentation $\sigma(p-k+1)$ de $H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ est engendrée par $\frac{(du)^{k/2}}{u-u^p}$ (lemme 4.1.4). Or, par le lemme 4.2.2, il existe une section $s_1\in H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C)$ qui s'envoie sur $\frac{(du)^{k/2}}{u-u^p}$ par l'injection du lemme 4.2.1. On en déduit donc $H_{k/2-2}=\sigma(p-k+1)$. Supposons $0\leq i\leq k/2-3$ et la récurrence établie pour $i+1$. Notons $Q_i$

le conoyau $0 \to H_{i+1} \to H_i \to Q_i \to 0$. On a un diagramme commutatif dont toutes les flèches verticales sont des injections :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & H_{i+1} & \to & H_i & \to & Q_i & \to 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \to & \sigma(n_k-(i+1)(p+1)) & \to & \sigma(n_k-i(p+1)) & \to & \tilde{\sigma}_{n_k,i} & \to 0 \end{array}$$

avec $0 \to \sigma(p-3-2i) \to \tilde{\sigma}_{n_k,i} \to \sigma(2i+2) \to 0$ par le lemme 4.1.3. La section $\frac{(du)^{k/2}}{(u-u^p)^{k/2-1-i}} \in \sigma(n_k-i(p+1)) \subset H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ est un générateur de $\sigma(p-3-2i)$ par le lemme 4.1.4. Or, la section globale $s_{k/2-1-i} \in H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathfrak{L})|_C)$ s'envoie sur $\frac{(du)^{k/2}}{(u-u^p)^{k/2-1-i}}$ par l'injection du lemme 4.2.1 (cf. lemme 4.2.2). On en déduit que $Q_i$ contient $\sigma(p-3-2i)$. Toute section de $\sigma(n_k-i(p+1)) \subset H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ de la forme :

$$\Big(\frac{u^{p-1}}{(u-u^p)^{k/2-1-i}}+f(u)\Big)(du)^{k/2}$$

où $f(u)(du)^{k/2} \in \sigma(n_k-(i+1)(p+1))$ n'a pas d'antécédent dans $H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathfrak{L})|_C)$ d'après le (i) de la proposition 4.2.3. Une telle section s'envoie donc nécessairement vers un élément non nul de $\sigma(2i+2)$ (sinon, elle aurait un antécédent pour un certain $f(u)$ par ce qui précède et la $K$-équivariance des flèches). Comme $\sigma(2i+2)$ est irréductible, aucune section de $\sigma(2i+2)$ ne peut donc se relever dans $H_i$ et $Q_i=\sigma(p-3-2i)$. Comme $H$ est scindé, on a donc $H_i = H_{i+1}\oplus\sigma(p-3-2i) = \oplus_{j=i}^{k/2-2}\sigma(p-3-2j)$ et la récurrence est établie. Enfin, d'après le (ii) de la proposition 4.2.3, il existe une section $r_{k/2} \in H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}|_C)$ de la forme $r_{k/2} = \big(\frac{1}{u(u-u^p)^{k/2-1}}+f(u)\big)(du)^{k/2}$ avec $f(u)(du)^{k/2} \in H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ qui admet un antécédent $s_{k/2}$ dans $H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathfrak{L})|_C)$. De plus, on vérifie facilement que, dans la suite exacte $0 \to H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C) \to H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}|_C) \to \mathrm{ind}_I^K\chi^{k/2} \to 0$ (cf. le (ii) du corollaire 2.3.4), la section $r_{k/2}$ s'envoie vers la fonction $f \in \mathrm{ind}_I^K 1 \simeq \mathrm{ind}_I^K\chi^{k/2}$ telle que $f(g)=1$ si $g \in I$ et $f(g)=0$ sinon, donc vers un générateur de $\mathrm{ind}_I^K\chi^{k/2}$. Ceci achève la preuve. □

Notons que, pour $k=4$, on a un isomorphisme $H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathfrak{L})|_C) \xrightarrow{\sim} H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}|_C)$ puisque, dans ce cas, $\sigma(p-3,1)=\sigma(n_4,1)=H \simeq H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ (cf. proposition 2.3.5).

***Remarque 4.2.5***. — Les formules explicites des sections $s_\alpha$ du lemme 4.2.2 montrent que leurs images par $H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathfrak{L})|_C) \to H^0(P,\overline{\omega}(k,\mathfrak{L})|_P)$ (où $P \in C$ est défini sur $\mathbb{F}_p$, cf. §3.2) sont nulles. On en déduit que la sous-représentation $H$ du corollaire 4.2.4 est dans le noyau de $H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathfrak{L})|_C) \to H^0(P,\overline{\omega}(k,\mathfrak{L})|_P)$.

**4.3. La $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$-représentation $H^1(\mathbb{P}^1,\overline{\omega}(k,\mathfrak{L})|_{\mathbb{P}^1})$.** — On détermine la $K$-représentation $H^1(C,\overline{\omega}(k,\mathfrak{L})|_C)$. On conserve les hypothèses et notations du §4.2.

Soit $\mathcal{I}(k) \subset \overline{\omega}^{k/2}|_C$ le faisceau sur $C$ de $\mathbb{F}$-espaces vectoriels de dimension finie défini comme suit. Pour $W_y \subset C$ et $U \subset C$ comme au §4.2 (où $y \in \mathbb{F}_p \cup \{\infty\}$ est un point de $C$ défini sur $\mathbb{F}_p$), on pose :

$$\mathcal{I}(k)(W_y) \overset{\text{déf}}{=} \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\bigoplus_{i=0}^{k-2}\mathbb{F}\frac{(du_y)^{k/2}}{(u_y-x)^{i+1}} \oplus \bigoplus_{i=0}^{k/2-1}\mathbb{F}\frac{(du_y)^{k/2}}{u_y^{i+1}}$$

$$\mathcal{I}(k)(U) \overset{\text{déf}}{=} \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p}\bigoplus_{i=0}^{k-2}\mathbb{F}\frac{(du)^{k/2}}{(u-x)^{i+1}}.$$

Par un calcul élémentaire, on vérifie que les applications de restriction $(\overline{\omega}^{k/2}|_C)(W_y) \to (\overline{\omega}^{k/2}|_C)(U)$ envoient bien $\mathcal{I}(k)(W_y)$ dans $\mathcal{I}(k)(U)$ (le seul point non évident est lorsque $y=\infty$). De plus, $\mathcal{I}(k)(W_y)$ (resp. $\mathcal{I}(k)(U)$) est stable sous l'action de $I$ (resp. de $K$). Si $Z \subset W_y$ est un ouvert affine contenant $y$, on pose $\mathcal{I}(k)(Z) \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{I}(k)(W_y)$ et si $Z \subset U$ est un ouvert non vide, on pose $\mathcal{I}(k)(Z) \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{I}(k)(U)$. Cela permet de définir un sous-faisceau $K$-équivariant $\mathcal{I}(k)$ de $\overline{\omega}^{k/2}|_C$.

***Lemme 4.3.1***. — *Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, l'inclusion $\mathcal{I}(k) \subset \overline{\omega}^{k/2}|_C$ induit des isomorphismes de $K$-représentations $H^i(C,\mathcal{I}(k)) \xrightarrow{\sim} H^i(C,\overline{\omega}^{k/2}|_C)$. En particulier, on a $H^1(C,\mathcal{I}(k)) =$* 0.

*Démonstration.* — Nous allons montrer que l'inclusion de faisceaux $\mathcal{I}(k) \hookrightarrow \overline{\omega}^{k/2}|_C$ admet un scindage. Définissons en effet un autre sous-faisceau $\mathcal{S}(k) \subset \overline{\omega}^{k/2}|_C$ comme suit :

$$\mathcal{S}(k)(W_y) \overset{\text{déf}}{=} \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\bigoplus_{i\geq k-1}\mathbb{F}\frac{(du_y)^{k/2}}{(u_y-x)^{i+1}} \oplus \bigoplus_{i\geq 0}\mathbb{F}u_y^i(du_y)^{k/2}$$

$$\mathcal{S}(k)(U) \overset{\text{déf}}{=} \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p}\bigoplus_{i\geq k-1}\mathbb{F}\frac{(du)^{k/2}}{(u-x)^{i+1}} \oplus \bigoplus_{i\geq 0}\mathbb{F}u^i(du)^{k/2}.$$

Si $Z \subset W_y$ (resp. $Z \subset U$) est un ouvert affine contenant $y$ (resp. un ouvert affine non vide) défini en inversant un polynôme $f(u_y)$ (resp. $f(u)$) ne s'annulant pas aux points de $\mathbb{F}_p$, on pose $\mathcal{S}(k)(Z) \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{S}(k)(W_y) \oplus \bigoplus_{i\geq 0}\mathbb{F}\frac{(du_y)^{k/2}}{f(u_y)^{i+1}}$ (resp. $\mathcal{S}(k)(Z) \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{S}(k)(U) \oplus \bigoplus_{i\geq 0}\mathbb{F}\frac{(du)^{k/2}}{f(u)^{i+1}}$). Les flèches de restriction $(\overline{\omega}^{k/2}|_C)(W_y) \to (\overline{\omega}^{k/2}|_C)(U)$ envoient encore $\mathcal{S}(k)(W_y)$ dans $\mathcal{S}(k)(U)$ (vérifier pour $y=\infty$) ce qui permet donc de définir un sous-faisceau $\mathcal{S}(k)$ de $\overline{\omega}^{k/2}|_C$ satisfaisant de manière évidente $\mathcal{S}(k) \oplus \mathcal{I}(k) \xrightarrow{\sim} \overline{\omega}^{k/2}|_C$. Comme $H^1(C,\overline{\omega}^{k/2}|_C) = 0$ (car $\overline{\omega}^{k/2}|_C \simeq \mathcal{O}_C(k/2(p+1)-k)$ et $k/2(p+1)-k = k/2(p-1) \geq 0$), on a en particulier $H^1(C,\mathcal{I}(k)) = 0$ d'où $H^1(C,\mathcal{I}(k)) = H^1(C,\overline{\omega}^{k/2}|_C)$. On a déjà calculé que $H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}|_C)$ était engendré sous $K$ par les sections suivantes :

$$\mathbb{F}\frac{(du)^{k/2}}{u(u-u^p)^{k/2-1}} \oplus \bigoplus_{i=0}^{n_k}\mathbb{F}\frac{u^i(du)^{k/2}}{(u-u^p)^{k/2-1}}.$$

Comme toutes ces sections globales sont déjà dans $H^0(C,\mathcal{I}(k))$ qui est stable par $K$, on a $H^0(C,\mathcal{I}(k)) = H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}|_C)$. Enfin, les deux espaces $H^i(C,\overline{\omega}^{k/2}|_C)$ et $H^i(C,\mathcal{I}(k))$ sont nuls pour $i \geq 2$ puisque $C$ est une courbe. □

On peut alors compléter le lemme 4.2.1 par la proposition :

***Proposition 4.3.2***. — *On a une suite exacte longue de cohomologie $K$-équivariante :*

$$0\to H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C)\to H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}|_C)\to H^1(C,\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C)\to H^1(C,\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C)\to 0.$$

*Démonstration*. — Il n'est pas difficile de vérifier que le faisceau de $\mathbb{F}$-espaces vectoriels $(\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C/\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C)$ est canoniquement isomorphe au sous-faisceau $\mathcal{I}(k)$ de $\overline{\omega}^{k/2}|_C$ (un isomorphisme équivariant est donné en dérivant formellement $k-1$ fois les parties avec les logarithmes). En écrivant la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte $0 \to \overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C \to \overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C \to \mathcal{I}(k) \to 0$ et en utilisant les lemmes 4.2.1 et 4.3.1, on a le résultat. □

***Corollaire 4.3.3***. — *On a une suite exacte de représentations de $K$ :*

$$0 \to \sigma(n_k,1)/H \to H^1(C,\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C) \to H^1(C,\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C) \to 0$$

*où $H \subseteq \sigma(n_k,1)$ est défini dans le corollaire 4.2.4.*

*Démonstration*. — Cela résulte de la proposition 4.3.2 et du corollaire 4.2.4. □

Notons que, pour $k=4$, on a un isomorphisme $H^1(C,\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C) \xrightarrow{\sim} H^1(C,\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C)$ puisque $H=\sigma(n_4,1)$.

Comme $\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C \simeq \mathcal{O}_C(k-2-(p+1)(k/2-1)) = \mathcal{O}_C(2-n_k)$ et $\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C \simeq \mathcal{O}_C(n_k)$, on a par dualité de Serre un isomorphisme $K$-équivariant $H^1(C,\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C) \simeq H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)^* \simeq \sigma(n_k,1)^*$. La proposition 4.3.2 donne donc une flèche :

$$\delta : H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C) \to H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)^*,$$

c'est-à-dire une flèche $K$-équivariante $\sigma(n_k,1) \to \sigma(n_k,1)^*$.

***Lemme 4.3.4***. — *L'image de la flèche $\sigma(n_k,1) \to \sigma(n_k,1)^*$ s'identifie dans $\sigma(n_k,1)^*$ au dual de $\sigma(n_k,1)/H$.*

*Démonstration*. — Il faut montrer que, si un élément est dans l'image de $\delta$, son accouplement contre un élément quelconque de $H \subset H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ par la dualité de Serre est nul. On peut vérifier cette nullité par un calcul explicite mais donnons un argument théorique. Lorsque $k<(p+5)/2$, les facteurs de Jordan-Hölder de $\sigma(n_k,1)/H$ sont tous distincts des facteurs de Jordan-Hölder de $H$ (cf. §4.1 pour la liste de ces facteurs), et comme tous ces facteurs irréductibles sont auto-duaux (car le caractère central de $\sigma(n_k,1)$

est trivial), l'image de $\sigma(n_k,1)$ dans $\sigma(n_k,1)^*$ se factorise nécessairement en un isomorphisme $\sigma(n_k,1)/H \xrightarrow{\sim} (\sigma(n_k,1)/H)^*$. Cela démontre au passage que la représentation $\sigma(n_k,1)/H$ est scindée (car ses facteurs de Jordan-Hölder sont distincts pour $k \leq p+1$), i.e. que l'on a un isomorphisme $\sigma(n_k,1)/H \simeq \sigma(2,-1)\oplus\sigma(4,-2)\oplus\cdots\oplus\sigma(k-4,2-k/2)$ pour $k \geq 6$ (cf. lemme 4.1.4). Mais le calcul de résidus (issu de la définition explicite de la dualité de Serre, cf. §B.1) donnant $\langle\delta(s),h\rangle = 0$ pour $s \in H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ et $h \in H \subseteq H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ lorsque $k < (p+5)/2$, i.e. $\langle\delta(s),s_\alpha\rangle = 0$ pour $s_\alpha$ comme au lemme 4.2.2, est un calcul purement combinatoire qui ne voit pas la condition $k < (p+5)/2$ et qui est donc valable pour $4 \leq k \leq p+1$. On en déduit le résultat. □

***Corollaire 4.3.5***. — *La surjection $H^1(C,\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C) \twoheadrightarrow H^1(C,\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C)$ du corollaire 4.3.3 induit un isomorphisme de $K$-représentations $H^* \xrightarrow{\sim} H^1(C,\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C)$.*

Notons que, $H$ étant scindé, on a aussi un isomorphisme $K$-équivariant $H^* \simeq H$.

**4.4. La $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-représentation $H^0(\mathfrak{X},\overline{\omega}(k,\mathcal{L}))$.** — On détermine la $G$-représentation $H^0(X,\overline{\omega}(k,\mathcal{L}))$ (sous les conditions du §4) en combinant le corollaire 4.2.4 avec la proposition 3.2.1.

L'injection $\overline{\omega}(k,\mathcal{L}) \to \prod_{i:C\hookrightarrow X} i_*(\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C)$ (cf. proposition 3.2.1) induit une injection de $G$-représentations :

$$H^0(X,\overline{\omega}(k,\mathcal{L})) \hookrightarrow \prod_{i:C\hookrightarrow X} H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C). \tag{7}$$

Pour $y$ un point de la composante centrale de $X$ défini sur $\mathbb{F}_p$, on note encore $W_y$ l'ouvert de $X$ défini au §2.2 « centré » en $y$ et $(u_y,v_y)$ les coordonnées sur $W_y$. Avec les notations du §2.2, on a $W_y = W_{g_y}$ (et $(u_y,v_y) = (u_{g_y},v_{g_y})$) où $g_y \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix}1&0\\ [y]&1\end{pmatrix} \in K$ si $y \in \mathbb{F}_p$ et $W_\infty = W_{g_\infty}$ (et $(u_\infty,v_\infty) = (u_{g_\infty},v_{g_\infty})$) où $g_\infty \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \in K$. On note également $V_y \overset{\text{déf}}{=} V_{g_y}$ l'ouvert des points non rationnels de la composante « verticale » au point $y$ et on remarque que $U_{g_y} = U$ pour tout $y$. Par abus de notation, on note aussi $u = u_0$ et $v = v_0$.

***Lemme 4.4.1***. — *Soit $\alpha \in \{1,\cdots,k/2-2\}$. La section $s_\alpha \in H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C)$ (cf. lemme 4.2.2) se prolonge par zéro via l'injection (7) en une section $\widetilde{s}_\alpha \in H^0(X,\overline{\omega}(k,\mathcal{L}))$ à support dans la composante centrale.*

*Démonstration.* — On va construire directement une section $\widetilde{s}_\alpha$ dans $H^0(X,\overline{\omega}(k,\mathcal{L}))$ qui s'envoie sur $s_\alpha$ par l'injection (7). On définit des sections locales $\widetilde{s}_{\alpha,y} \in H^0(W_y,\overline{\omega}(k,\mathcal{L}))$

pour $y \in \mathbb{F}_p \cup \{\infty\}$ par les mêmes formules qu'au §4.2 :

$$\widetilde{s}_{\alpha,\infty} \overset{\text{déf}}{=} (-1)^{k/2-\alpha} u_\infty^{\alpha-1} \sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\Big(\log_{\mathcal{L}}(u_\infty - x) + \sum_{j=1}^{k/2-2}\frac{(u_\infty x^{-1})^j}{j}\Big)\frac{((u_\infty-x)x^{-1})^{k-1-\alpha}}{du_\infty^{k/2-1}}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{s}_{\alpha,y} \overset{\text{déf}}{=} & \sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\Big(\log_{\mathcal{L}}(u_y - x) + \sum_{j=1}^{k/2-2}\frac{(u_y x^{-1})^j}{j}\Big)\frac{(u_y-x)^{k-1-\alpha}}{du_y^{k/2-1}} \\ & +\log_{\mathcal{L}}(u_y)\frac{u_y^{k-1-\alpha}}{du_y^{k/2-1}} + \sum_{j=1}^{k/2-2}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-\alpha}{j}\frac{u_y^{k-1-\alpha}}{du_y^{k/2-1}}.\end{aligned}$$

Il suffit de vérifier que les sections locales $\widetilde{s}_{\alpha,y}$ sont telles que $\widetilde{s}_{\alpha,y}|_U$ est indépendant de $y$ et $\widetilde{s}_{\alpha,y}|_{V_y} = 0$ pour tout $y$. Le premier calcul est déjà fait (preuve du lemme 4.2.2). Pour le deuxième, on trouve en utilisant les applications de restriction du §3.1 (i.e. en remplaçant $u_y$ par $p/v_y$ et en développant les logarithmes) :

$$\begin{aligned}\widetilde{s}_{\alpha,\infty}|_{V_\infty} &= (-1)^{\alpha+1}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\frac{x^{-k+1+\alpha}}{p^{k/2-\alpha}}\Big(\log_{\mathcal{L}}(\frac{p}{v_\infty x}-1)+\sum_{i=1}^{k/2-2}\frac{(px^{-1})^i}{iv_\infty^i}\Big)\frac{(p-v_\infty x)^{k-1-\alpha}}{dv_\infty^{k/2-1}} \\ \widetilde{s}_{\alpha,y}|_{V_y} &= (-1)^{k/2-1}p^{k/2-\alpha}\log_{\mathcal{L}}(\frac{p}{v_y})\frac{v_y^{\alpha-1}}{dv_y^{k/2-1}} \\ &\quad +\frac{(-1)^{k/2-1}}{p^{k/2-1}}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\Big(\log_{\mathcal{L}}(\frac{p}{v_y x}-1)+\sum_{i=1}^{k/2-2}\frac{(px^{-1})^i}{iv_y^i}\Big)\frac{(p-v_y x)^{k-1-\alpha}v_y^{\alpha-1}}{dv_y^{k/2-1}} \\ &\quad +(-1)^{k/2-1}p^{k/2-\alpha}\sum_{i=1}^{k/2-2}\frac{(-1)^i}{i}\binom{k-1-\alpha}{i}\frac{v_y^{\alpha-1}}{dv_y^{k/2-1}}\end{aligned}$$

et un calcul facile montre que toutes ces sections locales sont nulles (modulo $p$). □

L'analogue du lemme 4.4.1 pour les sections de $H^0(C, \overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C)$ s'envoyant sur un générateur de $\mathrm{Ind}_I^K \chi^{k/2}$ (cf. corollaire 4.2.4) est plus subtil. Rappelons qu'on a déjà défini un relèvement $s_{k/2} \in H^0(C, \overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C)$ du générateur de $\mathrm{Ind}_I^K \chi^{k/2}$ donné par la fonction identité à support dans $I$ (voir la fin de la preuve du corollaire 4.2.4 et le lemme A.2.2).

