Théorie d'Iwasawa des représentations cristallines II

Denis BENOIS et Laurent BERGER

Institut des Hautes Études Scientifiques
35, route de Chartres
91440 – Bures-sur-Yvette (France)

Octobre 2005

IHES/M/05/41

THÉORIE D'IWASAWA DES REPRÉSENTATIONS CRISTALLINES II

par

Denis Benois & Laurent Berger

Résumé. — Soit K une extension finie non-ramifiée de $\mathbf{Q}_p$ et V une représentation cristalline de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/K)$. Dans cet article, on montre la conjecture $C_{\mathrm{EP}}(L,V)$ pour $L \subset \mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}$ et sa version équivariante $C_{\mathrm{EP}}(L/K,V)$ pour $L \subset \cup_{n=1}^{\infty} K(\zeta_{p^n})$. Les principaux ingrédients sont la conjecture $\delta_{\mathbf{Z}_p}(V)$ sur l'intégralité de l'exponentielle de Perrin-Riou, que nous démontrons en utilisant la théorie des (φ,Γ)-modules, et des techniques de descente en théorie d'Iwasawa pour montrer que $\delta_{\mathbf{Z}_p}(V)$ implique $C_{\mathrm{EP}}(L/K,V)$.

Abstract. — Let K be a finite unramified extension of $\mathbf{Q}_p$ and let V be a crystalline representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/K)$. In this article, we give a proof of the $C_{\mathrm{EP}}(L,V)$ conjecture for $L \subset \mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}$ as well as a proof of its equivariant version $C_{\mathrm{EP}}(L/K,V)$ for $L \subset \cup_{n=1}^{\infty} K(\zeta_{p^n})$. The main ingredients are the $\delta_{\mathbf{Z}_p}(V)$ conjecture about the integrality of Perrin-Riou's exponential, which we prove using the theory of (φ,Γ)-modules, and Iwasawa-theoretic descent techniques used to show that $\delta_{\mathbf{Z}_p}(V)$ implies $C_{\mathrm{EP}}(L/K,V)$.

Table des matières

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11F80, 11R23, 11S15, 11S20, 11S25, 14F30.

Introduction

Soient p un nombre premier impair, K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et V une représentation potentiellement semi-stable de $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/K)$. Fontaine et Perrin-Riou ont formulé une conjecture qu'ils ont appelée $C_{\mathrm{EP}}(K,V)$, conjecture qui entraîne la compatibilité de la conjecture de Bloch et Kato sur les valeurs spéciales des fonctions L avec l'équation fonctionnelle. L'objet de ce texte est de montrer la conjecture $C_{\mathrm{EP}}(L,V)$ pour toute extension finie L de K telle que $L \subset \mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}$, quand K est non-ramifié sur $\mathbf{Q}_p$ et V est une représentation cristalline de G_K ainsi que, sous les mêmes hypothèses, la version équivariante $C_{\mathrm{EP}}(L/K,V)$ de cette conjecture pour toute extension finie L de K contenue dans $K_\infty = \cup_{n=1}^{\infty} K(\zeta_{p^n})$. Comme ingrédient de la démonstration, on montre aussi la conjecture $\delta_{\mathbf{Z}_p}(V)$ de Perrin-Riou, que nous appelons $C_{\mathrm{Iw}}(K_\infty/K,V)$ en raison de son lien avec la théorie d'Iwasawa de V.

Rappelons tout d'abord la conjecture $C_{\mathrm{EP}}(L/K,V)$. Pour cela, on se donne une extension abélienne finie L/K de groupe de Galois $G = \mathrm{Gal}(L/K)$, une représentation potentiellement semi-stable V de G_K et un réseau T de V stable sous l'action de G_K. On définit la droite d'Euler-Poincaré de V en posant :

$$\Delta_{\mathrm{EP}}(L/K,V) = \det_{\mathbf{Q}_p[G]} \mathbf{R}\Gamma(L,V) \otimes \det_{\mathbf{Q}_p[G]}(\mathrm{Ind}_{L/\mathbf{Q}_p} V).$$

On sait que $\mathbf{R}\Gamma(L,T)$ est un complexe parfait de $\mathbf{Z}_p[G]$-modules et que l'image de $\Delta_{\mathrm{EP}}(L/K,T) = \det_{\mathbf{Z}_p[G]} \mathbf{R}\Gamma(L,T) \otimes \det_{\mathbf{Z}_p[G]}(\mathrm{Ind}_{L/\mathbf{Q}_p} T)$ dans $\Delta_{\mathrm{EP}}(L/K,V)$ ne dépend pas du choix de T.

On note $\mathbf{D}^L_{\mathrm{cris}}(V)$, $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ et $\mathbf{D}^L_{\mathrm{dR}}(V)$ les modules associés à la restriction de V à G_L par la théorie de Fontaine, et $t_V(L) = \mathbf{D}^L_{\mathrm{dR}}(V)/\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}^L_{\mathrm{dR}}(V)$ l'espace tangent de V sur L. La suite exacte :

$$\begin{aligned}0 \to H^0(L,V) \to \mathbf{D}^L_{\mathrm{cris}}(V) \to \mathbf{D}^L_{\mathrm{cris}}(V) \oplus t_V(L) \to H^1(L,V) \to \\ \to \mathbf{D}^L_{\mathrm{cris}}(V^*(1))^* \oplus t^*_{V^*(1)}(L) \to \mathbf{D}^L_{\mathrm{cris}}(V^*(1))^* \to H^2(L,V) \to 0,\end{aligned}$$

qui provient de la suite exacte fondamentale (cf §1.4) et l'isomorphisme $t^*_{V^*(1)}(L) \simeq \mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}^L_{\mathrm{dR}}(V)$ donnent un isomorphisme canonique :

$$\det_{\mathbf{Q}_p[G]} \mathbf{R}\Gamma(L, V) \xrightarrow{\sim} \det^{-1}_{\mathbf{Q}_p[G]} \mathbf{D}^L_{\mathrm{dR}}(V).$$

La théorie des constantes locales permet d'autre part de définir un élément $\varepsilon(L/K, V) \in \mathbf{Q}_p(\zeta_{p^\infty})[G]$ associé à l'action de G_K sur $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$. L'isomorphisme de comparaison :

$$\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{Ind}_{L/\mathbf{Q}_p}(V) \simeq \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{D}^L_{\mathrm{dR}}(V),$$

normalisé par $\varepsilon(L/K, V)$ et par le facteur Γ habituel $\Gamma^*(V)$, fournit un isomorphisme :

$$\det^{-1}_{\mathbf{Q}_p[G]} \mathbf{D}^L_{\mathrm{dR}}(V) \otimes \det_{\mathbf{Q}_p[G]} \mathrm{Ind}_{L/\mathbf{Q}_p}(V) \simeq \mathbf{Q}_p[G]_{V,L/K},$$

où $\mathbf{Q}_p[G]_{V,L/K}$ est un certain $\mathbf{Q}_p[G]$-module libre de rang 1 qui contient un sous-$\mathbf{Z}_p[G]$-module inversible canonique $\mathbf{Z}_p[G]_{V,L/K}$ (cf définition 2.4.2). En composant ces isomorphismes, on obtient une trivialisation canonique de la droite d'Euler-Poincaré :

$$\delta_{V,L/K} : \Delta_{\mathrm{EP}}(L/K, V) \simeq \mathbf{Q}_p[G]_{V,L/K}.$$

Dans son manuscrit non-publié [**Kat93b**], Kato a proposé la conjecture suivante (qu'il appelle « local ε-conjecture ») :

Conjecture $C_{\mathrm{EP}}(L/K, V)$. — *Si V est une représentation potentiellement semi-stable et si L/K est une extension abélienne finie, alors l'application $\delta_{V,L/K}$ envoie $\Delta_{\mathrm{EP}}(L/K, T)$ sur $\mathbf{Z}_p[G]_{V,L/K}$.*

C'est la conjecture 2.5.2 de cet article. Si $L = K$, alors on retrouve la conjecture $C_{\mathrm{EP}}(K, V)$ de Fontaine et Perrin-Riou que l'on peut d'ailleurs reformuler en termes de nombres de Tamagawa (cf conjecture 2.5.3).

Rappelons à présent la conjecture $C_{\mathrm{Iw}}(K_\infty/K, V)$. On suppose pour cela que K est non-ramifié, on fixe une suite compatible de racines primitives p^n-ièmes de l'unité $\varepsilon = (\zeta_{p^n})_{n \geqslant 0}$ et pour $n \geqslant 1$, on pose $K_n = K(\zeta_{p^n})$ ainsi que $K_\infty = \cup_{n \geqslant 1} K_n$. Soient $H_K = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/K_\infty)$, $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ et $\Gamma_n = \mathrm{Gal}(K_\infty/K_n)$ ce qui fait que $\Gamma = \Delta_K \times \Gamma_1$ où Δ_K est le sous-groupe de torsion de Γ. Soit $\mathcal{H}$ l'algèbre des séries formelles $f(X) \in \mathbf{Q}_p[[X]]$ qui convergent sur le disque unité ouvert et $\mathcal{H}(\Gamma_1) = \{f(\gamma_1 - 1) \mid \gamma_1 \in \Gamma_1 \text{ et } f \in \mathcal{H}\}$. On pose $\Lambda = \mathbf{Z}_p[[\Gamma]]$, $\mathcal{H}(\Gamma) = \mathbf{Q}_p[\Delta_K] \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathcal{H}(\Gamma_1)$ et $\mathcal{K}(\Gamma)$ est l'anneau total des fractions de $\mathcal{H}(\Gamma)$. On définit la cohomologie d'Iwasawa d'une représentation V en posant :

$$H^1_{\mathrm{Iw}}(K, T) = \varprojlim_{\mathrm{cor}_{K_n/K_{n-1}}} H^1(K_n, T),$$

et $H^1_{\mathrm{Iw}}(K,V)=\mathbf{Q}_p\otimes_{\mathbf{Z}_p}H^1_{\mathrm{Iw}}(K,T)$.

Supposons à présent que V est cristalline. Dans [**Per94**], Perrin-Riou a construit une famille d'applications :

$$\mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V,h}:\mathcal{D}(V)^{\Delta=0}\to\mathcal{H}(\Gamma)\otimes_{\Lambda}H^1_{\mathrm{Iw}}(K,V)/V^{H_K},$$

qui interpolent les exponentielles de Bloch et Kato. Plus précisement, pour tout $h\geqslant 1$ vérifiant $\mathrm{Fil}^{-h}\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)=\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{D}(V)^{\Delta=0} & \xrightarrow{\mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V,h}} & \mathcal{H}(\Gamma)\otimes_{\Lambda}H^1_{\mathrm{Iw}}(K,V)/V^{H_K}\\
{\scriptstyle \Xi^{\varepsilon}_{V,n}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_{T,n}}\\
\mathbf{D}^{K_n}_{\mathrm{dR}}(V) & \xrightarrow{(h-1)!\exp_{V,K_n}} & H^1(K_n,V)/H^1(\Gamma_n,V^{H_K}).
\end{array}$$

Ici, $\mathcal{D}(V)$ est isomorphe à $\Lambda\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ et les applications Δ et $\Xi^{\varepsilon}_{V,n}$ sont explicites, mais leur définition est un peu technique pour cette introduction (cf paragraphe 3.1). Cette construction joue un rôle important dans la théorie des fonctions L p-adiques (cf [**Per95**] et [**Col99b**]). Posons maintenant :

$$\Delta_{\mathrm{Iw}}(K_\infty/K,T)=\det\nolimits_{\Lambda}\mathbf{R}\Gamma_{\mathrm{Iw}}(K,T)\otimes\det\nolimits_{\Lambda}(\mathrm{Ind}_{K_\infty/\mathbf{Q}_p}T),$$

et $\Delta_{\mathrm{Iw}}(K_\infty/K,V)=\mathbf{Q}_p\otimes_{\mathbf{Z}_p}\Delta_{\mathrm{Iw}}(K_\infty K,T)$. On pose $\ell_j=j-\log\gamma_1/\log\chi(\gamma_1)$ et on définit un facteur Γ par la formule :

$$\mathbf{\Gamma}_h(V)=\prod_{j>-h}(\ell_{-j})^{\dim_{\mathbf{Q}_p}\mathrm{Fil}^j\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}.$$

Le déterminant de $\mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V,h}$ normalisé par $\mathbf{\Gamma}_h(V)^{-1}$ ne dépend alors pas de h, et la loi de réciprocité de Perrin-Riou entraîne qu'il induit un isomorphisme canonique :

$$\delta_{V,K_\infty/K}:\Delta_{\mathrm{Iw}}(K_\infty/K,V)\to\mathbf{Q}_p\otimes_{\mathbf{Z}_p}\Lambda_{V,K_\infty/K},$$

où $\Lambda_{V,K_\infty/K}$ est un certain Λ-module libre de rang 1 (cf le paragraphe 4.1). Perrin-Riou a proposé la conjecture suivante (appelée $\delta_{\mathbf{Z}_p}(V)$ dans [**Per94**] et [**Per95**]) relativement au déterminant de $\mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V,h}$.

Conjecture $C_{\mathrm{Iw}}(K_\infty/K,V)$. — *Si V est une représentation cristalline de G_K, alors l'application $\delta_{V,K_\infty/K}$ envoie $\Delta_{\mathrm{Iw}}(K_\infty/K,T)$ sur $\Lambda_{V,K_\infty/K}$.*

Le résultat principal de cet article est le suivant :

Théorème A. — *Si K est une extension non-ramifiée de $\mathbf{Q}_p$ et si V est une représentation cristalline de G_K, alors :*

(1) *la conjecture* $C_{\mathrm{Iw}}(K_\infty/K, V)$ *est vraie ;*

(2) *la conjecture* $C_{\mathrm{EP}}(L/K, V)$ *est vraie pour toute extension finie* L *de* K *contenue dans* K_∞.

En utilisant les propriétés fonctorielles de la conjecture $C_{\mathrm{EP}}(L/K, V)$, on en déduit le corollaire suivant :

Corollaire B. — *Si* K *est une extension non-ramifiée de* $\mathbf{Q}_p$ *et si* V *est une représentation cristalline de* G_K*, alors :*

(1) *la conjecture* $C_{\mathrm{EP}}(L, V)$ *est vraie pour toute extension* L/K *contenue dans* $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}$ *;*

(2) *la conjecture* $C_{\mathrm{EP}}(K, V(\eta))$ *est vraie pour tout caractère de Dirichlet* η *de* Γ.

Le théorème A et le corollaire B sont démontrés à la fin de cet article (cf le théorème 4.4.4 et le corollaire 4.4.5). Disons quelques mots du plan de l'article. Les chapitres 1 et 2 sont consacrés à des rappels, qui aboutissent à l'énoncé de la conjecture $C_{\mathrm{EP}}(L/K, V)$. Les chapitres 3 et 4 sont le coeur technique de l'article. On commence par y rappeler la construction de l'exponentielle de Perrin-Riou, puis on y énonce la conjecture $C_{\mathrm{Iw}}(K_\infty/K, V)$. Après cela on montre dans les paragraphes §§4.2, 4.3, en utilisant des techniques de descente en théorie d'Iwasawa, que la conjecture $C_{\mathrm{Iw}}(K_\infty/K, V)$ est équivalente à la conjecture $C_{\mathrm{EP}}(K_n/K, V)$ pour tout $n \geqslant 1$. Enfin dans le §4.4 on démontre la conjecture $C_{\mathrm{Iw}}(K_\infty/K, V)$.

Les mêmes arguments, avec un peu plus de calculs, permettent de démontrer la conjecture $C_{\mathrm{EP}}(L/K, V)$ pour toute extension L/K contenue dans $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}$. Cette petite généralisation est importante pour la version équivariante des conjectures de Bloch et Kato ; nous en laissons les détails au lecteur.

Pour terminer cette introduction, remarquons que dans le cas où V est ordinaire, ces résultats étaient déjà connus (voir [**Per94, BN02, BF04**]).

1. Représentations potentiellement semi-stables

Dans tout cet article, le corps K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ (dans le chapitre 3, on suppose qu'elle est non-ramifiée). L'anneau des entiers de K est noté $\mathcal{O}_K$ et son corps résiduel k_K est de cardinal q_K. On fixe une fois pour toutes une suite compatible de racines primitives p^n-ièmes de l'unité $\varepsilon = (\zeta_{p^n})_{n \geqslant 0}$ et pour $n \geqslant 1$, on pose $K_n = K(\zeta_{p^n})$

ainsi que $K_\infty = \cup_{n\geqslant 1} K_n$. La notation K_0 désigne le sous-corps maximal non-ramifié de K.

On pose :

$$G_K = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/K) \qquad H_K = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/K_\infty)$$
$$\Gamma_n = \mathrm{Gal}(K_\infty/K_n) \qquad G_n = \mathrm{Gal}(K_n/K)$$

et $\Lambda = \mathbf{Z}_p[[\Gamma]]$ est l'algèbre d'Iwasawa de Γ. Profitons-en pour remarquer que le caractère cyclotomique χ envoie Γ dans $\mathbf{Z}_p^\times$ et que cette application est un isomorphisme si K est non-ramifié sur $\mathbf{Q}_p$.

L'objet de ce chapitre est de donner quelques rappels, sur la théorie de Hodge p-adique, la théorie des (φ,Γ)-modules, la cohomologie galoisienne et l'exponentielle de Bloch-Kato.

1.1. Théorie de Hodge p-adique

Dans ce paragraphe, on rappelle quelques unes des constructions de Fontaine (voir [**Fon94a, Fon94b**]) qui sont utilisées dans la suite de cet article. On note σ le Frobenius arithmétique absolu agissant sur $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$.

Soient $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ les anneaux de périodes p-adiques construits par Fontaine (voir [**Fon94a**] par exemple). Le corps $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+[1/t]$ est une $\mathbf{Q}_p$-algèbre qui contient $\overline{\mathbf{Q}}_p$ et qui est munie d'une action de G_K ainsi que d'une filtration décroissante exhaustive et séparée par des $\mathrm{Fil}^i\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} = t^i\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Remarquons que l'uniformisante $t = \log[\varepsilon]$ dépend du choix de $\varepsilon = (\zeta_{p^n})_{n\geqslant 0}$ que l'on a fait ci-dessus. L'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ est une $\mathbf{Q}_p$-algèbre qui contient $\widehat{\mathbf{Q}}_p^{\mathrm{nr}}$ et qui est munie d'une action de G_K ainsi que d'un endomorphisme φ commutant à l'action de G_K et σ-semi-linéaire et d'un opérateur de monodromie $N : \mathbf{B}_{\mathrm{st}} \to \mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ qui commute à l'action de G_K et vérifie $N\circ\varphi = p\varphi\circ N$. Enfin, $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} = \mathbf{B}_{\mathrm{st}}^{N=0}$. On a donc $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \subset \mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ et de plus on a une injection $\overline{\mathbf{Q}}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}} \mathbf{B}_{\mathrm{st}} \hookrightarrow \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$.

Pour toute représentation p-adique V de G_K, on pose $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^K(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$, ce qui fait que $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^K(V)$ est un K-espace vectoriel filtré de dimension finie. S'il n'y a pas de confusion possible quant au corps K, on écrit plus simplement $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$. De manière analogue on pose :

$$\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}^K(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K} \quad \text{et} \quad \mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V) = \varinjlim_{L/K} (\mathbf{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_L},$$

où L parcourt l'ensemble des extensions finies de K, ce qui fait de $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}^K(V)$ un K_0-espace vectoriel muni d'une action σ-semi-linéaire de φ et de $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ un K_0^{nr}-espace vectoriel muni des opérateurs φ et N vérifiants $N\circ\varphi = p\varphi\circ N$. Comme ci-dessus, on écrit $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ s'il n'y a pas de confusion possible. On a :

$$\dim_{K_0} \mathbf{D}^K_{\mathrm{cris}}(V) \leqslant \dim_{K_0^{\mathrm{nr}}} \mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V) \leqslant \dim_K \mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(V) \leqslant \dim_{\mathbf{Q}_p} V.$$

On dit que V est cristalline (resp. potentiellement semi-stable, resp. de de Rham) si $\dim_{K_0} \mathbf{D}^K_{\mathrm{cris}}(V) = \dim_{\mathbf{Q}_p} V$ (resp. si $\dim_{K_0^{\mathrm{nr}}} \mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V) = \dim_{\mathbf{Q}_p} V$, resp. si $\dim_K \mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(V) = \dim_{\mathbf{Q}_p} V$). Remarquons que l'on sait maintenant que toute représentation de de Rham est potentiellement semi-stable (cf [**Ber02**]).

Si V est une représentation de de Rham, on pose :

$$h_i(V) = \dim_K(\mathrm{Fil}^i \mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(V)/\mathrm{Fil}^{i+1}\mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(V)).$$

La décomposition de Hodge-Tate de V s'écrit alors $\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \simeq \oplus_{i\in\mathbf{Z}} \mathbf{C}_p(-i)^{h_i(V)}$ où $\mathbf{C}_p$ est le complété p-adique de $\overline{\mathbf{Q}}_p$. Les opposés des entiers i tels que $h_i(V) \neq 0$ sont les poids de Hodge-Tate de V. On pose $t_H(V) = \sum_{i\in\mathbf{Z}} i h_i(V)$.

1.2. Modules de Wach et (φ,Γ)-modules

Soit $K/\mathbf{Q}_p$ une extension finie que l'on suppose ici non-ramifiée. On note $\widetilde{\mathbf{E}}^+ = \varprojlim(\mathcal{O}_{\overline{\mathbf{Q}}_p}/p\mathcal{O}_{\overline{\mathbf{Q}}_p})$ l'anneau construit par Fontaine (voir [**Fon91**] par exemple, cet anneau s'y appelle $\mathcal{R}$), $\widetilde{\mathbf{E}} = \mathrm{Frac}(\widetilde{\mathbf{E}}^+)$ son corps des fractions et $W(\widetilde{\mathbf{E}})$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\widetilde{\mathbf{E}}$. On pose $X = [\varepsilon] - 1$, avec $\varepsilon = (\zeta_{p^n})_{n\geqslant 0}$, $\mathbf{A}^+_K = \mathcal{O}_K[[X]]$ et on note $\mathbf{A}_K$ le complété p-adique de $\mathbf{A}^+_K[1/X]$. Les anneaux $\mathbf{A}^+_K$ et $\mathbf{A}_K$ sont munis d'un Frobenius φ et d'une action de $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$, donnés par les formules $\varphi(X) = (1+X)^p - 1$ et $\gamma(X) = (1+X)^{\chi(\gamma)} - 1$ pour $\gamma \in \Gamma$, où $\chi : \Gamma \to \mathbf{Z}_p^\times$ est le caractère cyclotomique. Soit $\mathbf{B}$ le complété p-adique de l'extension maximale non-ramifiée du corps $\mathbf{B}_K = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{A}_K$ dans $W(\widetilde{\mathbf{E}})$. On pose $\mathbf{A} = \mathbf{B} \cap W(\widetilde{\mathbf{E}})$, $\mathbf{B}^+ = \mathbf{B} \cap W(\widetilde{\mathbf{E}}^+)[1/p]$ et $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A} \cap W(\widetilde{\mathbf{E}}^+)$. Tous ces anneaux sont munis d'une action de G_K et d'un Frobenius φ. Enfin, on a $\mathbf{A}_K = \mathbf{A}^{H_K}$.

Un (φ,Γ)-module est un module libre de rang fini sur $\mathbf{A}_K$ muni d'un Frobenius semi-linéaire φ et d'une action continue et semi-linéaire de Γ commutant avec φ. Dans [**Fon91**], Fontaine a défini un foncteur :

$$\mathbf{D} : T \mapsto \mathbf{D}(T) = (\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{Z}_p} T)^{H_K},$$

qui fournit une équivalence entre la catégorie des $\mathbf{Z}_p$-représentations de G_K et la catégorie des (φ,Γ)-modules étales. Le foncteur :

$$M \mapsto (\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{A}_K} M)^{\varphi=1}$$

est un quasi-inverse de $\mathbf{D}$. De même, le foncteur $\mathbf{D} : V \mapsto (\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K}$ donne une équivalence entre la catégorie des représentations p-adiques de G_K et la catégorie des (φ, Γ)-modules étales sur $\mathbf{B}_K = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{A}_K$.

Si V est une représentation cristalline, alors un résultat de Colmez [**Col99a**] dit qu'il existe une base de $\mathbf{D}(T)$ dans laquelle les matrices de φ et de $\gamma \in \Gamma$ sont à coefficients dans $\mathbf{A}_K^+$. Plus précisement, on a le résultat suivant, démontré dans [**Ber04**] :

Proposition 1.2.1. — *Si V est une représentation cristalline dont les opposés des poids de Hodge-Tate sont $0 = r_1 \leqslant r_2 \leqslant \cdots \leqslant r_d = h$, alors il existe un unique sous $\mathbf{A}_K^+$-module $\mathbf{N}(T)$ de $\mathbf{D}^+(T) = (\mathbf{A}^+ \otimes_{\mathbf{Z}_p} T)^{H_K}$, stable par φ et qui satisfait les conditions suivantes :*

(1) $\mathbf{N}(T)$ est un $\mathbf{A}_K^+$-module libre de rang $d = \dim(V)$ et contient une base de $\mathbf{D}(T)$ sur $\mathbf{A}_K$;

(2) l'action de Γ préserve $\mathbf{N}(T)$ et elle est triviale sur $\mathbf{N}(T)/X\mathbf{N}(T)$;

(3) $X^h \mathbf{D}^+(T) \subset \mathbf{N}(T)$.

De plus, on a $q^h \mathbf{N}(T) \subset \varphi^* \mathbf{N}(T)$, où $q = \varphi(X)/X$ et $\varphi^* \mathbf{N}(T)$ est le $\mathbf{A}_K^+$-module engendré par $\varphi(\mathbf{N}(T))$.

Soit $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^+$ l'ensemble des séries formelles $f(X) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$, avec $a_k \in K$ et telles que $f(X)$ converge sur le disque unité ouvert $\{x \in \mathbf{C}_p \mid |x|_p < 1\}$. L'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^+$ est de Bézout [**Laz62**] et de plus il admet la théorie des diviseurs élémentaires ; il est aussi muni d'actions de φ et de Γ et on a un plongement $\varphi^{-n} : \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^+ \hookrightarrow K_n[[t]] \subset \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ qui envoie X sur $\zeta_{p^n} \exp(t/p^n) - 1$.

Proposition 1.2.2. — *Si V est une représentation cristalline dont les opposés des poids de Hodge-Tate sont $0 = r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_d = h$, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \simeq (\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^+ \otimes_{\mathbf{A}_K^+} \mathbf{N}(T))^{\Gamma}$ et :*

$$\left[\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^+ \otimes_{\mathbf{A}_K^+} \mathbf{N}(T) : \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^+ \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)\right] = \left[\left(\frac{t}{X}\right)^{r_1} ; \cdots ; \left(\frac{t}{X}\right)^{r_h}\right].$$

Démonstration. — Voir [**Ber04**, prop III.4]. □

1.3. Cohomologie galoisienne

Rappelons maintenant comment on peut calculer la cohomologie galoisienne des représentations p-adiques à partir des (φ, Γ)-modules. On suppose toujours que $K/\mathbf{Q}_p$ est non-ramifiée, on pose $\Gamma_n = \mathrm{Gal}(K_\infty/K_n)$, on fixe un générateur topologique γ_1 de Γ_1

et on pose $\gamma_n = \gamma_1^{p^{n-1}}$. Si T est une représentation $\mathbf{Z}_p$-adique de G_K, on note $C_{\varphi,\gamma_n}(K_n, T)$ le complexe :

$$0 \to \mathbf{D}(T) \xrightarrow{f} \mathbf{D}(T) \oplus \mathbf{D}(T) \xrightarrow{g} \mathbf{D}(T) \to 0,$$

où les applications f et g sont définies par $f(x) = ((\varphi - 1)x, (\gamma_n - 1)x)$ et $g(y, z) = (\gamma_n - 1)y - (\varphi - 1)z$.

Dans [**Her98**], Herr a montré que les groupes de cohomologie $H^i(C_{\varphi,\gamma_n}(K_n, T))$ s'identifient canoniquement aux groupes de cohomologie galoisienne $H^i(K_n, T)$ (voir [**Ben00**, prop 1.3.2] ou bien [**CC99**, prop I.4.1] ou encore [**Ber03**, prop I.8] pour une description explicite de cet isomorphisme quand $i = 1$).

Enfin, on peut aussi retrouver la cohomologie d'Iwasawa :

$$H^i_{\mathrm{Iw}}(K, T) = \varprojlim_{\mathrm{cor}_{K_n/K_{n-1}}} H^i(K_n, T),$$

en utilisant les (φ, Γ)-modules. Pour cela, on utilise l'opérateur $\psi : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ qui est défini par la formule :

$$\psi(x) = \frac{1}{p}\varphi^{-1}(\mathrm{Tr}_{\mathbf{B}/\varphi(\mathbf{B})}(x)).$$

L'opérateur ψ commute à l'action de G_K et on a $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$. La cohomologie du complexe :

$$\mathbf{D}(T) \xrightarrow{\psi-1} \mathbf{D}(T)$$

s'identifie canoniquement à la cohomologie d'Iwasawa de T, c'est-à-dire que $H^1_{\mathrm{Iw}}(K, T) \simeq \mathbf{D}(T)^{\psi=1}$ et que $H^2_{\mathrm{Iw}}(K, T) \simeq \mathbf{D}(T)/(\psi - 1)$ (voir [**CC99**, §II.3]). Donnons une description explicite du premier isomorphisme. Si $\alpha \in \mathbf{D}(T)^{\psi=1}$, alors $(\varphi - 1)\alpha \in \mathbf{D}(T)^{\psi=0}$ et comme $\gamma_n - 1$ est inversible sur $\mathbf{D}(T)^{\psi=0}$ (cf. [**Her98**] ou [**CC99**, prop I.5.1]), il existe $x_n \in \mathbf{D}(T)$ vérifiant $(\gamma_n - 1)x_n = (\varphi - 1)\alpha$. Les $\mathrm{cl}(x_n, \alpha) \in H^1(C_{\varphi,\gamma_n}(K_n, T))$ forment alors un système compatible d'éléments de $H^1(K_n, T)$.

1.4. L'exponentielle de Bloch-Kato

Soit V une représentation de de Rham. Bloch et Kato ont défini (voir [**BK90**, §4]) la partie exponentielle (resp. parties finie et géométrique) de $H^1(K, V)$ en posant :

$$H^1_e(K, V) = \ker(H^1(K, V) \to H^1(K, \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)),$$
$$H^1_f(K, V) = \ker(H^1(K, V) \to H^1(K, \mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)),$$
$$H^1_g(K, V) = \ker(H^1(K, V) \to H^1(K, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)).$$

La dualité locale fournit un accouplement $(\cdot,\cdot)_V : H^1(K,V)\times H^1(K,V^*(1)) \to \mathbf{Q}_p$ pour lequel l'orthogonal de $H^1_e(K,V)$ est $H^1_g(K,V^*(1))$ et celui de $H^1_f(K,V)$ est $H^1_f(K,V^*(1))$. L'espace tangent de V sur K est par définition le quotient :

$$t_V(K) = \mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(V)/\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(V).$$

Les anneaux $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ sont reliés par l'inclusion $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \subset \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ mais aussi et surtout par les suites exactes fondamentales :

$$0 \to \mathbf{Q}_p \to \mathbf{B}^{\varphi=1}_{\mathrm{cris}} \xrightarrow{\alpha} \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathrm{Fil}^0\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \to 0,$$
$$0 \to \mathbf{Q}_p \to \mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \xrightarrow{\beta} \mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \oplus \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathrm{Fil}^0\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \to 0,$$

où $\alpha(x) = x \mod \mathrm{Fil}^0\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ et $\beta(x) = ((1-\varphi)x, x \mod \mathrm{Fil}^0\mathbf{B}_{\mathrm{dR}})$. En prenant les produits tensoriels de ces suites par V et les invariants sous l'action de G_K, on obtient des suites exactes longues de cohomologie qui nous donnent les deux suites exactes :

$$\text{(eq1)} \qquad 0 \to H^0(K,V) \to \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1} \to t_V(K) \to H^1_e(K,V) \to 0,$$

$$\text{(eq2)} \qquad 0 \to H^0(K,V) \to \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \to \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \oplus t_V(K) \to H^1_f(K,V) \to 0.$$

L'application de connexion $\exp_{V,K} : t_V(K) \to H^1(K,V)$ dans la première suite s'appelle l'exponentielle de Bloch et Kato. L'exponentielle duale $\exp^*_{V,K} : H^1(K,V) \to \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(V)$ est définie par la formule :

$$\mathrm{Tr}_{K/\mathbf{Q}_p}[\exp^*_{V,K}(x), y]_V = (x, \exp_{V^*(1),K}(y))_V,$$

où $[\cdot,\cdot]_V : \mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(V) \times \mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(V^*(1)) \to K$ est la dualité canonique. On vérifie facilement que $\ker(\exp^*_{V,K}) = H^1_g(K,V)$.

Lemme 1.4.1. — *On a des isomorphismes canoniques :*

$$\exp_{V,f/e} \ : \frac{\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}{(1-\varphi)\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)} \xrightarrow{\sim} \frac{H^1_f(K,V)}{H^1_e(K,V)},$$
$$\exp^*_{V,g/f} \ : \frac{H^1_g(K,V)}{H^1_f(K,V)} \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=p^{-1}}.$$

Démonstration. — On remarque que la suite (eq1) s'injecte dans (eq2), d'où on obtient le premier isomorphisme. D'autre part, pour tout K_0-espace vectoriel W de dimension finie muni d'un opérateur σ-semi-linéaire φ, on a un isomorphisme :

$$\mathrm{Hom}_{K_0}(W,K_0)^{\varphi=1} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p}(W/(1-\varphi)W, \mathbf{Q}_p)$$
$$f \mapsto \mathrm{Tr}_{K_0/\mathbf{Q}_p} f,$$

ce qui fait que :

$$\frac{H^1_g(K,V)}{H^1_f(K,V)} \simeq \left(\frac{H^1_f(K,V^*(1))}{H^1_e(K,V^*(1))}\right)^* \simeq \left(\frac{\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V^*(1))}{(1-\varphi)\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V^*(1))}\right)^* \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=p^{-1}},$$

et le lemme est démontré. □

On pose maintenant $L_f(K,V) = \det_{\mathbf{Q}_p} H^0(K,V) \otimes_{\mathbf{Q}_p} \det^{-1}_{\mathbf{Q}_p} H^1_f(K,V)$. La suite exacte (eq2) fournit alors un isomorphisme canonique $i_V : L_f(K,V) \simeq \det^{-1}_{\mathbf{Q}_p} t_V(K)$. Soit T un $\mathbf{Z}_p$-réseau de V stable sous l'action de G_K et soit ω une base de $\det_{\mathbf{Q}_p} t_V(K)$. On note $H^1_f(K,T)$ l'image inverse de $H^1_f(K,V)$ dans $H^1(K,T)$ et l'on pose :

$$L_f(K,T) = \det_{\mathbf{Z}_p} H^0(K,T) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \det^{-1}_{\mathbf{Z}_p} H^1_f(K,T).$$

Définition 1.4.2. — On appelle nombre de Tamagawa, et on note $\mathrm{Tam}^0_{K,\omega}(T)$, l'unique puissance de p telle que $i_V(L_f(K,T)) = \mathbf{Z}_p \mathrm{Tam}^0_{K,\omega}(T)\omega^{-1}$, où ω^{-1} est la base duale de ω (voir [**BK90, Per95**]).

Ces nombres interviennent dans la formulation de la conjecture $C_{\mathrm{EP}}(K,V)$ (conjecture 2.5.3 ci-dessous).

2. Déterminants et constantes locales

L'objet de ce chapitre est d'énoncer la conjecture $C_{\mathrm{EP}}(L/K,V)$. On commence par des rappels sur la théorie des déterminants généralisés, puis on passe en revue la construction des constantes locales, pour les représentations de Weil-Deligne tout d'abord, et pour les représentations potentiellement semi-stables ensuite.

2.1. Déterminants généralisés

Dans le reste de cet article, nous avons besoin de la construction de déterminants sur des anneaux tels que $\mathbf{Z}_p[G]$ ou $\mathbf{Q}_p[G]$, pour un groupe abélien fini G, ou encore $\mathbf{Z}_p[[X]]$ et $\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Z}_p[[X]]$. Nous commençons donc par quelques rappels, tirés de [**KM76, Del87, BF01**], sur le formalisme très général des déterminants.

Soit A un anneau commutatif unitaire. On note $\mathbf{M}(A)$ la catégorie des A-modules et $\mathbf{P}(A)$ la sous-catégorie de $\mathbf{M}(A)$ formée des modules projectifs de type fini.

On appelle catégorie de Picard une catégorie $\mathscr{P}$ dont toute flèche est un isomorphisme, munie d'un foncteur $\boxtimes : \mathscr{P} \times \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ et d'une contrainte d'associativité pour $\boxtimes$. On peut déduire de ces axiomes l'existence d'un objet unité $\mathbf{1}_{\mathscr{P}}$, unique à isomorphisme près. Tout objet X de $\mathscr{P}$ admet un inverse X^{-1} tel que $X \boxtimes X^{-1} \simeq \mathbf{1}_{\mathscr{P}}$. On dit qu'une catégorie de

Picard $\mathscr{P}$ est commutative si elle est munie d'une contrainte de commutativité compatible à la contrainte d'associativité.

Soit $(\mathbf{P}(A), \mathrm{is})$ la catégorie dont les objets sont ceux de $\mathbf{P}(A)$ et dont les flèches sont les isomorphismes. On appelle foncteur déterminant un foncteur $\det : (\mathbf{P}(A), \mathrm{is}) \to \mathscr{P}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(1) Pour toute suite exacte $0 \to P' \to P \to P'' \to 0$, on a un isomorphisme fonctoriel : $\det(P) \simeq \det(P') \boxtimes \det(P'')$.

(2) Pour toute suite exacte $0 \to P \xrightarrow{\alpha} Q \to 0$, l'application $\det(\alpha)$ coïncide avec le composé :

$$\det(P) \simeq \det(0) \boxtimes \det(Q) \simeq \det(Q),$$

et de même $\det(\alpha)^{-1}$ coïncide avec le composé :

$$\det(Q) \simeq \det(P) \boxtimes \det(0) \simeq \det(P).$$

(3) Si $P = P' \oplus P''$ et si :$0 \to P' \to P \to P'' \to 0$ et $0 \to P'' \to P \to P' \to 0$ sont les suites exactes naturelles, alors le diagramme :

$$\begin{tikzcd} & \det(P) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \det(P') \boxtimes \det(P'') \arrow[rr] & & \det(P'') \boxtimes \det(P') \end{tikzcd}$$

est commutatif.

(4) Pour tout module projectif P muni d'une filtration $P \supset P' \supset P'' \supset \{0\}$, le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \det(P) & \longrightarrow & \det(P') \boxtimes \det(P/P') \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \det(P'') \boxtimes \det(P/P'') & \longrightarrow & \det(P'') \boxtimes \det(P'/P'') \boxtimes \det(P/P') \end{array}$$

est commutatif.

Soit $\mathbf{K}(A) = \mathbf{K}(\mathbf{M}(A))$ la catégorie des complexes de A-modules. On dit qu'un morphisme de complexes $f : M^\bullet \to N^\bullet$ est un quasi-isomorphisme si pour tout i, l'application $H^i(M^\bullet) \to H^i(N^\bullet)$ est un isomorphisme. La catégorie dérivée $\mathbf{D}(A) = \mathbf{D}(\mathbf{K}(A))$ est la localisation de $\mathbf{K}(A)$ par rapport aux quasi-isomorphismes.

On dit qu'un objet $M^\bullet$ de $\mathbf{D}(A)$ est parfait s'il existe un complexe borné de A modules projectifs de type fini : $P^\bullet = (\cdots \to P_{i+1} \to P_i \to P_{i-1} \to \cdots)$ quasi-isomorphe à $M^\bullet$. Soit $\mathbf{D}^{\mathrm{p}}(A)$ la sous-catégorie de $\mathbf{D}(A)$ formée des objets parfaits. Pour tout objet $M^\bullet$ de

$\mathbf{D}^{\mathrm{p}}(A)$, on fixe un complexe $P^\bullet$ vérifiant les conditions ci-dessus et l'on pose :

$$\det(M^\bullet) = \boxtimes_{i\in\mathbf{Z}} \det(P_i)^{(-1)^i}.$$

On obtient ainsi une extension du foncteur det, unique à équivalence près, à un foncteur (encore noté det) :

$$\det : (\mathbf{D}^{\mathrm{p}}(A), \mathrm{qis}) \to \mathscr{P}.$$

Si les modules de cohomologie $H^i(M^\bullet)$ sont parfaits en toutes dimensions, on a alors un isomorphisme fonctoriel :

$$\det(M^\bullet) \simeq \boxtimes_{i\in\mathbf{Z}} \det(H^i(M^\bullet))^{(-1)^i}.$$

Dans [**Del87**], Deligne construit une catégorie de Picard commutative $\mathscr{V}(A)$ et un foncteur déterminant universel $[\cdot]_A : (\mathbf{P}(A), \mathrm{is}) \to \mathscr{V}(A)$ tel que tout foncteur déterminant det s'écrit comme le composé de $[\cdot]_A$ avec un foncteur additif $\mathscr{V}(A) \to \mathscr{P}$. On en déduit en particulier un foncteur $[\cdot]_A : (\mathbf{D}^{\mathrm{p}}(A), \mathrm{qis}) \to \mathscr{V}(A)$. La proposition ci-dessous rassemble quelques propriétés du foncteur $[\cdot]_A$.

Proposition 2.1.1. — *Si $f : A \to B$ est un morphisme d'anneaux, alors le foncteur « extension des scalaires » $f^*M = B \otimes_A M$ induit des foncteurs $\mathbf{L}f^* : \mathbf{D}^{\mathrm{p}}(A) \to \mathbf{D}^{\mathrm{p}}(B)$ et $f^* : \mathscr{V}(A) \to \mathscr{V}(B)$, et les foncteurs $[\cdot]_B \circ \mathbf{L}f^*$ et $f^* \circ [\cdot]_A : (\mathbf{D}^{\mathrm{p}}(A), \mathrm{qis}) \to \mathscr{V}(B)$ sont quasi-isomorphes.*

Si on suppose de plus que B est projectif de type fini sur A, alors la restriction des scalaires induit des foncteurs $f_* : \mathbf{D}^{\mathrm{p}}(B) \to \mathbf{D}^{\mathrm{p}}(A)$ et $f_* : \mathscr{V}(B) \to \mathscr{V}(A)$, et les foncteurs $f_* \circ [\cdot]_B$ et $[\cdot]_A \circ f_* : (\mathbf{D}^{\mathrm{p}}(B), \mathrm{qis}) \to \mathscr{V}(A)$ sont quasi-isomorphes.

Démonstration. — Voir [**Del87**, section 4.11]. □

On note $\mathscr{P}(A)$ la catégorie des A-modules inversibles gradués. Un objet de $\mathscr{P}(A)$ s'identifie à une paire (X, α) où X est un A-module inversible et $\alpha : \mathrm{Spec}(A) \to \mathbf{Z}$ est une fonction localement constante. Une flèche $f : (X, \alpha) \to (Y, \beta)$ n'existe que si $\alpha = \beta$, auquel cas c'est un isomorphisme. On munit $\mathscr{P}(A)$ d'un produit tensoriel en posant

$$(X, \alpha) \otimes (Y, \beta) = (X \otimes_A Y, \alpha + \beta).$$

Munie de la contrainte de commutativité donnée par la règle de Koszul :

$$\psi : X \otimes_A Y \to Y \otimes_A X$$
$$\psi(x \otimes y) = (-1)^{\alpha\beta} y \otimes x,$$

la catégorie $\mathscr{P}(A)$ est alors une catégorie de Picard commutative. On identifie l'opposé $(X,\alpha)^{-1}$ d'un élément (X,α) à $(X^*,-\alpha)$ où $X^* = \mathrm{Hom}_A(X,A)$.

Si P est un A-module projectif de type fini, alors le rang de P est une fonction localement constante $\mathrm{rg}_P : \mathrm{Spec}(A) \to \mathbf{Z}$ et on définit le déterminant de Knudsen-Mumford $\det_A(P)$ en posant :

$$\det_A(P) = (\wedge^r P, \mathrm{rg}_P) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{P}(A)).$$

Remarquons que la propriété universelle du foncteur $[\cdot]_A$ donne un foncteur additif $\mathbf{V}(A) \to \mathscr{P}(A)$ qui n'est pas, en général, une équivalence de catégories.

Dans cet article nous n'utilisons que les déterminants sur des produits finis d'anneaux locaux. Dans ce cas les catégories $\mathbf{V}(A)$ et $\mathscr{P}(A)$ sont équivalentes par [**Del87**, section 4.13] et la construction de Knudsen-Mumford fournit donc un foncteur déterminant universel. Les anneaux typiques auquels nous allons appliquer la théorie précedente sont :

(1) $A = \mathbf{Q}_p[G]$ ou bien $A = \mathbf{Z}_p[G]$, où G est un groupe abélien fini.

(2) $A = \mathbf{Z}_p[[X]]$ ou bien $A = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Z}_p[[X]]$.

Proposition 2.1.2. — *Si A est un anneau local régulier de dimension n, alors :*

(1) *Tout A-module de type fini M admet une résolution projective $P^\bullet : 0 \to P_m \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$ avec $m \leqslant n$.*

(2) *Si $Q(A)$ est l'anneau total des fractions de A, et si M est un A-module de torsion, alors le produit tensoriel de $P^\bullet$ par $Q(A)$ donne une suite exacte $0 \to Q(A)\otimes_A P_m \to \cdots \to Q(A)\otimes_A P_0 \to 0$. On en déduit une injection canonique $i_A : \det_A(M) \to \det_{Q(A)}(Q(A)\otimes_A P^\bullet) \simeq Q(A)$ et l'image de $\det_A(M)$ dans $Q(A)$ ne dépend pas du choix de $P^\bullet$ et coïncide avec l'idéal fractionnaire de M.*

Démonstration. — La première assertion est un théorème classique de Serre (voir par exemple [**Mat92**, §19]). Pour la deuxième voir [**KM76**, théorème 3]. □

Exemple 2.1.3. — En particulier, considérons l'anneau $A = \mathbf{Z}_p[[X]]$ qui est local régulier de dimension 2 et soit M un A-module de type fini et de torsion. Il existe alors une suite exacte :

$$0 \to (\text{fini}) \to M \to \oplus_{i=1}^n A/f_iA \to (\text{fini}) \to 0,$$

où les f_i sont des polynômes distingués. On a alors $\det_A(M) = \mathrm{car}_A(M)^{-1}A$ où $\mathrm{car}_A(M) = \prod_{i=1}^n f_i$ est le polynôme caractéristique de M.

Remarque 2.1.4. — L'approche de Deligne a été généralisée aux anneaux non-commutatifs par Burns et Flach, voir [**BF01**].

2.2. Déterminants de la cohomologie galoisienne

On note $\mathbf{M}(G_K)$ la catégorie des $\mathbf{Z}_p$-représentations de G_K, c'est-à-dire la catégorie des $\mathbf{Z}_p$-modules (pas nécessairement de type fini) munis d'une action linéaire et continue de G_K. Si L est une extension finie de K on a les foncteurs habituels : $\mathrm{Res}_{L/K} : \mathbf{M}(G_K) \to \mathbf{M}(G_L)$ et $\mathrm{Ind}_{L/K} : \mathbf{M}(G_L) \to \mathbf{M}(G_K)$, ce dernier foncteur étant donné par la formule $\mathrm{Ind}_{L/K} M = \mathbf{Z}_p[G_K] \otimes_{\mathbf{Z}_p[G_L]} M$.

Supposons maintenant L abélien sur K et posons $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. On note $\iota : \mathbf{Z}_p[G] \to \mathbf{Z}_p[G]$ l'involution $g \mapsto g^{-1}$. Si $M \in \mathbf{M}(G_K)$, on note (pour simplifier) $\mathrm{Ind}_{L/K} M$ le $\mathbf{Z}_p[G_K]$-module $\mathrm{Ind}_{L/K}(\mathrm{Res}_{L/K} M)$. Le module $\mathrm{Ind}_{L/K} M$ a alors une structure naturelle de $\mathbf{Z}_p[G]$-module donnée par la formule $\overline{g}(\sigma \otimes m) = \sigma g^{-1} \otimes g(m)$, et on a des isomorphismes canoniques :

$$\begin{aligned} M^{G_L} &\simeq (\mathrm{Ind}_{L/K} M)^{G_K}, \quad m \mapsto \sum_{\overline{g} \in G} g \otimes m; \\ \mathrm{Ind}_{L/K}(M) &\simeq (\mathbf{Z}_p[G] \otimes_{\mathbf{Z}_p} M)^{\iota}, \quad \sigma \otimes m \mapsto \overline{\sigma} \otimes \sigma(m). \end{aligned}$$

Soit $\mathbf{M}(G_K)^{\mathrm{ind}}$ la sous-catégorie de $\mathbf{M}(G_K)$ dont les objets sont les limites inductives de $\mathbf{Z}_p[G_K]$-modules de type fini sur $\mathbf{Z}_p$. Pour tout $M \in \mathbf{M}(G_K)^{\mathrm{ind}}$, on note $C^{\bullet}(G_K, \mathrm{Ind}_{L/K} M)$ le complexe des cochaînes continues de G_K à valeurs dans $\mathrm{Ind}_{L/K}(M)$. On obtient ainsi un foncteur de $\mathbf{M}(G_K)^{\mathrm{ind}}$ dans $\mathbf{D}(\mathbf{Z}_p[G])$ qui à M associe $C^{\bullet}(G_K, \mathrm{Ind}_{L/K} M)$ et qui induit un foncteur exact :

$$\mathbf{R}\Gamma(L, \cdot) : \mathbf{D}(\mathbf{M}(G_K)^{\mathrm{ind}}) \to \mathbf{D}(\mathbf{Z}_p[G]).$$

Le lemme de Shapiro donne un isomorphisme $\mathbf{R}^i\Gamma(L, M) \simeq H^i(L, M)$.

Proposition 2.2.1. — *Si L/K est une extension abélienne finie et si M est un $\mathbf{Z}_p[G_K]$-module qui est de type fini sur $\mathbf{Z}_p$, alors :*

(1) $\mathbf{R}\Gamma(L, M) \in \mathbf{D}^p(\mathbf{Z}_p[G])$ *;*

(2) *si de plus M est de $\mathbf{Z}_p$-torsion, alors* $\det_{\mathbf{Z}_p[G]} \mathbf{R}\Gamma(L, M) = \det^{-1}_{\mathbf{Z}_p[G]}(\mathrm{Ind}_{L/\mathbf{Q}_p} M)$ *dans* $Q(\mathbf{Z}_p[G])$.

Démonstration. — Voir [**Kat93c**] et [**BF96**]. □

Pour terminer ce paragraphe, faisons le lien entre les constructions ci-dessus et la théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques. Rappelons que l'on a fixé un système compatible

$(\zeta_{p^n})_{n\geqslant 0}$ de racines primitives p^n-ièmes de l'unité et posé $K_n=K(\zeta_{p^n})$ et $K_\infty=\cup_{n\geqslant 1}K_n$. Soient $G_n=\mathrm{Gal}(K_n/K)$, $H_K=\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/K_\infty)$, $\Gamma=\mathrm{Gal}(K_\infty/K)$, $\Gamma_n=\mathrm{Gal}(K_\infty/K_n)$ et enfin $\Lambda=\mathbf{Z}_p[[\Gamma]]$ l'algèbre d'Iwasawa de Γ.

Si T est une $\mathbf{Z}_p$-représentation de G_K, alors le module induit $\mathrm{Ind}_{K_\infty/K}(T)$ est isomorphe à $(\Lambda\otimes_{\mathbf{Z}_p}T)^\iota$ et on pose $\mathbf{R}\Gamma_{\mathrm{Iw}}(K,T)=\mathbf{R}\Gamma(K,\mathrm{Ind}_{K_\infty/K}(T))$. La proposition suivante est un cas particulier d'un résultat de Nekovář (voir [**Nek02**, prop 8.4.22]).

Proposition 2.2.2. — (1) *On a des isomorphismes canoniques* $\mathbf{R}^i\Gamma_{\mathrm{Iw}}(K,T)\simeq H^i_{\mathrm{Iw}}(K,T)$.

(2) *Dans la catégorie* $\mathbf{D}(\mathbf{Z}_p[G_n])$, *on a un isomorphisme canonique :*

$$\mathbf{Z}_p[G_n]\otimes^{\mathbf{L}}_{\Lambda}\mathbf{R}\Gamma_{\mathrm{Iw}}(K,T)\simeq\mathbf{R}\Gamma(K_n,T).$$

(3) *On a une suite spectrale dégénérée :*

$$E_2^{ij}=H^i(K_\infty/K_n,H^j_{\mathrm{Iw}}(K,T))\Rightarrow H^{i+j-1}(K_n,T),$$

qui donne lieu à des suites exactes :

$$0\to H^j_{\mathrm{Iw}}(K,T)_{\Gamma_n}\to H^j(K_n,T)\to H^{j+1}_{\mathrm{Iw}}(K,T)^{\Gamma_n}\to 0.$$

Enfin, remarquons que la dualité locale fournit un isomorphisme $H^2_{\mathrm{Iw}}(K,T)\simeq H^0(K_\infty,V^*(1)/T^*(1))^\wedge$ où $^\wedge$ signifie le dual de Pontryagin. En particulier, si $(V^*)^{H_K}=0$, alors $H^2_{\mathrm{Iw}}(K,T)$ est fini et on a $\sharp H^2_{\mathrm{Iw}}(K,T)^{\Gamma_n}=\sharp H^0(K_n,V^*(1)/T^*(1))$.

2.3. Constantes locales des représentations de Weil-Deligne

L'objet de ce paragraphe est de fournir des rappels sur la théorie des constantes locales, telle qu'elle est développée dans [**Del73**], auquel nous renvoyons pour plus de détails. Le corps K est toujours une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. On fixe une uniformisante π_K de K et on note $|\cdot|_K$ la norme de K normalisée par $|\pi_K|_K=q_K^{-1}$ où q_K est le cardinal du corps résiduel k_K de K.

On note K^{nr} l'extension maximale non-ramifiée de K et Fr_K le Frobenius géométrique de K^{nr}. Le groupe de Weil W_K de K est par définition le sous-groupe de G_K formé des $g\in G_K$ tels que la restriction de g à K^{nr} soit une puissance entière de Fr_K. On a donc une suite exacte :

$$0\to I_K\to W_K\xrightarrow{\nu}\mathbf{Z}\to 0,$$

où l'application ν est définie par la formule $w_{|K^{\mathrm{nr}}}=\mathrm{Fr}_K^{\nu(w)}$.