De la proposition 3.2.1, on déduit une suite longue de cohomologie $G$-équivariante :

$$\begin{aligned}(8)\ \ 0 \to H^0(X, \overline{\omega}(k,\mathcal{L})) \to \prod_{i:C\hookrightarrow X} H^0(X, i_*(\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C)) \to \prod_{i:P\hookrightarrow X} H^0(X, i_*(\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_P)) \\ \to\ H^1(X, \overline{\omega}(k,\mathcal{L})) \to \prod_{i:C\hookrightarrow X} H^1(X, i_*(\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C)) \to 0\end{aligned}$$

et rappelons que l'action de $G$ sur $\prod_{i:P\hookrightarrow X} H^0(X, i_*(\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_P))$ est l'action naturelle tordue par $\chi$ (cf. remarque 2.3.2). Rappelons aussi que l'action de $K$ sur $H^i(C, \overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C)$, $H^i(C, \overline{\omega}^{k/2}|_C)$ etc. est étendue à $K\mathbb{Q}_p^\times$ en envoyant $p$ vers l'identité.

***Lemme 4.4.2.*** — *(i) On a un isomorphisme G-équivariant :*

$$\prod_{C\hookrightarrow X} H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathfrak{L})|_C) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathfrak{L})|_C)$$

*qui envoie* $(s_g(u_g,v_g))_{g\in J}$ *où* $J$ *est un système de représentants quelconque de* $K\mathbb{Q}_p^\times\backslash G$ *sur l'unique fonction* $f$ *dans l'induite telle que* $f(g)=s_g(u)$ *pour tout* $g\in J$.
*(ii) On a des isomorphismes G-équivariants :*

$$\prod_{P\in X} H^0(P,\overline{\omega}(k,\mathfrak{L})|_P) \xrightarrow{\sim} \chi\otimes \mathrm{Ind}_N^G H^0(P,\overline{\omega}(k,\mathfrak{L})|_P) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_N^G\chi^{k/2}\oplus \mathrm{Ind}_N^G\chi^{k/2+1}$$

*où le premier isomorphisme envoie* $\big(c_g(\frac{u_g}{du_g})^{k/2-1}+d_g\log_{\mathfrak{L}}(u_g)(\frac{u_g}{du_g})^{k/2-1}\big)_{g\in J}$ *où* $J$ *est un système de représentants quelconque de* $N\backslash G$ *et* $c_g,d_g\in\mathbb{F}$ *sur l'unique fonction* $f$ *dans l'induite telle que* $f(g)=c_g(\frac{u}{du})^{k/2-1}+d_g\log_{\mathfrak{L}}(u)(\frac{u}{du})^{k/2-1}$ *pour tout* $g\in J$ *et où le deuxième isomorphisme envoie* $f$ *sur l'unique couple de fonctions* $(h,l)$ *dans les induites de droite tel que* $h(g)=c_g+\frac{1}{2}\mathfrak{L}d_g$ *et* $l(g)=-d_g$.

*Démonstration.* — Le (i) et le premier isomorphisme du (ii) sont laissés au lecteur. Pour le deuxième isomorphisme du (ii), il suffit de remarquer que l'action naturelle de $N$ dans la base $\mathbb{F}(\frac{u}{du})^{k/2-1}\oplus\mathbb{F}\big(\frac{1}{2}\mathfrak{L}-\log_{\mathfrak{L}}(u)\big)(\frac{u}{du})^{k/2-1}$ de $H^0(P,\overline{\omega}(k,\mathfrak{L})|_P)$ réalise un isomorphisme de cette représentation avec $\chi^{k/2-1}\oplus\chi^{k/2}$ (regarder l'action de $w_p$ et utiliser $\log_{\mathfrak{L}}(p)=\mathfrak{L}$). Comme il faut tordre par $\chi$ cette action naturelle (cf. ci-dessus), on en déduit le résultat. □

Notons $\phi:\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathfrak{L})|_C)\to \mathrm{Ind}_N^G\chi^{k/2}\oplus\mathrm{Ind}_N^G\chi^{k/2+1}$ le morphisme induit par la suite exacte longue (8) (et en utilisant le lemme 4.4.2). Par la remarque 4.2.5, $\phi$ se factorise par le quotient $\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G\mathrm{ind}_{I\mathbb{Q}_p^\times}^{K\mathbb{Q}_p^\times}\chi^{k/2}$ de $\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathfrak{L})|_C)$ et définit donc un morphisme $\overline{\phi}:\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G\mathrm{ind}_{I\mathbb{Q}_p^\times}^{K\mathbb{Q}_p^\times}\chi^{k/2}\to\mathrm{Ind}_N^G\chi^{k/2}\oplus\mathrm{ind}_N^G\chi^{k/2+1}$, c'est-à-dire un morphisme :

$$\overline{\phi}:\mathrm{Ind}_N^G\chi^{k/2}\oplus\mathrm{ind}_N^G\chi^{k/2+1}\to\mathrm{Ind}_N^G\chi^{k/2}\oplus\mathrm{ind}_N^G\chi^{k/2+1}$$

via l'isomorphisme du lemme 2.3.7 (car $p>2$).

Rappelons que $\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1$ (resp. $\mathrm{Ind}_N^G 1$) s'identifie au $\mathbb{F}$-espace vectoriel des fonctions à valeurs dans $\mathbb{F}$ définies sur les sommets (resp. les arêtes non orientées) de l'arbre de Bruhat-Tits pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. On note $T_p$ (resp. $U_p$) l'endomorphisme de $\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1$ (resp. $\mathrm{Ind}_N^G 1$) défini par $(T_pf)(s)=\sum_{s'}f(s')$ (resp. $(U_pf)(a)=\sum_{a'}f(a')$), la somme portant sur les $p+1$ sommets (resp. les $2p$ arêtes) adjacents au sommet $s$ (resp. issues de l'arête $a$) ($T_p$ coïncide avec l'endomorphisme déjà noté $T_p$ défini au §1.2). Le lemme suivant est immédiat et laissé au lecteur :

***Lemme 4.4.3.*** — *On a un diagramme commutatif $G$-équivariant :*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & 1 & \to & \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1 & \to & \mathrm{Ind}_N^G 1 & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow {\scriptstyle T_p-1} & & \downarrow {\scriptstyle U_p} & & \\ 0 & \to & 1 & \to & \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1 & \to & \mathrm{Ind}_N^G 1 & \to & 0 \end{array}$$

*où l'application $\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1 \to \mathrm{Ind}_N^G 1$ envoie $f \in \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1$ sur la fonction $a \mapsto f(o(a)) + f(t(a))$ en notant $o(a)$ et $t(a)$ les deux sommets de l'arête $a$.*

***Lemme 4.4.4.*** — *Soit $a(\mathfrak{L}) \overset{\text{déf}}{=} (-1)^{\frac{k}{2}-1}\big(1 + \frac{k}{2}\big(\frac{k}{2}-1\big)\big(\mathfrak{L} - 2H_{k/2-1}\big)\big) \in \mathfrak{O}$ (où $H_i = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{i}$, cf. §1.2). L'endomorphisme $\overline{\phi}$ de $(\mathrm{Ind}_N^G 1 \oplus \mathrm{ind}_N^G \chi) \otimes \chi^{k/2}$ est donné (à multiplication près par un scalaire non nul) par une matrice de la forme :*

$$\begin{pmatrix} (U_p + 1) + (-1)^{k/2-1} a(\mathfrak{L}) & * \\ 0 & -k(k/2-1) \end{pmatrix}.$$

*Démonstration.* — Reprenons la section $s_{k/2}(u) \in H^0(C, \overline{\omega}(k,\mathfrak{L})|_C)$ précédente (où $C$ désigne la composante centrale) et notons $s_{k/2}(v) \overset{\text{déf}}{=} w_p(s_{k/2}(u))$ (i.e. on remplace $u$ par $v$ dans la formule de $s_{k/2}(u)$, la notation étant légitime puisque $w_p u = v$, cf. §2.2). En revenant à la définition du scindage $\mathrm{Ind}_{I\mathbb{Q}_p^\times}^G \chi^{k/2} \simeq \mathrm{Ind}_N^G \chi^{k/2} \oplus \mathrm{ind}_N^G \chi^{k/2+1}$ (cf. preuve du lemme 2.3.7), on voit qu'il suffit de calculer $\phi\big(s_{k/2}(u) + s_{k/2}(v)\big)$ et $\phi\big(s_{k/2}(u) - s_{k/2}(v)\big)$ en terme des fonctions $(\frac{u}{du})^{k/2-1}$ et $\big(\frac{1}{2}\mathfrak{L} - \log_{\mathfrak{L}}(u)\big)(\frac{u}{du})^{k/2-1}$ (vues comme fonctions dans l'induite à support dans $N$). Notons $\mathrm{res}_y(s_{k/2}(u))$ (resp. $\mathrm{res}_y(s_{k/2}(v))$ la restriction de $s_{k/2}(u)$ (resp. $s_{k/2}(v)$) au point rationnel $y$ de la composante support de $s_{k/2}(u)$ (resp. de $s_{k/2}(v)$). Posons $\Delta_{k/2} \overset{\text{déf}}{=} \frac{(-1)^{k/2}}{(k/2-1)!^2 k/2(k/2-1)}$ et $b_{k/2,k/2} \overset{\text{déf}}{=} k/2(k/2-1)\Delta_{k/2}$, on trouve pour $y \in \mathbb{F}_p^\times \cup \{\infty\}$ d'après la démonstration du lemme A.2.1 et d'après le lemme A.2.3 (en se rappelant que $s_{k/2} = s'_{k/2}$, cf. la fin de la preuve de la proposition 4.2.3 dans l'appendice A.2) :

$$\mathrm{res}_y(s_{k/2}(u)) = -\Delta_{k/2}\Big(\frac{u_y}{du_y}\Big)^{k/2-1}, \quad \mathrm{res}_y(s_{k/2}(v)) = -\Delta_{k/2}\Big(\frac{v_y}{dv_y}\Big)^{k/2-1}$$

et, pour $y = 0 \in \mathbb{F}_p$ :

$$\begin{aligned} \mathrm{res}_0(s_{k/2}(u)) &= -\big(\Delta_{k/2} - b_{k/2,k/2}H_{k/2-1}\big)\Big(\frac{u}{du}\Big)^{k/2-1} - b_{k/2,k/2}\log_{\mathfrak{L}}(u)\Big(\frac{u}{du}\Big)^{k/2-1} \\ \mathrm{res}_0(s_{k/2}(v)) &= -\big(\Delta_{k/2} - b_{k/2,k/2}H_{k/2-1}\big)\Big(\frac{v}{dv}\Big)^{k/2-1} - b_{k/2,k/2}\log_{\mathfrak{L}}(v)\Big(\frac{v}{dv}\Big)^{k/2-1}. \end{aligned}$$

En se rappelant que, dans le morphisme $\phi$ de la suite exacte (8), on multiplie les restrictions par $-1$ dès qu'on « change de branche », on obtient :

$$\begin{aligned}\phi\big(s_{k/2}(u)+s_{k/2}(v)\big) &= -\Delta_{k/2}\Big(\sum_{y\in\mathbb{F}_p^\times\cup\{\infty\}}\Big(\frac{u_y}{du_y}\Big)^{k/2-1}-\sum_{y\in\mathbb{F}_p^\times\cup\{\infty\}}\Big(\frac{v_y}{dv_y}\Big)^{k/2-1}\Big)\\ &\quad +(-1+(-1)^{k/2-1})(\Delta_{k/2}-b_{k/2,k/2}H_{k/2-1})\Big(\frac{u}{du}\Big)^{k/2-1}\\ &\quad +(-1+(-1)^{k/2})b_{k/2,k/2}\log_{\mathcal{L}}(u)\Big(\frac{u}{du}\Big)^{k/2-1}\\ &\quad +(-1)^{k/2+1}b_{k/2,k/2}\mathcal{L}\Big(\frac{u}{du}\Big)^{k/2-1}.\end{aligned}$$

Or, dans $\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G\chi^{k/2}\simeq\chi\otimes\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G\mathbb{F}(\frac{u}{du})^{k/2-1}$, on a :

$$U_p\Big(\frac{u}{du}\Big)^{k/2-1}=\sum_{y\in\mathbb{F}_p^\times\cup\{\infty\}}\Big(\frac{u_y}{du_y}\Big)^{k/2-1}+(-1)^{k/2-1}\sum_{y\in\mathbb{F}_p^\times\cup\{\infty\}}\Big(\frac{v_y}{dv_y}\Big)^{k/2-1}.$$

On trouve donc pour $\phi\big(s_{k/2}(u)+s_{k/2}(v)\big)$ :

$$\begin{aligned}-\Delta_{k/2}\Big(U_p+2-k\Big(\frac{k}{2}-1\Big)H_{\frac{k}{2}-1}+\mathcal{L}\frac{k}{2}\Big(\frac{k}{2}-1\Big)\Big)\Big(\frac{u}{du}\Big)^{k/2-1} &\quad \text{si}\quad (-1)^{k/2}=1\\ *\oplus\Delta_{k/2}k\Big(\frac{k}{2}-1\Big)\Big(\frac{1}{2}\mathcal{L}-\log_{\mathcal{L}}(u)\Big)\Big(\frac{u}{du}\Big)^{k/2-1} &\quad \text{si}\quad (-1)^{k/2}=-1\end{aligned}$$

où le premier terme est dans $\mathrm{Ind}_N^G\chi^{k/2}$ et le deuxième dans $\mathrm{Ind}_N^G\chi^{k/2}\oplus\mathrm{Ind}_N^G\chi^{k/2+1}$ (on n'aura pas besoin de la formule pour $*\in\mathrm{Ind}_N^G\chi^{k/2}$). Par un calcul analogue, on obtient pour $\phi\big(s_{k/2}(u)-s_{k/2}(v)\big)$ :

$$\begin{aligned}*\oplus\Delta_{k/2}k\Big(\frac{k}{2}-1\Big)\Big(\frac{1}{2}\mathcal{L}-\log_{\mathcal{L}}(u)\Big)\Big(\frac{u}{du}\Big)^{k/2-1} &\quad \text{si}\quad (-1)^{k/2}=1\\ -\Delta_{k/2}\Big(U_p+2-k\Big(\frac{k}{2}-1\Big)H_{\frac{k}{2}-1}+\mathcal{L}\frac{k}{2}\Big(\frac{k}{2}-1\Big)\Big)\Big(\frac{u}{du}\Big)^{k/2-1} &\quad \text{si}\quad (-1)^{k/2}=-1.\end{aligned}$$

En remarquant que l'image de $s_{k/2}(u)+s_{k/2}(v)$ (resp. $s_{k/2}(u)-s_{k/2}(v)$) dans $\mathrm{Ind}_{I\mathbb{Q}_p^\times}^G\chi^{k/2}$ est dans $\mathrm{Ind}_N^G\chi^{k/2}$ si $(-1)^{k/2}=1$ (resp. si $(-1)^{k/2}=-1$), on en déduit facilement le résultat. □

***Corollaire 4.4.5***. — *(i) Le morphisme $\overline{\phi}$ est surjectif.*
*(ii) Le noyau de $\overline{\phi}$ est isomorphe à $\{f\in\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1\mid T_pf=a(\mathcal{L})f\}$.*

*Démonstration*. — Tout endomorphisme $\mu T_p-\lambda$ de $\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1$ avec $(\mu,\lambda)\in\mathbb{F}$, $\mu\lambda\neq 0$ est surjectif (vérification facile), on en déduit donc (i) par le lemme 4.4.3 combiné avec le lemme 4.4.4. On voit aussi que le noyau de $\phi$ est isomorphe à $\{f\in\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1\mid T_pf=(-1)^{k/2}a(\mathcal{L})f\}\otimes\chi^{k/2}$. Mais cette dernière représentation de $G$ est isomorphe à $\{f\in\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1\mid T_pf=a(\mathcal{L})f\}$, d'où (ii). □

De la suite exacte longue (8), des résultats du §2.3, du §4.2 et du §4.3, on déduit alors facilement :

***Corollaire 4.4.6***. — *(i) On a une suite exacte $G$-équivariante :*

$$0 \to \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G H \to H^0(X, \overline{\omega}(k, \mathcal{L})) \to \{f \in \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1 \mid T_p f = a(\mathcal{L}) f\} \to 0.$$

*(ii) On a un isomorphisme $G$-équivariant :*

$$H^1(X, \overline{\omega}(k, \mathcal{L})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G H^1(C, \overline{\omega}(k, \mathcal{L})|_C) \simeq \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G H^*.$$

## 5. La $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-représentation $H^0(\mathcal{X}, \omega(k, \mathcal{L})) \otimes \mathbb{F}$ pour $\mathrm{val}(\mathcal{L}) \geq 0$

L'objet de ce paragraphe est le calcul de la $G$-représentation $H^0(\mathcal{X}, \omega(k, \mathcal{L})) \otimes_{\mathfrak{O}} \mathbb{F}$ pour $4 \leq k \leq p+1$, $k$ pair et $\mathrm{val}(\mathcal{L}) \geq 0$.

**5.1. Cohomologie de Čech.** — On compare les groupes $H^1$ et $\check{H}^1$ pour les faisceaux $\overline{\omega}(k, \mathcal{L})|_C$ et $\overline{\omega}(k, \mathcal{L})$.

Reprenons les notations du §4.2 et considérons le recouvrement $(W_y)_{y \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)}$ de $C$. On munit $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$ d'une relation d'ordre total par $0 < 1 < \cdots < p-1 < \infty$. Pour tout faisceau de groupes abéliens $\mathcal{F}$ sur $C_{\mathrm{Zar}}$, on définit le groupe de cohomologie de Čech :

$$\check{H}^1(C, \mathcal{F}) \overset{\text{déf}}{=} \Big( \prod_{\substack{y<z \\ (y,z) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)^2}} \mathcal{F}(U) \Big) / \sim$$

où $(s_{y,z})_{y<z} \sim (t_{y,z})_{y<z}$ si et seulement s'il existe $s_y \in \mathcal{F}(W_y)$ pour tout $y \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$ tel que $s_{y,z} - t_{y,z} = s_z|_U - s_y|_U$ pour tout $y < z$. Si le faisceau $\mathcal{F}$ est $K$-équivariant, on a une action naturelle de $K$ sur $\check{H}^1(C, \mathcal{F})$.

***Lemme 5.1.1***. — *On a un isomorphisme canonique $K$-équivariant :*

$$\check{H}^1(C, \overline{\omega}(k, \mathcal{L})|_C) \xrightarrow{\sim} H^1(C, \overline{\omega}(k, \mathcal{L})|_C).$$

*Démonstration*. — Pour tout faisceau de groupes abéliens $\mathcal{F}$, on sait par la théorie générale (cf. e.g. [**10**, §III.4]) qu'il y a un morphisme canonique ($K$-équivariant si $\mathcal{F}$ l'est) $\check{H}^1(C, \mathcal{F}) \to H^1(C, \mathcal{F})$. En revenant à la preuve de la proposition 4.3.2, on a pour tout ouvert affine $V$ de $C$ et tout $i \geq 1$ une suite exacte courte $H^i(V, \overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C) \to H^i(V, \overline{\omega}(k, \mathcal{L})|_C) \to H^i(V, \mathcal{I}(k))$. Or, $H^i(V, \overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C) = 0$ car $\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C$ est quasi-cohérent et $H^i(V, \mathcal{I}(k)) = 0$ car $\mathcal{I}(k)$ est un facteur direct de $\overline{\omega}^{k/2}|_C$ (cf. preuve du lemme 4.3.1) et $\overline{\omega}^{k/2}|_C$ est aussi quasi-cohérent, d'où $H^i(V, \overline{\omega}(k, \mathcal{L})|_C) = 0$. Comme les ouverts $W_y$ et $U$ du recouvrement sont affines, la théorie générale (cf. e.g. [**10**, Ex.III.4.11]) entraîne alors en particulier que le morphisme canonique $\check{H}^1(C,\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C) \to H^1(C,\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C)$ est un isomorphisme. $\square$

Considérons un système de représentants $J \subset G$ de $N\backslash G$ et le recouvrement affine $(W_g)_{g\in J}$ de $X$ correspondant. Pour toute relation d'ordre total $<$ sur $J$ et tout faisceau de groupes abéliens $\mathcal{F}$ sur $X$, définissons le groupe de cohomologie de Čech :

$$\check{H}^1(X,\mathcal{F}) \stackrel{\text{déf}}{=} \Big(\prod_{\substack{g<h\\(g,h)\in J^2}} \mathcal{F}(W_g\cap W_h)\Big)/\sim$$

où $(s_{g,h})_{g<h} \sim (t_{g,h})_{g<h}$ si et seulement s'il existe $s_g \in \mathcal{F}(W_g)$ pour tout $g \in J$ tel que $s_{g,h} - t_{g,h} = s_h|_{W_g\cap W_h} - s_g|_{W_g\cap W_h}$ pour tout $g < h$. Si le faisceau $\mathcal{F}$ est $G$-équivariant, on a une action naturelle de $G$ sur $\check{H}^1(C,\mathcal{F})$.

***Lemme 5.1.2***. — *On a un isomorphisme canonique $G$-équivariant :*

$$\check{H}^1(X,\overline{\omega}(k,\mathcal{L})) \xrightarrow{\sim} H^1(X,\overline{\omega}(k,\mathcal{L})).$$

*Démonstration*. — Définissons un sous-faisceau $\mathcal{J}(k) \subset \overline{\omega}^{k/2}$ sur $X$ comme suit (avec les notations du §2.2) :

$$\mathcal{J}(k)(W_g) \stackrel{\text{déf}}{=} \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\bigoplus_{i=0}^{k-2}\mathbb{F}\frac{(du_g)^{\frac{k}{2}}}{(u_g-x)^{i+1}} \oplus \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\bigoplus_{i=0}^{k-2}\mathbb{F}\frac{(dv_g)^{\frac{k}{2}}}{(v_g-x)^{i+1}} \oplus \bigoplus_{i=0}^{\frac{k}{2}-1}\mathbb{F}\frac{(du_g)^{\frac{k}{2}}}{u_g^{i+1}} \oplus \bigoplus_{i=0}^{\frac{k}{2}-2}\mathbb{F}\frac{(dv_g)^{\frac{k}{2}}}{v_g^{i+1}}$$

$$\mathcal{J}(k)(U_g) \stackrel{\text{déf}}{=} \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p}\bigoplus_{i=0}^{k-2}\mathbb{F}\frac{(du_g)^{k/2}}{(u_g-x)^{i+1}}$$

$$\mathcal{J}(k)(V_g) \stackrel{\text{déf}}{=} \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p}\bigoplus_{i=0}^{k-2}\mathbb{F}\frac{(dv_g)^{k/2}}{(v_g-x)^{i+1}}$$

et $\mathcal{J}(k)(Z) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{J}(k)(W_g)$ (resp. $\mathcal{J}(k)(Z) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{J}(k)(U_g)$, resp. $\mathcal{J}(k)(Z) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{J}(k)(V_g)$) si $Z \subseteq W_g$ et $Z \nsubseteq U_g$, $Z \nsubseteq V_g$ (resp. $Z \subseteq U_g$ et $Z \neq \emptyset$, resp. $Z \subseteq V_g$ et $Z \neq \emptyset$). Comme pour la preuve de la proposition 4.3.2, on a une suite exacte courte de faisceaux $0 \to \overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}} \to \overline{\omega}(k,\mathcal{L}) \to \mathcal{J}(k) \to 0$ qui induit pour tout ouvert $V \subset X$ et tout $i \geq 1$ des suites exactes $H^i(V,\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}) \to H^i(V,\overline{\omega}(k,\mathcal{L})) \to H^i(V,\mathcal{J}(k))$. Si $V$ est affine, le premier groupe est nul car $\overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}$ est quasi-cohérent et le troisième aussi car $\overline{\omega}^{k/2}$ est quasi-cohérent et car on peut montrer, comme dans la preuve du lemme 4.3.1, que l'injection de faisceaux $\mathcal{J}(k) \hookrightarrow \overline{\omega}^{k/2}$ admet un scindage. Comme toutes les intersections du recouvrement $(W_g)_{g\in J}$ sont affines, la théorie générale (cf. e.g. [**10**, Ex.III.4.11]) donne en particulier que le morphisme canonique $\check{H}^1(X,\overline{\omega}(k,\mathcal{L})) \to H^1(X,\overline{\omega}(k,\mathcal{L}))$ est un isomorphisme. $\square$

On obtient alors :

***Corollaire 5.1.3***. — *On a un isomorphisme $G$-équivariant :*

$$\check{H}^1(X,\overline{\omega}(k,\mathcal{L})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G \check{H}^1(C,\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C).$$

*Démonstration.* — Cela découle du (ii) du corollaire 4.4.6 et des lemmes 5.1.1 et 5.1.2. $\square$

**5.2. Modifications de sections.** — On effectue quelques modifications sur les sections $(\widetilde{s}_\alpha)_{1\leq\alpha\leq k/2-1}$ du lemme 4.4.1. Ces calculs serviront au paragraphe suivant.

Reprenons les notations du §4.4 et notons de plus $\mathcal{W}_y \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{W}_{g_y}$, $\mathcal{V}_y \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{V}_{g_y}$ et $(u_y, v_y) \overset{\text{déf}}{=} (u_{g_y}, v_{g_y})$ pour $y \in \mathbb{F}_p \cup \{\infty\}$ (voir §2.2). On remarque que $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{g_y}$ et on note aussi $(u, v) = (u_0, v_0)$.

Pour $\alpha \in \{1, \cdots, k/2-1\}$, nous avons défini au lemme 4.4.1 des sections globales $\widetilde{s}_\alpha \in H^0(\mathcal{X}, \overline{\omega}(k,\mathcal{L}))$ à support dans la composante centrale $C$ par recollement de sections locales $\widetilde{s}_{\alpha,y} \in H^0(W_y, \omega(k,\mathcal{L}))$ pour $y \in \mathbb{F}_p \cup \{\infty\}$. Notons encore $\widetilde{s}_{\alpha,y} \in H^0(\mathcal{W}_y, \omega(k,\mathcal{L}))$ la section locale en caractéristique zéro définie par (presque) les mêmes formules :

$$\widetilde{s}_{\alpha,\infty} \overset{\text{déf}}{=} (-1)^{k/2-\alpha} u_\infty^{\alpha-1} \sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times} \Big(\log_{\mathcal{L}}(u_\infty - [x]) + \sum_{j=1}^{k/2-2} \frac{(u_\infty[x]^{-1})^j}{j}\Big) \frac{((u_\infty - [x])[x]^{-1})^{k-1-\alpha}}{du_\infty^{k/2-1}}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{s}_{\alpha,y} \overset{\text{déf}}{=} &\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times} \Big(\log_{\mathcal{L}}(u_y - [x]) + \sum_{j=1}^{k/2-2} \frac{(u_y[x]^{-1})^j}{j}\Big) \frac{(u_y - [x])^{k-1-\alpha}}{du_y^{k/2-1}} + \log_{\mathcal{L}}(u_y) \frac{u_y^{k-1-\alpha}}{du_y^{k/2-1}} \\ &+ \sum_{j=1}^{k/2-2} \frac{(-1)^j}{j} \binom{k-1-\alpha}{j} \frac{u_y^{k-1-\alpha}}{du_y^{k/2-1}}\end{aligned}$$

où rappelons que $[x] \in \mathbb{Z}_p$ désigne le représentant de Teichmüller de $x$.

***Lemme 5.2.1***. — *Pour $y \in \mathbb{F}_p$, on a :*

$$\begin{aligned}\widetilde{s}_{\alpha,y}|_{\mathcal{U}} &= \sum_{x\in\mathbb{F}_p} \log_{\mathcal{L}}(u - [y] - [x]) \frac{(u - [y] - [x])^{k-1-\alpha}}{du^{k/2-1}} \\ \widetilde{s}_{\alpha,y}|_{\mathcal{V}_y} &= (-1)^{k/2-1} p^{k/2-\alpha} \Big(-\log_{\mathcal{L}} v_y \frac{v_y^{\alpha-1}}{dv_y^{k/2-1}} + \big(\mathcal{L} - H_{k-1-\alpha}\big) \frac{v_y^{\alpha-1}}{dv_y^{k/2-1}}\Big) + p^2 *\end{aligned}$$

*où $* \in \omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathcal{V}_y)$.*

*Démonstration.* — La première formule est laissée au lecteur. Pour la deuxième, on a :

$$\widetilde{s}_{\alpha,y}\,|_{\mathcal{V}_y} = (-1)^{k/2-1}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\Big(\log_{\mathcal{L}}\big(\frac{p}{v_y[x]}-1\big)+\sum_{j=1}^{k/2-2}\frac{(p[x]^{-1})^j}{jv_y^j}\Big)\frac{(p-v_y[x])^{k-1-\alpha}v_y^{\alpha-1}}{(pdv_y)^{k/2-1}}$$
$$+(-1)^{k/2-1}p^{k/2-\alpha}\log_{\mathcal{L}}\big(\frac{p}{v_y}\big)\frac{v_y^{\alpha-1}}{dv_y^{k/2-1}}$$
$$+(-1)^{k/2-1}p^{k/2-\alpha}\sum_{j=1}^{k/2-2}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-\alpha}{j}\frac{v_y^{\alpha-1}}{dv_y^{k/2-1}}$$

d'où on déduit la formule de l'énoncé en développant les logarithmes puis en utilisant le lemme A.1.2 et $\log_{\mathcal{L}}(p)=\mathcal{L}$. □

***Remarque 5.2.2.*** — Par le (i) du lemme 4.4.1, les sections locales $(\widetilde{s}_{\alpha,y})_{y\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)}$ se recollent en fait en une section globale de $H^0(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$ (et pas seulement de $H^0(\mathfrak{X},\overline{\omega}(k,\mathcal{L})))$ à support dans la composante centrale.

Nous allons modifier les sections locales $\widetilde{s}_{\alpha,y}$ pour $y\in\mathbb{F}_p$ sans changer leur réduction modulo $p$. Cela nous servira dans la paragraphe suivant pour mener à bien les calculs dans $\check{H}^1(X,\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$.

Pour $0\le j\le p-1$ et $y\in\mathbb{F}_p$, posons :

$$t_{\alpha,y}^j \overset{\text{déf}}{=} p\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}[x]^j\Big(\log_{\mathcal{L}}(u_y-[x])+\sum_{i=1}^{k/2-2}\frac{([x]^{-1}u_y)^i}{i}\Big)\frac{(u_y-[x])^{k-2-\alpha}}{du_y^{k/2-1}}\in p\omega(k,\mathcal{L})(\mathcal{W}_y).$$

***Lemme 5.2.3.*** — *Pour $y\in\mathbb{F}_p$, on peut modifier la section locale $\widetilde{s}_{\alpha,y}\in\omega(k,\mathcal{L})(\mathcal{W}_y)$ par un élément dans $\oplus_{1\le j\le p-1}\mathfrak{O}t_{\alpha,y}^j$ de telle sorte que la nouvelle section $\widetilde{s}_{\alpha,y}$ vérifie :*

$$\widetilde{s}_{\alpha,y}|_{\mathcal{U}} = \sum_{x\in\mathbb{F}_p}\log_{\mathcal{L}}(u-[x])\frac{(u-[x])^{k-1-\alpha}}{du^{k/2-1}}-p(k-1-\alpha)\frac{A_y(u)}{du^{k/2-1}}-p\frac{B_y(u)}{du^{k/2-1}}+p^2*$$

*où $*\in\omega(k,\mathcal{L})(\mathcal{U})$ et :*

$$A_y(u) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{p-1}\frac{\binom{p}{i}}{p}[y]^{p-i}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}[x]^i\sum_{j=1}^{k/2-2}\frac{[x]^{-j}}{j}(u-[y])^j(u-[x+y])^{k-2-\alpha}$$

$$B_y(u) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{p-1}(-1)^{p-i}\frac{\binom{p}{i}}{p}[y]^{p-i}\sum_{x\neq y}[x]^i(u-[x])^{k-2-\alpha}.$$

*Démonstration.* — Un calcul formel de développement des logarithmes donne (voir lemmes 5.2.1 et A.3.3) :

$$\sum_{x\in\mathbb{F}_p}\log_{\mathcal{L}}(u-[x]-[y])\frac{(u-[x]-[y])^{k-1-\alpha}}{du^{k/2-1}}=\sum_{x\in\mathbb{F}_p}\log_{\mathcal{L}}(u-[x+y])\frac{(u-[x+y])^{k-1-\alpha}}{du^{k/2-1}}$$
$$-p(k-1-\alpha)\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\delta_{x,y}\log_{\mathcal{L}}(u-[x+y])\frac{(u-[x+y])^{k-2-\alpha}}{du^{k/2-1}}-p\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\delta_{x,y}\frac{(u-[x+y])^{k-2-\alpha}}{du^{k/2-1}}+p^2*$$

où $*\in\omega(k,\mathcal{L})(\mathcal{U})$ et $\delta_{x,y}\overset{\text{déf}}{=}-\sum_{j=1}^{p-1}\frac{\binom{p}{j}}{p}[y]^{p-j}[x]^j\in\mathbb{Z}_p$ (cf. lemme A.3.2). Il suffit alors de corriger $\widetilde{s}_{\alpha,y}$ par $-(k-1-\alpha)\sum_{j=1}^{p-1}\frac{\binom{p}{j}}{p}[y]^{p-j}t^j_{\alpha,y}$. Un dernier calcul fournit $A_y(u)$ et $B_y(u)$. $\square$

***Lemme 5.2.4***. — *Pour $y\in\mathbb{F}_p$, on peut modifier la section locale $\widetilde{s}_{\alpha,y}$ par un élément dans $p\omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathcal{W}_y)+p\mathfrak{O}\Big(\log_{\mathcal{L}}(u_y+[y])+\sum_{j=1}^{k/2-2}(-1)^j\frac{(u_y[y]^{-1})^j}{j}\Big)\frac{(u_y+[y])^{k-1-\alpha}}{du_y^{k/2-1}}$ de telle sorte que la nouvelle section $\widetilde{s}_{\alpha,y}$ vérifie :*

$$\widetilde{s}_{\alpha,y}|_{\mathcal{U}}=\sum_{x\in\mathbb{F}_p}\log_{\mathcal{L}}(u-[x])\frac{(u-[x])^{k-1-\alpha}}{du^{k/2-1}}-p\log_{\mathcal{L}}(u)\frac{u^{k-1-\alpha}}{du^{k/2-1}}+p\sum_{i=0}^{k/2-2}\alpha'_i[y]^{k-\alpha-i-1}\frac{(u-[y])^i}{du^{k/2-1}}$$
$$-p\sum_{i=1}^{k/2-2}\sum_{j=1}^{i}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-\alpha}{i-j}[y]^{k-\alpha-i-1}\frac{(u-[y])^i}{du^{k/2-1}}$$

*où :*

$$\alpha'_i\overset{\text{déf}}{=}\frac{k-1-\alpha}{k-1-\alpha-i}(-1)^{\alpha+i+1}\sum_{j=1}^{i}\frac{\binom{k-2-\alpha}{i-j}}{j}(-1)^{i-j+1+\alpha}$$
$$+\sum_{j=i}^{k-2-\alpha}\binom{k-2-\alpha}{j}\frac{(-1)^{\alpha+1+j}}{k-1-\alpha-j}\binom{j}{i}.$$

*Démonstration.* — En modifiant la section $\widetilde{s}_{\alpha,y}$ du lemme 5.2.3 par un élément dans $p\omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathcal{W}_y)$ (cf. lemme A.3.4), on peut supposer déjà :

$$\widetilde{s}_{\alpha,y}|_{\mathcal{U}}=\sum_{x\in\mathbb{F}_p}\log_{\mathcal{L}}(u-[x])\frac{(u-[x])^{k-1-\alpha}}{du^{k/2-1}}+p\sum_{i=0}^{k/2-2}\alpha'_i[y]^{k-\alpha-i-1}\frac{(u-[y])^i}{du^{k/2-1}}.$$

Puis en ajoutant à $\widetilde{s}_{\alpha,y}$ le terme $-p\Big(\log_{\mathcal{L}}(u_y+[y])+\sum_{j=1}^{k/2-2}(-1)^j\frac{(u_y[y]^{-1})^j}{j}\Big)\frac{(u_y+[y])^{k-1-\alpha}}{du_y^{k/2-1}}$ dont la restriction à $\mathcal{U}$ est :

$$-p\log_{\mathcal{L}}(u)\frac{u^{k-1-\alpha}}{du^{k/2-1}}-p\sum_{i=1}^{k/2-2}\sum_{j=1}^{i}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-\alpha}{i-j}[y]^{k-\alpha-i-1}\frac{(u-[y])^i}{du^{k/2-1}}$$
$$-p*\frac{(u-[y])^{k/2-1}}{du^{k/2-1}}$$

avec $* \in \mathbb{Z}_p[u-[y]]$ et en rajoutant encore $p * \frac{u_y^{k/2-1}}{du_y^{k/2-1}} \in p\omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathcal{W}_y)$ (pour le même $*$), on obtient une restriction comme dans l'énoncé. □

Posons :

$$\alpha_i \overset{\text{déf}}{=} \alpha'_i + \sum_{j=1}^{i} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \binom{k-1-\alpha}{i-j} \in \mathbb{Z}_p \tag{9}$$

(on ne fait pas apparaître la dépendance en $\alpha$ dans l'écriture $\alpha_i$), on a donc pour $y \in \mathbb{F}_p$ :

$$\widetilde{s}_{\alpha,y}|_{\mathcal{U}} = \sum_{x\in\mathbb{F}_p} \log_{\mathcal{L}}(u-[x]) \frac{(u-[x])^{k-1-\alpha}}{du^{k/2-1}} - p\log_{\mathcal{L}}(u)\frac{u^{k-1-\alpha}}{du^{k/2-1}} + p\sum_{i=0}^{k/2-2} \alpha_i [y]^{k-\alpha-i-1} \frac{(u-[y])^i}{du^{k/2-1}} \tag{10}$$

et notons que :

$$\widetilde{s}_{\alpha,\infty}\ |_{\mathcal{U}} = \sum_{x\in\mathbb{F}_p} \log_{\mathcal{L}}(u-[x]) \frac{(u-[x])^{k-1-\alpha}}{du^{k/2-1}} - p\log_{\mathcal{L}}(u)\frac{u^{k-1-\alpha}}{du^{k/2-1}}. \tag{11}$$

Reprenons maintenant le calcul de $\widetilde{s}_{\alpha,y}|_{\mathcal{V}_y}$ du lemme 5.2.1 :

***Lemme 5.2.5***. — *Pour $y \in \mathbb{F}_p$, on a (avec $\widetilde{s}_{\alpha,y}$ comme dans le lemme 5.2.4) :*

$$\widetilde{s}_{\alpha,y}|_{\mathcal{V}_y} = (-1)^{k/2-1}p^{k/2-\alpha}\Big(-\log_{\mathcal{L}}(v_y)\frac{v_y^{\alpha-1}}{dv_y^{k/2-1}} + \big(\mathcal{L}-H_{k-1-\alpha}\big)\frac{v_y^{\alpha-1}}{dv_y^{k/2-1}}\Big) + p*_1\frac{v_y^{k/2-1}}{dv_y^{k/2-1}} + p^2*_2$$

*où $*_1 \in \mathbb{Z}_p$ et $*_2 \in \omega^{-\frac{k-2}{2}}(\mathcal{V}_y)$.*

*Démonstration.* — Par le lemme 5.2.1, il suffit de vérifier que les modifications des lemmes 5.2.3 et 5.2.4 sont des termes de la forme $p*_1 \frac{v_y^{k/2-1}}{dv_y^{k/2-1}} + p^2 *_2$ en restriction à $\mathcal{V}_y$. Prenons par exemple $t^j_{\alpha,y}$ (lemme 5.2.3), on a :

$$t^j_{\alpha,y}\ |_{\mathcal{V}_y} = p(-1)^{k/2-1}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}[x]^j\Big(\log_{\mathcal{L}}\big(\frac{p}{v_y}-[x]\big) + \sum_{i=1}^{k/2-2}\Big(\frac{p[x]^{-1}}{v_y}\Big)^i\frac{1}{i}\Big)\frac{(\frac{p}{v_y}-[x])^{k-2-\alpha}v_y^{k-2}}{(pdv_y)^{k/2-1}}$$

et en développant les logarithmes, un calcul donne :

$$t^j_{\alpha,y}\ |_{\mathcal{V}_y} = p\frac{(-1)^{k/2-\alpha}}{k/2-1}\sum_{x\in\mathbb{F}_p}[x]^{k/2-1-\alpha+j}\frac{v_y^{k/2-1}}{dv_y^{k/2-1}} + p^2 * .$$

On laisse les autres termes correctifs (lemme 5.2.4) au lecteur. □

**5.3. Défauts de recollement.** — On calcule explicitement les classes de cohomologie dans $\check{H}^1(X,\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$ provenant du défaut de recollement modulo $p^2$ des sections locales $(\widetilde{s}_{\alpha,y})_{y\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)}$ modifiées du §5.2.