Soit E un corps de caractéristique 0 et contenant toutes les racines de l'unité d'ordre une puissance de p et d'ordre $p-1$. On fixe une mesure de Haar μ_K sur K et un caractère additif continu $\psi : K \to E^\times$ (le corps E étant muni de la topologie discrète). Comme ψ est continu, il est trivial sur un sous-groupe ouvert de K et l'on définit son conducteur $n(\psi)$ comme étant le plus grand entier n tel que ψ est trivial sur $\pi_K^{-n}\mathcal{O}_K$.

La théorie de Langlands et Deligne (voir [**Del73**]) associe à toute représentation E-linéaire V de W_K une constante $\varepsilon(V, \psi, \mu_K)$ vérifiant les propriétés suivantes :

(1) Si V est de dimension 1, alors $\varepsilon(V, \psi, \mu_K)$ coïncide avec la constante locale « abélienne » définie par la théorie de Tate (dans [**Tat67**]). Plus précisement, l'isomorphisme de réciprocité $K^\times \to W_K^{\mathrm{ab}}$ permet de voir V comme un quasi-caractère $\eta : K^\times \to E^\times$. On note $a(\eta)$ le conducteur de η et on fixe $c \in \mathcal{O}_K$ vérifiant $v_K(c) = a(\eta) + n(\psi)$. Si η est non-ramifié, alors on a :

$$\varepsilon(\eta, \psi, \mu_K) = \frac{\eta(c)}{|c|_K} \int_{\mathcal{O}_K} d\mu_K,$$

et si η est ramifié, alors on a :

$$\varepsilon(\eta, \psi, \mu_K) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \int_{\{v_K(x)=n\}} \eta^{-1}(x)\psi(x) d\mu_K = \int_{c^{-1}\mathcal{O}_K} \eta^{-1}(x)\psi(x) d\mu_K.$$

(2) Pour toute suite exacte de représentations $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$, on a $\varepsilon(V, \psi, \mu_K) = \varepsilon(V', \psi, \mu_K)\varepsilon(V'', \psi, \mu_K)$.

(3) Pour tout $a \in K^\times$, on a $\varepsilon(V, \psi, a\mu_K) = a^{\dim V}\varepsilon(V, \psi, \mu_K)$ et si m_a dénote la fonction $x \mapsto ax$, alors $\varepsilon(V, \psi \circ m_a, \mu_K) = \det(V)(a)|a|_K^{-\dim V}\varepsilon(V, \psi, \mu_K)$.

(4) Si L est une extension finie de K, alors il existe une constante $\lambda(L/K, \psi, \mu_L, \mu_K) \in E$ telle que pour toute représentation V de W_L on ait :

$$\varepsilon(\mathrm{Ind}_{L/K}(V), \psi, \mu_K) = \lambda(L/K, \psi, \mu_L, \mu_K)^{\dim V}\varepsilon(V, \psi \circ \mathrm{Tr}_{L/K}, \mu_L).$$

(5) Soient $\omega_1 : K^\times \to E^\times$ le quasi-caractère donné par la formule $\omega_1(a) = |a|_K$ et μ_K^* la mesure duale de μ_K relativement à ψ. On a alors :

$$\varepsilon(V, \psi, \mu_K)\varepsilon(V^* \otimes \omega_1, \psi \circ m_{-1}, \mu_K^*) = 1.$$

(6) Pour une représentation non-ramifiée W, on a :

$$\varepsilon(V \otimes W, \psi, \mu_K) = \det(W)(\pi_K^{a(V)+\dim(V)n(\psi)})\varepsilon(V, \psi, \mu_K)^{\dim W},$$

où $a(V)$ est le conducteur d'Artin de V.

Rappelons que l'on a fixé un système compatible $(\zeta_{p^n})_{n \geqslant 0}$ de racines de l'unité. On note ψ_0 l'unique caractère additif de $\mathbf{Q}_p$ vérifiant $\psi_0(1/p^n) = \zeta_{p^n}$ et on pose $\psi_K = \psi_0 \circ \mathrm{Tr}_{K/\mathbf{Q}_p}$.

On normalise la mesure μ_K en imposant $\mu_K(\mathcal{O}_K) = 1$. Soit enfin $(\cdot,\cdot)_K : K^\times \times K^\times \to \{\pm 1\}$ le symbole de Hilbert. Le lemme suivant est bien connu des experts.

Lemme 2.3.1. — *Si L/K est une extension finie, alors :*

$$\lambda(L/K, \psi_K, \mu_L, \mu_K) = \pm(-1, d_{L/K})_K^{1/2} |d_{L/K}|_p^{[K:\mathbf{Q}_p]/2},$$

où $d_{L/K}$ est le discriminant de L/K.

Démonstration. — Les formules (3) et (5), appliquées à la représentation régulière $\mathrm{Ind}_{L/K}[1]$ donnent :

$$\varepsilon(\mathrm{Ind}_{L/K}[1], \psi_K, \mu_K)\varepsilon(\mathrm{Ind}_{L/K}[1] \otimes \omega_1, \psi_K \circ m_{-1}, \mu_K) = |d_K|_p^{-[L:K]}.$$

Comme par ailleurs $a(\mathrm{Ind}_{L/K}[1]) = v_K(d_{L/K})$ (voir par exemple [**Ser68**, chap IV, prop. 4]) et $n(\psi_K) = v_K(\mathscr{D}_{K/\mathbf{Q}_p})$, on a :

$$\varepsilon(\mathrm{Ind}_{L/K}[1] \otimes \omega_1, \psi_K \circ m_{-1}, \mu_K) = |d_L|_p \det(\mathrm{Ind}_{L/K}[1])(-1)\varepsilon(\mathrm{Ind}_{L/K}[1], \psi_K, \mu_K).$$

On a $|d_L|_p = |d_{L/K}|_p^{[K:\mathbf{Q}_p]} |d_K|_p^{[L:K]}$ et $\det(\mathrm{Ind}_{L/K}[1])(-1) = (-1, d_{L/K})_K$, d'où :

$$\varepsilon(\mathrm{Ind}_{L/K}[1], \psi_K, \mu_K) = \pm(-1, d_{L/K})_K^{1/2} |d_{L/K}|_p^{[K:\mathbf{Q}_p]/2} |d_L|_p^{-1}.$$

Comme $\varepsilon([1], \psi_L, \mu_L) = |d_L|_p^{-1}$, on en déduit le lemme. □

Remarque 2.3.2. — Il est facile de voir que si L/K est une extension non-ramifiée de degré f, alors $\lambda(L/K, \psi, \mu_L, \mu_K) = (-1)^{(f-1)n(\psi)}$.

Supposons maintenant que K est une extension non-ramifiée de $\mathbf{Q}_p$ de degré f, et notons $X(G_n)$ le groupe des caractères de $G_n = \mathrm{Gal}(K_n/K)$ à valeurs dans E. Pour tout $\eta \in X(G_n)$, on note e_η l'idempotent habituel

$$e_\eta = \frac{1}{\sharp G_n} \sum_{g \in G_n} \eta^{-1}(g) g.$$

On définit la somme de Gauss $\tau(\eta)$ en posant $\tau(\eta) = \sum_{g \in G_k} \eta^{-1}(g) g(\zeta_{p^k}) = \sharp G_k e_\eta(\zeta_{p^k})$, où $k = a(\eta)$ est le conducteur de η.

Lemme 2.3.3. — *Pour tout caractère $\eta \in X(G_n)$, on a :*

$$\varepsilon(\eta, \psi_K, \mu_K) = (-1)^{(f-1)a(\eta)} \tau(\eta)^f.$$

Démonstration. — Comme $K/\mathbf{Q}_p$ est non-ramifiée, les groupes de Galois des extensions $\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n})/\mathbf{Q}_p$ et K_n/K sont isomorphes et η peut être vu comme la restriction $\mathrm{Res}_{K/\mathbf{Q}_p}\widetilde{\eta}$ d'un caractère $\widetilde{\eta} : \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n})/\mathbf{Q}_p) \to E^\times$. Comme $\lambda(K/\mathbf{Q}_p, \psi_0, \mu_K, \mu_0) = 1$, on a :

$$\varepsilon(\eta, \psi_K, \mu_K) = \varepsilon(\mathrm{Ind}_{K/\mathbf{Q}_p}\eta, \psi_0, \mu_0)\varepsilon(\mathrm{Ind}_{K/\mathbf{Q}_p}[1] \otimes \widetilde{\eta}, \psi_0, \mu_0) = (-1)^{(f-1)a(\eta)}\varepsilon(\widetilde{\eta}, \psi_0, \mu_0)^f.$$

Si on suppose que $n = a(\eta)$, alors l'application composée $\mathbf{Q}_p^\times \to \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}/\mathbf{Q}_p) \to G_n \simeq (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^\times$ envoie $u \in \mathbf{Z}_p^\times$ sur $u \mod p^n$ et p sur 1, ce qui fait que :

$$\varepsilon(\widetilde{\eta}, \psi_0, \mu_0) = p^n \sum_{u\in\mathbf{Z}_p^\times/1+p^n\mathbf{Z}_p} \mu_0(1+p^k\mathbf{Z}_p)\widetilde{\eta}(u)^{-1}\zeta_{p^n}^u = \sum_{u\in\mathbf{Z}_p^\times/1+p^n\mathbf{Z}_p} \widetilde{\eta}(u)^{-1}\zeta_{p^n}^u = \tau(\eta).$$

Le cas général s'en déduit. □

On appelle représentation du groupe de Weil-Deligne un couple (ρ, N) formé d'une représentation $\rho : W_K \to \mathrm{Aut}_E(V)$ du groupe de Weil W_K et d'un endomorphisme nilpotent $N : V \to V$ vérifiant $\rho(w)^{-1}N\rho(w) = q_K^{\nu(w)}N$ (voir [**Del73**, §8]). On pose alors :

$$\varepsilon(V, \psi_K, \mu_K) = \varepsilon(\rho, \psi_K, \mu_K)\det(-\mathrm{Fr}_K \mid V^{I_K}/(V^{I_K})^{N=0}).$$

2.4. Constantes locales des représentations potentiellement semi-stables

Pour plus de détails, voir [**FP94**, chapitre I, §1.3]. On garde les notations et les conventions des paragraphes précédents. En particulier, K est toujours une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et K_0 est son sous-corps maximal non-ramifié, dont le degré sur $\mathbf{Q}_p$ est $f = [K_0 : \mathbf{Q}_p]$. Rappelons que l'on a défini ci-dessus un caractère additif ψ_K à valeurs dans $\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^\infty}) = \cup_{n\geqslant 0}\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n})$ en posant $\psi_K(a/p^n) = \zeta_{p^n}^{\mathrm{Tr}_{K/\mathbf{Q}_p}(a)}$. On fixe une extension abélienne finie L/K et on pose toujours $G = \mathrm{Gal}(L/K)$.

Le lemme suivant est laissé en exercice au lecteur.

Lemme 2.4.1. — *Si L/K est une extension finie et si V est une représentation p-adique de G_L, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^K(\mathrm{Ind}_{L/K}V) \simeq \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^L(V)$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(\mathrm{Ind}_{L/K}V) \simeq \mathrm{Ind}_{L/K}\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$.*

Si V est une représentation potentiellement semi-stable de G_K, alors la représentation $\mathrm{Ind}_{L/K}V \simeq (\mathbf{Q}_p[G] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^\iota$ est bien-sûr elle aussi potentiellement semi-stable et $D = \mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(\mathrm{Ind}_{L/K}V)$ est un $K_0^{\mathrm{nr}}[G]$-module muni d'une action naturelle Fr_K-semi-linéaire de W_K. On munit D d'une action *linéaire* de W_K, $\rho : W_K \to \mathrm{Aut}_{K_0^{\mathrm{nr}}[G]}(D)$ en posant $(\rho(w))(d) = w\varphi^{f\nu(w)}(d)$ où l'application ν est celle définie au paragraphe 2.1. Le module D est muni d'un opérateur de monodromie N vérifiant $N \circ \varphi = p\varphi \circ N$ ce qui fait que

$\rho(w)^{-1}N\rho(w) = q_K^{\nu(w)}$ et que (ρ, N) est une représentation du groupe de Weil-Deligne. On pose alors :

$$\varepsilon(L/K,V) = \varepsilon(D,\psi_K,\mu_K) = \varepsilon(\rho,\psi_K,\mu_K)\det(-\mathrm{Fr}_K \mid D^{I_K}/(D^{I_K})^{N=0}).$$

Il est facile de voir (cf [**FP94**, remarque 1.3.3]) que la représentation ρ est $\mathbf{Q}_p$-rationnelle, d'où l'on tire que $\varepsilon(L/K,V) \in \mathbf{Q}_p(\zeta_{p^\infty})[G]$.

Si E est un corps contenant K^{nr} ainsi que les valeurs des caractères de G, alors on a :

$$E[G] = \oplus_{\eta\in X(G)} E_\eta, \quad \text{où } E_\eta = e_\eta E,$$

et le module D se décompose sur E en produit de ses η-composantes :

$$E \otimes_{K_0^{\mathrm{nr}}} D = \oplus_{\eta\in X(G)} D_\eta, \quad \text{où } D_\eta = e_\eta(E \otimes_{K_0^{\mathrm{nr}}} D).$$

On appelle η_0 le caractère trivial. On déduit de la décomposition ci-dessus que $\varepsilon(L/K,V) = \sum_{\eta\in X(G)} \varepsilon(D_\eta,\psi_{K,\eta},\mu_K)$, avec $\varepsilon(D_\eta,\psi_{K,\eta},\mu_K) \in E_\eta$.

Si V est une représentation potentiellement semi-stable de G_K, alors par le lemme 2.4.1 ci-dessus, $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{\mathbf{Q}_p}(\mathrm{Ind}_{L/\mathbf{Q}_p}(V)) \simeq \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{L}(V)$ et on a donc un isomorphisme canonique :

$$\mathrm{comp}_{L/\mathbf{Q}_p} : \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{Ind}_{L/\mathbf{Q}_p} V \simeq \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{L}(V).$$

On en déduit un homomorphisme :

$$\widetilde{\alpha}_{V,L/K} : \det\nolimits_{\mathbf{Q}_p[G]}^{-1}(\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{L}(V)) \otimes \det\nolimits_{\mathbf{Q}_p[G]}(\mathrm{Ind}_{L/\mathbf{Q}_p} V) \to \mathbf{Q}_p[G] \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}.$$

On voit que $\det_{\mathbf{Q}_p[G]}(\mathrm{Ind}_{L/\mathbf{Q}_p} V)$ est une $\mathbf{Q}_p[G]$-représentation de de Rham de rang 1 et de poids $r = -[K:\mathbf{Q}_p]t_H(V)$ et il existe donc une extension abélienne finie $K'/\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$ telle que la restriction de $\det_{\mathbf{Q}_p[G]}(\mathrm{Ind}_{L/\mathbf{Q}_p} V)$ à $G_{K'}$ soit isomorphe à $\mathbf{Q}_p[G](r)$. On en déduit donc une application $\alpha_{V,L/K} : \det^{-1}_{\mathbf{Q}_p[G]}(\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{L}(V)) \otimes \det_{\mathbf{Q}_p[G]}(\mathrm{Ind}_{L/\mathbf{Q}_p} V) \to K'[G]$, donnée par la formule $\alpha_{V,L/K} = t^{-r}\widetilde{\alpha}_{V,L/K}$, où $t = \log[\varepsilon] \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ est l'uniformisante de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ associée à $\varepsilon = (\zeta_{p^n})_{n\geqslant 0}$.

Soit $\widehat{\sigma}$ l'élément de $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}/\mathbf{Q}_p)$ qui opère trivialement sur les racines p^n-ièmes de l'unité et dont la restriction à $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$ est égale à σ, et soit $a_{V,L/K} = \det_{\mathbf{Q}_p[G]}(\mathrm{Ind}_{L/\mathbf{Q}_p} V)(\widehat{\sigma}) \in \mathbf{Z}_p[G]^\times$.

Définition 2.4.2. — On pose : $\mathbf{Z}_p[G]_{V,L/K} = \{x \in \widehat{\mathbf{Z}_p^{\mathrm{nr}}}[G] \mid \sigma(x) = a_{V,L/K}x\}$ et $\mathbf{Q}_p[G]_{V,L/K} = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Z}_p[G]_{V,L/K}$.

Le module $\mathbf{Z}_p[G]_{V,L/K}$ est alors libre de rang 1 sur $\mathbf{Z}_p[G]$ (voir [**Kat93b**]). Posons

$$\Gamma^*(i) = \begin{cases} (i-1)!, & \text{si } i > 0 \\ \frac{(-1)^i}{(-i)!}, & \text{si } i \leqslant 0, \end{cases}$$

et $\Gamma^*(V) = \prod_{i \in \mathbf{Z}} \Gamma^*(-i)^{h_i(V)[K:\mathbf{Q}_p]}$. Soit aussi :

$$\beta_{V,L/K} = \lambda(K/\mathbf{Q}_p)^{-\dim V} \Gamma^*(V) \varepsilon(L/K, V)^{-1} \alpha_{V,L/K},$$

où $\lambda(K/\mathbf{Q}_p) = \lambda(K/\mathbf{Q}_p, \psi_0, \mu_K, \mu_0)$ est la constante définie dans le paragraphe 2.1.

Lemme 2.4.3. — *L'application $\beta_{V,L/K}$ induit un isomorphisme :*

$$\beta_{V,L/K} : \det^{-1}_{\mathbf{Q}_p[G]}(\mathbf{D}^L_{\mathrm{dR}}(V)) \otimes \det_{\mathbf{Q}_p[G]}(\mathrm{Ind}_{L/\mathbf{Q}_p} V) \to \mathbf{Q}_p[G]_{L/K,V}.$$

Démonstration. — On note $\chi : G_K \to \mathbf{Z}_p^\times$ le caractère cyclotomique. Si on pose $D = \mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(\mathrm{Ind}_{L/K}(V)) = (\mathbf{Q}_p[G] \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V))^\iota$, alors on a (voir le paragraphe 2.1) :

$$\frac{\lambda(K/\mathbf{Q}_p)^{\dim V} \varepsilon(D, \psi_K, \mu_K)}{\varepsilon(\mathrm{Ind}_{K/\mathbf{Q}_p} D, \psi_0, \mu_0)} \in \mathbf{Q}_p[G].$$

Pour tout $g \in G_{\mathbf{Q}_p}$, on a :

$$\begin{aligned} g(\varepsilon(\mathrm{Ind}_{K/\mathbf{Q}_p} D, \psi_0, \mu_0)) &= \varepsilon(\mathrm{Ind}_{K/\mathbf{Q}_p} D, \chi(g)\psi_0, \mu_0) \\ &= \det_{\mathbf{Q}_p[G]}(\mathrm{Ind}_{L/\mathbf{Q}_p} \mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V))(\chi(g)) \varepsilon(\mathrm{Ind}_{K/\mathbf{Q}_p} D, \psi_0, \mu_0), \end{aligned}$$

D'autre part, si $x \in \det^{-1}_{\mathbf{Q}_p[G]}(\mathbf{D}^L_{\mathrm{dR}}(V)) \otimes \det_{\mathbf{Q}_p[G]}(\mathrm{Ind}_{L/\mathbf{Q}_p} V)$, alors :

$$\begin{aligned} g(\alpha_{V,L/K}(x)) &= \chi^{-r}(g) \det_{\mathbf{Q}_p[G]}(\mathrm{Ind}_{L/\mathbf{Q}_p} V)(g) \alpha_{V,L/K}(x) \\ &= \det_{\mathbf{Q}_p[G]}(\mathrm{Ind}_{L/\mathbf{Q}_p} \mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V))(g) \alpha_{V,L/K}(x). \end{aligned}$$

On en déduit le lemme. □

On donne maintenant une formule explicite pour l'application $\beta_{V,K_n/K}$ pour les représentations absolument cristallines, formule qui est utilisée dans la suite. On suppose donc que K est non-ramifiée, et on écrit comme ci-dessus $f = [K : \mathbf{Q}_p]$, $q_K = p^f$ et $d = \dim V$.

Lemme 2.4.4. — *Si V est une représentation cristalline de G_K, alors :*

$$\varepsilon(D_\eta, \psi_{K,\eta}, \mu_K) = \det(\varphi \mid \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V))^{a(\eta)} \tau(\eta^{-1})^{fd} \otimes e^\iota_\eta.$$

Démonstration. — Comme $D = \mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(\mathrm{Ind}_{K_n/K}V) = (K^{\mathrm{nr}}[G_n] \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V))^{\iota}$, on a $D_\eta = e_\eta^\iota \mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}} \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, ce qui fait que G_K opère sur D_η par le caractère η^{-1} et en utilisant le lemme 2.3.3, on obtient :

$$\begin{aligned}\varepsilon(D_\eta, \psi_\eta, \mu_K) &= \varepsilon(\eta^{-1}, \psi_K, \mu_K)^d \det(\rho(\mathrm{Fr}_K)^{a(\eta)} \mid \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)) \otimes e_\eta^\iota \\ &= \tau(\eta^{-1})^{fd} \det(\varphi \mid \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V))^{a(\eta)} \otimes e_\eta^\iota,\end{aligned}$$

et le lemme est démontré. □

Soit $x_n = \zeta_p + \zeta_{p^2} + \cdots + \zeta_{p^n}$ et soit R_n le $\mathcal{O}_K[G_n]$-réseau de K_n engendré par x_n. On fixe un $\mathcal{O}_K$-réseau M de $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ et T un réseau de V et on pose $M_n = R_n \otimes_{\mathcal{O}_K} M$ ainsi que :

$$\beta_{V,K_n/K}(M,T) = \beta_{V,K_n/K}(\det^{-1}_{\mathbf{Z}_p[G_n]}(M_n) \otimes \det_{\mathbf{Z}_p[G_n]}(\mathrm{Ind}_{K_n/K}T)).$$

Proposition 2.4.5. — *Si V est une représentation cristalline de G_K et T un réseau de V, alors :*

$$\beta_{V,K_n/K}(M,T) = c^{fd}\Gamma^*(V) q_K^{-nd} \left(\sum_{\eta \neq 1} \det(\varphi \mid \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V))^{-a(\eta)} e_\eta + (-1)^{fd} q_K^d e_1 \right) \alpha_{V,K}(M,T),$$

où c est la conjugaison complexe $c : \zeta_{p^n} \mapsto \zeta_{p^n}^{-1}$.

Démonstration. — Soient $\mathrm{comp}_{\mathrm{cris}} : \mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \xrightarrow{\sim} \mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ et $\mathrm{comp}_{K_n/K}$: $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{Ind}_{K_n/K}V \xrightarrow{\sim} \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{K_n}(V)$ les isomorphismes de comparaison. Alors $\mathrm{comp}_{K_n/K,V}$ s'écrit comme le composé :

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} (\mathbf{Q}_p[G_n] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^\iota &\xrightarrow{\mathrm{comp}_{\mathrm{cris}}} \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_K \big((\mathbf{Q}_p[G_n] \otimes_{\mathbf{Q}_p} K_n)^{G_n} \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)\big)^\iota \\ &\xrightarrow{\sim} \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{K_n}(V).\end{aligned}$$

L'isomorphisme $(\mathbf{Q}_p[G_n] \otimes_{\mathbf{Q}_p} K_n)^{G_n} \xrightarrow{\sim} K_n$ envoie $e_\eta^\iota \otimes \sharp G_n e_\eta(x_n)$ sur $e_\eta(x_n)$, et donc :

$$\mathrm{comp}_{K_n/K,V}(e_\eta^\iota \otimes v) = (\mathrm{comp}_{\mathrm{cris}}(v) e_\eta(x_n)) \otimes \frac{1}{\sharp G_n e_\eta(x_n)}.$$

Si $k = a(\eta) \neq 0$, alors on a $e_\eta(x_n) = e_\eta(\zeta_{p^k})$, et la formule bien connue $\tau(\eta)\tau(\eta^{-1}) = \eta(c)p^k$ nous donne $1/(\sharp G_n e_{\eta^{-1}}(x_n)) = p^{-n}\tau(\eta^{-1})\eta(c)$.

Si au contraire $\eta = 1$, alors on a $e_1(x_n) = (1-p)^{-1}$ d'où $1/(\sharp G_n e_1(x_n)) = -p^{1-n}$.

La proposition résulte maintenant de la définition de l'application $\beta_{V,K_n/K}$ et du lemme 2.4.4. □

2.5. La conjecture $C_{\mathrm{EP}}(L/K, V)$

On commence ce paragraphe par la définition de la droite d'Euler-Poincaré. Rappelons que V est une représentation p-adique de G_K, que L est une extension abélienne finie de K et que l'on a posé $G = \mathrm{Gal}(L/K)$.

Définition 2.5.1. — La droite d'Euler-Poincaré $\Delta_{\mathrm{EP}}(L/K, V)$ de V est définie par la formule suivante :

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathrm{EP}}(L/K, V) &= \det_{\mathbf{Q}_p[G]} \mathbf{R}\Gamma(L, V) \otimes \det_{\mathbf{Q}_p[G]}(\mathrm{Ind}_{L/\mathbf{Q}_p} V) \\ &\simeq \otimes_{i=0}^{2} (\det_{\mathbf{Q}_p[G]} H^i(L, V))^{(-1)^i} \otimes \det_{\mathbf{Q}_p[G]}(\mathrm{Ind}_{L/\mathbf{Q}_p} V).\end{aligned}$$

Si T est un $\mathbf{Z}_p$-réseau de V, alors $\mathrm{Ind}_{L/\mathbf{Q}_p} T = \mathrm{Ind}_{K/\mathbf{Q}_p}(\mathbf{Z}_p[G] \otimes_{\mathbf{Z}_p} T)^{\iota}$ et $\mathbf{R}\Gamma(L, T)$ sont parfaits sur $\mathbf{Z}_p[G]$, et par la proposition 2.2.1 le sous-$\mathbf{Z}_p[G]$-module de $\Delta_{\mathrm{EP}}(L/K, V)$:

$$\Delta_{\mathrm{EP}}(L/K, T) = \det_{\mathbf{Z}_p[G]} \mathbf{R}\Gamma(L, T) \otimes \det_{\mathbf{Z}_p[G]}(\mathrm{Ind}_{L/\mathbf{Q}_p} T)$$

ne dépend pas du choix de T et définit donc un $\mathbf{Z}_p[G]$-réseau canonique de $\Delta_{\mathrm{EP}}(L/K, V)$.