Un examen soigneux des preuves des parties 2, 4 et 5.1 (et des preuves utilisées de l'appendice) montre d'abord que tous les résultats concernant $H^i(X,\overline{\omega}^{k/2})$ et $H^i(X,\overline{\omega}(k,\mathcal{L}))$ $(i=0,1)$ s'étendent à l'identique à $H^i(X,\omega^{k/2}\otimes\mathfrak{O}/p)$ et $H^i(X,\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$ à condition de remplacer le corps $\mathbb{F}$ des coefficients par la $\mathbb{F}$-algèbre artinienne $\mathfrak{O}/p$. En particulier (cf. corollaires 4.4.6 et 5.1.3), on a une suite exacte :

$$0\to \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(H\otimes_{\mathbb{F}}\mathfrak{O}/p)\to H^0(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathfrak{O}/p)\to\{f\in\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1_{\mathfrak{O}/p}\mid T_pf=a(\mathcal{L})f\}\to 0$$

et des isomorphismes :

$$\check{H}^1(X,\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathfrak{O}/p)\simeq H^1(X,\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathfrak{O}/p)\simeq\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(H\otimes_{\mathbb{F}}\mathfrak{O}/p)^*.$$

Pour $n\geq 2$, la suite exacte courte de faisceaux :

$$0\longrightarrow\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathfrak{O}/p^{n-1}\xrightarrow{\ p\ }\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathfrak{O}/p^n\longrightarrow\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathfrak{O}/p\longrightarrow 0$$

induit une suite exacte longue :

$$0\longrightarrow H^0(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathfrak{O}/p^{n-1})\longrightarrow H^0(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathfrak{O}/p^n)\longrightarrow H^0(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathfrak{O}/p)\xrightarrow{\psi_n} H^1(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathfrak{O}/p^{n-1}).$$

Pour voir si $s\in H^0(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$ se relève en une section de $H^0(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathfrak{O}/p^n)$, il suffit donc de calculer son image par l'application :

$$\psi_n: H^0(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathfrak{O}/p)\longrightarrow H^1(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathfrak{O}/p^{n-1}).$$

On détermine maintenant les images dans $H^1(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathfrak{O}/p)\simeq\check{H}^1(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$ par $\psi_2$ des sections $(\widetilde{s}_\alpha)_{1\leq\alpha\leq k/2-1}$ de $H^0(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$ (cf. §5.2).

Pour $y\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$ et $z\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$, on définit $g_{y_z}\in G$ comme suit. Si $y\in\mathbb{F}_p$ et $z\in\mathbb{F}_p$, $g_{y_z}\overset{\text{déf}}{=}\begin{pmatrix}[y] & 1\\ p+[yz] & [z]\end{pmatrix}$. Si $y\in\mathbb{F}_p$ et $z=\infty$, $g_{y_z}\overset{\text{déf}}{=}\begin{pmatrix}p & 0\\ [y] & 1\end{pmatrix}$. Si $y=\infty$ et $z\in\mathbb{F}_p$, $g_{y_z}\overset{\text{déf}}{=}\begin{pmatrix}1 & 0\\ [z] & p\end{pmatrix}$ et si $y=\infty$ et $z=\infty$, $g_{y_z}\overset{\text{déf}}{=}\begin{pmatrix}0 & p\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. On note $\mathcal{W}_{y_z}\overset{\text{déf}}{=}\mathcal{W}_{g_{y_z}}$, $W_{y_z}\overset{\text{déf}}{=}W_{g_{y_z}}$ (cf. §2.2) et on remarque que $\mathcal{W}_{y_0}=\mathcal{W}_y$ et $W_{y_0}=W_y$. Les ouverts $W_{y_z}$ recouvrent (dans $X$) la composante $C_y$ « perpendiculaire » au point $y$ à la composante centrale $C$ et on a $W_{y_z}\times_X C_y=C_y\setminus\{$points définis sur $\mathbb{F}_p$ autres que $y_z\}$ et $\mathcal{W}_{y_z}\cap\mathcal{W}_{y_{z'}}=\mathcal{V}_y$ (avec les notations du §5.2) si $z\neq z'$. Dans la suite, un élément de $\check{H}^1(C_y,(\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_{C_y})$ (resp. de $\check{H}^1(C,(\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_C))$ est écrit dans le recouvrement $(W_{y_z})_{z\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)}$ de $C_y$ dans $X$ (resp. $(W_y)_{y\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)}$ de $C$ dans $X$) avec l'ordre total $y=y_0<y_1<\cdots<y_{p-1}<y_\infty$ (resp.

$0 < 1 < \cdots < p-1 < \infty$), cf. §5.1 (le faisceau $(\omega(k,\mathfrak{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_C$ est défini exactement comme au §3.2 en remplaçant $\mathbb{F}$ par $\mathfrak{O}/p$).

***Lemme 5.3.1***. — *Soit* $a(\mathfrak{L}) \overset{\text{déf}}{=} (-1)^{\frac{k}{2}-1}\big(1+\frac{k}{2}\big(\frac{k}{2}-1\big)(\mathfrak{L}-2H_{k/2-1})\big) \in \mathfrak{O}$ *(cf. lemme 4.4.4). L'image de* $\widetilde{s}_{k/2-1}$ *par* $\psi_2$ *est donnée dans* $\Pi_C \check{H}^1(C,(\omega(k,\mathfrak{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_C)$ *par :*

- *sur* $C_y$ *pour* $y\in\mathbb{F}_p$ *par la classe dans* $\check{H}^1(C_y,(\omega(k,\mathfrak{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_{C_y})$ *du uplet :*

$$-\frac{a(\mathfrak{L})}{k/2(k/2-1)}\left(\frac{v_y^{k/2-2}}{dv_y^{k/2-1}}|_{W_{y_0}\cap W_{y_1}},\cdots,\frac{v_y^{k/2-2}}{dv_y^{k/2-1}}|_{W_{y_0}\cap W_{y_\infty}},0,\cdots,0\right)$$

- *sur* $C$ *(la composante centrale) par la classe dans* $\check{H}^1(C,(\omega(k,\mathfrak{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_C)$ *du uplet :*

$$\frac{(-1)^{k/2}}{k/2(k/2-1)}\left(0,\cdots,0,\frac{u^{k/2}}{du^{k/2-1}}|_{W_0\cap W_\infty},\cdots,\frac{u^{k/2}}{du^{k/2-1}}|_{W_{p-1}\cap W_\infty}\right)$$

*et par* $0$ *sur les autres* $\check{H}^1(C,(\omega(k,\mathfrak{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_C)$.

*Démonstration.* — L'image par $\psi_2$ d'une section $s\in H^0(X,\omega(k,\mathfrak{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$ à support dans la composante centrale est simplement donnée dans $\check{H}^1(C_y,(\omega(k,\mathfrak{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_{C_y})$ par la classe du uplet $(-p^{-1}\hat{s}_y\,|_{W_{y_0}\cap W_{y_1}},\cdots,-p^{-1}\hat{s}_y\,|_{W_{y_0}\cap W_{y_\infty}},0,\cdots,0)$ où $\hat{s}_y\in\omega(k,\mathfrak{L})(\mathcal{W}_y)$ est un relevé local de $s|_{W_y}$. Par le lemme 5.2.5, on obtient donc pour $\psi_2(\widetilde{s}_{k/2-1})$ :

$$(-1)^{k/2}\Big((\mathfrak{L}-\log_{\mathfrak{L}}(v_y)-H_{k/2})\frac{v_y^{k/2-2}}{dv_y^{k/2-1}}|_{W_{y_0}\cap W_{y_1}},\cdots,$$
$$(\mathfrak{L}-\log_{\mathfrak{L}}(v_y)-H_{k/2})\frac{v_y^{k/2-2}}{dv_y^{k/2-1}}|_{W_{y_0}\cap W_{y_\infty}},0,\cdots,0\Big).$$

En effet, les uplets de la forme $\big(\frac{v_y^{k/2-1}}{dv_y^{k/2-1}}\ |_{W_{y_0}\cap W_{y_1}},\cdots,\frac{v_y^{k/2-1}}{dv_y^{k/2-1}}\ |_{W_{y_0}\cap W_{y_\infty}},0,\cdots,0\big)$ (qui apparaissent avec le terme correctif $*_1\frac{v_y^{k/2-1}}{dv_y^{k/2-1}}$ dans le lemme 5.2.5) ont une classe nulle dans $\check{H}^1(C_y,(\omega(k,\mathfrak{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_{C_y})$ car la section locale $\frac{v_y^{k/2-1}}{dv_y^{k/2-1}}$ appartient à $H^0(W_y,\omega(k,\mathfrak{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$. Par ailleurs, on l'égalité dans $\check{H}^1(C_y,(\omega(k,\mathfrak{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_{C_y})$ d'après le lemme B.2.2 :

$$\Big(\log_{\mathfrak{L}}(v_y)\frac{v_y^{k/2-2}}{dv_y^{k/2-1}}|_{W_{y_0}\cap W_{y_1}},\cdots,\log_{\mathfrak{L}}(v_y)\frac{v_y^{k/2-2}}{dv_y^{k/2-1}}|_{W_{y_0}\cap W_{y_\infty}},0,\cdots,0\Big)=$$
$$H_{k/2-2}\Big(\frac{v_y^{k/2-2}}{dv_y^{k/2-1}}|_{W_{y_0}\cap W_{y_1}},\cdots,\frac{v_y^{k/2-2}}{dv_y^{k/2-1}}|_{W_{y_0}\cap W_{y_\infty}},0,\cdots,0\Big)$$

d'où la première égalité de l'énoncé en remarquant que $\mathfrak{L}-H_{k/2-2}-H_{k/2}=\frac{(-1)^{k/2-1}}{k/2(k/2-1)}a(\mathfrak{L})$. Passons à la deuxième. L'image par $\psi_2$ d'une section $s\in H^0(X,\omega(k,\mathfrak{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$ à support dans la composante centrale est donnée dans $\check{H}^1(C,(\omega(k,\mathfrak{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_C)$ par la classe du uplet $(p^{-1}(\hat{s}_z|_{W_y\cap W_z}-\hat{s}_y|_{W_y\cap W_z}))_{y<z}$ où les $\hat{s}_y\in\omega(k,\mathfrak{L})(\mathcal{W}_y)$ sont des relevés locaux des

$s|_{W_y}$, $y \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$. En développant $(u-[y])^i = \sum_{r=0}^{k/2-1}\binom{i}{r}u^r(-1)^{i-r}[y]^{i-r}$ et en utilisant (10), (11) et le lemme B.2.2, un calcul donne dans $\check{H}^1(C,(\omega(k,\mathfrak{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_C)$ :

$$\big((\widetilde{s}_{k/2-1,z}|_{W_y\cap W_z} - \widetilde{s}_{k/2-1,y}|_{W_y\cap W_z})\big)_{y<z} = \\ -p\sum_{r=0}^{k/2-2}\binom{k-2-r}{k/2-2}\sum_{i=r}^{k/2-2}\binom{i}{r}(-1)^{i-r}\alpha_i\Big(0,\cdots,0,\big(\frac{u^{k/2}}{du^{k/2-1}}|_{W_y\cap W_\infty}\big)_{y\in\mathbb{F}_p}\Big)$$

où rappelons que $\alpha_i$ est défini en (9). Mais par le lemme A.3.8, on a :

$$\sum_{r=0}^{k/2-2}\binom{k-2-r}{k/2-2}\sum_{i=r}^{k/2-2}\binom{i}{r}(-1)^{i-r}\alpha_i = \frac{(-1)^{k/2-1}}{k/2(k/2-1)}$$

d'où la deuxième égalité de l'énoncé. Le fait que l'on trouve une classe nulle sur les autres composantes (en particulier la composante « perpendiculaire » au point $\infty$ à la composante centrale) est un calcul facile laissé au lecteur. □

***Lemme 5.3.2.*** — *Soit $\alpha \in \{1,\cdots,k/2-2\}$. L'image de $\widetilde{s}_\alpha$ par $\psi_2$ est donnée dans $\Pi_C\check{H}^1(C,(\omega(k,\mathfrak{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_C)$ par la classe dans $\check{H}^1(C,(\omega(k,\mathfrak{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_C)$ (où $C$ est la composante centrale) du uplet :*

$$\sum_{r=0}^{k/2-2}\Big(\sum_{i=r}^{k/2-2}\binom{i}{r}(-1)^{i-r}\alpha_i\Big)\Big(\big((z^{k-\alpha-1-r}-y^{k-\alpha-1-r})\frac{u^r}{du^{k/2-1}}\,|_{W_y\cap W_z}\,\big)_{y<z,z\neq\infty}, \\ \big(-y^{k-\alpha-1-r}\frac{u^r}{du^{k/2-1}}\,|_{W_y\cap W_\infty}\,\big)_{y\in\mathbb{F}_p}\Big)$$

*et par* 0 *sur les autres $\check{H}^1(C,(\omega(k,\mathfrak{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_C)$.*

*Démonstration.* — On utilise (10) et (11) comme précédemment et on développe $(u-[y])^i = \sum_{r=0}^{i}\binom{i}{r}u^r(-1)^{i-r}[y]^{i-r}$. La dernière assertion provient du lemme 5.2.5 et du fait que les termes correctifs en $*_1\frac{v_y^{k/2-1}}{dv_y^{k/2-1}}$ ne contribuent pas (cf. preuve précédente). □

***Remarque 5.3.3.*** — La formule sommatoire du lemme 5.3.2 est encore valable pour $\alpha = k/2-1$, mais dans le lemme 5.3.1, on a complètement identifié la classe de Čech « centrale » dans $\check{H}^1(C,(\omega(k,\mathfrak{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_C)$ en utilisant le lemme B.2.2.

**5.4. La $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-représentation $H^0(\mathfrak{X},\omega(k,\mathfrak{L}))\otimes\mathbb{F}$.** — On détermine la $G$-représentation $H^0(\mathfrak{X},\omega(k,\mathfrak{L}))\otimes_{\mathfrak{O}}\mathbb{F}$ (sous les conditions du §5).

***Proposition 5.4.1.*** — *Soit $a(\mathfrak{L})\in\mathfrak{O}$ comme au lemme 5.3.1.*
*(i) L'application $\psi_2 : H^0(X,\omega(k,\mathfrak{L})\otimes\mathfrak{O}/p)\to H^1(X,\omega(k,\mathfrak{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$ est surjective.*
*(ii) On a un isomorphime de $G$-représentations :*

$$\mathrm{Ker}\big(\psi_2|_{\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(H\otimes_{\mathbb{F}}\mathfrak{O}/p)}\big) = \Big\{f\in\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(\sigma(p-3,1)\otimes_{\mathbb{F}}\mathfrak{O}/p), a(\mathfrak{L})T_pf = f\Big\}.$$

*Démonstration.* — Nous allons montrer que $\psi_2|_{\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(H\otimes\mathfrak{O}/p)}$ est surjectif et calculer son noyau. Rappelons que :

$$H \otimes_{\mathbb{F}} \mathfrak{O}/p = \bigoplus_{j=0}^{k/2-2} \sigma(p-3-2j, j+1) \otimes_{\mathbb{F}} \mathfrak{O}/p$$

et que chaque représentation $\sigma(p-3-2j,j+1)\otimes\mathfrak{O}/p$ est engendrée sous $K$ par la section globale $\widetilde{s}_{k/2-1-j} \in H^0(X,\omega(k,\mathfrak{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$ (voir le lemme 4.4.1, la preuve du corollaire 4.2.4 et le début du §5.3). Rappelons aussi que $\check{H}^1(X,\omega(k,\mathfrak{L})\otimes\mathfrak{O}/p) \simeq \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(H\otimes_{\mathbb{F}}\mathfrak{O}/p)^*$ (voir le début du §5.3). Montrons que la projection de $\psi_2(\widetilde{s}_{k/2-1-j})$ sur la composante centrale est non nulle modulo $\pi$. Pour cela, considérons le uplet du lemme 5.3.2 (et aussi le uplet « central » du lemme 5.3.1 pour $j=0$) vu dans $\check{H}^1(C,(\omega^{-\frac{k-2}{2}}\otimes\mathfrak{O}/p)|_C)$ et calculons son accouplement avec la section :

$$\frac{u^{(p+1)(k/2-1-j)-k}(du)^{k/2}}{(u-u^p)^{k/2-1-j}} = (-1)^{k/2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}s_{k/2-1-j} \in H^0(C,(\omega^{k/2}\otimes\mathfrak{O}/p)(1)\ |_C)$$

donné par la dualité de Serre entre $H^0(C,(\omega^{k/2}\otimes\mathfrak{O}/p)(1)\ |_C)$ et $\check{H}^1(C,(\omega^{-\frac{k-2}{2}}\otimes\mathfrak{O}/p)|_C)$. Un calcul facile de résidus donne :

$$(-1)^{k/2-1-j}\sum_{r=0}^{k/2-2}\binom{k-2-r}{k/2-2-j}\sum_{i=r}^{k/2-2}\binom{i}{r}(-1)^{i-r}\alpha_i$$

qui est dans $\mathbb{Z}_p^\times$ d'après le lemme A.3.8. Comme la section $\frac{u^{(p+1)(k/2-1-j)-k}(du)^{k/2}}{(u-u^p)^{k/2-1-j}}$ a un antécédent dans $H^0(C,(\omega(k,\mathfrak{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_C)$, on en déduit par le corollaire 4.3.5 que le uplet du lemme 5.3.2 (et le uplet « central » du lemme 5.3.1 pour $j=0$) est vraiment non nul modulo $\pi$ dans $\check{H}^1(C,(\omega(k,\mathfrak{L})\otimes\mathfrak{O}/p)|_C)$. Comme $\widetilde{s}_{k/2-1-j}$ engendre sous $K$ la représentation « irréductible » $\sigma(p-3-2j,j+1)\otimes\mathfrak{O}/p$ (au sens où cette représentation n'admet pas de sous-représentation stricte non nulle facteur direct comme $\mathfrak{O}/p$-module), $\psi_2$ est injectif en restriction à $\sigma(p-3-2j,j+1)\otimes\mathfrak{O}/p$. Lorsque $j>0$, on sait de plus par la dernière assertion du lemme 5.3.2 que la projection de $\psi_2(\widetilde{s}_{k/2-1-j})$ sur les composantes non centrales est nulle. On a donc $\mathrm{Ker}(\psi_2\ |_{\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(\sigma(p-3-2j,j+1)\otimes\mathfrak{O}/p)})=0$ et $\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(\sigma(p-3-2j,j+1)\otimes\mathfrak{O}/p)^* \subset \mathrm{Im}(\psi_2)$ pour $j>0$. Pour $j=0$, on déduit facilement du lemme 5.3.1 que :

$$\begin{aligned}\psi_2\ |_{\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(\sigma(p-3,1)\otimes_{\mathbb{F}}\mathfrak{O}/p)} \colon \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(\sigma(p-3,1)\otimes_{\mathbb{F}}\mathfrak{O}/p) &\longrightarrow \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(\sigma(p-3,1)\otimes_{\mathbb{F}}\mathfrak{O}/p)^* \\ &\simeq \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(\sigma(p-3,1)\otimes_{\mathbb{F}}\mathfrak{O}/p)\end{aligned}$$

s'identifie (à multiplication près par un scalaire non nul) à l'endomorphisme surjectif $-a(\mathfrak{L})T_p+\mathrm{Id}$. En effet, les éléments de Čech $\left(0,\cdots,0,\frac{u^{k/2}}{du^{k/2-1}}|_{W_0\cap W_\infty},\cdots,\frac{u^{k/2}}{du^{k/2-1}}|_{W_{p-1}\cap W_\infty}\right)$ et $(-1)^{k/2-1}\left(\frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}}|_{W_0\cap W_1},\cdots,\frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}}|_{W_0\cap W_\infty},0,\cdots,0\right)$ s'envoient nécessairement respectivement sur $1$ et $-u^{p-3}$ dans $\sigma(p-3,1)\otimes\mathfrak{O}/p$ (à homothétie près) via un isomorphisme

$(\sigma(p-3,1)\otimes\mathfrak{O}/p)^* \xrightarrow{\sim} \sigma(p-3,1)\otimes\mathfrak{O}/p$ (pour le premier, cela découle du fait qu'il est la projection de l'image de $\widetilde{s}_{k/2-1}$ et pour le deuxième, on applique $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$). On applique alors la formule (1) donnant $T_p([\mathrm{Id},1])$ en remarquant que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & [-y]\end{pmatrix}u = v_y$ sur $\mathfrak{X}$ (§2.2). Donc $\psi_2$ est finalement surjectif (et même surjectif en restriction à $\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(H\otimes\mathfrak{O}/p)$) et son noyau en restriction à $\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(H\otimes\mathfrak{O}/p)$ est exactement les $f\in\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G(\sigma(p-3,1)\otimes\mathfrak{O}/p)$ tels que $a(\mathcal{L})T_pf=f$. □