Revenons aux constructions du paragraphe 1.4. Comme $H^2(L, V)$ est le dual de $H^0(L, V^*(1))$, la suite duale de la suite (eq2) s'ecrit :

$$0 \to H^1_f(L, V^*(1))^* \to \mathbf{D}^L_{\mathrm{cris}}(V^*(1))^* \oplus t^*_{V^*(1)}(L) \to \mathbf{D}^L_{\mathrm{cris}}(V^*(1))^* \to H^2(L, V) \to 0,$$

et en composant cette suite avec la suite (eq1), on obtient une suite exacte de $\mathbf{Q}_p[G]$-modules :

$$\begin{aligned}0 \to H^0(L, V) \to \mathbf{D}^L_{\mathrm{cris}}(V) \to \mathbf{D}^L_{\mathrm{cris}}(V) \oplus t_V(L) \to H^1(L, V) \\ \to \mathbf{D}^L_{\mathrm{cris}}(V^*(1))^* \oplus t^*_{V^*(1)}(L) \to \mathbf{D}^L_{\mathrm{cris}}(V^*(1))^* \to H^2(L, V) \to 0.\end{aligned}$$

En utilisant la suite exacte $0 \to t^*_{V^*(1)}(L) \to \mathbf{D}^L_{\mathrm{dR}}(V) \to t_V(L) \to 0$, on en déduit des isomorphismes canoniques :

$$\text{(eq3)} \qquad \begin{aligned}&\delta'_{V,L/K} : \det_{\mathbf{Q}_p[G]} \mathbf{D}^L_{\mathrm{dR}}(V) \otimes \det_{\mathbf{Q}_p[G]} \mathbf{R}\Gamma(L, V) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Q}_p[G], \\ &\Delta_{EP}(L/K, V) \xrightarrow{\sim} \det^{-1}_{\mathbf{Q}_p[G]}(\mathbf{D}^L_{\mathrm{dR}}(V)) \otimes \det_{\mathbf{Q}_p[G]}(\mathrm{Ind}_{L/\mathbf{Q}_p} V).\end{aligned}$$

En composant le dernier isomorphisme avec l'application $\beta_{V,L/K}$, on obtient une trivialisation canonique de la droite d'Euler-Poincaré :

$$\delta_{V,L/K} : \Delta_{EP}(L/K, V) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Q}_p[G]_{V,L/K}.$$

Nous pouvons maintenant enfin énoncer les conjectures $C_{\mathrm{EP}}(L/K, V)$ et $C_{\mathrm{EP}}(K, V)$ (voir [**FP94, Per95, Kat93b**]).

***Conjecture 2.5.2** ($C_{\mathrm{EP}}(L/K,V)$). — Si $V=\mathbf{Q}_p\otimes_{\mathbf{Z}_p}T$ est une représentation potentiellement semi-stable de G_K et si L/K est une extension abélienne finie, alors l'application $\delta_{V,L/K}$ envoie $\Delta_{EP}(L/K,T)$ sur $\mathbf{Z}_p[G]_{V,L/K}$.*

Si $L=K$, alors on peut reformuler cette conjecture en termes des nombres de Tamagawa locaux (voir [**FP94**] et la définition 1.4.2 ci-dessus). Soit $\omega\in\det_{\mathbf{Q}_p}\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^K(V)$ une base vérifiant $\omega\simeq\omega_2^{-1}\otimes\omega_1$ avec $\omega_1\in\det_{\mathbf{Q}_p}t_V(K)$ et $\omega_2\in\det_{\mathbf{Q}_p}t_{V^*(1)}(K)$. Soit ω_T une base de $\mathrm{Ind}_{K/\mathbf{Q}_p}(T)$ et soit $\alpha_{V,K}(\omega,T)=\alpha_{V,K}(\omega^{-1}\otimes\omega_T)$.

***Conjecture 2.5.3** ($C_{\mathrm{EP}}(K,V)$). — Si $V=\mathbf{Q}_p\otimes_{\mathbf{Z}_p}T$ est une représentation potentiellement semi-stable de G_K, alors :*

$$\frac{\mathrm{Tam}^0_{K,\omega_1}(T)}{\mathrm{Tam}^0_{K,\omega_2}(T^*(1))}=|d_K|_p^{\dim V/2}\left|\Gamma^*(V)\frac{\alpha_{V,K}(\omega,T)}{\varepsilon(K,V)}\right|_p.$$

La proposition suivante rassemble quelques propriétés fonctorielles de la conjecture $C_{\mathrm{EP}}(L/K,V)$.

***Proposition 2.5.4**. — (1) Les conjectures $C_{\mathrm{EP}}(L/K,V)$ et $C_{\mathrm{EP}}(L/K,V^*(1))$ sont équivalentes.*

(2) Si $0\to V'\to V\to V''\to 0$ est une suite exacte de représentations potentiellement semi-stables et si la conjecture C_{EP} est vraie pour deux des représentations V', V et V'', alors elle est vraie pour la troisième.

(3) Si M/K est une extension de K contenue dans L et si $C_{\mathrm{EP}}(L/K,V)$ est vraie, alors les conjectures $C_{\mathrm{EP}}(L/M,V)$ et $C_{\mathrm{EP}}(M/K,V)$ le sont aussi.

(4) Si la conjecture $C_{\mathrm{EP}}(L/K,V)$ est vraie, alors pour tout caractère $\eta\in X(G)$, la conjecture $C_{\mathrm{EP}}(K,V(\eta))$ est vraie.

Démonstration. — La démonstration se fait comme dans [**Per95**, C.2.9], en utilisant en plus les remarques suivantes :

(1) La dualité locale donne un isomorphisme $\det_{\mathbf{Z}_p[G]}\mathbf{R}\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(\mathbf{R}\Gamma(L,T),\mathbf{Z}_p)\simeq\det_{\mathbf{Z}_p[G]}\mathbf{R}\Gamma(L,T^*(1))$.

(2) Pour le triangle exact $\mathbf{R}\Gamma(L,T')\to\mathbf{R}\Gamma(L,T)\to\mathbf{R}\Gamma(L,T'')\to\mathbf{R}\Gamma(L,T')[1]$, on a un isomorphisme fonctoriel $\det_{\mathbf{Z}_p[G]}\mathbf{R}\Gamma(L,T)\xrightarrow{\sim}\det_{\mathbf{Z}_p[G]}\mathbf{R}\Gamma(L,T')\otimes\det_{\mathbf{Z}_p[G]}\mathbf{R}\Gamma(L,T'')$ (voir [**KM76**, prop 7]).

(3) Si on pose $H = \mathrm{Gal}(L/M)$ et $D_{L/M} = \mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(\mathrm{Ind}_{L/M}V)$ et $D_{L/K} = \mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(\mathrm{Ind}_{L/K}V)$, alors pour tout $\eta \in X(H)$ on a :

$$\begin{aligned}\lambda(M/K)^{\dim V}\varepsilon(D_{L/M,\eta}, \psi_{M,\eta}, \mu_M) &= \varepsilon(\mathrm{Ind}_{M/K}(D_{L/M,\eta}), \psi_{K,\eta}, \mu_K) \\ &= \prod_{\substack{\widehat{\eta}\in X(G)\\ \widehat{\eta}\mapsto\eta}} \varepsilon(D_{L/K,\widehat{\eta}}, \psi_{\widehat{\eta}}, \mu_K).\end{aligned}$$

On en déduit que la restriction transforme $\beta_{V,L/K}$ en $\beta_{V,L/M}$ et le fait que $C_{\mathrm{EP}}(L/K, V)$ implique $C_{\mathrm{EP}}(L/M, V)$ résulte maintenant de la proposition 2.1.1. La deuxième implication est analogue : on voit facilement que la projection de $\mathbf{Q}_p[G]$ sur $\mathbf{Q}_p[G/H]$ transforme $\beta_{V,L/K}$ en $\beta_{V,M/K}$.

(4) Soit E un corps contenant toutes les valeurs des caractères $\eta \in X(G)$ et soit $V(\eta) = E(\eta) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$. Si on note $\mathcal{A}(G)$ l'ordre maximal de $E[G]$, alors on a des isomorphismes canoniques :

$$\mathcal{A}(G) \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathbf{Z}_p[G]} \mathbf{R}\Gamma(L, T) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\Gamma(K, \mathcal{A}(G) \otimes_{\mathbf{Z}_p} T) \xrightarrow{\sim} \oplus_{\eta\in X(G)}\mathbf{R}\Gamma(K, T(\eta)).$$

Si la conjecture $C_{\mathrm{EP}}(L/K, V)$ est vraie, alors l'application $\delta_{V,L/K}$ envoie $\Delta_{EP}(K, \mathcal{A}(G)\otimes_{\mathbf{Z}_p} T)$ sur $\mathcal{A}(G)_{V,L/K} = \mathcal{A}(G)\otimes_{\mathbf{Z}_p[G]} \mathbf{Z}_p[G]_{V,L/K}$. En décomposant cet isomorphisme caractère par caractère, on en déduit les conjectures $C_{\mathrm{EP}}(K, V(\eta))$ pour tous les caractères $\eta \in X(G)$.

$\square$

3. L'exponentielle de Perrin-Riou

Dans tout ce chapitre, on suppose que K est une extension non-ramifiée de $\mathbf{Q}_p$. On commence par des rappels et des compléments sur l'exponentielle de Perrin-Riou, ce qui nous permet d'énoncer la conjecture $C_{\mathrm{Iw}}(K_\infty/K, V)$. Dans le chapitre suivant, on montre que $C_{\mathrm{Iw}}(K_\infty/K, V)$ est équivalente à $C_{\mathrm{EP}}(K_n/K, V)$ pour tout $n \geqslant 1$ et finalement, on démontre la conjecture $C_{\mathrm{Iw}}(K_\infty/K, V)$.

3.1. Rappels et compléments

L'objet de ce paragraphe est de rappeler la construction et certaines propriétés de l'exponentielle de Perrin-Riou, tout d'abord telle qu'elle a été définie par Perrin-Riou elle-même dans [**Per94**], puis ensuite (dans le paragraphe suivant) telle qu'elle a été fait par l'un d'entre nous dans [**Ben00**].

Rappelons que $K_n = K(\zeta_{p^n})$, que $K_\infty = \cup_{n\geqslant 1} K_n$, que $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ et que $G_n = \mathrm{Gal}(K_n/K) \simeq \Gamma/\Gamma_n$. On fixe un générateur topologique γ_1 de Γ_1 et on pose $\gamma_n = \gamma_1^{p^{n-1}}$ ce qui fait de γ_n un générateur topologique de Γ_n. Si on note Δ_K le sous-groupe de torsion de Γ, alors on a $\Gamma \simeq \Delta_K \times \Gamma_1$ et $\Lambda = \mathbf{Z}_p[\Delta_K] \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Z}_p[[\Gamma_1]]$. On définit une action de Γ sur $K[[X]]$ par la formule :

$$g(X) = (1+X)^{\chi(g)} - 1,$$

où $\chi : \Gamma \to \mathbf{Z}_p^\times$ est le caractère cyclotomique. On munit par ailleurs $K[[X]]$ d'un Frobenius φ et d'un opérateur différentiel ∂ en posant :

$$\varphi\Big(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i\Big) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i^\sigma \varphi(X)^i, \quad \text{où } \varphi(X) = (1+X)^p - 1,$$

$$\partial = (1+X)\frac{d}{dX}.$$

On vérifie facilement que $\partial \circ \varphi = p\varphi \circ \partial$. Soit $\psi : K[[X]] \to K[[X]]$ l'opérateur défini par la formule :

$$\psi(f(X)) = \frac{1}{p}\varphi^{-1}\left(\sum_{\zeta^p=1} f(\zeta(1+X)-1)\right),$$

qui est compatible avec la définition du paragraphe 1.2. Il est classique que $\mathcal{O}_K[[X]]^{\psi=0} = \{f \in \mathcal{O}_K[[X]] \mid \psi(f) = 0\}$ est un $\mathcal{O}_K[[\Gamma]]$-module libre engendré par $1+X$.

On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des séries formelles $f(X) \in \mathbf{Q}_p[[X]]$ qui convergent sur le disque unité ouvert, c'est-à-dire $\{x \in \mathbf{C}_p, |x|_p < 1\}$, et l'on pose $\mathcal{H}(\Gamma_1) = \{f(\gamma_1 - 1), f \in \mathcal{H}\}$ et $\mathcal{H}(\Gamma) = \mathbf{Q}_p[\Delta_K] \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathcal{H}(\Gamma_1)$. Pour tout Λ-module N, l'homomorphisme naturel $N \to N_{\Gamma_n}$ se prolonge en une application $\mathcal{H}(\Gamma) \otimes_\Lambda N \to \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} N_{\Gamma_n}$.

Si V est une représentation cristalline de G_K, alors on pose $\mathcal{D}(V) = \mathcal{O}_K[[X]]^{\psi=0} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$. Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on définit une application $\Delta_k : \mathcal{D}(V) \to \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)/(1 - p^k\varphi)\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ par la formule $\Delta_k(f) = (\partial^k f)(0) \mod (1-p^k\varphi)\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$. Si on écrit $\Delta = \oplus_{k\in\mathbf{Z}} \Delta_k$, alors pour tout $f \in \mathcal{D}(V)^{\Delta=0}$, l'équation $(1-\varphi)F(X) = f(X)$ a une solution dans $\mathcal{H}(V) = \mathcal{H} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ et on en déduit une application :

$$\Xi^\varepsilon_{V,n} : \mathcal{D}(V)^{\Delta=0} \to \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{K_n}(V)/\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1},$$
$$f \mapsto p^{-n}(\sigma\otimes\varphi)^{-n}(F)(\zeta_{p^n} - 1).$$

Dans [**Per94**], Perrin-Riou a démontré le résultat suivant.

Théorème 3.1.1. — *Si h est un entier tel que* $\mathrm{Fil}^{-h}\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^K(V) = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^K(V)$, *alors pour tout $i \in \mathbf{Z}$ vérifiant $i + h \geqslant 1$, il existe un Λ-homomorphisme (appelé exponentielle élargie, ou* *exponentielle de Perrin-Riou) :*

$$\mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V(i),h+i} : \mathcal{D}(V(i))^{\Delta=0} \to \mathcal{H}(\Gamma) \otimes_{\Lambda} (H^1_{\mathrm{Iw}}(K, T(i))/T(i)^{H_K}),$$

vérifiant les propriétés suivantes :

(1) *Le diagramme ci-dessous est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}(V(i))^{\Delta=0} \arrow[r, "\mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V(i),h}"] \arrow[d, "\Xi^{\varepsilon}_{V(i),n}"'] & \mathcal{H}(\Gamma) \otimes_{\Lambda} (H^1_{\mathrm{Iw}}(K, T(i))/T(i)^{H_K}) \arrow[d, "\mathrm{pr}_{T(i),n}"] \\ \mathbf{D}^{K_n}_{\mathrm{dR}}(V(i)) \arrow[r, "(h+i-1)!\,\exp_{V(i),K_n}"] & H^1(K_n, V(i))/H^1(\Gamma_n, V(i)^{H_K}). \end{tikzcd}$$

(2) *Soit* $e_1 = \varepsilon^{-1} \otimes t$ *le générateur de* $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(\mathbf{Q}_p(-1))$ *associé au choix de* ε *et soit :*

$$\mathrm{Tw}^{\varepsilon}_{V(i),k} : H^1_{\mathrm{Iw}}(K, V(i)) \to H^1_{\mathrm{Iw}}(K, V(i+k))$$

l'application définie par $\mathrm{Tw}^{\varepsilon}_{V(i),k}(x) = x \otimes \varepsilon^{\otimes k}$. *On a alors :*

$$\mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V(i+1),h+1} = -\mathrm{Tw}^{\varepsilon}_{V(i),1} \circ \mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V(i),h} \circ (\partial \otimes e_1).$$

(3) *Si :*

$$\ell_m = m - \frac{\log(\gamma_1)}{\log \chi(\gamma_1)},$$

alors $\mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V(i),h+1} = \ell_h \mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V(i),h}$.

On déduit de ce théorème plusieurs formules qui nous sont utiles. Tout d'abord, en itérant (2), on obtient :

$$\mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V(i),h+i} = (-1)^i \mathrm{Tw}^{\varepsilon}_{V,k} \circ \mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V,h} \circ (\partial^i \otimes e_i).$$

Soit $\mathcal{K}(\Gamma)$ l'anneau total des fractions de $\mathcal{H}(\Gamma)$ (il suffit en fait d'inverser les ℓ_i). Le (3) permet de définir pour tout $h \in \mathbf{Z}$:

$$\mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V,h} : \mathcal{D}(V)^{\Delta=0} \to \mathcal{K}(\Gamma) \otimes_{\Lambda} \left(H^1_{\mathrm{Iw}}(K, T)/T^{H_K}\right).$$

En particulier, si $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) = \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, alors on dispose de l'application :

$$\mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V,0} : \mathcal{D}(V)^{\Delta=0} \to \mathcal{H}(\Gamma) \otimes_{\Lambda} \left(H^1_{\mathrm{Iw}}(K, T)/T^{H_K}\right),$$

qui est telle que pour tout $i \geqslant 1$, si l'on pose $\Xi^{(k),\varepsilon}_{V,n} = \Xi^{\varepsilon}_{V(i),n} \circ (\partial^{-k} \otimes e_{-k})$, alors le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}(V)^{\Delta=0}(i) \arrow[r, "\mathrm{Tw}^{\varepsilon}_{V,i} \circ \mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V,0}"] \arrow[d, "\Xi^{(k),\varepsilon}_{V,n}"'] & \mathcal{H}(\Gamma) \otimes_{\Lambda} \left(H^1_{\mathrm{Iw}}(K, T(i))/T(i)^{H_K}\right) \arrow[d, "\mathrm{pr}_{T(i),n}"] \\ \mathbf{D}^{K_n}_{\mathrm{dR}}(V(i)) \arrow[r, "(-1)^i (i-1)!\,\exp_{V(i),K_n}"] & H^1(K_n, V(i))/H^1(\Gamma_n, V(i)^{H_K}). \end{tikzcd}$$

Rappelons à présent quelques résultats techniques concernant l'application $\Xi^{\varepsilon}_{V,n}$ et qui sont démontrés dans [**Per94**, §3.4]. L'homomorphisme Δ donne lieu à une suite exacte courte :

$$0 \to \mathcal{D}(V)^{\Delta=0} \to \mathcal{D}(V) \xrightarrow{\Delta} \bigoplus_{j\in\mathbf{Z}} \left(\frac{\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}{(1-p^j\varphi)\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}\right)(j) \to 0,$$

qui induit une suite exacte :

$$\text{(eq4)} \qquad 0 \to \frac{\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}{(1-\varphi)\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)} \to (\mathcal{D}(V)^{\Delta=0})_{\Gamma_n} \to \mathcal{D}(V)_{\Gamma_n} \to \frac{\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}{(1-\varphi)\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)} \to 0.$$

La deuxième flèche de cette suite est donnée par la formule $\widetilde{d} \mapsto d \otimes (\gamma_n - 1)(1+X)$ si $\widetilde{d} = d \mod (1-\varphi)\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$.

L'application $\Xi^{\varepsilon}_{V,n}$ se factorise par $(\gamma_n-1)\mathcal{D}(V)^{\Delta=0}$ et on note :

$$\widetilde{\Xi}^{\varepsilon}_{V,n} : (\mathcal{D}(V)^{\Delta=0})_{\Gamma_n} \to \mathbf{D}^{K_n}_{\mathrm{dR}}(V)/\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1}$$

la flèche qui s'en déduit. Soit :

$$\mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V,h,n} : (\mathcal{D}(V)^{\Delta=0})_{\Gamma_n} \to (\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} H^1_{\mathrm{Iw}}(K,T)/T^{H_K})_{\Gamma_n}$$

l'application déduite de $\mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V,h}$.

Proposition 3.1.2. — (1) *La suite :*

$$0 \to \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)/(1-\varphi)\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \to \ker \widetilde{\Xi}^{\varepsilon}_{V,n} \xrightarrow{f} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=p^{-1}} \to 0,$$

où $f(\alpha(X)) = \alpha(0)$, *est exacte.*

(2) *L'application* $\alpha \mapsto (1-\varphi)\mathrm{Tr}_{K_n/K}(\alpha)$ *induit un isomorphisme :*

$$\mathrm{coker}(\widetilde{\Xi}^{\varepsilon}_{V,n}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)/(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V).$$

(3) *On a une suite exacte :*

$$\text{(eq5)} \quad 0 \to \ker(\widetilde{\Xi}^{\varepsilon}_{V,n}) \to \ker(\mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V,h,n}) \to \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}^{K_n}_{\mathrm{dR}}(V)/V^{G_K}$$
$$\to \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)/(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \to (V^*(1)^{G_K})^* \to 0.$$

Démonstration. — Voir [**Per94**, 3.4.4-3.4.5]. □

3.2. L'application exponentielle et les (φ,Γ)-modules

Nous rappelons maintenant la construction de l'exponentielle en termes de (φ,Γ)-modules qu'a donnée l'un d'entre nous (dans [**Ben00**]). On suppose désormais que V est une représentation cristalline de G_K qui est positive, c'est-à-dire que les opposés des poids de Hodge-Tate de V sont $0 = r_1 \leqslant r_2 \leqslant \cdots \leqslant r_d = h$. On fixe un $\mathbf{Z}_p$-réseau T de V stable par G_K, et on définit un $\mathcal{O}_K$-réseau M de $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ par :

$$M = \{f(X) \in (\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{A}^+_K} \mathbf{N}(T))^\Gamma \mid f(0) \in \mathbf{N}(T)/X\mathbf{N}(T)\}.$$

La proposition V.1 de [**Ber04**] nous dit que le déterminant de l'isomorphisme de comparaison $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{Ind}_{K/\mathbf{Q}_p} V \simeq \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, calculé dans des bases de T et de M, appartient à $\widehat{\mathcal{O}}^\times_{K^{\mathrm{nr}}} t^{r_1+\cdots+r_d}$, c'est-à-dire que dans les notations de la section 2.4, on a $\alpha_{K,V}(M,T) \in \widehat{\mathcal{O}}^\times_{K^{\mathrm{nr}}}$.

L'anneau $\mathcal{O}_K[[X]]$ est muni comme ci-dessus des opérateurs ψ et $\partial = (1+X)d/dX$, et on pose $\mathcal{D}(T) = \mathcal{O}_K[[X]]^{\psi=0} \otimes_{\mathcal{O}_K} M$, où M est le réseau de $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ que l'on vient de définir.

Pour des raisons techniques, on remplace le complexe $C_{\varphi,\gamma_n}(K_n,T)$ par le complexe $\varphi^{-n}(C_{\varphi,\gamma_n}(K_n,T))$ de (φ,Γ)-modules sur $\mathbf{A}_{K_n} = \varphi^{-n}(\mathbf{A}_K)$, complexe qui est isomorphe à $C_{\varphi,\gamma_n}(K_n,T)$. On pose $X_n = [\varepsilon^{1/p^n}] - 1$.

Supposons d'abord que $V^{H_K} = 0$. Soit $n_1, \ldots, n_d$ une base de $\mathbf{N}(T)$ et soit $m = \sum_{i=1}^d a_i(X) \otimes n_i$, avec $a_i(X) \in \mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},K}$, un élément de M. Si $\gamma \in \Gamma$, alors un petit calcul qui utilise les congruences $\gamma(n_i) \equiv n_i \mod X\mathbf{N}(T)$ montre que si l'on pose $c_k = \prod_{j=1}^k (\chi^j(\gamma) - 1)$ pour un générateur topologique γ de Γ et pour tout $k \geqslant 1$, alors $a_i(X)$ appartiennent à l'anneau $\mathbf{A}'_K = \mathbf{A}^+_K[[X^k/c_k, k \geqslant 0]]$. Si $\alpha = f(x) \otimes m \in \mathcal{D}(T)$, alors on pose $E_{k,n}(f) \otimes m = \sum_{i=1}^d (a_i(X) E_{k,n}(f)) \otimes n_i$, où :

$$E_{k,n}(f) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1-k)(2-k)\cdot\cdots\cdot(j-k-1)}{t^j} p^{n(j-1)} \partial^{-j}(f(X_n)).$$

On tronque les séries $a_i(X)/t^j$ modulo X et on note $\overline{a_i E_{k,n}(f)}$ les séries que l'on obtient ainsi. Soit :

$$\mathcal{E}_{T,k,n}(\alpha) = \sum_{i=1}^d n_i \otimes \overline{a_i E_{k,n}(f)} \otimes \varepsilon^{\otimes k}.$$

On vérifie que $\mathcal{E}_{T,k,n}(\alpha) \in \varphi^{-n}(\mathbf{D}(T(k)))$ et on définit $\mathcal{F}_{T,k,n}(\alpha) \in \varphi^{-n}(\mathbf{D}(T(k)))$ par :

$$(1-\varphi)\mathcal{F}_{T,k,n}(\alpha) = (1-\gamma_n)\mathcal{E}_{T,k,n}(\alpha),$$

ce qui fait que $(\mathcal{E}_{T,k,n}(\alpha), \mathcal{F}_{T,k,n}(\alpha))$ définit une classe de cohomologie dans l'espace $H^1(\varphi^{-n}(C_{\varphi,\gamma_n}(K_n,T(k))))$. En composant avec l'isomorphisme :

$$H^1(\varphi^{-n}(C_{\varphi,\gamma_n}(K_n,T(k)))) \xrightarrow{\sim} H^1(K_n,T(k)),$$

on obtient un homomorphisme :

$$\Omega^{\varepsilon}_{T,k,n} : \mathcal{D}(T) \to H^1(K_n, T(k)).$$

Revenons maintenant au cas général (on ne suppose plus que $V^{H_K} = 0$) et posons :

$$\mathcal{H}(T) = \{\alpha \in \mathcal{O}_K[[X]] \otimes_{\mathcal{O}_K} M \mid \psi(\alpha) = \alpha\}.$$

Un petit calcul montre qu'on a une suite exacte :

$$0 \to M^{\varphi=1} \to \mathcal{H}(T) \xrightarrow{1-\varphi} \mathcal{D}(T)^{\Delta_0=0} \to 0,$$

et la même construction qu'avant fournit un homomorphisme :

$$\Sigma^{\varepsilon}_{T,k,n} : \mathcal{H}(T) \to H^1(K_n, T(k))$$

qui s'inscrit dans un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(T) & \xrightarrow{\Sigma^{\varepsilon}_{T,k,n}} & H^1(K_n, T(k)) \\ {\scriptstyle 1-\varphi}\downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{D}(T)^{\Delta_0=0} & \longrightarrow & H^1(K_n, T(k))/H^1(\Gamma_n, T(k)^{H_K}). \end{array}$$

En particulier, si $V^{H_K} = 0$, alors on a :

$$\Sigma^{\varepsilon}_{T,k,n}(\alpha) = \Omega^{\varepsilon}_{T,k,n}((1-\varphi)\alpha).$$

Les résultats suivants sont démontrés dans [**Ben00**, théorèmes 4.3 et 5.1.2].

Proposition 3.2.1. — *Si V est une représentation positive vérifiant $V^{H_K} = 0$ et si $\alpha \in \mathcal{D}(T)$, alors :*

(1) *Pour tous $k \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$, on a :*

$$\Omega^{\varepsilon}_{T,k,n}(\alpha) = (-1)^k (k-1)! \exp_{V(k),K_n}(F_k(\zeta_{p^n} - 1)),$$

où $F_k(X)$ est une solution de l'équation $(1-\varphi)F_k = (\partial^{-k} \otimes e_{-k})(\alpha)$ et e_{-k} est le générateur de $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(\mathbf{Q}_p(k))$ associé à ε.

(2) *Plus généralement, pour tous $k \in \mathbf{Z}$ et $n \geqslant 1$, on a :*

$$\Omega^{\varepsilon}_{T,k,n}((\varphi \otimes \sigma)^{-n}(\alpha)) = \mathrm{pr}_{V(k),n} \circ \mathrm{Tw}^{\varepsilon}_{V,k} \circ \mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V,0}(\alpha).$$

(3) *Soit $(\cdot,\cdot)_{T(k),n} : H^1(K_n, T(k)) \times H^1(K_n, T^*(1-k)) \xrightarrow{\cup} \mathbf{Q}_p$ l'accouplement fourni par la dualité locale. On a alors*

$$(\Omega^{\varepsilon}_{T,k,n}(\alpha), \Omega^{\varepsilon}_{T^*(-h),h-k+1,n}(\beta))_{T(k),n} =$$
$$(-1)^k p^{nh} \prod_{m=1}^{h} (k-m) \mathrm{Tr}_{K/\mathbf{Q}_p} \mathrm{res}\left(\frac{1}{X}\left[\partial^{-k}\alpha(X_n), (\partial^{k-h-1} \otimes e_{-h})\beta(X_n)\right] \frac{dX_n}{1+X_n}\right).$$

Remarque 3.2.2. — Cette proposition entraîne la loi de réciprocité de Perrin-Riou (le théorème 4.1.1 ci-dessous).

Rappelons qu'une représentation cristalline W telle que $W = W^{H_K}$ est nécessairement de la forme $W = \oplus_{i\in\mathbf{Z}}\mathbf{Q}_p(i)^{d_i}$.

Proposition 3.2.3. — *Si V n'a pas de sous-quotient isomorphe à $\mathbf{Q}_p(m)$, avec $m \in \mathbf{Z}$, alors pour tout $k \notin [1,h]$, l'application $\Omega^{\varepsilon}_{T,k,1}$ induit un isomorphisme*

$$\mathcal{D}(T)(k)_{\Gamma_1} \xrightarrow{\sim} (\varphi^*\mathbf{N}(T)(k))^{\psi=1}_{\Gamma_1} \hookrightarrow H^1_{\mathrm{Iw}}(K,T(k))_{\Gamma_1}.$$

La démonstration de cette proposition fait l'objet du reste de ce paragraphe. Pour simplifier la notation on pose $\Omega^{\varepsilon}_{T,k} = \Omega^{\varepsilon}_{T,k,1}$.

Lemme 3.2.4. — *Le Λ-module $(\varphi^*\mathbf{N}(T))^{\psi=1}$ est libre de rang $d = \dim(V)$ et pour tout $k \notin [1,h]$, l'application $\Omega^{\varepsilon}_{T,k}$ induit une injection :*

$$\mathcal{D}(T)(k)_{\Gamma_1} \overset{\Omega^{\varepsilon}_{T,k}}{\hookrightarrow} (\varphi^*\mathbf{N}(T)(k))^{\psi=1}_{\Gamma_1} \hookrightarrow H^1_{\mathrm{Iw}}(K,T(k))_{\Gamma_1}.$$

Démonstration. — Rappelons que $\mathbf{A} \subset W(\widetilde{\mathbf{E}})$ et soit $\mathbf{A}^{>0}$ l'ensemble des $x = \sum_{k=0}^{\infty} p^k[x_k] \in \mathbf{A}$ tels que $x_k \in \mathfrak{m}_{\widetilde{\mathbf{E}}}$ pour tout $k \geqslant 0$. On a une suite exacte scindée $0 \to \mathbf{A}^{>0} \to \mathbf{A}^{+} \leftrightarrows W(\overline{k}_K) \to 0$. Si $\mathbf{D}^{>0}(T) = (\mathbf{A}^{>0} \otimes_{\mathbf{Z}_p} T)^{H_K}$, alors on a une suite exacte :

$$0 \to \mathbf{D}^{>0}(T) \to \mathbf{D}^{+}(T) \leftrightarrows (W(\overline{k}_K) \otimes_{\mathbf{Z}_p} T)^{H_K} \to 0.$$

Comme la restriction de ψ à $W(\overline{k}_K)$ coïncide avec φ^{-1}, on a $((W(\overline{k}_K) \otimes_{\mathbf{Z}_p} T)^{\psi=1})^{H_K} = T^{H_K} = 0$ par hypothèse , d'où $\mathbf{D}^{+}(T)^{\psi=1} = \mathbf{D}^{>0}(T)^{\psi=1}$. Comme T est positive, on a $\varphi^*(\mathbf{N}(T)) \subset \mathbf{N}(T) \subset \mathbf{D}^{+}(T)$, d'où $(\varphi^*\mathbf{N}(T))^{\psi=1} \subset \mathbf{D}^{>0}(T)^{\psi=1}$. L'opérateur $1-\varphi$ est inversible sur $\mathbf{D}^{>0}(T)$, d'inverse $\sum_{j\geqslant 0}\varphi^j$, et un petit calcul montre qu'il donne lieu à un isomorphisme :

$$(\varphi^*\mathbf{N}(T))^{\psi=1} \xrightarrow{\sim} (\varphi^*\mathbf{N}(T))^{\psi=0}.$$

Pour montrer que le Λ-module $(\varphi^*\mathbf{N}(T))^{\psi=1}$ est libre de rang $d = \dim V$, il reste enfin à remarquer que $(\varphi^*\mathbf{N}(T))^{\psi=0}$ est un Λ-module libre engendré par les éléments $\varphi(n_i) \otimes (1+X)$, où $n_1, \ldots, n_d$ est une base de $\mathbf{N}(T)$.

Posons maintenant $\alpha = f \otimes m \in \mathcal{D}(T)$, où $m = \sum_{i=1}^{d} a_i(X) \otimes n_i \in (\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{A}_K^+} \mathbf{N}(T))^{\Gamma}$ et $f \in \mathcal{O}_K[[X]]^{\psi=0}$. La proposition 3.1.3 de [**Ben00**] montre que l'on a alors :

$$\begin{aligned}(1-\gamma_1)\mathcal{E}_{T,k}(\alpha) &\equiv (1-\gamma_1)(E_{k,1}(f) \otimes m \otimes \varepsilon^{\otimes k}) \\ &\equiv \frac{1-\chi(\gamma_1)^k}{p^k} f(X_1) \otimes m \otimes \varepsilon^{\otimes k} \mod X_1 \mathbf{Q}_p[[X_1]] \otimes_{\mathbf{A}_K^+} \mathbf{N}(T)(k) \\ &\equiv \sum_{i=1}^{d} a_i(0) \frac{1-\chi(\gamma_1)^k}{p^k} f(X_1) \otimes n_i \otimes \varepsilon^{\otimes k} \mod X_1 \mathbf{N}(T)(k)\end{aligned}$$

ce qui fait que $(1-\gamma_1)\mathcal{E}_{T,k}(\alpha) \in \mathbf{A}_{K_1} \otimes_{\mathbf{A}^+_{K_1}} \mathbf{N}(T)(k)$. D'autre part, soit ψ_1 l'opérateur ψ agissant sur $\mathbf{A}_{K_1}$. Comme $\psi_1(\partial^{-j} f(X_1)) = 0$ et $\psi_1(X^m x) = X_1^m \psi_1(x)$, on a $\psi_1(\mathcal{E}_{T,k}(\alpha)) = 0$ et donc $(1-\gamma_1)\mathcal{E}_{T,k}(\alpha) \in (\mathbf{A}_{K_1} \otimes_{\mathbf{A}^+_{K_1}} \mathbf{N}(T)(k))^{\psi_1=0}$, d'où :

$$\mathcal{F}_{T,k}(\alpha) = (1-\varphi)^{-1}(1-\gamma_1)\mathcal{E}_{T,k}(\alpha) \in (\mathbf{A}^+_{K_1} \otimes_{\mathbf{A}_K^+} \mathbf{N}(T)(k))^{\psi_1=1},$$

et la formule $\alpha \mapsto \varphi(\mathcal{F}_{T,k}(\alpha))$ définit un homomorphisme $\mathcal{D}(T)(k) \to (\varphi^*\mathbf{N}(T)(k))^{\psi=1}$ qui induit un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}(T)(k)_{\Gamma_1} \arrow[r] \arrow[ddr, "\Omega^{\varepsilon}_{T,k}"'] & (\varphi^*\mathbf{N}(T)(k))^{\psi=1}_{\Gamma_1} \arrow[d] \\ & H^1_{\mathrm{Iw}}(K, T(k))_{\Gamma_1} \arrow[d, hook] \\ & H^1(K_1, T(k)). \end{tikzcd}$$

Le (3) de la proposition 3.2.2 entraîne l'injectivité de $\Omega^{\varepsilon}_{T,k}$ pour $k \notin [1,h]$ et l'application $\mathcal{D}(T)(k)_{\Gamma_1} \to (\varphi^*\mathbf{N}(T)(k))^{\psi=1}_{\Gamma_1}$ est donc injective. D'autre part, $\mathcal{D}(T)(k)$ et $(\varphi^*\mathbf{N}(T)(k))^{\psi=1}$ sont des Λ-modules libres de même rang, donc $\mathcal{D}(T)(k)_{\Gamma_1}$ et $(\varphi^*\mathbf{N}(T)(k))^{\psi=1}_{\Gamma_1}$ sont des $\mathbf{Z}_p$-modules libres de même rang et $\mathcal{D}(T)(k)_{\Gamma_1}$ est un réseau de $(\varphi^*\mathbf{N}(T)(k))^{\psi=1}_{\Gamma_1}$. On en déduit que l'application $(\varphi^*\mathbf{N}(T)(k))^{\psi=1}_{\Gamma_1} \to H^1_{\mathrm{Iw}}(K, T(k))_{\Gamma_1}$ est injective et le lemme est démontré. □

Remarque 3.2.5. — On donnera plus bas une autre preuve de l'injectivité de l'application $(\varphi^*\mathbf{N}(T)(k))^{\psi=1}_{\Gamma_1} \to H^1_{\mathrm{Iw}}(K, T(k))_{\Gamma_1}$ (voir Proposition 4.4.2).

Lemme 3.2.6. — (1) *Si $f(X_1)$, $g(X_1) \in \mathbf{A}^+_{K_1}$, alors pour tout $k \in \mathbf{Z}$ et $n \geqslant 0$, on a :*

$$\mathrm{res}\left(E_{k,1}(f) t^n g(X_1) \frac{dX_1}{1+X_1}\right) \equiv 0 \mod \left(p^n \frac{\Gamma^*(k)}{\Gamma^*(k-n)}\right).$$

(2) *Si* $m \otimes f \in \mathcal{D}(T)$ *et* $\beta \in (\varphi^* \mathbf{N}(T(-h)))^{\psi=1}(h-k-1)$, *alors :*

$$\operatorname{res}\left(E_{k,1}(f)[m, \varphi^{-1}(\beta)]_{V(k)} \frac{dX_1}{1+X_1}\right) \equiv 0 \mod \left(p^h \frac{\Gamma^*(k)}{\Gamma^*(k-h)}\right),$$

où h *est le dernier saut de la filtration de Hodge de* $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ *et où on a* $\Gamma^*(k)/\Gamma^*(k-n) = (k-1) \times \cdots \times (k-n)$, *même si* $k \leqslant 0$.

Démonstration. — On commence par montrer le (1). Si $\partial_1 = (1+X_1)d/dX_1$, alors $\partial_1 = p\partial$ et on a :

$$\partial_1 \left(\frac{h(X_1)}{t^n}\right) = \frac{\partial_1 h(X_1)}{t^n} - np\frac{h(X_1)}{t^{n+1}}.$$

On en déduit que :

$$\operatorname{res}\left(\frac{h(X_1)}{t^{n+1}} \frac{dX_1}{1+X_1}\right) = \frac{1}{np} \operatorname{res}\left(\frac{\partial_1 h(X_1)}{t^n} \frac{dX_1}{1+X_1}\right),$$

et par récurrence on obtient la formule :

$$\operatorname{res}\left(\frac{h(X_1)}{t^n} \frac{dX_1}{1+X_1}\right) = \frac{1}{(n-1)!p^{n-1}} \operatorname{res}\left(\frac{\partial_1^{n-1} h(X_1)}{X} \frac{dX_1}{1+X_1}\right).$$

On applique cette formule au calcul du résidu :

$$\operatorname{res}\left(E_{k,1}(f)[m, \varphi^{-1}(\beta)]_{V(k)} \frac{dX_1}{1+X_1}\right).$$

La série $E_{k,1}$ est définie par :

$$E_{k,1}(f) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1-k)(2-k)\cdots(j-k-1)}{t^j} p^{j-1} \partial^{-j}(f(X_1)).$$

Si $n \leqslant j-1$, on a $\frac{(n+1-k)\times\cdots\times(j-1-k)}{(j-n-1)!} \in \mathbf{Z}$, d'où :

$$\operatorname{res}\left(\frac{(1-k)(2-k)\cdots(j-k-1)}{t^j} p^{j-1} \partial^{-j} f(X_1) t^n g(X_1) \frac{dX_1}{1+X_1}\right) = \frac{(1-k)(2-k)\cdots(j-k-1)p^{j-1}}{(j-n-1)!p^{j-n-1}} \operatorname{res}\left(\frac{\partial^{j-n-1}(\partial^{-j} f(X_1) g(X_1))}{X} \frac{dX_1}{1+X_1}\right),$$

et on en déduit la congruence (1) du lemme.

Montrons maintenant le (2) ; rappelons qu'on a posé $c_j = (\chi(\gamma)-1)\cdots(\chi(\gamma)^j-1)$, où γ est un générateur topologique de Γ. On a $X = \exp(t) - 1 = t + t^2/2! + \cdots$, d'où :

$$X^{j+h} = t^{j+h} \sum_{s_1,\cdots,s_{j+h} \geqslant 0} \frac{t^{s_1+\cdots+s_{j+h}}}{(s_1+1)!\cdots(s_{j+h}+1)!}. \qquad \text{(eq10)}$$

Comme $m \in M$ et $\varphi^{-1}(\beta) \in \mathbf{A}^+_{K_1} \otimes_{\mathbf{A}^+_K} \mathbf{N}(T^*(-h))$, on a :

$$[m, \varphi^{-1}(\beta)]_V = X^h \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b_j(X_1) X^j}{c_j}, \qquad \text{(eq11)}$$

pour des éléments $b_j(X_1) \in \mathbf{A}^+_{K_1}$. En utilisant la congruence (1) du lemme et les congruences évidentes $p^s/(s+1)! \equiv 0 \mod p$ et $p^s/c_s \equiv 0 \mod p$ pour tout $s \geqslant 1$, on montre que :

$$\operatorname{res}\left(E_{k,1}(f)b_j(X_1)\frac{t^{s_1+\ldots+s_{j+h}}}{(s_1+1)!\cdots(s_{j+h}+1)!c_j}\frac{dX_1}{1+X_1}\right) \equiv 0 \mod \left(p^h\frac{\Gamma^*(k)}{\Gamma^*(k-h)}\right),$$

et la congruence (2) découle maintenant des formules (eq10) et (eq11). □

Proposition 3.2.7. — *Soient $(\cdot,\cdot)_{T(k)} : H^1(K_1, T(k)) \times H^1(K_1, T^*(1-k)) \to \mathbf{Z}_p$ l'accouplement fourni par la dualité locale, $\alpha \in \mathcal{D}(T)(k)$, $\beta \in (\varphi^*\mathbf{N}(T^*(-h)))^{\psi=1}(h-k+1)$ et $\mathrm{cl}(\beta) \in H^1(K_1, T^*(1-k))$ la classe de cohomologie associée à β via l'injection $(\varphi^*\mathbf{N}(T^*(-h)))^{\psi=1}(h-k+1) \hookrightarrow H^1_{\mathrm{Iw}}(K, T^*(1-k))$ suivie de la projection. On a alors :*

$$(\Omega^\varepsilon_{T,k}(\alpha), \mathrm{cl}(\beta))_{T(k)} \equiv 0 \mod \left(p^h\frac{\Gamma^*(k)}{\Gamma^*(k-h)}\right).$$

Démonstration. — Soit $A \in \varphi^{-1}(\mathbf{D}(T^*(1-k))^{\psi=0})$ une solution de l'équation $(\gamma_1-1)A = \varphi^{-1}(\varphi-1)\beta$. La formule du cup-produit en termes de (φ,Γ)-modules (voir [**Her01**, proposition 4.4]) s'écrit :

$$(\Omega^\varepsilon_{T,k}(\alpha), \mathrm{cl}(\beta))_{T(k)} = -\mathrm{cl}\left([\gamma_1\mathcal{E}_{T,k}(\alpha), \varphi^{-1}(\beta)]_{V(k)} - [\varphi\mathcal{F}_{T,k}(\alpha), A]_{V(k)}\right).$$

Pour calculer cette classe, on reprend les arguments de la preuve du théorème 5.1.2 de [**Ben00**]. En termes de (φ,Γ)-modules, l'isomorphisme canonique $H^2(K_n, \mathbf{Z}_p(1)) \simeq \mathbf{Z}_p$ est donné par la formule (voir [**Ben00**, théorème 2.2.6]) :

$$\begin{aligned}\mathrm{TR}_n : H^2(\varphi^{-n}(C_{\varphi,\gamma_n}(K_n, \mathbf{Z}_p(1)))) &\xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}_p\\ (\mathrm{cl}(h(X_n)\otimes\varepsilon)) &\mapsto -\frac{p^n}{\log\chi(\gamma_n)}\mathrm{Tr}_{K/\mathbf{Q}_p}\left(\operatorname{res}\frac{h(X_n)dX_n}{1+X_n}\right).\end{aligned}$$

Si $\alpha = f\otimes m \in \mathcal{O}_K[[X]]^{\psi=0}\otimes_{\mathcal{O}_K} M$, alors il existe y tel que $\mathcal{E}_{T,k}(\alpha) = E_{k,1}(f)\otimes m + (\varphi-1)y$, $\mathcal{F}_{T,k}(\alpha) = F_{T,k}(\alpha) + (1-\gamma_1)y$ et $(\varphi-1)F_{T,k}(\alpha) = (\gamma_1-1)(E_{k,1}(f)\otimes m)$.

On en déduit que :

$$\begin{aligned}&(\Omega^\varepsilon_{T,k}(\alpha), \mathrm{cl}(\beta))_{T(k)} =\\ &\quad\frac{p}{\log\chi(\gamma_1)}\mathrm{Tr}_{K/\mathbf{Q}_p}\left(\operatorname{res}([\gamma_1E_{T,k}(f)\otimes m, \varphi^{-1}(\beta)]_{V(k)} - [\varphi F_{T,k}(\alpha), A]_{V(k)})\frac{dX_1}{1+X_1}\right).\end{aligned}$$

Comme $\psi_1(A) = 0$, on a $\psi_1([\varphi F_{T,k}(\alpha), A]_{V(k)}) = 0$, d'où (cf. [**Ben00**, lemme 2.2.2.1]) :

$$\operatorname{res}\left([\varphi F_{T,k}(\alpha), A]_{V(k)}\frac{dX_1}{1+X_1}\right) = 0.$$

D'autre part, comme $(\gamma_1 - 1)E_{k,1}(f) \in \mathbf{Q}_p[[X_1]]$ le (2) du lemme 3.2.6 nous donne :

$$\operatorname{res}\left([\gamma_1 E_{T,k}(f)\otimes m, \varphi^{-1}(\beta)]_{V(k)}\frac{dX_1}{1+X_1}\right) = \operatorname{res}\left([E_{T,k}(f)\otimes m, \varphi^{-1}(\beta)]_{V(k)}\frac{dX_1}{1+X_1}\right) \equiv 0 \mod \left(p^h\frac{\Gamma^*(k)}{\Gamma^*(k-h)}\right).$$

□

Démonstration de la proposition 3.2.3. — La (3) de la proposition 3.2.2 nous donne :

$$\det_{\mathbf{Z}_p}\left(\Omega^{\varepsilon}_{T,k}(\mathcal{D}(T)(k)_{\Gamma_1}), \Omega^{\varepsilon}_{T^*(-h),1+h-k}(\mathcal{D}(T^*(-h))(1+h-k)_{\Gamma_1})\right)_{T(k)} = \left(p^h\frac{\Gamma^*(k)}{\Gamma^*(k-h)}\right)^{[K_1:\mathbf{Q}_p]d}\mathbf{Z}_p,$$

où $d = \dim(V)$. Par ailleurs, la proposition 3.2.7 donne l'inclusion :

$$\det_{\mathbf{Z}_p}\left((\varphi^*\mathbf{N}(T)(k))^{\psi=1}_{\Gamma_1}, \Omega^{\varepsilon}_{T^*(-h),1+h-k}(\mathcal{D}(T^*(-h))(1+h-k)_{\Gamma_1})\right)_{T(k)} \subset \left(p^h\frac{\Gamma^*(k)}{\Gamma^*(k-h)}\right)^{[K_1:\mathbf{Q}_p]d}\mathbf{Z}_p.$$

Comme l'inclusion $\mathcal{D}(T)(k)_{\Gamma_1} \hookrightarrow (\varphi^*\mathbf{N}(T)(k))^{\psi=1}_{\Gamma_1}$ est déjà établie, on en déduit que $\mathcal{D}(T)(k)_{\Gamma_1} \xrightarrow{\sim} (\varphi^*\mathbf{N}(T)(k))^{\psi=1}_{\Gamma_1}$ et la proposition 3.2.3 est démontrée. □

Corollaire 3.2.8. — *Si $k \notin [1,h]$, alors :*

$$\left[\mathbf{D}(T(k))^{\psi=1}_{\Gamma_1} : (\varphi^*\mathbf{N}(T)(k))^{\psi=1}_{\Gamma_1}\right]\left[\mathbf{D}(T^*(1-k))^{\psi=1}_{\Gamma_1} : (\varphi^*\mathbf{N}(T^*(-h))(h+1-k))^{\psi=1}_{\Gamma_1}\right] = \left(p^h\frac{\Gamma^*(k)}{\Gamma^*(k-h)}\right)^{[K_1:\mathbf{Q}_p]\dim(V)}.$$

Démonstration. — Soit $\widetilde{H}^1(K_1, T(k)) = H^1(K_1, T(k))/H^1(K_1, T(k))_{\mathrm{tor}}$. Comme par hypothèse $V(k)^{G_K} = 0$, on a $H^1(K_1, T(k))_{\mathrm{tor}} \simeq H^0(K_1, V(k)/T(k))$, d'où :

$$[H^1_{\mathrm{Iw}}(K, T(k))_{\Gamma_1} : (\varphi^*\mathbf{N}(T)(k))^{\psi=1}_{\Gamma_1}] = \frac{\sharp H^0(K_1, V(k)/T(k))}{\sharp H^0(K_1, V^*(1-k)/T^*(1-k))}[\widetilde{H}^1(K_1, T(k)) : (\varphi^*\mathbf{N}(T)(k))^{\psi=1}_{\Gamma_1}].$$

Le corollaire résulte alors du fait que $\mathbf{D}(T(k))^{\psi=1} \simeq H^1_{\mathrm{Iw}}(K, T(k))$. □

4. La conjecture $C_{\mathrm{Iw}}(K_\infty/K,V)$

Dans ce chapitre, on énonce la conjecture $C_{\mathrm{Iw}}(K_\infty/K,V)$ puis on montre qu'elle est équivalente $C_{\mathrm{EP}}(K_n/K,V)$ pour tout $n\geqslant 1$ et finalement, on démontre la conjecture $C_{\mathrm{Iw}}(K_\infty/K,V)$.

4.1. Enoncé de la conjecture

Dans ce paragraphe, on énonce la conjecture $C_{\mathrm{Iw}}(K_\infty/K,V)$ (c'est la conjecture que Perrin-Riou appelle $\delta_{\mathbf{Z}_p}(V)$). On commence par des rappels et des compléments sur la loi de réciprocité explicite.

Soit $(\cdot,\cdot)_{T,n} : H^1(K_n,T)\times H^1(K_n,T^*(1))\to \mathbf{Z}_p$ l'accouplement fourni par la dualité locale. On définit une application bilineaire :

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_T : H^1_{\mathrm{Iw}}(K,T)\times H^1_{\mathrm{Iw}}(K,T^*(1))^\iota\to\Lambda,$$

en imposant que pour tout $n\geqslant 1$, on ait :

$$\langle x,y\rangle_T\equiv\sum_{\tau\in G_n}(\tau^{-1}x_n,y_n)_{T,n}\tau \mod (\gamma_n-1).$$

Par linéarité, on obtient un accouplement :

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_V : \mathcal{K}(\Gamma)\otimes_\Lambda H^1_{\mathrm{Iw}}(K,T)\times\mathcal{K}(\Gamma)\otimes_\Lambda H^1_{\mathrm{Iw}}(K,T^*(1))^\iota\to\mathcal{K}(\Gamma).$$

D'autre part, en posant $(1+X)\star(1+X)=1+X$, on étend la dualité canonique $\mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(V)\times\mathbf{D}^K_{\mathrm{dR}}(V^*(1))\to K$ à une forme Λ-bilinéaire :

$$\star_{\mathcal{D}(V)} : \mathcal{D}(V)\times\mathcal{D}(V^*(1))\to K\otimes_{\mathcal{O}_K}\mathcal{O}_K[[X]]^{\psi=0}.$$

Le théorème suivant est la loi de réciprocité de Perrin-Riou (la conjecture $\mathrm{Rec}(V)$ de [**Per94**]).

Théorème 4.1.1. — *Si V est une représentation cristalline de G_K, alors pour tout h on a :*

$$\langle\mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V,h}(f),\mathrm{Exp}^{\varepsilon^{-1}}_{V^*(1),1-h}(g^\iota)\rangle_V(1+X)=(-1)^{h-1}\mathrm{Tr}_{K/\mathbf{Q}_p}(f\star_{\mathcal{D}(V)}g).$$

On dispose de plusieurs démonstrations de ce résultat : voir [**Col98, KKT96, Ben00, Ber03**]. L'approche de [**Ben00**], qui repose sur la théorie des (φ,Γ)-modules et qui a été résumée dans le paragraphe 3.2, joue un rôle important dans la suite de cet article. On note $\Lambda_{\mathbf{Q}_p}$ l'anneau $\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \Lambda$, et on pose :

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathrm{PR}}(K_\infty/K, V) &= \det_{\Lambda_{\mathbf{Q}_p}} \mathbf{R}\Gamma_{\mathrm{Iw}}(K, V) \otimes \det_{\Lambda_{\mathbf{Q}_p}} \mathcal{D}(V) \\ &\simeq \otimes_{i=1}^2 (\det_{\Lambda_{\mathbf{Q}_p}} H^i_{\mathrm{Iw}}(K, V))^{(-1)^i} \otimes \det_{\Lambda_{\mathbf{Q}_p}} \mathcal{D}(V).\end{aligned}$$

L'exponentielle de Perrin-Riou induit alors une application :

$$\det_\Lambda(\mathrm{Exp}^\varepsilon_{V,h}) : \Delta_{\mathrm{PR}}(K_\infty/K, V) \to \mathcal{H}(\Gamma).$$

Soient $\mathbf{\Gamma}_h(V) = \prod_{j>-h} (\ell_{-j})^{\dim_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{Fil}^j \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}$ et $\delta'_{V,K_\infty/K} = \mathbf{\Gamma}_h(V)^{-1} \det_\Lambda(\mathrm{Exp}^\varepsilon_{V,h})$. Un petit calcul montre que l'application $\delta'_{V,K_\infty/K} : \Delta_{\mathrm{PR}}(K_\infty/K, V) \to \mathcal{K}(\Gamma)$ ne dépend pas de h, et le théorème 4.1.1 entraîne le résultat suivant (c'est l'ancienne conjecture $\delta_{\mathbf{Q}_p}(V)$ de [**Per94**]).

Théorème 4.1.2. — *On a* $\delta'_{V,K_\infty/K}(\Delta_{\mathrm{PR}}(K_\infty/K, V)) = \Lambda_{\mathbf{Q}_p}$.

Démonstration. — Voir le théorème 3.4.2 et la proposition 3.6.6 de [**Per94**] . □

Nous allons maintenant donner une version entière de la conjecture $\delta_{\mathbf{Q}_p}(V)$ ci-dessus, c'est la conjecture $\delta_{\mathbf{Z}_p}(V)$ de Perrin-Riou. Soient :

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathrm{Iw}}(K_\infty/K, T) &= \det_\Lambda \mathbf{R}\Gamma_{\mathrm{Iw}}(K, T) \otimes_\Lambda \det_\Lambda(\mathrm{Ind}_{K_\infty/\mathbf{Q}_p} T) \\ &\simeq \otimes_{i=1}^2 (\det_\Lambda H^i_{\mathrm{Iw}}(K, T))^{(-1)^i} \otimes_\Lambda \det_\Lambda(\mathrm{Ind}_{K_\infty/\mathbf{Q}_p} T),\end{aligned}$$

et $\Delta_{\mathrm{Iw}}(K_\infty/K, V) = \Delta_{\mathrm{Iw}}(K_\infty/K, T) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p$.