***Proposition 5.4.2***. — *L'image de $H^0(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathfrak{O}/p^2)$ dans $H^0(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$ se relève dans $H^0(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L}))$ via l'application $H^0(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L}))\to H^0(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathfrak{O}/p)$.*

*Démonstration.* — Pour alléger les notations, on note $\omega(k,\mathcal{L})/p^n$ pour $\omega(k,\mathcal{L})\otimes\mathfrak{O}/p^n$. Par la proposition 5.4.1, l'application $\psi_2 : H^0(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})/p)\to H^1(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})/p)$ est surjective. En reprenant la suite exacte longue de cohomologie définissant $\psi_2$, on en déduit que l'application $H^1(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})/p)\to H^1(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})/p^2)$ est nulle et que l'application $H^1(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})/p^2)\to H^1(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})/p)$ est injective. Par ailleurs, le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
0\to & \omega(k,\mathcal{L})/p^2 & \xrightarrow{p} & \omega(k,\mathcal{L})/p^3 & \to & \omega(k,\mathcal{L})/p & \to 0\\
& \downarrow & & \downarrow & & \| & \\
0\to & \omega(k,\mathcal{L})/p & \xrightarrow{p} & \omega(k,\mathcal{L})/p^2 & \to & \omega(k,\mathcal{L})/p & \to 0
\end{array}$$

induit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
H^0(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})/p^3) & \to & H^0(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})/p) & \xrightarrow{\psi_3} & H^1(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})/p^2)\\
\downarrow & & \| & & \downarrow\\
H^0(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})/p^2) & \to & H^0(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})/p) & \overset{\psi_2}{\twoheadrightarrow} & H^1(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})/p)
\end{array}$$

où la flèche verticale de droite est injective. Cela implique immédiatement que $\psi_3$ est surjectif et que l'on a un isomorphisme $H^1(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})/p^2)\xrightarrow{\sim}H^1(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})/p)$. Comme $\psi_3$ est surjectif, on peut recommencer le raisonnement précédent avec $\psi_3$ au lieu de $\psi_2$, puis $\psi_4$ au lieu de $\psi_3$ etc. et on obtient par récurrence des isomorphismes pour tout $n\geq 1$ :

$$H^1(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})/p^n)\xrightarrow{\sim}H^1(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})/p).$$

On a des diagrammes commutatifs analogues au précédent :

$$\begin{array}{ccccc}
H^0(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})/p^{n+m}) & \to & H^0(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})/p^n) & \to & H^1(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})/p^m)\\
\downarrow & & \| & & \downarrow\wr\\
H^0(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})/p^{n+1}) & \to & H^0(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})/p^n) & \to & H^1(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})/p)
\end{array}$$

d'où on déduit des isomorphismes pour tous $n,m>0$ :

$$\begin{aligned}(12)\quad \mathrm{Im}\Big(H^0(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})/p^{n+m})\to H^0(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})/p^n)\Big) &\xrightarrow{\sim}\\ &\mathrm{Im}\Big(H^0(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})/p^{n+1})\to H^0(\mathfrak{X},\omega(k,\mathcal{L})/p^n)\Big).\end{aligned}$$

En passant à la limite projective sur $n$ sur les suites exactes :

$$0 \to H^0(\mathcal{X}, \omega(k,\mathcal{L})/p^{n-1}) \to H^0(\mathcal{X}, \omega(k,\mathcal{L})/p^n) \to \mathrm{Im}\Big(H^0(\mathcal{X}, \omega(k,\mathcal{L})/p^n) \to H^0(\mathcal{X}, \omega(k,\mathcal{L})/p)\Big) \to 0$$

et en remarquant que le quotient de droite est constant par (12) appliqué avec $n=1$ et que les conditions de Mittag-Leffler sont satisfaites sur les noyaux par (12) encore, on en déduit :

$$H^0(\mathcal{X}, \omega(k,\mathcal{L})) \otimes \mathfrak{O}/p \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}\Big(H^0(\mathcal{X}, \omega(k,\mathcal{L})/p^2) \to H^0(\mathcal{X}, \omega(k,\mathcal{L})/p)\Big)$$

d'où le résultat. $\square$

On en déduit le résultat principal de cet article (théorème 1.1.1) :

***Théorème 5.4.3***. — *Soit $a(\mathcal{L}) \in \mathfrak{O}$ comme au lemme 5.3.1.*
*(i) Si* $\mathrm{val}(a(\mathcal{L})) > 0$, *on a un isomorphisme de $G$-représentations :*

$$H^0(\mathcal{X}, \omega(k,\mathcal{L})) \otimes_{\mathfrak{O}} \mathbb{F} \simeq \{f \in \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1, T_p f = 0\}.$$

*(ii) Si* $\mathrm{val}(a(\mathcal{L})) = 0$, *on a un isomorphisme de $G$-représentations :*

$$0 \to \{f \in \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G \sigma(p-3,1), a(\mathcal{L})T_p f = f\} \to H^0(\mathcal{X}, \omega(k,\mathcal{L})) \otimes_{\mathfrak{O}} \mathbb{F} \to \{f \in \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1, T_p f = a(\mathcal{L}) f\} \to 0.$$

*Démonstration.* — Noter que (ii) lorsque $\mathrm{val}(a(\mathcal{L})) > 0$ redonne (i) puisque la représentation de gauche est alors nulle. Par le lemme 5.4.2, on voit donc qu'il suffit de montrer le même énoncé que (ii) pour $\mathrm{val}(\mathcal{L}) \geq 0$ avec la $G$-représentation image de $H^0(\mathcal{X}, \omega(k,\mathcal{L}) \otimes \mathfrak{O}/p^2)$ dans $H^0(\mathcal{X}, \omega(k,\mathcal{L}) \otimes \mathfrak{O}/p)$, c'est-à-dire avec $\mathrm{Ker}(\psi_2)$. Par le corollaire 4.4.6, on a une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G (H \otimes \mathfrak{O}/p) \to H^0(X, \omega(k,\mathcal{L}) \otimes \mathfrak{O}/p) \to \{f \in \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1 \mid T_p f = a(\mathcal{L}) f\} \to 0$$

et par la proposition 5.4.1, on a :

$$\mathrm{Ker}\big(\psi_2|_{\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G (H \otimes \mathfrak{O}/p)}\big) = \Big\{f \in \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G (\sigma(p-3,1) \otimes \mathfrak{O}/p), a(\mathcal{L}) T_p f = f\Big\}.$$

Il suffit donc de montrer que $\mathrm{Ker}(\psi_2) \subset H^0(X, \omega(k,\mathcal{L}) \otimes \mathfrak{O}/p)$ s'envoie encore surjectivement vers la représentation quotient $\{f \in \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G 1 \mid T_p f = a(\mathcal{L}) f\}$. Soit $\bar{s}$ un élément de cette représentation quotient et $s \in H^0(X, \omega(k,\mathcal{L}) \otimes \mathfrak{O}/p)$ un relevé de $\bar{s}$. Comme l'application $\psi_2$ est surjective en restriction à $\mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G (H \otimes \mathfrak{O}/p)$ (cf. preuve de la proposition 5.4.1), il existe $s' \in \mathrm{Ind}_{K\mathbb{Q}_p^\times}^G (H \otimes \mathfrak{O}/p)$ tel que $\psi_2(s') = \psi_2(s)$ et l'élément $s - s' \in \mathrm{Ker}(\psi_2)$ s'envoie encore sur $\bar{s}$. Ceci achève la preuve. $\square$

***Corollaire 5.4.4.*** — *Supposons $k$ pair, $k \leq p+1$ et* $\mathrm{val}(\mathcal{L}) \geq 0$.
*(i) Le* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$*-Banach unitaire $B(k, \mathcal{L})$ est non nul et admissible.*
*(ii) La correspondance définie dans* [**4**] *est compatible à la réduction modulo $p$.*

*Démonstration.* — Le (i) résulte de [**4**, Prop.4.4.4]. Le (ii) résulte de [**6**] et de la définition de cette correspondance ([**3**]). $\square$

# Appendice A
# Calculs de sections

## A.1. Calculs combinatoires. —

***Lemme A.1.1***. — *Soit $1 \leq n \leq p-2$ et $0 \leq \ell \leq p-1$. On a les égalités dans $\mathbb{F}_p(u)$ :*

$$\frac{u^\ell}{(u-u^p)^n} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{x \in \mathbb{F}_p^\times} \frac{x^{\ell+i-n}}{(u-x)^i} \binom{\ell}{\ell+i-n} + \begin{cases} \frac{1}{u^{n-\ell}} & \text{si } 0 \leq \ell \leq n-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\frac{1}{u(u-u^p)^n} = \frac{1}{u^{n+1}} + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j} \sum_{x \in \mathbb{F}_p^\times} \frac{x^{j-n-1}}{(u-x)^j}.$$

*Démonstration.* — La première égalité se démontre par récurrence sur $\ell \geq 0$. La deuxième se démontre en remarquant que :

$$\frac{1}{(u-u^p)^n} = \frac{1}{u^n} + \sum_{x \in \mathbb{F}_p^\times} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \frac{x^{-n+i-1}}{(u-x)^{i-1}} + (-1)^{n-i} \frac{x^{-n+i}}{(u-x)^i}.$$

$\square$

***Lemme A.1.2***. — *Soit $1 \leq \ell \leq n$ des entiers. On a (dans $\mathbb{Q}$) :*

$$\sum_{1 \leq j \leq \ell} \frac{(-1)^j}{j} \binom{n}{\ell-j} = \binom{n}{\ell} (H_{n-\ell} - H_n)$$

*Démonstration.* — La somme $\sum_{1 \leq j \leq \ell} \frac{(-1)^j}{j} \binom{n}{\ell-j}$ est le coefficient de degré $\ell$ dans le développement en série entière de $z \mapsto -(1+z)^n \log(1+z)$. En dérivant $(1+z)^x = \sum_{i \geq 0} \binom{x}{i} z^i$ par rapport à $x$, on obtient par ailleurs :

$$(1+z)^x \log(1+z) = \sum_{i \geq 1} z^i \frac{d}{dx} \binom{x}{i}.$$

Or, si $x$ n'est pas un entier de $0$ à $i-1$, on a par dérivation logarithmique :

$$\frac{d}{dx} \binom{x}{i} = \binom{x}{i} \sum_{0 \leq j \leq i-1} \frac{1}{x-j} = \binom{x}{i} (H_x - H_{x-i})$$

où $H_x \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n>0} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$ pour tout nombre complexe $x \notin \mathbf{Z}_{<0}$ (avec $H_0 \overset{\text{déf}}{=} 0$). Donc le coefficient de degré $\ell$ dans le développement en série entière de $z \mapsto (1+z)^x \log(1+z)$ est $\binom{x}{\ell}(H_x - H_{x-\ell})$ lorsque $x \in \mathbb{C}_p - \{0, \cdots, \ell-1\}$. On en déduit le résultat. $\square$

***Lemme A.1.3***. — *Soit $1 \leq m \leq n$ des entiers et $M \overset{\text{déf}}{=} (M_{i,l})_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq l \leq m}}$ la matrice à coefficients dans $\mathbb{Q}$ définie par $M_{i,0} \overset{\text{déf}}{=} \binom{n+i}{i}$ pour $0 \leq i \leq m$ et $M_{i,l} \overset{\text{déf}}{=} \binom{n+i-l}{i} \sum_{j=1}^{l} \frac{(-1)^j}{j} \binom{n+i}{l-j}$ pour $1 \leq l \leq m$ et $0 \leq i \leq m$. Alors $\det(M) = \frac{(-1)^{m(m+1)/2}}{m!}$.*

*Démonstration.* — Par le lemme A.1.2, on a $M_{i,l} = \binom{n+i-l}{i}\binom{n+i}{l}(H_{n+i-l} - H_{n+i})$ pour $1 \leq l \leq m$ et $0 \leq i \leq m$. On en déduit :

$$\det(M) = (-1)^m \begin{vmatrix} 1 & 1/n & 1/(n-1) & \dots & 1/(n-m+1) \\ 1 & 1/(n+1) & 1/n & \dots & 1/(n-m+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1/(n+m) & \dots & \dots & 1/(n+1) \end{vmatrix} \prod_{0\leq i,l\leq m} \binom{n}{l}\binom{n+i}{n}.$$

En développant le déterminant par rapport à la première colonne, on reconnaît des déterminants de Cauchy. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \det(M) &= (-1)^m \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \left( \prod_{i=1}^{m} \frac{(n+i)!}{i!} \prod_{l=1}^{m} \frac{l!}{(n-l)!} \frac{\prod_{\substack{0\leq i<l\leq m \\ i,l\neq j}} (l-i) \prod_{1\leq i<l\leq m} (-l+i)}{\prod_{\substack{1\leq l\leq m, 0\leq i\leq m \\ i\neq j}} (n+1+i-l)} \right) \\ &= (-1)^m \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \frac{\frac{1}{j!(m-j)!} \frac{(-1)^{m(m-1)/2}}{m!}}{\frac{(n+j-m)!}{(n+j)!}} \\ &= \frac{(-1)^{m(m+1)/2}}{m!} \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{n+j}{m}\binom{m}{j}. \end{aligned}$$

On en déduit $\det(M) = \frac{(-1)^{m(m+1)/2}}{m!}$. □

La démonstration du lemme combinatoire qui suit est laissée en exercice au lecteur.

***Lemme A.1.4.*** — *Soit $1 \leq m \leq n$ des entiers et $M' = (M'_{i,l})_{\substack{0\leq i\leq m \\ 0\leq l\leq m}}$ la matrice obtenue à partir de la matrice $M$ du lemme A.1.3 en ajoutant à la dernière colonne le terme :*

$$M'_{i,m} = M_{i,m} + (-1)^{m+1} \sum_{j=1}^{m} \frac{(-1)^j}{j} \binom{n+i}{i-j}, \quad 0 \leq i \leq m.$$

*Alors* $\mathrm{Ker}({}^tM')$ *est de dimension* 1 *et est engendré par le vecteur colonne* $(c_i)_{0\leq i\leq m}$ *où* $c_i \overset{\text{déf}}{=} \binom{n+1}{i+1+n-m}(-1)^{n+i}$. *En particulier, on a :*

$$\sum_{i=0}^{m} M_{i,m} c_i = (-1)^m \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{(-1)^j}{j} \binom{n+i}{i-j} c_i = \frac{(-1)^{n+1}}{m}.$$

**A.2. Calculs de sections modulo $p$.** — Rappelons que $n_k = (k/2-1)(p-1)-2$ avec $4 \leq k \leq p+1$ et $k$ pair. Dans ce paragraphe, on détermine si les sections de $H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}|_C)$ :

$$\frac{(du)^{k/2}}{u(u-u^p)^{k/2-1}}, \ \frac{u^r(du)^{k/2}}{(u-u^p)^{k/2-1}}, \ 0 \leq r \leq n_k$$

admettent un antécédent dans $H^0(C, \overline{\omega}(k, \mathfrak{L})|_C)$ (via l'injection du lemme 4.2.1 et pour $\mathrm{val}(\mathfrak{L}) \geq 0$). Par décomposition en éléments simples (lemme A.1.1), les fractions $\frac{1}{u(u-u^p)^{k/2-1}}$ et $\frac{u^r}{(u-u^p)^{k/2-1}}$ pour $0 \leq r \leq n_k$ appartiennent à :

$$\bigoplus_{i=1}^{k/2-1} \bigoplus_{\alpha=1}^{p-1} \mathbb{F} \sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times} \frac{x^{i-\alpha}}{(u-x)^i} \oplus \bigoplus_{i=1}^{k/2} \mathbb{F} \frac{1}{u^i}.$$

Reprenons les notations du §4.2. On commence par « intégrer » formellement $k-1$ fois la section locale $(-1)^i(i-1)!(k-1-i)!\frac{(du)^{k/2}}{u^i}$ pour $1 \leq i \leq k/2$ par rapport à la variable $u = u_0$, puis par rapport à $u_\infty$, enfin par rapport à $u_y$ pour $y \in \mathbb{F}_p^\times$. On obtient, à addition près d'un terme dans $\mathbb{F}[u_y]\frac{u_y^{k/2}}{du_y^{k/2-1}}$ :

$$\begin{aligned}
t_{i,0} &\overset{\text{déf}}{=} -\log_{\mathcal{L}}(u_0)\frac{u_0^{k-1-i}}{du_0^{k/2-1}}\\
t_{i,\infty} &\overset{\text{déf}}{=} (-1)^{k/2+1}\log_{\mathcal{L}}(u_\infty)\frac{u_\infty^{i-1}}{du_\infty^{k/2-1}}\\
t_{i,y} &\overset{\text{déf}}{=} -\Big(\log_{\mathcal{L}}(u_y+y)+\sum_{j=1}^{k/2-1}\frac{(-1)^j(u_y y^{-1})^j}{j}\Big)\frac{(u_y+y)^{k-i-1}}{du_y^{k/2-1}}.
\end{aligned}$$

Puis on fait de même avec $(k-1-i)!(i-1)!(-1)^{\alpha+1}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\frac{x^{i-\alpha}}{(u-x)^i}(du)^{k/2}$ :

$$\begin{aligned}
t_{i,\alpha,0} &\overset{\text{déf}}{=} (-1)^{\alpha-i}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}x^{i-\alpha}\Big(\log_{\mathcal{L}}(u_0-x)+\sum_{j=1}^{k/2-1}\frac{u_0^j x^{-j}}{j}\Big)\frac{(u_0-x)^{k-1-i}}{du_0^{k/2-1}}\\
t_{i,\alpha,\infty} &\overset{\text{déf}}{=} (-1)^{k/2+\alpha}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}u_\infty^{i-1}x^{\alpha-k+1}\Big(\log_{\mathcal{L}}(u_\infty-x)+\sum_{j=1}^{k/2-1}\frac{(u_\infty x^{-1})^j}{j}\Big)\frac{(u_\infty-x)^{k-1-i}}{du_\infty^{k/2-1}}\\
&\quad+(-1)^{k/2+\alpha+1}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}x^{-k+1+\alpha}(u_\infty-x)^{k-1-i}\log_{\mathcal{L}}(u_\infty)\frac{u_\infty^{i-1}}{du_\infty^{k/2-1}}\\
t_{i,\alpha,y} &\overset{\text{déf}}{=} (-1)^{\alpha-i}\sum_{\substack{x\in\mathbb{F}_p^\times\\ x\neq y}}x^{i-\alpha}\Big(\log_{\mathcal{L}}(u_y+y-x)+\sum_{j=1}^{k/2-1}\frac{(u_y(x-y)^{-1})^j}{j}\Big)\frac{(u_y+y-x)^{k-1-i}}{du_y^{k/2-1}}\\
&\quad+(-1)^{\alpha-i}y^{i-\alpha}\log_{\mathcal{L}}(u_y)\frac{u_y^{k-1-i}}{du_y^{k/2-1}}.
\end{aligned}$$

Les éléments $(t_{i,y})_{1\leq i\leq k/2}$ et $(t_{i,\alpha,y})_{\substack{1\leq i\leq k/2-1\\ 1\leq\alpha\leq p-1}}$ sont des sections dans $H^0(W_y,\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C)$ pour $y\in\mathbb{F}_p$. Ce ne sont pas, en général, des sections dans $H^0(W_\infty,\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C)$ pour $y=\infty$ à cause des termes $\log_{\mathcal{L}}(u_\infty)\frac{u_\infty^{\alpha-1}}{du_\infty^{k/2-1}}$, $1\leq\alpha\leq k/2-1$ (ce sont alors seulement des sections dans $H^0(U,\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C)$).

Rappelons la convention $\binom{n}{m}=0$ si $m>n$ ou $m<0$.