Soit $a_{V,K} \in \mathbf{Z}_p^\times$ l'élément défini au paragraphe 2.4 et soit :

$$\Lambda_{V,K_\infty/K} = \{f \in \widehat{\mathcal{O}}_{K^{\mathrm{nr}}} \widehat{\otimes}_{\mathbf{Z}_p} \Lambda \mid \sigma(f) = a_{V,K} f\}.$$

On a $\mathrm{Ind}_{K_\infty/\mathbf{Q}_p}(V) \simeq (\Lambda \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathrm{Ind}_{K/\mathbf{Q}_p}(V))^\iota$ et $\mathcal{D}(V) \simeq \Lambda \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$. Comme V est cristalline, on a $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V) = K^{\mathrm{nr}} \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ et le lemme 2.4.4 donne $\varepsilon(K, V) = 1$. L'application $\alpha_{V,K}$ induit donc par linéarité un homomorphisme :

$$\alpha_{V,K_\infty/K} : \det^{-1}_{\Lambda_{\mathbf{Q}_p}} \mathcal{D}(V) \otimes \det_{\Lambda_{\mathbf{Q}_p}}(\mathrm{Ind}_{K_\infty/\mathbf{Q}_p}(V)) \to \Lambda_{V,K_\infty/K} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p.$$

En le composant avec $\delta'_{V,K_\infty/K}$, on obtient une trivialisation canonique :

$$\delta_{V,K_\infty/K} : \Delta_{\mathrm{Iw}}(K_\infty/K, V) \xrightarrow{\sim} \Lambda_{V,K_\infty/K} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p.$$

Conjecture 4.1.3 **(**$C_{\mathrm{Iw}}(K_\infty/K, V)$**)**. — *On a* $\delta_{V,K_\infty/K}(\Delta_{\mathrm{Iw}}(K_\infty/K, T)) = \Lambda_{V,K_\infty/K}$.

Cette conjecture est démontrée dans le paragraphe 4.4, c'est le théorème 4.4.4.

4.2. Équivalence de C_{Iw} et de C_{EP} : étude de $\Xi^{\varepsilon}_{V,n}$

Ce paragraphe et le suivant sont consacrés à la démonstration du théorème suivant.

Théorème 4.2.1. — *Pour tout $n \geqslant 1$, la conjecture $C_{\mathrm{Iw}}(K_\infty/K,V)$ est équivalente à la conjecture $C_{\mathrm{EP}}(K_n/K,V)$.*

Afin de montrer le théorème ci-dessus, nous avons besoin de résultats de descente. La technique générale de descente des complexes a été développée par Nekovàř (voir [**Nek02**, §11.6] ainsi que [**BG03**, lemme 8.1]). Nous avons besoin d'un cas très particulier de cette théorie, qui est sans doute bien connu, et qui en tout cas se démontre facilement.

Dans cette section, on pose $\mathcal{H}=\mathcal{H}(\Gamma)$ pour alléger la notation. Si M et N sont deux $\mathcal{H}$-modules libres de même rang et si $f : M \to N$ est un homomorphisme injectif, on note :

$$i_{f,\infty} : \det_{\mathcal{H}} M \otimes \det_{\mathcal{H}}^{-1} N \to \mathcal{H}$$

l'homomorphisme qui s'en déduit. Pour tout $n \geqslant 0$, on a une projection naturelle $\mathcal{H} \to \mathbf{Q}_p[G_n]$. L'algèbre $\mathbf{Q}_p[G_n]$ se décompose en produit de corps $\mathbf{Q}_p[G_n] \simeq \oplus_\lambda E_\lambda$, et on note $\mathfrak{p}(\lambda)$ le noyau de la projection $\mathcal{H} \to E_\lambda$. On pose $M_\lambda = E_\lambda \otimes_{\mathcal{H}} M$, et on note $f_\lambda : M_\lambda \to N_\lambda$ l'homomorphisme de E_λ-modules qui se déduit de f. Le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\gamma_n-1} & M & \longrightarrow & M_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle f} & & \big\downarrow{\scriptstyle f} & & \big\downarrow{\scriptstyle f_n} & & \\
0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\gamma_n-1} & N & \longrightarrow & N_n & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

donne lieu à des isomorphismes canoniques :

$$\ker(f_n) \simeq \operatorname{coker}(f)^{\Gamma_n},$$

$$\operatorname{coker}(f_n) \simeq \operatorname{coker}(f)_{\Gamma_n}.$$

On dit que f est λ-semi-simple si la λ-composante de l'application :

$$B_{f,n} : \ker(f_n) \hookrightarrow \operatorname{coker}(f) \to \operatorname{coker}(f_n)$$

est un isomorphisme. Dans ce cas on a un isomorphisme canonique :

$$i_{f,\lambda} : \det_{E_\lambda} M_\lambda \otimes \det_{E_\lambda}^{-1} N_\lambda \simeq \det_{E_\lambda} \ker(f_\lambda) \otimes \det_{E_\lambda}^{-1} \operatorname{coker}(f_\lambda) \simeq E_\lambda,$$

le deuxieme isomorphisme étant induit par $B_{f,n}$.

On dit que f est λ-admissible si $\mathrm{Im}(i_{f,\infty})$ s'écrit sous la forme $(\gamma_n-1)^r h\mathcal{H}$, avec $h \in \mathcal{H}_{\mathfrak{p}(\lambda)}$ et $r = \dim_{E_\lambda}(\ker f_\lambda)$. On dit que f est admissible si elle est λ-admissible pour tout λ.

Lemme 4.2.2. — *On conserve les hypothèses concernant $f : M \to N$. Si f est λ-admissible, alors f est λ-semi-simple et le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \det_{\mathcal{H}_{\mathfrak{p}(\lambda)}} M_{\mathfrak{p}(\lambda)} \otimes \det^{-1}_{\mathcal{H}_{\mathfrak{p}(\lambda)}} N_{\mathfrak{p}(\lambda)} & \xrightarrow{(\gamma_n-1)^{-r} i_{f,\infty}} & \mathcal{H}_{\mathfrak{p}(\lambda)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \det_{E_\lambda} M_\lambda \otimes \det^{-1}_{E_\lambda} N_\lambda & \xrightarrow{i_{f,\lambda}} & E_\lambda. \end{array}$$

Démonstration. — Soit $X_1, \dots, X_r \in M_{\mathfrak{p}(\lambda)}$ un relèvement d'une base $x_1, \dots x_r$ de $\ker f_\lambda$. Comme M_λ est un facteur direct de M_n on peut choisir X_i de telle façon que $f(X_i) = (\gamma_n - 1)A_i$ où $A_i \in N_{\mathfrak{p}(\lambda)}$. On fixe un complément $X_{r+1}, \dots, X_m$ de $X_1, \dots, X_r$ à une base de $M_{\mathfrak{p}(\lambda)}$. Soit $Y_1, \dots, Y_r \in N_{\mathfrak{p}(\lambda)}$ un relèvement d'une base $y_1, \dots, y_r$ de $\mathrm{coker}(f_\lambda)$. Les éléments $Y_1, \dots, Y_r, Y_{r+1} = f(X_{r+1}), \dots, Y_m = f(X_m)$ forment alors une base de $N_{\mathfrak{p}(\lambda)}$ et on a :

$$i_{f,\infty}(\wedge_{i=1}^m X_i \otimes \wedge_{j=1}^m Y_j^*) = \det(\wedge_{i=1}^r X_i \otimes \wedge_{j=1}^r Y_j^*) = (\gamma_n - 1)^r \det_{1 \leqslant i,j \leqslant r}(Y_j^*(A_i)),$$

ce qui montre le lemme. □

En particulier, soit N un $\Lambda_{\mathbf{Q}_p}$-module de torsion et de type fini ; il admet une résolution projective $0 \to P_1 \xrightarrow{f} P_0 \to N \to 0$, où $\mathrm{rg}(P_0) = \mathrm{rg}(P_1)$. Pour tout λ, on note $\Lambda_{\mathfrak{p}(\lambda)}$ la localisation de $\Lambda_{\mathbf{Q}_p}$ en $\mathfrak{p}(\lambda)$. On dit que N est λ-admissible si $f : P_1 \to P_0$ l'est. Dans ce cas, le lemme 4.2.2 fournit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \det^{-1}_{\Lambda_{\mathfrak{p}(\lambda)}} N_{\mathfrak{p}(\lambda)} & \xrightarrow{(\gamma_n-1)^{-r} i_{f,\infty}} & \Lambda_{\mathfrak{p}(\lambda)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \det^{-1}_{E_\lambda} (N_{\Gamma_n})_\lambda \otimes \det_{E_\lambda} (N^{\Gamma_n})_\lambda & \xrightarrow[\mathrm{id}]{} & E_\lambda, \end{array}$$

où la deuxième ligne est induite par la projection $N^{\Gamma_n} \to N_{\Gamma_n}$.

On pose maintenant $\Lambda_{\Gamma_1} = \mathbf{Z}_p[[\Gamma_1]]$, et on fixe un isomorphisme $\Lambda_{\Gamma_1} \simeq \mathbf{Z}_p[[T]]$ en envoyant γ_1 sur $1 + T$. On pose :

$$\delta_i = \frac{1}{\sharp \Delta_K} \sum_{g \in \Delta_K} \chi^i(g^{-1}) g,$$

ce qui fait que $\Lambda = \oplus_{i=0}^{p-2} \Lambda_i$, où $\Lambda_i = \delta_i \Lambda_{\Gamma_1}$.

Il est clair que $\delta_i(\mathbf{Z}_p(j)) = 0$ si $i \neq j \mod (p-1)$. Sinon, on a une suite exacte $0 \to \mathbf{Z}_p[[T]] \xrightarrow{f_j} \mathbf{Z}_p[[T]] \to \mathbf{Z}_p(j) \to 0$, où f_j est la multiplication par $(\chi(\gamma_1)^j - 1) - T$, ce qui fait que $\det^{-1}_{\Lambda_i} \mathbf{Z}_p(j) = ((\chi(\gamma_1)^j - 1)T)\Lambda_i$ si $i = j \mod (p-1)$.

Proposition 4.2.3. — *Si $h \geqslant 1$ est un entier tel que $\mathrm{Fil}^{-h}\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{K}(V)=\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{K}(V)$, alors l'application $\mathrm{Exp}_{V,h}^{\varepsilon}$ est admissible.*

Nous allons déduire cette proposition du théorème 4.1.2. Pour alléger les notations, posons $a_j=\dim_{\mathbf{Q}_p}\mathrm{Fil}^j\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{K}(V)$, $b_j=\dim_{\mathbf{Q}_p}\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=p^{-j}}$ et $\omega_k(T)=(1+T)^{p^k}-1$. On commence par un lemme purement technique.

Lemme 4.2.4. — *Pour tout $n\geqslant 1$, on a $\mathbf{\Gamma}_h(V)\equiv\mathbf{\Gamma}_h^*(V)\omega_{n-1}(T)^{a_0} \mod \omega_{n-1}(T)^{a_0+1}$, où $\mathbf{\Gamma}_h^*(V)=\pm(h-1)!^{\dim_{\mathbf{Q}_p}\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}(\log\chi(\gamma_n))^{-a_0}\Gamma^*(V)^{-1}$.*

Démonstration. — Comme :

$$\frac{\log(\gamma)}{\log\chi(\gamma)}=\frac{\log(\gamma_n)}{\log\chi(\gamma_n)}\equiv\log^{-1}\chi(\gamma_n)\omega_{n-1}(T) \mod \omega_{n-1}(T)^2,$$

on a :

$$\mathbf{\Gamma}_h(V)\equiv(-1)^{a_0}(\log\chi(\gamma_n))^{-a_0}\prod_{\substack{j>-h\\ j\neq 0}}j^{a_j}\omega_{n-1}(T)^{a_0} \mod \omega_{n-1}(T)^{a_0+1}.$$

Un calcul facile montre alors que :

$$\begin{aligned}(h-1)!^{\dim_{\mathbf{Q}_p}\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}&=\pm\prod_{\substack{j>-h\\ j\neq 0}}j^{a_j}\prod_{i\geqslant 0}\Gamma^*(h-i)^{[K:\mathbf{Q}_p]h_{i-h}(V)}\\&=\pm\prod_{\substack{j>-h\\ j\neq 0}}j^{a_j}\Gamma^*(V),\end{aligned}$$

d'où le lemme. $\square$

Démonstration de la proposition 4.2.3. — Il résulte de la suite exacte (eq4) que l'image de :

$$\det_{\Lambda_{\mathbf{Q}_p}}\mathcal{D}(V)^{\Delta=0}\otimes\det^{-1}_{\Lambda_{\mathbf{Q}_p}}\left(\frac{H^1_{\mathrm{Iw}}(K,V)}{V^{H_K}}\right)$$

dans $\mathcal{H}(\Gamma)$ est égale à :

$$v=\mathbf{\Gamma}_h(V)\det_{\Lambda_{\mathbf{Q}_p}}(V^{H_K})\det^{-1}_{\Lambda_{\mathbf{Q}_p}}(V^*(1)^{H_K})^*\prod_{j\in\mathbf{Z}}\left(\det^{-1}_{\Lambda_{\mathbf{Q}_p}}\mathbf{Q}_p(j)\right)^{b_j}.$$

Fixons un λ et notons n le plus petit entier tel que $E_\lambda\subset\mathbf{Q}_p[G_n]$.

Supposons d'abord que $\lambda\neq\lambda_0$ (λ_0 correspond à l'inclusion de $\mathbf{Q}_p$ dans $\mathbf{Q}_p[G_n]$). Alors $\det_{\Lambda_{\mathbf{Q}_p}}(V^{H_K})$, $\det_{\Lambda_{\mathbf{Q}_p}}(V^*(1)^{H_K})^*$ et $\det_{\Lambda_{\mathbf{Q}_p}}\mathbf{Q}_p(j)$ sont des unités de $\mathcal{H}_{\mathfrak{p}(\lambda)}$ et v est congru à :

$$\mathbf{\Gamma}_h^*(V)\det_{\Lambda_{\mathbf{Q}_p}}(V^{H_K})\det^{-1}_{\Lambda_{\mathbf{Q}_p}}(V^*(1)^{H_K})^*\prod_{j\in\mathbf{Z}}\det_{\Lambda_{\mathbf{Q}_p}}\mathbf{Q}_p(j)^{-b_j}\omega_{n-1}(T)^{a_0} \mod \omega_{n-1}^{a_0+1}(T).$$

D'autre part, la suite exacte (eq5) nous donne $\ker(\mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V,h,n})_\lambda \simeq \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}^{K_n}_{\mathrm{dR}}(V)_\lambda$, ce qui fait que $\dim_{E_\lambda}(\ker(\mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V,h,n})_\lambda) = a_0$ et $\mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V,h}$ est bien λ-semi-simple.

Supposons maintenant que $\lambda = \lambda_0$. Le même calcul montre alors que v est congru à :

$$\mathbf{\Gamma}^*_h(V)\det_{\Lambda_{\mathbf{Q}_p}}(V^{H_K}/V^{G_K})\det^{-1}_{\Lambda_{\mathbf{Q}_p}}(V^*(1)^{H_K}/V^*(1)^{G_K})^*\prod_{j\in\mathbf{Z}}\det_{\Lambda_{\mathbf{Q}_p}}\mathbf{Q}_p(j)^{-b_j}T^r \mod T^{r+1},$$

où :

$$\begin{aligned}r &= \dim_{\mathbf{Q}_p}(\ker(\mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V,h,n})_{\lambda_0})\\ &= \dim_{\mathbf{Q}_p}(\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1}) + \dim_{\mathbf{Q}_p}(\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)) - \dim_{\mathbf{Q}_p}(V^{G_K}) + \dim_{\mathbf{Q}_p}(V^*(1)^{G_K}),\end{aligned}$$

et $\mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V,h}$ est bien λ-semi-simple dans ce cas aussi. □

Nous allons maintenant calculer le déterminant de l'application $\Xi^{\varepsilon}_{V,n}$; ces calculs généralisent (et corrigent...) ceux de [**Per94**, lemme 3.5.7]. Si :

$$\Delta_0 : \mathcal{D}(V) \to \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)/(1-\varphi)\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$$

est l'application définie ci-dessus par $\Delta_0(\alpha(X)) = \alpha(0) \mod (1-\varphi)\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, alors on voit facilement que $\mathcal{D}(V)^{\Delta_0=0}_{\Gamma_n} = \mathcal{D}(V)^{\Delta=0}_{\Gamma_n}$ et que Δ_0 induit une suite exacte :

$$0 \to \frac{\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}{(1-\varphi)\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)} \to (\mathcal{D}(V)^{\Delta=0})_{\Gamma_n} \to \mathcal{D}(V)_{\Gamma_n} \to \frac{\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}{(1-\varphi)\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)} \to 0.$$

Lemme 4.2.5. — *On a :*

$$\widetilde{\Xi}^{\varepsilon}_{V,n}(\alpha(X)) = p^{-n}\left(\sum_{k=1}^{n}(\sigma\otimes\varphi)^{-k}\alpha(\zeta_{p^k}-1) + (1-\varphi)^{-1}\alpha(0)\right) \mod \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1}.$$

Démonstration. — Si $\alpha(X) \in \mathcal{D}(V)^{\Delta_0=0}$, alors $\alpha(0) \in (1-\varphi)\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ et l'élément $(1-\varphi)^{-1}\alpha(0) \in \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)/\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1}$ est bien défini. Soit $F(X) \in \mathcal{H}\otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ telle que $(1-\varphi)F(X) = \alpha(X)$. Pour tout $0 \leqslant k \leqslant n-1$, on a :

$$(\varphi\otimes\sigma)^k F(\zeta_{p^{n-k}}-1) - (\varphi\otimes\sigma)^{k+1}F(\zeta_{p^{n-k-1}}-1) = (\varphi\otimes\sigma)^k\alpha(\zeta_{p^{n-k}}-1)$$

ainsi que $(1-\varphi)F(0) = \alpha(0)$, ce qui fait que :

$$\begin{aligned}\widetilde{\Xi}^{\varepsilon}_{V,n}(\alpha(X)) &= p^{-n}(\varphi\otimes\sigma)^{-n}F(\zeta_{p^n}-1)\\ &= p^{-n}\left(\sum_{k=1}^{n}(\varphi\otimes\sigma)^{-k}\alpha(\zeta_{p^k}-1) + (1-\varphi)^{-1}\alpha(0)\right) \mod \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1}.\end{aligned}$$

□

Le (2) de la proposition 3.1.2 donne une suite exacte :

$$0 \to \ker\widetilde{\Xi}^{\varepsilon}_{V,n} \to \mathcal{D}(V)^{\Delta_0=0}_{\Gamma_n} \xrightarrow{\widetilde{\Xi}^{\varepsilon}_{V,n}} \frac{\mathbf{D}^{K_n}_{\mathrm{dR}}(V)}{\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1}} \to \frac{\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}{(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)} \to 0.$$

En composant cette suite avec les suites tautologiques :

$$0 \to \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1} \to \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \xrightarrow{1-\varphi} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \to \frac{\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}{(1-\varphi)\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)} \to 0,$$

$$\text{(eq6)}\quad 0 \to \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=p^{-1}} \to \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \xrightarrow{1-p^{-1}\varphi^{-1}} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \to \frac{\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}{(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)} \to 0,$$

et en utilisant le (1) de la proposition 3.1.2, on obtient un isomorphisme canonique :

$$\begin{aligned}\kappa_{V,n} : \det_{\mathbf{Q}_p[G_n]} \mathcal{D}(V)_{\Gamma_n}^{\Delta=0} \otimes \det^{-1}_{\mathbf{Q}_p[G_n]} \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{K_n}(V) \simeq \\ \left(\det^{-1}_{\mathbf{Q}_p[G_n]} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1} \otimes \det_{\mathbf{Q}_p[G_n]} \frac{\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}{(1-\varphi)\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}\right) \\ \otimes \left(\det_{\mathbf{Q}_p[G_n]} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=p^{-1}} \otimes \det^{-1}_{\mathbf{Q}_p[G_n]} \frac{\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}{(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}\right) \simeq \mathbf{Q}_p[G_n].\end{aligned}$$

Rappelons que l'on note R_n le $\mathcal{O}_K[G_n]$-module libre engendré par $x_n = \zeta_p + \cdots + \zeta_{p^n}$ et que l'on appelle η_0 le caractère trivial. On fixe un réseau M de $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ et l'on pose $\mathcal{D}_M(V) = \mathcal{O}_K[[X]]^{\psi=0} \otimes M$ et $M_n = R_n \otimes_{\mathbf{Z}_p} M$.

Proposition 4.2.6. — *L'isomorphisme $\kappa_{V,n}$ envoie $\det_{\mathbf{Z}_p[G_n]} \mathcal{D}_M(V)_{\Gamma_n}^{\Delta_0=0} \otimes \det^{-1}_{\mathbf{Z}_p[G_n]} M_n$ sur le réseau engendré par :*

$$p^{-nd} \sum_{\eta \neq \eta_0} (\eta(\gamma_1)-1)^{\delta(\eta)\dim_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1}} \det(\varphi \mid \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V))^{-a(\eta)} e_\eta \\ + (-1)^d p^{(1-n)d + \dim_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1}} e_{\eta_0},$$

où $\delta(\eta) = 1$ si $\eta \in X(\Gamma_1)$ et $\delta(\eta) = 0$ sinon.

Démonstration. — Nous allons commencer par montrer qu'il suffit de démontrer la proposition caractère par caractère. Posons $\Lambda' = T\Lambda_0 \oplus (\oplus_{i=1}^{p-2} \Lambda_i)$ ce qui fait que $(X\mathbf{Z}_p[[X]])^{\psi=0} = \Lambda'(1+X)$ et donc que $(X\mathbf{Z}_p[[X]])^{\psi=0}$ est un Λ-module libre engendré par $\lambda = T\delta_0(1+X) + \sum_{i=1}^{p-2} \delta_i(1+X)$.

Si $N = (1-\varphi)\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \cap M$, alors M/N est sans torsion et il existe $N' \subset M$ tel que $M = N \oplus N'$. On a :

$$\mathcal{D}_M(V)^{\Delta_0=0} \simeq (\mathbf{Z}_p[[X]]^{\psi=0} \otimes_{\mathbf{Z}_p} N) \oplus ((X\mathbf{Z}_p[[X]])^{\psi=0} \otimes_{\mathbf{Z}_p} N').$$

Soient A et B deux $\mathbf{Z}_p[G_n]$-modules libres de même rang et supposons que l'on se donne un isomorphisme :

$$\kappa : \det_{\mathbf{Q}_p[G_n]}(A_{\mathbf{Q}_p}) \otimes \det^{-1}_{\mathbf{Q}_p[G_n]}(B_{\mathbf{Q}_p}) \to \mathbf{Q}_p[G_n].$$

Soit E une extension de $\mathbf{Q}_p$ contenant toutes les valeurs des caractères de G_n. Pour tout $\eta \in X(G_n)$, posons $A_\eta = e_\eta(\mathcal{O}_E \otimes_{\mathbf{Z}_p} A)$ et $\mathcal{O}_\eta = e_\eta \mathcal{O}_E$. Pour tous $a \in \det_{\mathbf{Z}_p[G_n]} A$ et

$b \in \det_{\mathbf{Z}_p[G_n]} B$, on a alors $e_\eta(\kappa(a \otimes b^{-1})) = \kappa_\eta(e_\eta(a) \otimes e_\eta(b)^{-1})$. On en conclut qu'il suffit de démontrer la proposition 4.2.6 caractère par caractère.

On fixe une base (n_i) (resp. (n'_j)) de N (resp. N') et l'on pose :

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= n_i \otimes (1+X) & \beta_i &= n_i \otimes x_n \\
\alpha'_j &= n'_j \otimes \lambda & \beta'_j &= n'_j \otimes x_n \\
\widetilde{\alpha} &= \wedge_i \alpha_i & \widetilde{\beta} &= \wedge_j \beta_j \\
\widetilde{\alpha}' &= \wedge_i \alpha'_i & \widetilde{\beta}' &= \wedge_j \beta'_j \\
\widetilde{a} &= \widetilde{\alpha} \wedge \widetilde{\alpha}' & \widetilde{b} &= \widetilde{\beta} \wedge \widetilde{\beta}'.
\end{aligned}$$

Si $\eta \neq \eta_0$ est un caractère de conducteur p^k, alors il s'écrit sous la forme $\eta = \omega^i \eta'$, où ω est le caractère de Teichmüller et $\eta' \in X(\Gamma_1/\Gamma_k)$. Si $\eta \notin X(\Gamma_1)$, alors $i \neq 0$, $e_\eta(\lambda) = e_\eta(1+X)$, et la proposition 4.2.5 nous donne :

$$\begin{aligned}
e_\eta\left(\widetilde{\Xi}^{\varepsilon}_{V,n}(\alpha_i)\right) &= p^{-n}\varphi^{-k}(n_i) e_\eta(\zeta_{p^k}), \\
e_\eta\left(\widetilde{\Xi}^{\varepsilon}_{V,n}(\alpha'_j)\right) &= p^{-n}\varphi^{-k}(n'_j) e_\eta(\zeta_{p^k}).
\end{aligned}$$

Comme $e_\eta(x_n) = e_\eta(\zeta_{p^k})$, on a pour $\eta \notin X(\Gamma_1)$:

$$\kappa_{V,\eta}(e_\eta(\widetilde{a} \otimes \widetilde{b}^{-1})) = p^{-n \dim_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)} \det_{\mathbf{Q}_p}(\varphi^{-k} \mid \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)),$$

tandis que si $\eta \in X(\Gamma_1)$, alors on a :

$$\begin{aligned}
& e_\eta(\lambda) = (\eta(\gamma_1) - 1) e_\eta(1+X), \\
\text{(eq7)} \quad & e_\eta\left(\widetilde{\Xi}^{\varepsilon}_{V,n}(\alpha'_j)\right) = p^{-n}(\eta(\gamma_1)-1)\varphi^{-k}(n'_j) e_\eta(\zeta_{p^k}), \\
& \kappa_{V,\eta}\left(e_\eta(\widetilde{a} \otimes \widetilde{b}^{-1})\right) = p^{-n \dim_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)} (\eta(\gamma_1)-1)^{\dim_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1}} \det_{\mathbf{Q}_p}(\varphi^{-k} \mid \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)).
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que $\eta = \eta_0$. Dans ce cas, $e_{\eta_0}(\zeta_p) = (1-p)^{-1}$ et la proposition 4.2.5 nous donne :

$$\begin{aligned}
e_{\eta_0}\left(\widetilde{\Xi}^{\varepsilon}_{V,n}(\alpha_i)\right) &= \frac{1}{[K_n : K]}(1 - p^{-1}\varphi^{-1})(1-\varphi)^{-1} n_i, \\
e_{\eta_0}\left(\widetilde{\Xi}^{\varepsilon}_{V,n}(\alpha'_j)\right) &= 0.
\end{aligned}$$

On a un diagramme commutatif :

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & \ker(\widetilde{\Xi}^{\varepsilon}_{V,n}) \arrow[r, "(2)"] \arrow[d] & \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=p^{-1}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \frac{\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}{(1-\varphi)\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)} \arrow[ur, "(1)"] \arrow[r, "(3)"] & \left(\mathcal{D}(V)^{\Delta_0=0}_{\Gamma_n}\right)_{\eta_0} \arrow[r, "(4)"] \arrow[d] & (1-\varphi)\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \arrow[r] \arrow[dl, "(5)"] & 0 \\
 & & \frac{\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}{\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1}} \arrow[d, "(6)"] & & \\
 & & \frac{\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}{(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)} \arrow[d] & & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

dont les flèches sont données par les formules suivantes :

(1) et (3) : $d \mapsto d \otimes (\gamma_n - 1)(1+X)$;

(2) et (4) : $\alpha(X) \mapsto \alpha(0)$;

(5) : $d \mapsto [K_n : K]^{-1}(1-p^{-1}\varphi^{-1})(1-\varphi)^{-1}(d) \mod \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1}$;

(6) : $d \mapsto [K_n : K](1-\varphi)(d)$.