***Lemme A.2.1***. — *(i) Pour $y \in \mathbb{F}_p \cup \{\infty\}$, $1 \leq i \leq k/2-1$ et $1 \leq \alpha \leq p-1$, on a à addition près d'un terme dans $\mathbb{F}[u_y]\frac{u_y^{k/2}}{du_y^{k/2-1}}$ :*

$$t_{i,\alpha,0}|_U = (-1)^{\alpha-i}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times} x^{i-\alpha}\log_{\mathcal{L}}(u_0-x)\frac{(u_0-x)^{k-1-i}}{du_0^{k/2-1}}$$
$$+\begin{cases} \sum_{j=1}^{k/2-1}\frac{1}{j}\binom{k-1-i}{k/2-1-j}(-1)^{j+1}\frac{u_0^{k-1-\alpha}}{du_0^{k/2-1}} & \textit{si } k/2\leq\alpha\leq k-2 \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases},$$

$$t_{i,\alpha,\infty}|_U = (-1)^{k/2+\alpha}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times} u_\infty^{i-1}x^{\alpha-k+1}\log_{\mathcal{L}}(u_\infty-x)\frac{(u_\infty-x)^{k-1-i}}{du_\infty^{k/2-1}}$$
$$+\begin{cases} (-1)^{k/2+1}\binom{k-1-i}{k-1-\alpha}\log_{\mathcal{L}}(u_\infty)\frac{u_\infty^{\alpha-1}}{du_\infty^{k/2-1}}+(-1)^{k/2}\sum_{j=1}^{k/2-1}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-i}{\alpha-i-j}\frac{u_\infty^{\alpha-1}}{du_\infty^{k/2-1}} & \textit{si } \alpha\leq k/2 \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

*et, pour $y \in \mathbb{F}_p^\times$ :*

$$t_{i,\alpha,y}|_U = y^{i-\alpha}(-1)^{\alpha-i}\log_{\mathcal{L}}(u_y)\frac{u_y^{k-1-i}}{du_y^{k/2-1}}+(-1)^{\alpha-i}\sum_{\substack{x\in\mathbb{F}_p^\times\\ x\neq y}}x^{i-\alpha}\log_{\mathcal{L}}(u_y+y-x)\frac{(u_y+y-x)^{k-1-i}}{du_y^{k/2-1}}$$
$$-\sum_{l=1}^{k/2-1}\binom{k-i-l-1}{\alpha-i}y^{k-1-\alpha-l}\sum_{j=1}^{k/2-1}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-i}{l-j}\frac{u_y^l}{du_y^{k/2-1}}.$$

*(ii) Pour $y\in\mathbb{F}_p^\times$, $1\leq i\leq k/2$, on a à addition près d'un terme dans $\mathbb{F}[u_y]\frac{u_y^{k/2}}{du_y^{k/2-1}}$ :*

$$t_{i,y}|_U = -\log_{\mathcal{L}}(u_y+y)\frac{(u_y+y)^{k-1-i}}{du_y^{k/2-1}}+\sum_{r=1}^{k/2-1}y^{k-1-i-r}\sum_{j=1}^{r}\binom{k-i-1}{r-j}\frac{(-1)^{j+1}}{j}\frac{u_y^r}{du_y^{k/2-1}}.$$

*Démonstration.* — Nous démontrons seulement le cas de $t_{i,\alpha,y}|_U$, laissant les autres cas au lecteur. On observe que, à addition près d'un terme dans $\mathbb{F}[u_y]\frac{u_y^{k/2}}{du_y^{k/2-1}}$ :

$$\sum_{\substack{x\in\mathbb{F}_p^\times\\ x\neq y}}x^{i-\alpha}(u_y+y-x)^{k-1-i}\sum_{j=1}^{k/2-1}\frac{(u_y(x-y)^{-1})^j}{j} =$$
$$\sum_{l=1}^{k/2-1}u_y^l\sum_{j=1}^{k/2-1}\frac{1}{j}\binom{k-1-i}{l-j}(-1)^{-1+i-l+j}\sum_{\substack{x\in\mathbb{F}_p^\times\\ x\neq y}}(x-y)^{k-1-i-l}x^{i-\alpha}$$

et, par le lemme A.3.1 :

$$\sum_{\substack{x\in\mathbb{F}_p^\times\\ x\neq y}}(x-y)^{k-1-i-l}x^{i-\alpha} = -\binom{k-1-i-l}{\alpha-i}(-y)^{k-1-l-\alpha}.$$

On en déduit la formule de l'énoncé. □

***Lemme A.2.2***. — *Pour $2 \leq \alpha \leq k/2$ et $y \in \mathbb{F}_p \cup \{\infty\}$, notons :*

$$\begin{aligned} s'_{\alpha,y} &\overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{\alpha} b_{i,\alpha} t_{i,\alpha,y} \text{ si } 2 \leq \alpha \leq k/2-1 \\ s'_{k/2} &\overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{k/2-1} b_{i,k/2} t_{i,k/2,y} + b_{k/2,k/2} t_{k/2,y} \end{aligned}$$

*où les $b_{i,\alpha}$ sont dans $\mathbb{F}$. Il existe un unique choix de $(b_{i,\alpha})_{1\leq i\leq \alpha}$ dans $\mathbb{F}$, qui est en fait dans $\mathbb{F}_p$, de telle sorte que :*

*(i)* $b_{\alpha,\alpha} = \begin{cases} \frac{(-1)^{\alpha+1}}{(k-1-\alpha)!(\alpha-1)!} & si \quad 2 \leq \alpha \leq k/2-1, \\ \frac{(-1)^{k/2}}{(k/2-1)!^2} & si \qquad \alpha = k/2 \end{cases}$ ;

*(ii) les coefficients de $\frac{u_y^i}{du_y^{k/2-1}}$ dans $s'_{\alpha,y}$ pour $1 \leq i \leq \alpha-2$ et $y \in \mathbb{F}_p$ sont nuls ;*

*(iii) le coefficient de $\log_{\mathcal{L}}(u_\infty)\frac{u_\infty^{\alpha-1}}{du_\infty^{k/2-1}}$ dans $s'_{\alpha,\infty}$ est nul.*

*De plus, pour $\alpha = k/2$, l'élément $s'_{k/2}$ ainsi défini s'obtient localement par « intégration » $k-1$ fois (comme au début de ce paragraphe) d'un élément :*

$$r_{k/2} = \Big(\frac{1}{u(u-u^p)^{k/2-1}} + f(u)\Big)(du)^{k/2} \in H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}|_C)$$

*avec $f(u)(du)^{k/2} \in H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$.*

*Démonstration*. — Définissons une matrice carrée $M$ à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$ avec $\alpha - 1$ lignes par :

$$\begin{aligned} M_{i,0} &\overset{\text{déf}}{=} \binom{k-1-i}{\alpha-i}, \quad 1 \leq i \leq \alpha-1 \\ M_{i,\ell} &\overset{\text{déf}}{=} \binom{k-i-\ell-1}{\alpha-i} \sum_{j=1}^{\ell} \frac{(-1)^j}{j} \binom{k-1-i}{\ell-j}, \quad 1 \leq \ell \leq \alpha-2,\ 1 \leq i \leq \alpha-1. \end{aligned}$$

Les conditions (ii) et (iii) imposent que $(b_{i,\alpha})_{1\leq i\leq \alpha-1}$ est solution du système linéaire :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\alpha-1} M_{i,0} b_{i,\alpha} &= -b_{\alpha,\alpha} \\ \sum_{i=1}^{\alpha-1} M_{i,\ell} b_{i,\alpha} &= -\sum_{j=1}^{\ell} \frac{(-1)^j}{j} \binom{k-1-\alpha}{\ell-j} b_{\alpha,\alpha} \quad 1 \leq \ell \leq \alpha-2 \end{aligned}$$

(voir lemme A.2.1 en notant que, pour $\ell \leq \alpha-2 \leq k/2-2$, on peut remplacer les sommes $\sum_{j=1}^{k/2-1}$ par $\sum_{j=1}^{\ell}$ car $\binom{k-1-\alpha}{\ell-j} = 0$ pour $j > \ell$). Or, en changeant $i$ en $\alpha - i$, on observe que la matrice $M$ est une matrice du même type que celle définie au lemme A.1.3, donc $M$ est inversible, i.e. $M \in \mathrm{GL}_{\alpha-1}(\mathbb{Z}_p)$. On en déduit l'existence et l'unicité $(b_{i,\alpha})_{1\leq i\leq \alpha-1}$

(dans $\mathbb{F}_p$). Par construction, $s'_{k/2,y}$ s'obtient par « intégration » $k-1$ fois (comme au début de ce paragraphe) de :

$$r_{k/2} \overset{\text{déf}}{=} \frac{a_{k/2}}{u^{k/2}}(du)^{k/2} + \sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\sum_{i=1}^{k/2-1} a_i \frac{x^{i-k/2}}{(u-x)^i}(du)^{k/2} \tag{13}$$

avec $a_{k/2} = 1$ et $a_i = (-1)^{k/2+1}(k-1-i)!(i-1)!b_{i,k/2}$ pour $1 \le i \le k/2-1$. Il suffit de montrer qu'il existe une suite $(a'_i)_{2\le i\le k/2-1}$ dans $\mathbb{F}_p$ telle que :

$$r_{k/2} = \Big(\frac{1}{u(u-u^p)^{k/2-1}} + \sum_{i=2}^{k/2-1} a'_i \frac{u^{p-1+i-k/2}}{(u-u^p)^i}\Big)(du)^{k/2}$$

où on remarque que les sections $\big(\frac{u^{p-1+i-k/2}(du)^{k/2}}{(u-u^p)^i}\big)_{2\le i\le k/2-1}$ sont dans $H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ (le terme $\frac{u^{p-k/2}(du)^{k/2}}{u-u^p}$ n'y est pas). Pour cela, on constate que le système :

$$\Big(\Big(\frac{u^{p-1+i-k/2}}{(u-u^p)^i}\Big)_{1\le i\le k/2-1}, \frac{1}{u(u-u^p)^{k/2-1}}\Big)$$

est échelonné en $\big(\big(\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}\frac{x^{i-k/2}}{(u-x)^i}\big)_{1\le i\le k/2-1}, \frac{1}{u^{k/2}}\big)$ (utiliser le lemme A.1.1) et que l'expression de $r_{k/2}$ comme en (13) dans la base $\big(\big(\frac{u^{p-1+i-k/2}}{(u-u^p)^i}(du)^{k/2}\big)_{1\le i\le k/2-1}, \frac{(du)^{k/2}}{u(u-u^p)^{k/2-1}}\big)$ ne fait pas intervenir de termes en $\frac{u^{p-k/2}}{u-u^p}$. En effet, la matrice de changement de base $(A_{i,j})_{\substack{1\le i\le k/2\\1\le j\le k/2}}$ est donnée par :

$$A_{i,j} = \left\{\begin{array}{ccccc} \binom{n+i}{n+j} & \text{si} & 1\le i\le k/2-1 & \text{et} & 1\le j\le k/2 \\ (-1)^{k/2-1+j} & \text{si} & i = k/2 & \text{et} & 1\le j\le k/2-1 \\ 1 & \text{si} & i=j=k/2 & & \end{array}\right.$$

avec $n \overset{\text{déf}}{=} p-k/2-1$. On a donc $A^{-1}_{i,1} = \binom{k/2-1}{i-1}$ si $1\le i\le k/2-1$ et $A^{-1}_{k/2,1} = -1$. On doit vérifier la nullité de $a'_1 = \sum_{i=1}^{k/2-1}\binom{k/2-1}{i-1}a_i - a_{k/2}$. Or la condition (iii) implique :

$$\sum_{i=1}^{k/2-1}\binom{k-1-i}{k/2-i}b_{i,k/2} = -b_{k/2,k/2}.$$

En remplaçant $b_{i,k/2}$ par son expression en fonction de $a_i$, on obtient $a'_1 = 0$. Ceci achève la preuve du lemme. □

***Lemme A.2.3***. — *Soit $2\le\alpha\le k/2$ , les coefficients de $(-1)^{k/2-\alpha}u_\infty^{\alpha-1}$ dans $s'_{\alpha,\infty}$ et de $y^{k-2\alpha}u_y^{\alpha-1}$ dans $s'_{\alpha,y}$ pour $y\in\mathbb{F}_p^\times$ (avec $s'_{\alpha,\infty}$ et $s'_{\alpha,y}$ comme au lemme A.2.2 pour le choix de $(b_{i,\alpha})_{1\le i\le\alpha}$ du lemme A.2.2) sont tous égaux à :*

$$\Delta_\alpha \overset{\text{déf}}{=} \frac{(-1)^{\alpha+1}}{(k-1-\alpha)!(\alpha-1)!(k-\alpha)\binom{k-\alpha-1}{k-2\alpha+1}} \quad \text{si } 2\le\alpha\le k/2-1$$

$$\Delta_{k/2} \overset{\text{déf}}{=} \frac{(-1)^{k/2}}{(k/2-1)!^2 k/2(k/2-1)} \quad \text{si } \alpha = k/2.$$

*Démonstration.* — Définissons une matrice carrée $N = (N_{i,\ell})_{\substack{1\leq i\leq \alpha\\ 0\leq \ell\leq \alpha-1}}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$ par :

$$\begin{aligned}
N_{i,\ell} &\overset{\text{déf}}{=} M_{i,\ell},\ 1\leq i\leq \alpha-1,\ 0\leq \ell\leq \alpha-2\\
N_{i,\alpha-1} &\overset{\text{déf}}{=} \binom{k-\alpha-i}{\alpha-i}\sum_{j=1}^{\alpha-1}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-i}{\alpha-1-j}+(-1)^\alpha\sum_{j=1}^{\alpha-1}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-i}{\alpha-i-j},\ 1\leq i\leq \alpha\\
N_{\alpha,\ell} &\overset{\text{déf}}{=} \sum_{j=1}^{\ell}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-\alpha}{\ell-j},\ 1\leq \ell\leq \alpha-2\\
N_{\alpha,0} &\overset{\text{déf}}{=} 1.
\end{aligned}$$

En changeant $i$ en $\alpha-i$, on reconnait la matrice $M'$ définie dans le lemme A.1.4 avec $m=\alpha-1$ et $n=k-\alpha-1$. Donc le vecteur $(c_{i,\alpha}\overset{\text{déf}}{=} b_{\alpha-i,\alpha})_{0\leq i\leq\alpha-1}$ est l'unique vecteur du noyau de $N$ avec $c_{0,\alpha}=b_{\alpha,\alpha}=\frac{(-1)^{\alpha+1}}{(k-1-\alpha)!(\alpha-1)!}$ si $2\leq\alpha\leq k/2-1$ et $c_{0,k/2}=b_{k/2,k/2}=\frac{(-1)^{k/2}}{(k/2-1)!^2}$. En particulier, on a :

$$-\sum_{i=1}^{\alpha}b_{i,\alpha}\binom{k-\alpha-i}{\alpha-i}\sum_{j=1}^{\alpha-1}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-i}{\alpha-1-j}=\sum_{i=1}^{\alpha}b_{i,\alpha}(-1)^\alpha\sum_{j=1}^{\alpha-1}\frac{(-1)^j}{j}\binom{k-1-i}{\alpha-i-j}.$$

Via le lemme A.2.1, on remarque que le terme de gauche s'identifie au coefficient de $u_y^{\alpha-1}y^{k-2\alpha}$ dans $s'_{\alpha,y}$ et que celui de droite s'identifie au coefficient de $(-1)^{k/2-\alpha}u_\infty^{\alpha-1}$ dans $s'_{\alpha,\infty}$. Via le lemme A.2.2, on remarque que les coefficients de $(-1)^{k/2-\alpha}u_\infty^{\alpha-1}$ dans $s'_{\alpha,\infty}$ et de $y^{k-2\alpha}u^{\alpha-1}$ dans $s'_{\alpha,y}$ sont égaux à $\frac{(-1)^{\alpha+1}}{(k-1-\alpha)!(\alpha-1)!(\alpha-1)\binom{k-\alpha}{k-2\alpha+1}}$ si $2\leq\alpha\leq k/2-1$ et à $\frac{(-1)^{k/2}}{(k/2-1)!^2k/2(k/2-1)}$ si $\alpha=k/2$. On conclut en observant que $(\alpha-1)\binom{k-\alpha}{k-2\alpha+1}=(k-\alpha)\binom{k-\alpha-1}{k-2\alpha+1}$. □

On démontre maintenant la proposition 4.2.3, dont on rappelle l'énoncé :

***Proposition A.2.4***. — *(i) Soit $2\leq\alpha\leq k/2-1$ et :*

$$r_\alpha\overset{\text{déf}}{=}\Big(\frac{u^{p-1}}{(u-u^p)^\alpha}+f(u)\Big)(du)^{k/2}\in H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$$

*avec $f(u)(du)^{k/2}$ un élément de la sous-représentation :*

$$\sigma(n_k-(k/2-\alpha)(p+1),k/2-\alpha)=\bigoplus_{r=0}^{n_k-(k/2-\alpha)(p+1)}\mathbb{F}\frac{u^r(du)^{k/2}}{(u-u^p)^\alpha}$$

*de $H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$. Alors $r_\alpha$ n'admet pas d'antécédent dans $H^0(C,\overline{\omega}(k,\mathfrak{L})|_C)$ via l'injection du lemme 4.2.1.*

*(ii) Il existe une section $r_{k/2}\in H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}|_C)$ de la forme :*

$$r_{k/2}\overset{\text{déf}}{=}\Big(\frac{1}{u(u-u^p)^{k/2-1}}+f(u)\Big)(du)^{k/2}$$

*avec $f(u)(du)^{k/2} \in H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ qui admet un antécédent $s_{k/2}$ dans $H^0(C, \overline{\omega}(k, \mathcal{L})|_C)$ via l'injection du lemme 4.2.1.*

*Démonstration.* — Commençons par le (i). Soit $2 \leq \alpha \leq k/2 - 1$ et $r_\alpha = \Big(\frac{u^{p-1}}{(u-u^p)^\alpha} + f(u)\Big)(du)^{k/2} \in H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ avec $f(u)(du)^{k/2} \in \sigma(n_k - (k/2-\alpha)(p+1), k/2-\alpha)$. D'après le lemme A.1.1, on a :

$$\begin{aligned} \frac{u^{p-1}}{(u-u^p)^\alpha} &= \sum_{j=1}^{\alpha} \sum_{x \in \mathbb{F}_p^\times} \frac{x^{j-\alpha}}{(u-x)^j}(-1)^{\alpha-j} \\ f(u) &\in \bigoplus_{j=1}^{\alpha-1} \mathbb{F}\frac{1}{u^j} \oplus \bigoplus_{j=1}^{\alpha-1}\bigoplus_{\beta=1}^{p-1} \mathbb{F} \sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times} \frac{x^{j-\beta}}{(u-x)^j}. \end{aligned}$$

Lorsque l'on « intègre » $k-1$ fois $r_\alpha$ (comme au début du paragraphe), on obtient une expression de la forme $s''_y \overset{\text{déf}}{=} s'_{\alpha,y} + s'_{\neq\alpha,y}$ avec :

$$\begin{aligned} s'_{\alpha,y} &= \sum_{i=1}^{\alpha} b_{i,\alpha} t_{i,\alpha,y} \\ s'_{\neq\alpha,y} &= \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta\neq\alpha}}^{p-1} \sum_{i=1}^{\alpha-1} b_{i,\beta} t_{i,\beta,y} + \sum_{j=1}^{\alpha-1} b_i t_{i,y} \end{aligned}$$

où $b_{\alpha,\alpha} = \frac{(-1)^{\alpha+1}}{(k-1-\alpha)!(\alpha-1)!}$ et $b_{i,\beta}, b_i \in \mathbb{F}$ (notons que $s''_y$ dépend de $\alpha$ ce que n'indique pas la notation). Si $(s''_y)_{y\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)}$ définit une section globale de $H^0(C, \overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C)$ alors on a d'une part $s''_y \in H^0(W_y, \overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C)$ pour $y \in \mathbb{F}_p \cup \{\infty\}$, d'autre part $s''_y|_U = s''_{y'}|_U$ pour $y, y' \in \mathbb{F}_p \cup \{\infty\}$. En particulier, les coefficients de $\log_{\mathcal{L}}(u_\infty)\frac{u_\infty^{\beta-1}}{du_\infty^{k/2-1}}$ dans $s''_\infty$ pour $1 \leq \beta \leq k/2-1$ doivent être nuls. D'après le lemme A.2.1, les termes $(t_{i,\alpha,\infty})_{1\leq i\leq\alpha}$ (resp. $(t_{i,\beta,\infty})_{\substack{1\leq i\leq\alpha-1\\ \beta\neq\alpha}}$ et $(t_{i,\infty})_{1\leq i\leq\alpha-1}$) n'introduisent que des termes en $\log_{\mathcal{L}}(u_\infty)\frac{u_\infty^{\alpha-1}}{du_\infty^{k/2-1}}$ (resp. en $\log_{\mathcal{L}}(u_\infty)\frac{u_\infty^{\beta-1}}{du_\infty^{k/2-1}}$ pour $\beta\neq\alpha$), donc qui ne se mélangent pas. On en déduit en particulier que le coefficient de $\log_{\mathcal{L}}(u_\infty)\frac{u_\infty^{\alpha-1}}{du_\infty^{k/2-1}}$ dans $s'_{\alpha,\infty}$ doit être nul.

La condition $s''_\infty|_U = s''_0|_U$ entraîne que les coefficients de $\frac{u_\infty^{\beta-1}}{du_\infty^{k/2-1}}$ dans $s''_\infty$ déterminent les coefficients de $\frac{u_0^{k-1-\beta}}{du_0^{k/2-1}}$ dans $s''_0$ pour $1 \leq \beta \leq k/2-1$. Comme on intègre $k-1$ fois des fractions rationnelles sans partie principale, les coefficients de $\frac{u_0^{j}}{du_0^{k/2-1}}$ dans $s''_0$ pour $j \geq k-1$ sont nuls. Enfin, les coefficients de $\frac{u_0^{k-1-\beta}}{du_0^{k/2-1}}$ dans $s''_0$ pour $k/2 \leq \beta \leq k-2$ sont déterminés par le lemme A.2.1. Tout ceci fait que la partie « polynomiale » de $s''_0$ s'écrit :

$$\sum_{\beta=1}^{k-2} u_0^{k-1-\beta} \sum_{i=1}^{\alpha} b_{i,\beta} a_{i,\beta} + \sum_{i=1}^{\alpha-1} u_0^{k-1-i} b_i a_i$$

où les coefficients $a_{i,\beta}$, $a_i$ (dans $\mathbb{F}$) sont déterminés par le lemme A.2.1.