On en déduit que la η_0-composante de $\kappa_{V,n}$ s'écrit comme le composé des isomorphismes suivants ; par les suites (eq3) et (eq4), $\det_{\mathbf{Q}_p}\left(\mathcal{D}(V)^{\Delta_0=0}_{\Gamma_n}\right)_{\eta_0} \otimes \det^{-1}_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ est isomorphe à :

$$
\left(\det_{\mathbf{Q}_p}\left(\frac{\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}{(1-\varphi)\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}\right) \otimes \det_{\mathbf{Q}_p}((1-\varphi)\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V))\right) \\
\otimes \left(\det^{-1}_{\mathbf{Q}_p}\left(\frac{\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}{\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1}}\right) \otimes \det^{-1}_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1}\right),
$$

qui est isomorphe à :

$$
\left(\det_{\mathbf{Q}_p}((1-\varphi)\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)) \otimes \det^{-1}_{\mathbf{Q}_p}\left(\frac{\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}{\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1}}\right)\right) \\
\otimes \left(\det^{-1}_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1} \otimes \det_{\mathbf{Q}_p}\left(\frac{\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}{(1-\varphi)\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}\right)\right),
$$

qui, par les suites (eq5) et (eq6), est lui-même isomorphe à :

$$\left(\det_{\mathbf{Q}_p}\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=p^{-1}}\otimes\det^{-1}_{\mathbf{Q}_p}\left(\frac{\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}{(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}\right)\right)\otimes\left(\det^{-1}_{\mathbf{Q}_p}\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1}\otimes\det_{\mathbf{Q}_p}\left(\frac{\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}{(1-\varphi)\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}\right)\right),$$

qui est $\simeq \mathbf{Q}_p$.

On a $(\mathcal{D}(V)^{\Delta_0=0})_{\eta_0}\simeq(1-\varphi)\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)\oplus D'$, où $D'=\mathbf{Q}_p\otimes_{\mathbf{Z}_p}N'$ et la deuxième ligne du gros diagramme ci-dessus s'écrit donc :

$$\text{(eq8)}\quad 0\to\frac{\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}{(1-\varphi)\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}\xrightarrow{d\mapsto(0,p^{n-1}d)}(1-\varphi)\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)\oplus D'\xrightarrow{(a,b)\mapsto a}(1-\varphi)\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)\to 0.$$

Posons à présent $\widetilde{n}=\wedge_i n_i\in\det_{\mathbf{Q}_p}(1-\varphi)\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ et $\widetilde{n}'=\wedge_j n'_j\in\det_{\mathbf{Q}_p}D'$. Fixons $\widetilde{m}_1\in\det_{\mathbf{Q}_p}M^{\varphi=1}$ et $\widetilde{m}_2\in\det_{\mathbf{Q}_p}\mathcal{D}_M(V)^{\Delta_0=0}_{\Gamma_n}(M/M^{\varphi=1})$, vérifiant $\widetilde{m}_1\otimes\widetilde{m}_2\simeq\widetilde{n}\otimes\widetilde{n}'$, et posons $\widetilde{b}_i=\widetilde{m}_i\otimes x_n$. En utilisant le diagramme tautologique :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & 0 & & \\
0\to\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=p^{-1}} \arrow[r] & (1-\varphi)\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \arrow[u] \arrow[r,"(5)"] & & \frac{\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}{\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1}} \arrow[u] \arrow[r] & \frac{\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}{(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}\to 0 & \\
0\to\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=p^{-1}} \arrow[u,"p^{-n}"] \arrow[r] & \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \arrow[u,"{[K_n:K](1-\varphi)}"] \arrow[r,"1-p^{-1}\varphi^{-1}"] & & \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \arrow[u,"\mathrm{pr}"] \arrow[r] & \frac{\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}{(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}\to 0 \arrow[u,"p^{-n}"] & \\
 & \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1} \arrow[u] \arrow[rr,"1-\frac{1}{p}"] & & \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1} \arrow[u] & & \\
 & 0 \arrow[u] & & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

on montre que l'image de $e_{\eta_0}(\widetilde{\alpha})\otimes e^{-1}_{\eta_0}(\widetilde{b}_2)$ par l'application :

$$\det_{\mathbf{Q}_p}(1-\varphi)\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)\otimes\det^{-1}_{\mathbf{Q}_p}\left(\frac{\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}{\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1}}\right)\simeq \det_{\mathbf{Q}_p}\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=p^{-1}}\otimes\det^{-1}_{\mathbf{Q}_p}\frac{\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}{(1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}\simeq \det^{-1}_{\mathbf{Q}_p}\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)\otimes\det_{\mathbf{Q}_p}\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)\overset{\mathrm{id}}{\simeq}\mathbf{Q}_p$$

est égale à :

$$(-1)^{\dim_{\mathbf{Q}_p}\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\dim_{\mathbf{Q}_p}\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1}}p^{(1-n)\dim_{\mathbf{Q}_p}(\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)/\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1})}[(1-\varphi)\widetilde{m}_2:\widetilde{n}].$$

D'autre part, en utilisant (eq8), on montre que l'application composée :

$$\det\nolimits^{-1}_{\mathbf{Q}_p}\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1}\otimes\det\nolimits_{\mathbf{Q}_p}D'\simeq\det\nolimits^{-1}_{\mathbf{Q}_p}\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1}\otimes\det\nolimits_{\mathbf{Q}_p}\left(\frac{\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}{(1-\varphi)\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}\right)$$
$$\simeq\det\nolimits^{-1}_{\mathbf{Q}_p}\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)\otimes\det\nolimits_{\mathbf{Q}_p}\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)\overset{\mathrm{id}}{\simeq}\mathbf{Q}_p$$

envoie $e_{\eta_0}^{-1}(\widetilde{b}_1)\otimes e_{\eta_0}(\widetilde{\alpha}')$ sur :

$$\left(\frac{1-p}{p^{n-1}}\right)^{\dim_{\mathbf{Q}_p}\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1}}[(1-\varphi)\widetilde{m}_2:\widetilde{n}]^{-1}.$$

On en conclut finalement que l'application $\kappa_{V,n}$ envoie $e_{\eta_0}(\widetilde{a})\otimes e_{\eta_0}(\widetilde{b})^{-1}$ sur :

$$(-1)^{\dim_{\mathbf{Q}_p}\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}p^{(1-n)\dim_{\mathbf{Q}_p}\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)+\dim_{\mathbf{Q}_p}\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1}}e_{\eta_0},$$

ce qui termine enfin la démonstration. □

Proposition 4.2.7. — *L'image de* $\det_{\mathbf{Z}_p[G_n]}\mathcal{D}_M(V)_{\Gamma_n}\otimes\det^{-1}_{\mathbf{Z}_p[G_n]}M_n$ *dans* $\mathbf{Q}_p[G_n]$ *est engendrée par :*

$$p^{-nd}\sum_{\eta\neq\eta_0}\det(\varphi\mid\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V))^{-a(\eta)}e_\eta+(-1)^d p^{(1-n)d+n\dim_{\mathbf{Q}_p}\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1}}e_{\eta_0}.$$

Démonstration. — Il suffit de calculer l'image de :

$$\det\nolimits_{\mathbf{Z}_p[G_n]}\mathcal{D}_M(V)^{\Delta_0=0}_{\Gamma_n}\otimes\det\nolimits^{-1}_{\mathbf{Z}_p[G_n]}\mathcal{D}_M(V)_{\Gamma_n}$$

dans $\mathbf{Q}_p[G_n]$ et d'utiliser la proposition 4.2.6.

Si $\eta\in X(\Gamma_1)$ est un caractère non-trivial, alors on a $(\mathcal{D}(V)^{\Delta_0=0}_{\Gamma_n})_\eta\simeq(\mathcal{D}_M(V)^{\Delta_0=0}_{\Gamma_n})_\eta$ et la formule (eq7) montre que l'image de $\det_{\mathcal{O}_\eta}(\mathcal{D}_M(V)^{\Delta_0=0}_{\Gamma_n})_\eta\otimes\det^{-1}_{\mathcal{O}_\eta}(\mathcal{D}_M(V)_{\Gamma_n})_\eta$ est engendrée par $(\eta(\gamma_1)-1)^{\dim\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1}}e_\eta$.

Supposons maintenant que $\eta=\eta_0$. La suite exacte $0\to\Lambda_{\Gamma_1}\xrightarrow{T}\Lambda_{\Gamma_1}\to\mathbf{Z}_p\to 0$ induit une suite exacte

$$0\to\mathbf{Z}_p\xrightarrow{s}\mathbf{Z}_p[\Gamma_1/\Gamma_m]\xrightarrow{T}\mathbf{Z}_p[\Gamma_1/\Gamma_m]\to\mathbf{Z}_p\to 0,$$

où s est la multiplication par $((1+T)^{p^m}-1)/T$. On en déduit que l'application :

$$\det\nolimits_{\mathbf{Q}_p[\Gamma_1/\Gamma_m]}(\mathbf{Q}_p[\Gamma_1/\Gamma_m])\otimes\det\nolimits^{-1}_{\mathbf{Q}_p[\Gamma_1/\Gamma_m]}(\mathbf{Q}_p[\Gamma_1/\Gamma_m])\simeq$$
$$\det\nolimits_{\mathbf{Q}_p[\Gamma_1/\Gamma_m]}(\mathbf{Q}_p)\otimes\det\nolimits^{-1}_{\mathbf{Q}_p[\Gamma_1/\Gamma_m]}(\mathbf{Q}_p)\overset{\mathrm{id}}{\simeq}\mathbf{Q}_p[\Gamma_1/\Gamma_m]$$

envoie $\det_{\mathbf{Z}_p}(\mathbf{Z}_pe_{\eta_0})\otimes\det^{-1}_{\mathbf{Z}_p}(\mathbf{Z}_pe_{\eta_0})$ sur $p^{-m}\mathbf{Z}_p$. En posant $m=n-1$ on obtient que l'image de $\det_{\mathbf{Z}_p}(\mathcal{D}_M(V)^{\Delta_0=0}_{\Gamma_n})_{\eta_0}\otimes\det^{-1}_{\mathbf{Z}_p}(\mathcal{D}_M(V)_{\Gamma_n})_{\eta_0}$ est engendrée par $p^{(1-n)\dim_{\mathbf{Q}_p}\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1}}$, d'où la proposition. □

Ceci termine notre étude de $\Xi^{\varepsilon}_{V,n}$.

4.3. Équivalence de C_{Iw} et de C_{EP} : étude de $\mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V,h,n}$

Nous passons maintenant à l'étude de l'application :

$$\mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V,h,n} : (\mathcal{D}(V)^{\Delta=0})_{\Gamma_n} \to \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} (H^1_{\mathrm{Iw}}(K,T)/T^{H_K})_{\Gamma_n}$$

déduite de $\mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V,h}$.

Lemme 4.3.1. — *Si V est une représentation cristalline, alors :*

(1) *L'application naturelle de V^{G_K} dans $H^1(\Gamma_n, V^{H_K})$ est un isomorphisme ;*

(2) *L'application composée :*

$$V^{G_K} \to H^1(K,V) \xrightarrow{\exp^*_{V,K}} \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{K_n}(V)$$

coïncide avec l'injection $V^{G_K} \xrightarrow{\log^{-1}\chi(\gamma_n)} \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{K_n}(V)$;

(3) *On a $V^{G_K} \cap H^1_g(K_n,V) = \{0\}$.*

Démonstration. — Comme V est cristalline, on a un isomorphisme $V^{H_K} \simeq \oplus_{i\in\mathbf{Z}}\mathbf{Q}_p(i)^{d_i}$ (voir [**Per94**, lemme 3.4.3]). La première assertion s'en déduit.

Pour montrer la deuxième, on remarque que l'application $\cup \log\chi : \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{K_n}(V) \to H^1(K, \mathrm{Fil}^0\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V)$ est un isomorphisme et que $\exp^*_{V,K_n}$ coïncide avec l'application composée :

$$H^1(K_n,V) \to H^1(K_n, \mathrm{Fil}^0\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{K_n}(V)$$

(c'est la formule de Kato, voir [**Kat93a**, §1.2-1.4]).

Enfin, comme $\ker(\exp^*_{V,K_n}) = H^1_g(K_n,V)$, on en déduit le (3). □

Comme $V^*(1)^{G_K}$ est isomorphe à $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V^*(1))^{\varphi=1}$, on a un isomorphisme :

$$\frac{\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}{\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) + (1-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)} \simeq (V^*(1)^{G_K})^*,$$

d'où la suite exacte courte :

$$0 \to \frac{\mathcal{D}(V)^{\Delta=0}_{\Gamma_n}}{\ker(\mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V,h,n})} \xrightarrow{\tilde{\Xi}^{\varepsilon}_{V,n}} \frac{t_V(K_n)}{\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1}/V^{G_K}} \xrightarrow{(1-\varphi)\mathrm{Tr}_{K_n/K}} (V^*(1)^{G_K})^* \to 0.$$

D'autre part, pour toute représentation p-adique, on a une suite exacte :

$$0 \to \left(\frac{H^1_{\mathrm{Iw}}(K,V)}{V^{H_K}}\right)_{\Gamma_n} \to \frac{H^1(K_n,V)}{H^1(\Gamma_n,V^{H_K})} \to H^2_{\mathrm{Iw}}(K,V)^{\Gamma_n} \to 0$$

(voir proposition 2.2.2 ou bien [**Per94**, prop 3.2.1]). On a $V^{G_K} \simeq H^1(\Gamma_n, V^{H_K})$ et $H^2_{\mathrm{Iw}}(K,V)^{\Gamma_n} \simeq ((V^*(1)^{H_K})^*)^{\Gamma_n} \simeq (V^*(1)^{G_K})^*$. La flèche $H^1(K_n,V) \to H^2_{\mathrm{Iw}}(K,V)^{\Gamma_n}$ est duale de l'application d'inflation $V^*(1)^{G_K} \to H^1(K_n, V^*(1))$.

Proposition 4.3.2. — *On a un diagramme commutatif dont les flèches horizontales sont des isomorphismes :*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\dfrac{\mathcal{D}(V)_{\Gamma_n}^{\Delta=0}}{\ker(\mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V,h,n})} \arrow[r, "\mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V,h,n}"] \arrow[d, "\tilde{\Xi}^{\varepsilon}_{V,n}"] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & \mathrm{Im}(\mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V,h,n}) \arrow[d] \\
\dfrac{t_V(K_n)}{(\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1}/V^{G_K})} \arrow[r, "(h-1)!\exp_{V,K_n}"] \arrow[d, "\mathrm{Tr}_{K_n/K}"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & \dfrac{H^1_e(K_n,V)+V^{G_K}}{V^{G_K}} \arrow[d] \\
(V^*(1)^{G_K})^* \arrow[r, "(h-1)!\log^{-1}\chi(\gamma_n)"] \arrow[d] & H^2_{\mathrm{Iw}}(K,V)^{\Gamma_n} \arrow[d] \\
0 & 0
\end{tikzcd}$$

Démonstration. — Il résulte du théorème 3.1.1 que le carré (1) du diagramme est commutatif. D'après le lemme 4.3.1, le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
V^*(1)^{G_K} \times \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{K_n}(V) \arrow[r, "(\inf_{K_n/K},\exp_{V,K_n})"] \arrow[d, "(\log^{-1}\chi(\gamma_n),\mathrm{id})"] & H^1(K_n,V^*(1)) \times H^1(K_n,V) \arrow[d] \\
\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{K_n}(V^*(1)) \times \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{K_n}(V) \arrow[r, "\mathrm{Tr}_{K_n/\mathbf{Q}_p}[\cdot,\cdot]"] & \mathbf{Q}_p
\end{tikzcd}$$

est commutatif, ce qui fait que l'application composée :

$$\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{K_n}(V) \stackrel{\exp_{V,K_n}}{\longrightarrow} H^1(K_n,V) \to (V^*(1)^{G_K})^*$$

coïncide avec l'application :

$$\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{K_n}(V) \stackrel{\log^{-1}\chi(\gamma_n)\mathrm{Tr}_{K_n/K}}{\longrightarrow} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \to (V^*(1)^{G_K})^*.$$

On en déduit que le carré (2) du diagramme commute. Il est clair que toutes les flèches horizontales sont des isomorphismes. Comme la colonne de gauche est exacte, la colonne de droite l'est aussi. □

Corollaire 4.3.3. — *On a un isomorphisme canonique :*

$$\mathrm{coker}(\mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V,h,n}) \simeq \frac{H^1(K_n,V)}{H^1_e(K_n,V)+V^{G_K}}.$$

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le lemme du serpent au diagramme :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Im}(\mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V,h,n}) \arrow[r] \arrow[d] & \frac{H^1_e(K_n,V)+V^{G_K}}{V^{G_K}} \arrow[r] \arrow[d] & H^2_{\mathrm{Iw}}(K,V)^{\Gamma_n} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \frac{H^1_{\mathrm{Iw}}(K,V)_{\Gamma_n}}{V^{G_K}} \arrow[r] & \frac{H^1(K_n,V)}{V^{G_K}} \arrow[r] & H^2_{\mathrm{Iw}}(K,V)^{\Gamma_n} \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

□

On note $B^{\varepsilon}_{V,h,n} : \ker(\mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V,h,n}) \to \mathrm{coker}(\mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V,h,n})$ l'application déduite de $\mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V,h,n}$.

Proposition 4.3.4. — *On a un diagramme commutatif dont les flèches horizontales sont des isomorphismes :*

$$\begin{tikzcd} \ker \widetilde{\Xi}^{\varepsilon}_{V,n} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & \frac{H^1_g(K_n,V)}{H^1_e(K_n,V)} \arrow[d] \\ \ker(\mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V,h,n}) \arrow[r, "B^{\varepsilon}_{V,h,n}"] \arrow[d, "\widetilde{\Xi}^{\varepsilon}_{V,n}"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & \mathrm{coker}(\mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V,h,n}) \arrow[d, "\exp^*_{K_n,V}"] \\ \frac{\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}^{K_n}_{\mathrm{dR}}(V)}{V^{G_K}} \arrow[r, "(h-1)!\log^{-1}\chi(\gamma_n)"] & \frac{\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}^{K_n}_{\mathrm{dR}}(V)}{V^{G_K}} \end{tikzcd}$$

Démonstration. — La commutativité du deuxième carré est démontrée dans [**Per94**, lemme 3.5.9] en utilisant la loi de réciprocité explicite. Le reste est une conséquence immédiate de la proposition suivante. □

Proposition 4.3.5. — *Le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} \frac{\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}{(1-\varphi)\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)} \arrow[r, "e_{V,f/e,n}"] \arrow[d] & \frac{H^1_f(K_n,V)}{H^1_e(K_n,V)} \arrow[d] \\ \ker(\widetilde{\Xi}^{\varepsilon}_{V,n}) \arrow[r, "B^{\varepsilon}_{V,h,n}"] \arrow[d] & \frac{H^1_g(K_n,V)}{H^1_e(K_n,V)} \arrow[d] \\ \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=p^{-1}} \arrow[r, "e_{V,g/f,n}"] & \frac{H^1_g(K_n,V)}{H^1_f(K_n,V)}, \end{tikzcd}$$

où

$$e_{V,f/e,n}(a) = (h-1)!p^{-n}\exp_{V,f/e}(a),$$
$$e_{V,g/f,n}(b) = (h-1)!\log^{-1}\chi(\gamma_n)(\exp^*_{V,g/f})^{-1}(b),$$

est commutatif.

Démonstration. — Si $a \in \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)/(1-\varphi)\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, on choisit un élément $f(X) \in \mathcal{D}(V)$ vérifiant $\Delta f(X) = a$ et l'on pose $g(X) = (\gamma_n - 1)f(X)$ ce qui fait que $g(X)$ est l'image de a dans $\ker(\widetilde{\Xi}^{\varepsilon}_{V,n}) \subset \mathcal{D}(V)^{\Delta=0}_{\Gamma_n}$. Soit $F(X) \in \mathcal{H}(V)$ un élément vérifiant l'équation $(1-\varphi)F(X) = f(X) - a$. Si on pose $\alpha(X) = (\partial^h \otimes e_h)f(X)$ et $A(X) = (\partial^h \otimes e_h)F(X)$, alors $A(X)$ vérifie $(1-\varphi)A(X) = \alpha(X)$.

Soit h un entier tel que $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(-h)) = \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(-h))$ et :

$$\Sigma^{\varepsilon}_{V(-h),h+k,,m} : \mathcal{H}(V(-h)) \to H^1(K_m, V(k))$$

le système d'applications construit dans [**Ben00**, §4.2-4.3] et dont la construction a été rappelée au paragraphe 3.2. Posons :

$$z_{k,m} = (-1)^h \Sigma^{\varepsilon}_{V(-h),h+k,m}((\sigma \otimes \varphi)^{-m}A(X)),$$

et notons $\overline{z}_{k,m}$ son image dans $H^1(K_m, V(k))/H^1(\Gamma_m, V(k)^{H_K})$. Le théorème 4.3 de [**Ben00**] montre que $\mathrm{cor}_{K_{n+1}/K_n}(\overline{z}_{k,n+1}) = \overline{z}_{k,n}$ pour tout $n \geqslant 1$ et qu'il existe $s \geqslant 0$ tel que la suite :

$$p^{(s-j)m} \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} \mathrm{Tw}^{\varepsilon}_{-k} \circ \mathrm{res}_{K_\infty/K_n}(z_{m,k})$$

converge vers 0 quand $m \to \infty$. On vérifie que $\overline{z}_{k,m} \in (H^1_{\mathrm{Iw}}(K, V(k))/V(k)^{H_K})_{\Gamma_m}$ (par exemple, on peut utiliser les arguments de [**Ben00**], pour montrer que le cup-produit de $\overline{z}_{k,m}$ avec les éléments de $V^*(1-k)^{G_K}$ est nul) et il existe donc un unique élément $z \in \mathcal{H}(\Gamma) \otimes_\Lambda (H^1_{\mathrm{Iw}}(K, V(k))/V(k)^{H_K})$ tel que $\mathrm{pr}_{V(k),m}(\mathrm{Tw}^{\varepsilon}_k(z)) = \overline{z}_{k,m}$ pour tous $k \in \mathbf{Z}$ et $m \geqslant 1$.

L'élément $B(X) = (\gamma_n - 1)A(X)$ vérifie $(1-\varphi)B(X) = (\partial^h \otimes e_h)g(X)$ et on a :

$$\mathrm{pr}_{V(k),m}(\mathrm{Tw}^{\varepsilon}_{V,k} \circ \mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V,h}(g)) = (-1)^h \Sigma^{\varepsilon}_{V(-h),h+k,m}((\sigma \otimes \varphi)^{-m}B(X)),$$

et donc $(\gamma_n - 1)z = \mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V,h}(g)$ et $B^{\varepsilon}_{V,h,n}(a) = z_{0,n} \mod H^1_e(K_n, V)$. D'autre part, le même argument que dans [**Ben00**, §4.4.5] montre que :

$$z_{0,n} = (h-1)!p^{-n} \exp_{V,K_n}(-\varphi^{-n}(a), (\sigma \otimes \varphi)^{-n}F(\zeta_{p^n} - 1)),$$

et on en déduit la commutativite du premier carré du diagramme.