La condition $s''_y|_U = s''_0|_U$ pour $y \in \mathbb{F}_p^\times$ entraîne l'égalité de polynômes (en développant $u_0^{k-1-\beta} = (u_y + y)^{k-1-\beta}$) :

$$\sum_{l=0}^{k/2-1} u_y^l \Bigg( \sum_{\beta=1}^{k-2} \sum_{i=1}^{\alpha} \binom{k-1-\beta}{l} a_{i,\beta} b_{i,\beta} y^{k-1-\beta-l} + \sum_{i=1}^{\alpha-1} b_i a_i \binom{k-1-i}{l} y^{k-1-i-l} \Bigg) =$$
$$\sum_{l=0}^{k/2-1} u_y^l \Bigg( \sum_{\beta=1}^{k-1-l} \sum_{i=1}^{\alpha} b_{i,\beta} c_{i,\beta,l} y^{k-1-\beta-l} + \sum_{i=1}^{\alpha-1} b_i c_{i,l} \binom{k-1-i}{l} y^{k-1-i-l} \Bigg)$$

où les coefficients $c_{i,\beta,l}$ $c_{\beta,l}$ sont déterminés par le lemme A.2.1. En identifiant les coefficients de chaque $u_y^l$ pour $l > 0$, on obtient que certains polynômes en $y$ de degré inférieur ou égal à $k-3$ sont nuls en chaque $y \in \mathbb{F}_p^\times$. Comme $k-3 \leq p-2$, ces polynômes sont donc identiquement nuls. Pour $l = 0$, on obtient de même la nullité d'un polynôme en $y$ de degré $\leq k-2$ en chaque $y \in \mathbb{F}_p^\times$, et même en $y = 0$ car $c_{i,k-1,0} = 0$ pour $1 \leq i \leq \alpha$ par le lemme A.2.1. Ce polynôme est donc aussi identiquement nul. Finalement, on en déduit pour tout $1 \leq \beta \leq k-2$ et tout $0 \leq l \leq k/2-1$ :

$$\binom{k-1-\beta}{l} \sum_{i=1}^{\alpha} a_{i,\beta} b_{i,\beta} + \binom{k-1-\beta}{l} \left\{ \begin{array}{cc} b_\beta a_\beta & \text{si } \beta < \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. =$$
$$\sum_{i=1}^{\alpha} b_{i,\beta} c_{i,\beta,l} + \left\{ \begin{array}{cc} b_\beta c_{\beta,l} & \text{si } \beta < \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. .$$

En particulier, pour $\beta = \alpha$ et $l = 0$, on a $\sum_{i=1}^{\alpha} a_{i,\alpha} b_{i,\alpha} = 0$ car $c_{i,\alpha,0} = 0$ pour $1 \leq i \leq \alpha$ (utiliser que, dans l'expression de $t_{i,\alpha,y}|_U$ du lemme A.2.1, la somme $\sum_{l=1}^{k/2-1}$ commence a $l = 1$). On en déduit que les coefficients de $\frac{u_y^l}{du_y^{k/2-1}}$ dans $s'_{\alpha,y}$ sont nuls pour $1 \leq l \leq k/2-2$.

En résumé, si $r_\alpha \in H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ a un antécédent dans $H^0(C, \overline{\omega}(k, \mathcal{L})|C)$, alors il existe $(b_{i,\alpha})_{1 \leq i \leq \alpha}$ avec $b_{i,\alpha} \in \mathbb{F}$ tels que $s'_{\alpha,y} = \sum_{i=1}^{\alpha} b_{i,\alpha} t_{i,\alpha,y}$ ($y \in \mathbb{F}_p \cup \{\infty\}$) vérifie :
(i) $b_{\alpha,\alpha} = \frac{(-1)^{\alpha+1}}{(k-1-\alpha)!(\alpha-1)!}$ ;
(ii) les coefficients de $\frac{u_y^i}{du_y^{k/2-1}}$ dans $s'_{\alpha,y}$ pour $1 \leq i \leq k/2-2$ et $y \in \mathbb{F}_p$ sont nuls ;
(iii) le coefficient de $\log_{\mathcal{L}}(u_\infty) \frac{u_\infty^{\alpha-1}}{du_\infty^{k/2-1}}$ dans $s'_{\alpha,\infty}$ est nul.
Par les lemmes A.2.2 et A.2.3, on voit qu'il n'existe pas de tel élément $s'_\alpha$ pour $\alpha \leq k/2-1$, et $r_\alpha$ n'admet donc pas d'antécédent dans $H^0(C, \overline{\omega}(k, \mathcal{L})|_C)$ pour $\alpha \leq k/2-1$. Ceci démontre le (i) de la proposition. Quant au (ii), i.e. au cas $\alpha = k/2$, il a déjà fait l'objet du lemme A.2.2 en posant $s_{k/2} \overset{\text{déf}}{=} s'_{k/2}$. $\square$

**A.3. Calculs de sections modulo $p^2$.** — On rappelle que $k$ est un entier pair compris entre 4 et $p+1$.

Les lemmes A.3.1 à A.3.4 ci-dessous interviennent au §5.2.

***Lemme A.3.1***. — *Soit $y \in \mathbb{F}_p^\times$ et $0 < s \leq r$. On a :*

$$\sum_{\substack{x \in \mathbb{F}_p^\times \\ x \neq y}} (x-y)^r x^{-s} = -\binom{r}{s}(-y)^{r-s}.$$

***Lemme A.3.2***. — *Soient $x, y \in \mathbb{F}_p$ et $\delta_{x,y} \overset{\text{déf}}{=} \frac{[x]+[y]-([x]+[y])^p}{p}$. On a $[x]+[y] = [x+y] + p\delta_{x,y}$ avec :*

$$\delta_{x,y} = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\binom{p}{i}}{p}[x+y]^i[y]^{p-i}(-1)^{p-i} = -\sum_{i=1}^{p-1}\frac{\binom{p}{i}}{p}[x]^i[y]^{p-i}.$$

***Lemme A.3.3***. — *Soit $n \geq 2$. On a :*

$$\begin{aligned}(u-[x]-[y])^n \log_{\mathcal{L}}(u-[x]-[y]) = -p\delta_{x,y}(u-[x+y])^{n-1} + (u-[x+y])^n \log_{\mathcal{L}}(u-[x+y]) \\ - np\delta_{x,y}(u-[x+y])^{n-1}\log_{\mathcal{L}}(u-[x+y]) + p^2 *\end{aligned}$$

*où $*$ est une série de Laurent en $u-[x+y]$ à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$.*

*Démonstration*. — On écrit :

$$\log_{\mathcal{L}}(u-[x]-[y]) = \log_{\mathcal{L}}(u-[x+y]-p\delta_{x,y}) = \log_{\mathcal{L}}(u-[x+y]) - p\frac{\delta_{x,y}}{u-[x+y]} + p^2 *$$

et on développe $(u-[x]-[y])^n \log_{\mathcal{L}}(u-[x]-[y])$. □

***Lemme A.3.4***. — *Soit $0 \leq \ell \leq k/2-1$, $y \in \mathbb{F}_p$ et définissons les éléments suivants de $\mathbb{Z}_p[u]$ :*

$$\begin{aligned}A_y(u) &\overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{p-1}\frac{\binom{p}{i}}{p}[y]^{p-i}\sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times}[x]^i\sum_{j=1}^{k/2-2}\frac{[x]^{-j}}{j}(u-[y])^j(u-[x+y])^{k-2-\ell} \\ B_y(u) &\overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{p-1}(-1)^{p-i}\frac{\binom{p}{i}}{p}[y]^{p-i}\sum_{x\neq y}[x]^i(u-[x])^{k-2-\ell}.\end{aligned}$$

*On a modulo $p\mathbb{Z}_p[u]$ :*

$$\begin{aligned}A_y(u) &= \sum_{i=1}^{k/2-2}\frac{\binom{p}{k-1-\ell-i}}{p}y^{k-1-\ell-i}(u-y)^i\sum_{j=1}^{i}\frac{\binom{k-2-\ell}{i-j}}{j}(-1)^{i-j+1+\ell} + (u-y)^{k/2-1} * \\ B_y(u) &= \sum_{i=0}^{k/2-2} y^{k-1-\ell-i}(u-y)^i\sum_{j=i}^{k-2-\ell}\frac{\binom{p}{k-1-\ell-j}}{p}\binom{k-2-\ell}{j}\binom{j}{i} + (u-y)^{k/2-1} *\end{aligned}$$

*où $* \in \mathbb{Z}_p[u]$.*

*Démonstration.* — Posons dans $\mathbb{F}_p[u]$ :

$$\begin{aligned} a_y(u,i) &\overset{\text{déf}}{=} \sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times} x^i \sum_{j=1}^{k/2-2} \frac{x^{-j}}{j}(u-y)^j(u-x-y)^{k-2-\ell} \\ &= \sum_{j=1}^{k/2-2} \frac{(u-y)^j}{j} \sum_{n=0}^{k-2-\ell} \binom{k-2-\ell}{n}(u-y)^n(-1)^{k-2-\ell-n} \sum_{x\in\mathbb{F}_p^\times} x^{i-j+k-2-\ell-n}. \end{aligned}$$

Pour $1 \leq i \leq p-1$, $1 \leq j \leq k/2-2$ et $0 \leq n \leq k-2-\ell$, on a $-k/2+3 \leq i-j+k-2-\ell-n \leq 2p-2$. En posant $\binom{k-2-\ell}{n} = 0$ si $n \notin \{0,\cdots,k-2-\ell\}$, on peut écrire $a_y(u,i) = \sum_{j=1}^{k/2-2} \frac{1}{j}\Big(\binom{k-2-\ell}{j-i}(u-y)^{i+k-2-\ell}(-1)^{i-j} + \binom{k-2-\ell}{j-i+p-1}(u-y)^{i+k-1-\ell-p}(-1)^{i-j}\Big)$. Comme $0 \leq \ell \leq k/2-1$, on a :

$$a_y(u,i) = \sum_{j=1}^{k/2-2} \frac{\binom{k-2-\ell}{j-i+p-1}}{j}(u-y)^{i+k-1-\ell-p}(-1)^{i-j} + (u-y)^{k/2-1}*$$

avec $* \in \mathbb{F}_p[u]$. On obtient alors la formule donnant $A_y(u)$ modulo $p$ en remarquant que $A_y(u) \equiv \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\binom{p}{i}}{p} y^{p-i} a_y(u,i)$ modulo $p$. Posons dans $\mathbb{F}_p[u]$ :

$$b_y(u,i) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{x\neq y} x^i(u-x)^{k-2-\ell} = \sum_{j=0}^{k-2-\ell} \binom{k-2-\ell}{j} u^{k-2-\ell-j}(-1)^j \sum_{x\neq y} x^{i+j}.$$

Pour $n \geq 0$, on a :

$$\sum_{x\neq y} x^n = \begin{cases} p-1-y^{p-1} & \text{si } n \equiv 0(p-1) \\ p-y^n & \text{sinon} \end{cases}$$

d'où, comme $1 \leq i+j \leq 2p-2$ :

$$\begin{aligned} b_y(u,i) &= -\binom{k-2-\ell}{p-1-i} u^{k-\ell-1-p+i}(-1)^i - \sum_{j=0}^{k-2-\ell} \binom{k-2-\ell}{j} u^{k-2-\ell-j}(-1)^j y^{i+j} \\ &= -y^i(u-y)^{k-2-\ell} - \binom{k-2-\ell}{p-1-i} u^{k-\ell-1-p+i}(-1)^i. \end{aligned}$$

On en déduit $B_y(u) \equiv \sum_{i=0}^{k-2-\ell} \binom{k-2-\ell}{i} u^{k-2-\ell-i} \frac{\binom{p}{p-1-i}}{p} y^{i+1} + (u-y)^{k/2-1}*$ modulo $p$ où $* \in \mathbb{Z}_p[u]$. En posant $j = k-2-\ell-i$, on a donc modulo $p$ (avec $* \in \mathbb{Z}_p[u]$) :

$$B_y(u) = \sum_{j=0}^{k-2-\ell} \binom{k-2-\ell}{j} \frac{\binom{p}{k-1-\ell-j}}{p} y^{k-1-\ell-j} u^j + (u-y)^{k/2-1} *.$$

En développant $u^j = (u-y+y)^j$, on obtient finalement modulo $p$ :

$$\begin{aligned} B_y(u) &= \sum_{j=0}^{k-2-\ell} \binom{k-2-\ell}{j} \frac{\binom{p}{k-1-\ell-j}}{p} y^{k-1-\ell-j} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} (u-y)^i y^{j-i} + (u-y)^{k/2-1} * \\ &= \sum_{i=0}^{k/2-2} (u-y)^i y^{k-1-\ell-i} \sum_{j=i}^{k-2-\ell} \binom{k-2-\ell}{j} \frac{\binom{p}{k-1-\ell-j}}{p} \binom{j}{i} + (u-y)^{k/2-1} * . \end{aligned}$$

□

Les lemmes A.3.5 à A.3.8 interviennent dans les preuves des lemmes 5.3.1 et 5.4.1.

***Lemme A.3.5***. — *Soit* $0 \le i < n$ *et* $\gamma(n,i) \overset{\text{déf}}{=} (-1)^n \sum_{i \le j \le n-1} \frac{(-1)^j}{n-j} \binom{n-1}{j} \binom{j}{i}$. *On a :*

$$\gamma(n,i) = -\frac{1}{n} \binom{n}{i}.$$

*Démonstration*. — En inversant l'ordre de sommation, on a :

$$\gamma(n,i) = \sum_{j=1}^{n-i} \frac{(-1)^j}{j} \binom{n-1}{n-j} \binom{n-j}{i}.$$

Or, on a $\frac{n}{j}\binom{n-1}{n-j}\binom{n-j}{i} = \frac{n!}{j!i!(n-i-j)!}$ et un calcul donne :

$$(x+y+z)^n = \sum_{\substack{0 \le i \le n \\ 0 \le j \le n-i}} \frac{n!}{j!i!(n-i-j)!} x^i y^j z^{n-i-j}$$

Le coefficient de $x^i$ dans le développement de $(x+y+1)^n$ est donc d'une part $\binom{n}{i}(y+1)^{n-i}$, d'autre part $\sum_{0 \le j \le n-i} y^j \frac{n!}{j!i!(n-i-j)!}$. En particulier, lorsque $y = -1$, on obtient pour $i < n$ :

$$\sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \frac{n!}{j!i!(n-i-j)!} = 0$$

D'où $\sum_{i \le j \le n-1} \frac{(-1)^j}{j} \binom{n-1}{n-j} \binom{n-j}{i} = \frac{-n!}{i!(n-i)!} \frac{1}{n}$ soit $\gamma(n,i) = -\frac{1}{n}\binom{n}{i}$. □

***Lemme A.3.6***. — *Soit* $0 \le r < \ell \le n$ *et* $\beta(n,r) \overset{\text{déf}}{=} \frac{n}{n-r} \sum_{1 \le j \le r} \frac{(-1)^j}{j} \binom{n-1}{r-j}$. *Posons :*

$$\alpha(n,\ell,r) \overset{\text{déf}}{=} (-1)^r \sum_{r \le i \le \ell} \binom{i}{r} (-1)^i (\beta(n,i) + \gamma(n,i))$$

*avec* $\gamma(n,i)$ *comme au lemme A.3.5. On a :*

$$\alpha(n,\ell,r) = \binom{n}{r} \sum_{i=0}^{\ell-r} (-1)^i \binom{n-r}{i} (H_{n-1-r-i} - H_n).$$

*Démonstration*. — Puisque, pour $i \ge r$, $\binom{i}{r}\binom{n}{i} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{i-r}$, on a d'après les lemmes A.1.2 et A.3.5 :

$$\alpha(n,\ell,r) = \binom{n}{r} \sum_{r \le i \le \ell} (-1)^{i-r} \binom{n-r}{i-r} (H_{n-1-i} - H_n)$$

d'où le résultat en changeant $i$ en $i-r$. $\square$

***Lemme A.3.7***. — *Soit $n$, $\ell$ et $s$ des entiers positifs ou nuls tels que $\ell \leq s < n$. Posons :*

$$\begin{aligned} A(n,\ell,s) &\stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{r=0}^{s}\binom{n+\ell-r}{\ell}\sum_{i=r}^{\ell}\binom{i}{r}(-1)^i\sum_{j=1}^{i}\frac{(-1)^{j+1}}{j}\binom{n}{i-j} \\ B(n,\ell,s) &\stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{r=0}^{s}\binom{n+\ell-r}{\ell}\alpha(n,\ell,r). \end{aligned}$$

*Alors, on a :*

$$A(n,\ell,s)+B(n,\ell,s)=\sum_{r=0}^{s}\binom{n}{r}\binom{n+\ell-r}{\ell}\sum_{i=0}^{s-r}\frac{(-1)^{i+1}}{n-r-i}\binom{n-r}{i}.$$

*Démonstration.* — Par le lemme A.1.2, on a :

$$\begin{aligned} A(n,\ell,s) &= \sum_{r=0}^{s}\binom{n+\ell-r}{\ell}\sum_{i=r}^{\ell}\binom{i}{r}(-1)^{i-r}\binom{n}{i}(H_n-H_{n-i}) \\ &= \sum_{r=0}^{s}\binom{n+\ell-r}{\ell}\binom{n}{r}\sum_{i=0}^{s-r}(-1)^i\binom{n-r}{i}(H_n-H_{n-r-i}). \end{aligned}$$

Par le lemme A.3.6, on a :

$$B(n,\ell,s)=\sum_{r=0}^{s}\binom{n+\ell-r}{\ell}\binom{n}{r}\sum_{i=0}^{s-r}(-1)^i\binom{n-r}{i}(H_{n-1-r-i}-H_n).$$

En sommant les deux nouvelles expressions de $A(n,\ell,s)$ et $B(n,\ell,s)$, on obtient le résultat. $\square$

***Lemme A.3.8***. — *Soit $n$, $\ell$ et $s$ des entiers positifs ou nuls tels que $\ell \leq s < n$. On a avec les notations du lemme A.3.7 :*

$$A(n,\ell,s)+B(n,\ell,s)=\frac{(-1)^{\ell+1}}{n-\ell}\binom{n}{\ell}^{-1}.$$

*En particulier, pour $\ell = k/2-2-j$, $s=k/2-2$ et $n=k/2+j$, on obtient :*

$$\sum_{r=0}^{k/2-2}\binom{k-2-r}{k/2-2-j}\sum_{i=r}^{k/2-2}\binom{i}{r}(-1)^{i-r}\alpha_i=\frac{(-1)^{k/2-1-j}}{2j+2}\binom{k/2+j}{k/2-2-j}^{-1}$$

*où* $\alpha_i \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{n}{n-i}(-1)^{n+i}\sum_{m=1}^{i}\frac{\binom{n-1}{i-m}}{m}(-1)^{i-m+n}+\sum_{m=i}^{n-1}\binom{n-1}{m}\frac{(-1)^{n+m}}{n-m}\binom{m}{i}+\sum_{m=1}^{i}\frac{(-1)^{m+1}}{m}\binom{n}{i-m}$.