Démontrons la commutativité du deuxième carré. Fixons un entier $k \geqslant 1$ supérieur à la longueur de la filtration de Hodge de $V^*(1)$ et tel que $\mathrm{Fil}^{-k}\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V^*(1)) = \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V^*(1))$. La loi de réciprocité s'écrit :

$$\langle \mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V,h}(f), \mathrm{Exp}^{\varepsilon^{-1}}_{V^*(1),k}(g^\iota) \rangle (1+X) = -\prod_{i=0}^{h-1} \ell_i \prod_{j=0}^{k-1} \ell_i^\iota (f \star_{\mathcal{D}} g).$$

Si $f \in \ker(\widetilde{\Xi}^{\varepsilon}_{V,n})$, alors $\mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V,h}(f) = (\gamma_n - 1)x$ où $x \in \mathcal{H}(\Gamma) \otimes H^1_{\mathrm{Iw}}(K,V)$ et $B^{\varepsilon}_{V,h,n}(f) = \mathrm{pr}_{V,n}(x) \mod H^1_e(K_n,V)$. Soient $b \in \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V^*(1))/(1-\varphi)\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V^*(1))$ et $\beta(X) \in \mathcal{D}(V^*(1))$ un élément vérifiant $\Delta\beta(X) = b$. Posons $g(X) = (\gamma_n - 1)\beta(X)$. On a alors :

$$\mathrm{Exp}^{\varepsilon^{-1}}_{V^*(1),k}(g) = (\gamma_n - 1)y,$$
$$\langle \mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V,h}(f), \mathrm{Exp}^{\varepsilon^{-1}}_{V^*(1),k}(g^\iota)\rangle = (\gamma_n - 1)^2\langle x, y^\iota\rangle.$$

On a $\mathrm{pr}_{V^*(1),n}(y) \in H^1_f(K_n, V^*(1))$ et $B^{\varepsilon}_{V^*(1),h,n}(b) = \mathrm{pr}_{V^*(1),n}(y) \mod H^1_e(K_n,V^*(1))$. Il est facile de voir que g^ι vérifie aussi $\Delta(g^\iota) = b$ et que $B^{\varepsilon}_{V,h,n}(b)$ ne dépend pas du choix de ε d'où :

$$B^{\varepsilon}_{V^*(1),h,n}(b) = \mathrm{pr}_{V^*(1),n}(y^\iota) \mod H^1_e(K_n, V^*(1)).$$

Comme $\ell_0 \equiv -\frac{\gamma_n - 1}{\log\chi(\gamma_n)} \mod (\gamma_n - 1)^2$ et comme le coefficient de $(1+X)$ dans le polynôme d'interpolation de $f \star_{\mathcal{D}} \beta$ modulo $(1+X)^{p^n} - 1$ est égal à :

$$\frac{1}{p^n}\mathrm{Tr}_{K/\mathbf{Q}_p}\sum_{\zeta\in\mu_{p^n}}[f(\zeta-1), \beta^\iota(\zeta^{-1}-1)]_V$$

(voir, par exemple, [**Per94**, prop 4.3.2]), on déduit de la loi de réciprocité la formule suivante :

$$(B^{\varepsilon}_{V,h,n}(f), B^{\varepsilon}_{V^*(1),h,n}(b))_{V,K_n} = \frac{(h-1)!(k-1)!}{p^n\log\chi(\gamma_n)}\mathrm{Tr}_{K/\mathbf{Q}_p}\sum_{\zeta\in\mu_{p^n}}[f(\zeta-1), \beta^\iota(\zeta^{-1}-1)]_V.$$

Soit $F(X)$ un élément tel que $(1-\varphi)F(X) = f(X)$. Comme $\widetilde{\Xi}^{\varepsilon}_{V,n}(f) = 0$, on a $F(\zeta_{p^n} - 1) \in \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1}$. On peut modifier $F(X)$ par cet élément et on a alors $F(\zeta_{p^n} - 1) = 0$. Comme $F(X)$ vérifie l'équation $\sum_{\zeta^p=1} F(\zeta(1+X)-1) = pF^{\varphi}(X)$, on a $F(\zeta_{p^m} - 1) = 0$ pour tout $1 \leqslant m \leqslant n$. On en déduit que $f(\zeta_{p^m}-1) = 0$ si $2 \leqslant m \leqslant n$ et $f(\zeta_p - 1) = -F^{\sigma}(0)$ ce qui fait que :

$$\sum_{\zeta\in\mu_{p^n}}[f(\zeta-1), \beta^\iota(\zeta^{-1}-1)]_V = \sum_{\substack{\zeta^p=1\\ \zeta\neq 1}}[-F^{\sigma}(0), \beta^\iota(\zeta^{-1}-1)]_V + [f(0), b]_V = [f(0), b]_V,$$

d'où :

$$(B^{\varepsilon}_{V,h,n}(f), B^{\varepsilon}_{V^*(1),h,n}(b))_{V,K_n} = \frac{(h-1)!(k-1)!}{p^{2n}\log\chi(\gamma_n)}\mathrm{Tr}_{K/\mathbf{Q}_p}[\varphi^{-n}f(0), \varphi^{-n}(b)]_V.$$

Comme $B^{\varepsilon}_{V^*(1),h,n}(b) = e_{V^*(1),f/e,n}(b)$, la commutativité du deuxième carré résulte de la définition de l'application $\exp^*_{V,g/f}$. □

Démonstration du théorème 4.2.1. — Soit h un entier supérieur à la longueur de la filtration de Hodge de V. L'application $\mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V,h}$ est semi-simple et les résultats précédents fournissent un diagramme commutatif :

$$\text{(eq9)}\qquad \begin{tikzcd} \det_{\Lambda_{\mathbf{Q}_p}} \mathcal{D}(V) \otimes \det_{\Lambda_{\mathbf{Q}_p}} \mathbf{R}\Gamma_{\mathrm{Iw}}(K,V) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H}(\Gamma) \arrow[d] \\ \det_{\mathbf{Q}_p[G_n]} \mathcal{D}(V)_{\Gamma_n} \otimes \det_{\mathbf{Q}_p[G_n]} \mathbf{R}\Gamma(K_n,V) \arrow[r] \arrow[d, "\kappa_{V,n}"] & \mathbf{Q}_p[G_n] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ \det_{\mathbf{Q}_p[G_n]} \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}^{K_n}(V) \otimes \det_{\mathbf{Q}_p[G_n]} \mathbf{R}\Gamma(K_n,V) \arrow[r] & \mathbf{Q}_p[G_n]. \end{tikzcd}$$

La deuxième ligne du diagramme est induite par l'application $\mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V,h,n}$. Le théorème 4.1.2 entraîne que l'image de $\det_\Lambda \mathcal{D}_M(V) \otimes \det_\Lambda \mathbf{R}\Gamma_{\mathrm{Iw}}(K,T)$ dans $\mathcal{H}(\Gamma)$ s'écrit sous la forme $\mathbf{\Gamma}_h(V)\sum_{i=0}^{p-2} a_i\Lambda_i$, où $a_i \in \mathbf{Q}_p$ et $\Lambda_i = \Lambda_{\Gamma_1}\delta_i$.

Les propositions précédentes et le lemme 4.3.1 montrent que la troisième ligne coïncide avec l'application :

$$\mathbf{\Gamma}^*_h(V)\Gamma^*(V)(\mathrm{id} + (p^{-n\dim \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1}} - 1)e_{\eta_0})\delta'_{V,K_n/K}.$$

La conjecture $C_{\mathrm{Iw}}(K_\infty/K,V)$ est vraie si et seulement si $a_i \in \mathbf{Z}_p^\times$ c'est-à-dire si et seulement si l'image de $\det_{\mathbf{Z}_p[G_n]} \mathcal{D}_M(V)_{\Gamma_n} \otimes \det_{\mathbf{Z}_p[G_n]} \mathbf{R}\Gamma(K_n,T)$ dans $\mathbf{Q}_p[G_n]$ est engendrée par $\mathbf{\Gamma}^*_h(V)$ (voir lemme 4.2.4). Les propositions 2.4.5 et 4.2.7 entraînent que cela équivaut à dire que l'application $\delta'_{V,K_n/K}$ envoie $\det_{\mathbf{Z}_p[G_n]} M_n \otimes \det_{\mathbf{Z}_p[G_n]} \mathbf{R}\Gamma(K_n,T)$ sur $\beta_{V,K_n/K}(M,T)^{-1}$ d'où le théorème. □

4.4. Résultats principaux

Dans ce paragraphe, on démontre la conjecture $C_{\mathrm{Iw}}(K_\infty/K,V)$.

Théorème 4.4.1. — *Si V est une représentation cristalline dont les opposés des poids de Hodge-Tate sont $0 = r_1 \leqslant r_2 \leqslant \cdots \leqslant r_d = h$, et qui n'a pas de sous-quotient isomorphe à $\mathbf{Q}_p(m)$, alors :*

(1) *l'application φ^{-1} induit un isomorphisme :*

$$i_V : \frac{\mathbf{D}(V)^{\psi=1}}{(\varphi^*\mathbf{N}(V))^{\psi=1}} \xrightarrow{\sim} \oplus_{k=1}^h (K_1 t^{-k} \otimes_K \mathrm{Fil}^k \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)).$$

(2) *On a :*

$$\det_\Lambda\left(\frac{\mathbf{D}(T)^{\psi=1}}{(\varphi^*\mathbf{N}(T))^{\psi=1}}\right) = \prod_{k=1}^h (\det_\Lambda(\mathbf{Z}_p[\Delta] \otimes \mathbf{Z}_p(-k)))^{\dim_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{Fil}^k \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}.$$

Nous montrons ce théorème un peu plus bas. Si $f, g \in \Lambda_{\Gamma_1}$, on écrit $f \sim g$ si f et g sont associées, c'est-à-dire s'il existe $u \in \Lambda_{\Gamma_1}^{\times}$ tel que $f = gu$. De même, si $a, b \in \mathbf{Z}$ on écrit $a \sim_p b$ si a et b sont associés dans $\mathbf{Z}_p$. Si M est un Λ-module de torsion et de type fini, on note $\operatorname{car}_\Lambda(M)$ son polynôme caractéristique. Rappelons que $\det_\Lambda(M) = \operatorname{car}_\Lambda(M)^{-1}\Lambda$.

Proposition 4.4.2. — *Si V est une représentation cristalline vérifiant les conditions du théorème 4.4.1 ci-dessus, alors :*

(1) *l'application φ^{-1} induit une injection :*

$$i_V : \frac{\mathbf{D}(V)^{\psi=1}}{(\varphi^*\mathbf{N}(V))^{\psi=1}} \hookrightarrow \oplus_{k=1}^{h}(K_1 t^{-k} \otimes_K \operatorname{Fil}^k \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)).$$

(2) *On a :*

$$\operatorname{car}_\Lambda\left(\frac{\mathbf{D}(T)^{\psi=1}}{(\varphi^*\mathbf{N}(T))^{\psi=1}}\right) \Bigg| \prod_{k=1}^{h}(\operatorname{car}_\Lambda(\mathbf{Z}_p[\Delta] \otimes \mathbf{Z}_p(-k)))^{\dim_{\mathbf{Q}_p} \operatorname{Fil}^k \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}.$$

Démonstration. — La proposition 1.2.2 nous dit que :

$$[\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}^+_K} \mathbf{N}(V) : \mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},K} \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) = [(t/X)^{r_1}; \dots ; (t/X)^{r_d}],$$

et on en déduit que :

$$\mathbf{N}(V) \subset \left(\frac{X}{t}\right)^h \mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},K} \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V),$$

et que le plongement de $\mathbf{B}^+_{\mathrm{rig},K}$ dans $K[[t]]$ donne un isomorphisme $K[[t]] \otimes_{\mathbf{B}^+_K} \mathbf{N}(V) \simeq K[[t]] \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$. Comme $q^h\mathbf{N}(T) \subset \varphi^*(\mathbf{N}(T))$, on a $X^{-h}\mathbf{N}(T) \subset \varphi(X)^{-h}\varphi^*(\mathbf{N}(T))$ d'où :

$$\mathbf{D}(T)^{\psi=1} = \left(\frac{1}{X^h}\mathbf{N}(T)\right)^{\psi=1} = \left(\frac{1}{\varphi(X)^h}\varphi^*(\mathbf{N}(T))\right)^{\psi=1}.$$

Comme $\varphi^{-1}(1/X) \in \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$, l'application φ^{-1} induit une injection :

$$\varphi^{-1} : \mathbf{D}(T)^{\psi=1} \to \operatorname{Fil}^0(K_1((t)) \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)).$$

Pour alléger les notations, on pose :

$$D = \operatorname{Fil}^0(K_1((t)) \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)) = \oplus_{m=-\infty}^{h} K_1 t^{-m} \otimes_K \operatorname{Fil}^m \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V),$$

et on définit une filtration croissante de D par des sous-espaces D_k :

$$D_k = \oplus_{m=-\infty}^{k} K_1 t^{-m} \otimes_K \operatorname{Fil}^m \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V).$$

On a $D_h = D$ et $D_k/D_{k-1} \simeq \operatorname{Fil}^k K_1 t^{-k} \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$. On définit aussi une filtration sur $(X^{-h}\mathbf{N}(V))^{\psi=1}$ par des sous-espaces $\mathbf{N}_k(V)$ en posant :

$$\mathbf{N}_k(V) = \left(\frac{1}{\varphi(X)^k}\varphi^*(\mathbf{N}(V))\right)^{\psi=1},$$

et φ^{-1} induit alors une injection $\mathbf{N}_k(V) \hookrightarrow D_k$. Pour montrer que l'application $\mathbf{N}_h(V)/\mathbf{N}_0(V) \rightarrow D_h/D_0$ est injective, il suffit de montrer que les applications $i_{V,k} : \mathbf{N}_k(V)/\mathbf{N}_{k-1}(V) \rightarrow K_1t^k \otimes_K \mathrm{Fil}^k\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ sont injectives pour $k = 1, \ldots, h$. Pour cela, soit $n_1, \ldots, n_d$ une base de $\mathbf{N}(V)$ et soit :

$$x = \frac{1}{\varphi(X)^k}(a_1\varphi(n_1) + \cdots + a_d\varphi(n_d))$$

un élément de $\ker i_{V,k}$. On a alors :

$$\frac{\varphi^{-1}(a_1)n_1 + \cdots + \varphi^{-1}(a_d)n_d}{X^k} \in t^{-k+1}K_1[[t]] \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V),$$

et comme $n_1, \ldots, n_d$ forment une base de $K[[t]] \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, on a $a_i \equiv 0 \mod q$. Si l'on écrit $a_i = qb_i$ avec $b_i = \sum_{j=0}^{\infty} b_{ij}X^j$, alors la condition $\psi(x) = x$ s'écrit :

$$\left(\frac{b_1}{X}\right)\varphi(n_1) + \cdots + \left(\frac{b_d}{X}\right)\varphi(n_d) = q^{k-1}\left(\psi\left(\frac{b_1}{X}\right)n_1 + \cdots + \psi\left(\frac{b_d}{X}\right)n_d\right).$$

On en déduit que $y = \sum_{i=1}^{d} \varphi^{-1}(b_{i0})n_i$ appartient à $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=p^{k-1}}$. Mais il appartient aussi à $\mathrm{Fil}^{k-1}\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ par construction de $i_{V,k}$, donc à $V(k-1)^{G_K}(1-k) = 0$. Ceci montre que $i_{V,k}$ est injective et la deuxième assertion s'en déduit. □

Démonstration du théorème 4.4.1. — Nous démontrons d'abord le (2). Posons :

$$\sum_{i=0}^{p-2} \delta_i \otimes f_{T,i}(\gamma_1 - 1) = \mathrm{car}_\Lambda\left(\frac{\mathbf{D}(T)^{\psi=1}}{(\varphi^*\mathbf{N}(T))^{\psi=1}}\right),$$

$$\sum_{i=0}^{p-2} \delta_i \otimes g_{T,i}(\gamma_1 - 1) = \prod_{m=1}^{h} \mathrm{car}_\Lambda\left(\mathbf{Z}_p[\Delta_K] \otimes \mathbf{Z}_p(-m)\right)^{\dim_{\mathbf{Q}_p}\mathrm{Fil}^m\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)},$$

où $\delta_i = \sum_{g\in\Delta_K} \chi^{-i}(g)g$. Posons aussi $f_T(\gamma_1 - 1) = \prod_{i=0}^{p-2} f_{T,i}(\gamma_1 - 1)$ et $g_T(\gamma_1 - 1) = \prod_{i=0}^{p-2} g_{T,i}(\gamma_1 - 1)$. On voit que pour $i = 0, \ldots, p-2$, on a :

$$g_{T,i}(\gamma_1 - 1) = \prod_{m=1}^{h} (\gamma_1 - \chi(\gamma_1)^{-m})^{\dim_{\mathbf{Q}_p}\mathrm{Fil}^m\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)},$$

d'où l'on déduit que :

$$g_{T,i}(\chi(\gamma_1)^{-k} - 1) \sim_p p^{[K:\mathbf{Q}_p]t_H(V)} \prod_{m=1}^{h} (k-m)^{\dim_{\mathbf{Q}_p}\mathrm{Fil}^m\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}.$$

Comme $t_H(V) + t_H(V^*(-h)) = h\dim_{\mathbf{Q}_p} V$ et comme :

$$\dim_{\mathbf{Q}_p}\mathrm{Fil}^m\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) + \dim_{\mathbf{Q}_p}\mathrm{Fil}^{1-m}\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V^*) = [K:\mathbf{Q}_p]\dim_{\mathbf{Q}_p} V,$$

on voit que :

$$\text{(eq12)} \qquad g_T(\chi(\gamma_1)^{-k} - 1)g_{T^*(-h)}(\chi(\gamma_1)^{k-h-1} - 1) \sim_p \left(p^h\frac{\Gamma^*(k)}{\Gamma^*(k-h)}\right)^{[K_1:\mathbf{Q}_p]\dim(V)}.$$

D'autre part, comme :

$$\left(\frac{\mathbf{D}(T(k))^{\psi=1}}{(\varphi^*\mathbf{N}(T)(k))^{\psi=1}}\right)^{\Gamma_1} = 0,$$

si $k \notin [1,h]$, on a :

$$f_T(\chi(\gamma_1)^{-k}-1) = [\mathbf{D}(T(k))^{\psi=1}_{\Gamma_1} : (\varphi^*\mathbf{N}(T)(k))^{\psi=1}_{\Gamma_1}],$$

et le corollaire 3.2.8 donne :

$$\text{(eq13)} \qquad f_T(\chi(\gamma_1)^{-k}-1) f_{T^*(-h)}(\chi(\gamma_1)^{k-h-1}-1) \sim_p \left(p^h \frac{\Gamma^*(k)}{\Gamma^*(k-h)}\right)^{[K_1:\mathbf{Q}_p]\dim(V)}.$$

Comme la divisibilité $f_{T,i}(\gamma_1 - 1) \mid g_{T,i}(\gamma_1 - 1)$ est démontrée dans la proposition 4.4.2, les formules (eq12) et (eq13) entraînent :

$$f_T(\chi(\gamma_1)^{-k}-1) \sim_p g_T(\chi(\gamma_1)^{-k}-1)$$

pour tout $k \notin [1,h]$ et donc $f_T(\gamma_1 - 1) \sim g_T(\gamma_1 - 1)$ et l'assertion (2) est démontrée.

Montrons maintenant le (1). Si on appelle Y le conoyau de l'injection :

$$\frac{\mathbf{D}(V)^{\psi=1}}{(\varphi^*\mathbf{N}(V))^{\psi=1}} \hookrightarrow \oplus_{k=1}^h (K_1 t^{-k} \otimes_K \mathrm{Fil}^k \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)),$$

alors $\det_{\Lambda_{\mathbf{Q}_p}}(Y) = \Lambda_{\mathbf{Q}_p}$ par le (2), d'où $Y = 0$ car $\Lambda_{\mathbf{Q}_p}$ est un anneau principal, ce qui montre le (1). □

Corollaire 4.4.3. — *Si $k \notin [1,h]$, alors le conoyau de l'application :*

$$\Omega^{\varepsilon}_{T,k,1} : \mathcal{D}(T(k))_{\Gamma_1} \to H^1_{\mathrm{Iw}}(K_1, T(k))_{\Gamma_1}$$

est isomorphe à :

$$\oplus_{m=1}^h ((\mathbf{Z}/(k-m)p\mathbf{Z})[\Delta_K])^{\dim_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{Fil}^m \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}.$$

En particulier,

$$\det_{\mathbf{Z}_p[\Delta_K]}(\Omega^{\varepsilon}_{T,k,1}) = p^{[K:\mathbf{Q}_p] t_H(V)} \prod_{m=1}^h (k-m)^{\dim_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{Fil}^m \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)} \mathbf{Z}_p[\Delta_K].$$

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat principal de cet article.

Théorème 4.4.4. — *Si V est une représentation cristalline de G_K, alors :*

(1) *la conjecture $C_{\mathrm{Iw}}(K_\infty/K, V)$ est vraie ;*

(2) *la conjecture $C_{\mathrm{EP}}(L/K, V)$ est vraie pour toute extension L/K contenue dans K_∞.*

Démonstration. — Comme la conjecture $C_{\mathrm{Iw}}(K_\infty/K,V)$ est stable par suites exactes et comme le cas $V=\mathbf{Q}_p(m)$ a été démontré dans [**Per94**, page 143], on peut supposer que V n'a pas de sous-quotient fixé par H_K. Sous ces hypothèses, $H^1_{\mathrm{Iw}}(K,T(k))^{\Gamma_1}=0$, le groupe $H^2_{\mathrm{Iw}}(K,T(k))$ est fini et pour $n=1$ le diagramme (eq9) du paragraphe 4.3 s'écrit :

$$\begin{CD} \det_{\Lambda_{\mathbf{Q}_p}}\mathcal{D}(V(k))\otimes\det^{-1}_{\Lambda_{\mathbf{Q}_p}}H^1_{\mathrm{Iw}}(K,V(k)) @>>> \mathcal{H}(\Gamma)\\ @VVV @VVV\\ \det_{\mathbf{Q}_p[\Delta_K]}\mathcal{D}(V(k))_{\Gamma_1}\otimes\det^{-1}_{\mathbf{Q}_p[\Delta_K]}H^1_{\mathrm{Iw}}(K,V(k))_{\Gamma_1} @>>> \mathbf{Q}_p[\Delta_K]. \end{CD} \tag{eq14}$$

La première ligne de ce diagramme est induite par l'application $\mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V(k),k}=(-1)^k\mathrm{Tw}^{\varepsilon}_{V,k}\circ\mathrm{Exp}^{\varepsilon}_{V,0}\circ(\partial^k\otimes e_k)$ et le théorème 4.1.2 (la conjecture $\delta_{\mathbf{Q}_p}(V)$ de Perrin-Riou) entraîne que l'image de $\det_\Lambda\mathcal{D}(T(k))\otimes\det_\Lambda\mathbf{R}\Gamma(K,T(k))$ dans $\mathcal{H}(\Gamma)$ s'écrit sous la forme $\prod_{j=1}^h(\ell_{k-j})^{\dim_{\mathbf{Q}_p}\mathrm{Fil}^j\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}\sum_{i=0}^{p-2}a_i\Lambda_i$, où $a_i\in\mathbf{Q}_p$ et $\Lambda_i=\Lambda_{\Gamma_1}\delta_i$. Pour conclure, il suffit de montrer que $a_i\in\mathbf{Z}_p^*$ pour $i=0,\dots,p-2$. Le (2) de la proposition 3.2.1 montre que la deuxième ligne de (eq14) est induite par $(-1)^k\Omega^{\varepsilon}_{T,k}((\sigma\otimes\varphi)^{-1}\circ(\partial^k\otimes e_k))$ et on en déduit que l'image de $\det_{\mathbf{Z}_p[\Delta_K]}\mathcal{D}(T(k))_{\Gamma_1}\otimes\det^{-1}_{\mathbf{Z}_p[\Delta_K]}H^1_{\mathrm{Iw}}(K,T(k))_{\Gamma_1}$ dans $\mathbf{Q}_p[\Delta_K]$ est égale à $\prod_{j=1}^h(k-j)^{\dim_{\mathbf{Q}_p}\mathrm{Fil}^j\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)}\sum_{i=0}^{p-2}a_i\delta_i\mathbf{Z}_p$.

D'autre part, comme le φ-module filtré $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ est admissible, on a $[M:\varphi(M)]=p^{[K:\mathbf{Q}_p]t_H(V)}$ et en comparant avec la formule du corollaire 4.4.3, on obtient que $a_i\in\mathbf{Z}_p^*$ et la conjecture $C_{\mathrm{Iw}}(K_\infty/K,V)$ est démontrée.

Le théorème 4.1.3 et la proposition 2.5.4 montrent enfin que la conjecture $C_{\mathrm{EP}}(L/K,V)$ est vraie pour toute extension L/K contenue dans K_∞. □

Corollaire 4.4.5. — *Si V est une représentation cristalline de G_K, alors :*

(1) *la conjecture $C_{\mathrm{EP}}(L,V)$ est vraie pour toute extension L/K contenue dans $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}$.*

(2) *la conjecture $C_{\mathrm{EP}}(K,V(\eta))$ est vraie pour tout caractère de Dirichlet η de Γ.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.5.4. □

Références

[Ben00] D. Benois – *Iwasawa theory of crystalline representations.* Duke Math. J. 104 (2000), no. 2, 211–267.

[BN02] D. Benois, T. Nguyen Quang Do – *Les nombres de Tamagawa locaux et la conjecture de Bloch et Kato pour les motifs $\mathbb{Q}(m)$ sur un corps abélien.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 35 (2002), no. 5, 641–672.

[Ber02] L. Berger – *Représentations p-adiques et équations différentielles.* Invent. Math. 148 (2002), no. 2, 219–284.

[Ber03] L. Berger – *Bloch and Kato's exponential map : three explicit formulas.* Doc. Math. 2003, Extra Vol., 99–129 (electronic).

[Ber04] L. Berger – *Limites de représentations cristallines.* Compos. Math. 140 (2004), no. 6, 1473–1498.

[BK90] S. Bloch, K. Kato – *L-functions and Tamagawa numbers of motives.* The Grothendieck Festschrift, Vol. I, 333–400, Progr. Math., 86, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[BF96] D. Burns, M. Flach – *Motivic L-functions and Galois module structure.* Math. Ann. 305 (1996), no. 1, 65–102.

[BF01] D. Burns, M. Flach – *Tamagawa numbers for motives with (non-commutative) coefficients.* Doc. Math. 6 (2001), 501–570 (electronic).

[BG03] D. Burns, C. Greither – *On the equivariant Tamagawa number conjecture for Tate motives.* Invent. Math. 153 (2003), no. 2, 303–359.

[BF04] D. Burns, M. Flach – *On the equivariant Tamagawa number conjecture for Tate motives II.* Preprint (2004).

[CC99] F. Cherbonnier, P. Colmez – *Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques d'un corps local.* J. Amer. Math. Soc. 12 (1999), no. 1, 241–268.

[Col98] P. Colmez – *Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local.* Ann. of Math. (2) 148 (1998), no. 2, 485–571.

[Col99a] P. Colmez – *Représentations cristallines et représentations de hauteur finie.* J. Reine Angew. Math. 514 (1999), 119–143.

[Col99b] P. Colmez – *Fonctions L p-adiques.* Astérisque No. 266 (2000), Exp. No. 851, 3, 21–58.

[Del73] P. Deligne – *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L.* Modular functions of one variable, II (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972), pp. 501–597. Lecture Notes in Math., Vol. 349, Springer, Berlin, 1973.

[Del87] P. Deligne – *Le déterminant de la cohomologie.* Current trends in arithmetical algebraic geometry (Arcata, Calif., 1985), 93–177, Contemp. Math., 67, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[Fon91] J.-M. Fontaine – *Représentations p-adiques des corps locaux.* The Grothendieck Festschrift, Vol. II, 249–309, Progr. Math., 87, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[Fon94a] J.-M. Fontaine – *Le corps des périodes p-adiques.* Astérisque No. 223 (1994), 59–111.

[Fon94b] J.-M. Fontaine – *Représentations p-adiques semi-stables.* Astérisque No. 223 (1994), 113–184.

[FP94] J.-M. Fontaine, B. Perrin-Riou – *Autour des conjectures de Bloch et Kato ; cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions L.* Motives (Seattle, WA, 1991), 599–706, Proc. Sympos. Pure Math., 55, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[Her98] L. Herr – *Sur la cohomologie galoisienne des corps p-adiques.* Bull. Soc. Math. France 126 (1998), no. 4, 563–600.

[Her01] L. Herr – *Une approche nouvelle de la dualité locale de Tate.* Math. Ann. 320 (2001), no. 2, 307–337.

[Kat93a] K. Kato – *Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil L-functions via B_{dR}.* Arithmetic algebraic geometry (Trento, 1991), 50–163, Lecture Notes in Math., 1553, Springer, Berlin, 1993.

[Kat93b] K. Kato – *Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil L-functions via B_{dR}, part II.* Preprint (1993).

[Kat93c] K. Kato – *Iwasawa theory and p-adic Hodge theory.* Kodai Math. J. 16 (1993), no. 1, 1–31.

[KKT96] K. Kato, M. Kurihara, T. Tsuji – *Local Iwasawa theory of Perrin-Riou and syntomic complexes.* Preprint (1996).

[KM76] F. Knudsen, D. Mumford – *The projectivity of the moduli space of stable curves I : Preliminaries on "det" and "Div".* Math. Scand. 39 (1976), no. 1, 19–55.

[Laz62] M. Lazard – *Les zéros des fonctions analytiques d'une variable sur un corps valué complet.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 14 1962 47–75.

[Mat92] H. Matsumura – *Commutative ring theory.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 8. Cambridge University Press, Cambridge, 1989. xiv+320 pp.

[Nek02] J. Nekovář – *Selmer complexes.* Preprint (2002), à paraître dans Astérisque.

[Per94] B. Perrin-Riou – *Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local.* Invent. Math. 115 (1994), no. 1, 81–161.

[Per95] B. Perrin-Riou – *Fonctions L p-adiques des représentations p-adiques.* Astérisque No. 229 (1995), 198 pp.

[Ser68] J.-P. Serre – *Corps locaux.* Deuxième édition. Publications de l'Université de Nancago, No. VIII. Hermann, Paris, 1968. 245 pp.

[Tat67] J. Tate – *Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta-function.* Algebraic Number Theory (Proc. Instructional Conf., Brighton, 1965) pp. 305–347 Thompson, Washington, D.C.

Septembre 2005

D. Benois, Faculté des Sciences et Techniques, Université de Besançon, 16 route de Gray, 25030 Besançon cedex, France • *E-mail :* `denis.benois@math.univ-fcomte.fr`

L. Berger, CNRS & IHES, Le Bois-Marie, 35 route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette, France *E-mail :* `laurent.berger@ihes.fr` • *Url :* `www.ihes.fr/~lberger/`