*Démonstration.* — Posons :

$$S(n,\ell,s)\stackrel{\text{déf}}{=}A(n,\ell,s)+B(n,\ell,s)=\sum_{\substack{0\leq i+r\leq s\\ 0\leq i,r}}\binom{n}{r}\binom{n-r}{i}\binom{n+\ell-r}{\ell}\frac{(-1)^{i+1}}{n-r-i}$$

(la deuxième égalité résulte du lemme A.3.7). Comme $\binom{n}{r}\binom{n-r}{i}=\binom{n}{r+i}\binom{r+i}{i}$, on a :

$$S(n,\ell,s)=\sum_{j=0}^{s}\frac{1}{n-j}\binom{n}{j}\sum_{i=0}^{j}(-1)^{i+1}\binom{n+\ell-j+i}{\ell}\binom{j}{i}.$$

Or on a l'égalité $\sum_{i=0}^{j}(-1)^{i+1}\binom{n+\ell-j+i}{\ell}\binom{j}{i}=(-1)^{j+1}\binom{n+\ell-j}{\ell-j}$ car c'est le coefficient de $x^\ell$ dans $(-1)^{j+1}x^j(1+x)^{n+\ell-j}=\sum_{i=0}^{j}(-1)^{i+1}\binom{j}{i}(1+x)^i(1+x)^{n+\ell-j}$, d'où :

$$S(n,\ell,s)=\sum_{j=0}^{s}\frac{(-1)^{j+1}}{n-j}\binom{n}{j}\binom{n+\ell-j}{n}.$$

Ainsi $S(n,\ell,s)$ s'identifie au coefficient de degré $s$ de :

$$(1+x)^nG(x)\overset{\text{déf}}{=}(1+x)^n\sum_{i\geq 0}\binom{n+\ell-s+i}{n}\frac{(-1)^{s+1+i}}{n-s+i}x^i.$$

Or on a :

$$\begin{aligned}
G(x) &= x^{-n+s}\int_0^x\sum_{i\geq 0}\binom{n+\ell-s+i}{n}(-1)^{s+1+i}t^{n-s-1+i}dt\\
&= x^{-n+s}\int_0^x\sum_{i\geq n+\ell-s}\binom{i}{n}(-1)^{n+\ell+1+i}t^{-1-\ell+i}dt\\
&= x^{-n+s}\int_0^x t^{n-\ell-1}(-1)^{\ell+1}\sum_{i\geq n}\binom{i}{n}(-1)^{n+i}t^{i-n}dt\\
&= x^{-n+s}\int_0^x\frac{t^{n-\ell-1}(-1)^{\ell+1}}{(1+t)^{n+1}}dt.
\end{aligned}$$

Le coefficient de degré $s$ de $(1+x)^nG(x)$ s'obtient donc par intégrations par parties successives et donne l'énoncé cherché. □

## Appendice B
## Calculs de Čech

**B.1. Calculs de résidus.** — On reprend les notations du début du §5.1 et on note $\Omega^1\simeq\mathcal{O}_C(-2)$ le faisceau des différentielles de Kähler sur la courbe $C\simeq\mathbb{P}^1$. L'isomorphisme $\check{H}^1(C,\Omega^1)\xrightarrow{\sim}\mathbb{F}$ qui est à la base de la dualité de Serre est induit par l'application :

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}:\prod_{\substack{y<z\\ y,z\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)^2}}\Omega^1(U) &\to \mathbb{F}\\
(s_{y,z})_{y<z} &\mapsto \sum_{y<z}\big(\mathrm{res}_z(s_{y,z})-\mathrm{res}_y(s_{y,z})\big)
\end{aligned}$$

où $\mathrm{res}_x$ est le résidu au point fermé $x$ de la forme différentielle rationnelle $s_{y,z}\in\Omega^1(U)=\Omega^1(W_y\cap W_z)$. En effet, on vérifie que l'application tr est nulle sur le sous-espace engendré par $\big(s_z|_U-s_y|_U\big)_{y<z}$ où $(s_y)_{y\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)}$ est tel que $s_y\in H^0(W_y,\Omega^1)$ (voir e.g. [**10**, §III.7]).

***Lemme B.1.1***. — *Soient $r, l, i$ des entiers positifs ou nuls.*
*(i) On a* $\mathrm{res}_x\big(\frac{u^r du}{(u-u^p)^l}\big) = \binom{r}{l-1} x^{r-l+1}$.
*(ii) On a :*

$$\sum_{x\in\mathbb{F}_p}\Big(\mathrm{res}_\infty\Big(\frac{u^r du}{(u-u^p)^l}\Big) - \mathrm{res}_x\Big(\frac{u^r du}{(u-u^p)^l}\Big)\Big) = \begin{cases} \binom{r}{l-1} & \textit{si } r-l+1\equiv 0 \ (p-1) \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}.$$

*(iii) On a :*

$$\sum_{\substack{x<y \\ x,y\in\mathbb{F}_p}} (y^i - x^i)\Big(\mathrm{res}_y\Big(\frac{u^r du}{(u-u^p)^l}\Big) - \mathrm{res}_x\Big(\frac{u^r du}{(u-u^p)^l}\Big)\Big)$$
$$- \sum_{x\in\mathbb{F}_p} x^i\Big(\mathrm{res}_\infty\Big(\frac{u^r du}{(u-u^p)^l}\Big) - \mathrm{res}_x\Big(\frac{u^r du}{(u-u^p)^l}\Big)\Big) =$$
$$\begin{cases} -\binom{r}{l-1} & \textit{si } i+r-l+1\equiv 0 \ (p-1) \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}.$$

*Démonstration.* — Pour (i), on a :

$$\mathrm{res}_x\Big(\frac{u^r du}{(u-u^p)^l}\Big) = \mathrm{res}_0\Big(\frac{(u+x)^r du}{(u-u^p)^l}\Big) = \sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j} x^{r-j}\mathrm{res}_0\Big(\frac{u^{j-l} du}{(1-u^{p-1})^l}\Big) = \binom{r}{l-1} x^{r-l+1}.$$

Comme $\mathrm{res}_\infty\big(\frac{u^r du}{(u-u^p)^l}\big)$ ne dépend pas de $x$, on a $\sum_{x\in\mathbb{F}_p}\mathrm{res}_\infty\big(\frac{u^r du}{(u-u^p)^l}\big) = 0$ et on obtient alors (ii) en appliquant (i). Pour (iii), on a :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{x<y \\ x,y\in\mathbb{F}_p}} (y^i - x^i)\Big(\mathrm{res}_y\Big(\frac{u^r du}{(u-u^p)^l}\Big) - \mathrm{res}_x\Big(\frac{u^r du}{(u-u^p)^l}\Big)\Big) &= \sum_{\substack{x<y \\ x,y\in\mathbb{F}_p}} (y^i - x^i)(y^{r-l+1} - x^{r-l+1})\binom{r}{l-1} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{x,y\in\mathbb{F}_p} (y^i - x^i)(y^{r-l+1} - x^{r-l+1})\binom{r}{l-1} \\ &= 0\end{aligned}$$

et on obtient (iii) en appliquant (ii). □

On note $\langle\ ,\ \rangle$ l'accouplement donné par la dualité de Serre :

$$\check{H}^1(C, \overline{\omega}^{-\frac{k-2}{2}}|_C) \times H^0(C, \overline{\omega}^{k/2}(1)|_C) \to \check{H}^1(C, \Omega^1) \xrightarrow[\sim]{\mathrm{tr}} \mathbb{F}. \tag{14}$$

En appliquant le lemme B.1.1, on obtient alors :

***Lemme B.1.2***. — *Soit $i \leq n$ des entiers positifs ou nuls et $\alpha$, $r$ des entiers tels que $1 \leq \alpha \leq k/2-1$ et $0 \leq r \leq (p+1)\alpha - k$. On a :*

$$\Big\langle \Big( \big( (z^{n-i} - y^{n-i}) \frac{u^i}{du^{k/2-1}} |_{W_y \cap W_z} \big)_{\substack{y<z \\ z\neq\infty}},\ \big( - y^{n-i} \frac{u^i}{du^{k/2-1}} |_{W_y \cap W_\infty} \big)_{y \in \mathbb{F}_p} \Big), \frac{u^r (du)^{k/2}}{(u-u^p)^\alpha} \Big\rangle = \begin{cases} -\binom{r+i}{\alpha-1} & si\ n+r-\alpha+1 \equiv 0\ (p-1) \\ 0 & sinon \end{cases}.$$

## B.2. Calculs de classes de cohomologie. —

***Lemme B.2.1***. — *Pour tout $n \geq 1$, on a :*

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^j \binom{n+j}{n} \sum_{i=j}^{n} \binom{i}{j} \frac{1}{i} = -2H_n.$$

*Démonstration.* — Posons :

$$S_n \overset{\text{déf}}{=} \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \binom{n+j}{n} \sum_{i=j}^{n} \binom{i}{j} \frac{1}{i}.$$

Comme $\sum_{i=j}^{n} \binom{i}{j} \frac{1}{i} = \sum_{i=j}^{n} \binom{i-1}{j-1} \frac{1}{j} = \frac{1}{j} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{i}{j-1} = \frac{1}{j} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{i+1}{j} - \binom{i}{j} = \frac{1}{j} \binom{n}{n-j}$, on a :

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \binom{n+j}{j} \binom{n}{n-j} \frac{1}{j}.$$

Or $(-1)^j \binom{n+j}{j} = \frac{(-n-1)\cdots(-n-j)}{j!} = \binom{-n-1}{j}$ et $S_n = \sum_{j=1}^{n} \binom{-n-1}{j} \binom{n}{n-j} \frac{1}{j}$ est le coefficient de degré $n$ dans le développement limité à l'ordre $n$ en $x=0$ de la fonction :

$$f(x) \overset{\text{déf}}{=} (1+x)^n \int_0^x \frac{(1+t)^{-n-1} - 1}{t} dt.$$

Comme $\frac{(1+t)^{-n-1}-1}{t} = -\sum_{i=0}^{n} (1+t)^{i-n-1}$, on a :

$$\int_0^x \frac{(1+t)^{-n-1} - 1}{t} dt = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{-1}{i-n} \big( (1+x)^{i-n} - 1 \big) - \ln(1+x)$$

et $f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n-i} \big( (1+x)^i - (1+x)^n \big) - (1+x)^n \ln(1+x)$. Le coefficient de degré $n$ du développement limité de $f(x)$ donne donc :

$$S_n = -H_n + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \frac{(-1)^i}{i} = -2H_n$$

en utilisant le lemme A.1.2. □

Dans l'énoncé qui suit, on reprend les notations du §5.3.

***Lemme B.2.2***. — *(i) On a l'égalité dans* $\check{H}^1(C,\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C)$ *:*

$$\Big(\big(((-y)^{p-1-j}-(-z)^{p-1-j})\frac{u^{k/2-2+j}}{du^{k/2-1}}|_{W_y\cap W_z}\big)_{y<z,z\neq\infty},\big((-y)^{p-1-j}\frac{u^{k/2-2+j}}{du^{k/2-1}}|_{W_y\cap W_\infty}\big)_{y\in\mathbb{F}_p}\Big)=$$
$$(-1)^{j+1}\binom{k/2-2+j}{k/2-2}\Big(\frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}}|_{W_0\cap W_1},\cdots,\frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}}|_{W_0\cap W_\infty},0,\cdots,0\Big).$$

*(ii) On a l'égalité dans* $\check{H}^1(C,\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C)$ *:*

$$\Big(\log_{\mathcal{L}}(u)\frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}}|_{W_0\cap W_1},\cdots,\log_{\mathcal{L}}(u)\frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}}|_{W_0\cap W_\infty},0,\cdots,0\Big)=$$
$$H_{k/2-2}\Big(\frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}}|_{W_0\cap W_1},\cdots,\frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}}|_{W_0\cap W_\infty},0,\cdots,0\Big).$$

*(iii) On a l'égalité dans* $\check{H}^1(C,\overline{\omega}(k,\mathcal{L})|_C)$ *:*

$$\Big(\big((z^{k/2-i}-y^{k/2-i})\frac{u^i}{du^{k/2-1}})|_{W_y\cap W_z}\big)_{y<z,z\neq\infty},\big(-y^{k/2-i}\frac{u^i}{du^{k/2-1}})|_{W_y\cap W_\infty}\big)_{y\in\mathbb{F}_p}\Big)=$$
$$-\binom{k-i-2}{k/2-2}\Big(0,\cdots,0,\frac{u^{k/2}}{du^{k/2-1}}|_{W_0\cap W_\infty},\cdots,\frac{u^{k/2}}{du^{k/2-1}}|_{W_{p-1}\cap W_\infty}\Big).$$

*Démonstration*. — (i) D'après le corollaire 4.3.5, il suffit de montrer que les deux éléments de Čech considérés accouplés contre les sections de $H\subseteq H^0(C,\overline{\omega}^{k/2}(1)|_C)$ par la dualité de Serre (14) donnent la même valeur. Par le lemme 4.1.4 (ou plutôt sa preuve), il est facile de voir qu'une section $h\in H$ s'écrit sous la forme :

$$h=\sum_{\substack{(b,d)\in\mathbb{F}_p^2\\ 1\leq\alpha\leq k/2-1}}a_{b,d,\alpha}\frac{(bu+d)^{\alpha(p+1)-k}(du)^{k/2}}{(u-u^p)^\alpha}$$

avec $a_{b,d,\alpha}\in\mathbb{F}$ et il suffit donc de vérifier que les deux accouplements contre les sections $\frac{(bu+d)^{\alpha(p+1)-k}(du)^{k/2}}{(u-u^p)^\alpha}$ coïncident. Par le lemme B.1.2, on a (avec $r$ et $\alpha$ comme au lemme B.1.2) :

$$\Big\langle\Big(\big(((-y)^{p-1-j}-(-z)^{p-1-j})\frac{u^{k/2-2+j}}{du^{k/2-1}}|_{W_y\cap W_z}\big)_{y<z,z\neq\infty},\big((-y)^{p-1-j}\frac{u^{k/2-2+j}}{du^{k/2-1}}|_{W_y\cap W_\infty}\big)_{y\in\mathbb{F}_p}\Big),$$
$$\frac{u^r(du)^{k/2}}{(u-u^p)^\alpha}\Big\rangle=\begin{cases}(-1)^j\binom{k/2-2+j+r}{\alpha-1} & \text{si } r\equiv -k/2+1+\alpha \mod (p-1)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

et par un calcul de résidus :

$$\Big\langle\Big(\frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}}|_{W_0\cap W_1},\cdots,\frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}}|_{W_0\cap W_\infty},0,\cdots,0\Big),\frac{u^r(du)^{k/2}}{(u-u^p)^\alpha}\Big\rangle=$$
$$\begin{cases}-\binom{r+k/2-2}{\alpha-1} & \text{si } r\equiv -k/2+1+\alpha \mod (p-1)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$

Comme $(bu+d)^{\alpha(p+1)-k} = \sum_{r=0}^{\alpha(p+1)-k} \binom{\alpha(p+1)-k}{r} b^r d^{\alpha(p+1)-k-r} u^r$, l'accouplement du premier élément de Čech contre $\frac{(bu+d)^{\alpha(p+1)-k}(du)^{k/2}}{(u-u^p)^\alpha}$ donne la somme :

$$\sum_{m=0}^{\alpha-1} \binom{\alpha(p+1)-k}{m(p-1)-\frac{k}{2}+1+\alpha} \binom{\frac{k}{2}-2+j+m(p-1)-\frac{k}{2}+1+\alpha}{\alpha-1} (-1)^j b^{m(p-1)-\frac{k}{2}+1+\alpha} d^{\alpha(p+1)-k-m(p-1)+\frac{k}{2}-1-\alpha}$$

qui vaut :

$$\begin{cases} 0 & \text{si} \quad \alpha < k/2-1 \\ (-1)^j \binom{k/2-2-j}{k/2-2} d^{(k/2-1)(p+1)-k} & \text{si} \quad \alpha = k/2-1 \end{cases}$$

car, pour $1 \leq \alpha \leq k/2-1$ et $0 \leq m < \alpha$, on a modulo $p$ :

$$\binom{\alpha(p+1)-k}{m(p-1)-k/2+1+\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{si } (\alpha, m) = (k/2-1, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

De même, on trouve :

$$\Big\langle \Big( \frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}}|_{W_0 \cap W_1}, \cdots, \frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}}|_{W_0 \cap W_\infty}, 0, \cdots, 0 \Big), \frac{(bu+d)^{\alpha(p+1)-k}(du)^{k/2}}{(u-u^p)^\alpha} \Big\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \alpha < k/2-1 \\ -d^{(k/2-1)(p+1)-k} & \text{si} \quad \alpha = k/2-1 \end{cases}$$

d'où (i). Pour (ii), considérons le $(p+1)$-uplet de sections locales :

$$\Big(0, \Big(\log_{\mathcal{L}}(u_x - (-x)) + \sum_{i=1}^{k/2-2} \frac{u_x^i (-x)^{-i}}{i}\Big) \frac{(u_x - (-x))^{k/2-2}}{du_x^{k/2-1}}, (-1)^{k/2-1} \Big( -\log_{\mathcal{L}}(u_\infty) \frac{u_\infty^{k/2}}{du_\infty^{k/2-1}} + \Big(\sum_{i=1}^{k/2-2} \frac{1}{i}\Big) \frac{u_\infty^{k/2}}{du_\infty^{k/2-1}} \Big) \Big)$$

où la section 0 de gauche est vue dans $H^0(W_0, \overline{\omega}(k, \mathcal{L})|_C)$, les sections avec $u_x$ dans $H^0(W_x, \overline{\omega}(k, \mathcal{L})|_C)$ pour $x \in \mathbb{F}_p^\times$ et la dernière section dans $H^0(W_\infty, \overline{\omega}(k, \mathcal{L})|_C)$. Les intersection deux à deux de ces sections (comme au §5.1) donnent un élément de Čech qui est nul par définition. Cette nullité donne (par un calcul simple et en utilisant (i)) l'égalité dans $\check{H}^1(C, \overline{\omega}(k, \mathcal{L})|_C)$ :

$$\Big(\log_{\mathcal{L}}(u) \frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}}|_{\substack{W_0 \cap W_z \\ z \in \mathbb{F}_p^\times \cup \{\infty\}}}, 0, \cdots, 0\Big) + \Big(\sum_{i=1}^{k/2-2} \frac{1}{i}\Big) \Big(\frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}}|_{\substack{W_0 \cap W_z \\ z \in \mathbb{F}_p^\times \cup \{\infty\}}}, 0, \cdots, 0\Big) = \sum_{j=1}^{k/2-2} (-1)^{j+1} \binom{k/2-2+j}{k/2-2} \sum_{i=j}^{k/2-2} \frac{\binom{i}{j}}{i} \Big(\frac{u^{k/2-2}}{du^{k/2-1}}|_{\substack{W_0 \cap W_z \\ z \in \mathbb{F}_p^\times \cup \{\infty\}}}, 0, \cdots, 0\Big).$$

Or $\sum_{j=1}^{k/2-2} (-1)^j \binom{k/2-2+j}{k/2-2} \sum_{i=j}^{k/2-2} \frac{\binom{i}{j}}{i} = -2H_{k/2-2}$ par le lemme B.2.1, d'où (ii) puisque $H_{k/2-2} = \sum_{i=1}^{k/2-2} 1/i$. Le (iii) se démontre de manière analogue au (i). □

On a aussi un énoncé strictement analogue à celui du lemme B.2.2 en remplaçant $\check{H}^1(C, \overline{\omega}(k, \mathcal{L})|_C)$ par $\check{H}^1(C, (\omega(k, \mathcal{L}) \otimes_{\mathfrak{O}} \mathfrak{O}/p)|_C)$ (voir le début du §5.3). La preuve est la même en utilisant la dualité :

$$\check{H}^1(C, (\omega^{-\frac{k-2}{2}} \otimes_{\mathfrak{O}} \mathfrak{O}/p)|_C) \times H^0(C, (\omega^{k/2}(1) \otimes_{\mathfrak{O}} \mathfrak{O}/p)|_C) \to \mathfrak{O}/p.$$

## Références

[1] Barthel L., Livné R., *Irreductible modular representations of* $\mathrm{GL}_2$ *of a local field*, Duke Math. J. 75, 1994, 261–292.

[2] Berger L., en préparation.

[3] Breuil C., *Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *II*, J. Institut Math. Jussieu 2, 2003, 23–58.

[4] Breuil C., *Invariant* $\mathfrak{L}$ *et série spéciale p-adique*, Ann. Scient. E.N.S. 37, 2004, 559–610.

[5] Breuil C., *Série spéciale p-adique et cohomologie étale complétée*, prépublication 2003, disponible à l'adresse : http ://www.ihes.fr/˜breuil/publications.html

[6] Breuil C., Mézard A., *Multiplicités modulaires et représentations de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ *et de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ *en* $\ell = p$, Duke Math. J. 115, 2002, 205–310.

[7] Colmez P., *Une correspondance de Langlands locale p-adique pour les représentations semi-stables de dimension* 2, Prépublication 2004.

[8] Glover D., *A study of certain modular representations*, Journal of Algebra 51, 1978, 425–475.

[9] Grosse-Klönne E., *Integral structures in automorphic line bundles on the p-adic upper half plane*, Math. Annalen. 329, 2004, 463-493.

[10] Hartshorne R., *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics 52, Springer-Verlag, 1977.

[11] Schneider P., Teitelbaum J., *Banach space representations and Iwasawa theory*, Israel J. Math. 127, 2002, 359–380.

[12] Teitelbaum J., *On Drinfeld's universal formal group over the p-adic upper half plane*, Math. Annalen 284, 1989, 647–674.

[13] Teitelbaum J., *Modular representations of* $\mathrm{PGL}_2$ *and automorphic forms for Shimura curves*, Inv. Math. 113, 1993, 561–580.

---

C. Breuil, C.N.R.S. & I.H.É.S., Le Bois-Marie, 35 route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette, France
*E-mail :* `breuil@ihes.fr` • *Url :* `www.ihes.fr/˜breuil/`

A. Mézard, Université Paris-Sud, Bâtiment 425, 91405 Orsay, France
*E-mail :* `ariane.mezard@math.u-psud.fr` • *Url :* `www.math.u-psud.fr/˜mezard/`