Filtration de monodromie et cycles évanescents formels

Laurent FARGUES

Institut des Hautes Études Scientifiques
35, route de Chartres
91440 – Bures-sur-Yvette (France)

Novembre 2005

IHES/M/05/50

FILTRATION DE MONODROMIE ET CYCLES ÉVANESCENTS FORMELS

par

Laurent Fargues

Résumé. — D'après Berkovich [**1**], Fujiwara [**6**] et Huber [**8**] la fibre des cycles évanescents en un point de la fibre spéciale ne dépend que du complété formel en ce point. Nous raffinons ce résultat en démontrant l'invariance par complétion formelle de la filtration de monodromie perverse sur la fibre des cycles évanescents. Ce résultat est utilisé de façon cruciale par Boyer dans [**3**].

Abstract. — Berkovich [**1**], Fujiwara [**6**] and Huber [**8**] have proved that the fiber of the vanishing cycles at a point of the special fiber depends only on the formal completion at this point. We refine this result and prove the invariance under formal completion of the perverse monodromy filtration on the fiber of vanishing cycles. This result is used in an essential way by Boyer in [**3**].

1. Notations et énoncé du théorème

Soit $S = \mathrm{Spec}(\mathcal{O})$ un trait hensélien excellent. On note k le corps résiduel de $\mathcal{O}$ que l'on suppose de caractéristique $p > 0$ et π une uniformisante de $\mathcal{O}$. On note η le point générique de S, s son point fermé, $\overline{\eta}$ un point géométrique au dessus de η, $\overline{S} = \mathrm{Spec}(\overline{\mathcal{O}})$ la fermeture intégrale de S dans $\overline{\eta}$ et $\overline{s}$ le point géométrique au dessus de S associé.

Soit ℓ un nombre premier différent de p. Pour X un S-schéma de type fini et $\mathcal{F} \in \mathbb{D}_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ on note

$$\mathrm{R}\Psi_\eta \mathcal{F} = \overline{i}^* R\overline{j}_* \mathcal{F} \in \mathbb{D}_c^b(X_{\overline{s}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

le complexe des cycles proches de Deligne.

Si l'on muni X_η et $X_{\overline{s}}$ de la perversité intermédiaire et si $\mathcal{F} \in \mathrm{Perv}(X_\eta)$ est un faisceau pervers sur la fibre générique alors

$$\mathrm{R}\Psi_\eta \mathcal{F} \in \mathrm{Perv}(X_{\overline{s}})$$

et est muni d'une action de $\mathrm{Gal}(\overline{\eta}|\eta)$. Si I désigne le sous-groupe d'inertie de $\mathrm{Gal}(\overline{\eta}|\eta)$ et P son sous-groupe de ramification sauvage

$$P/I \simeq \prod_{\ell' \neq p} \mathbb{Z}_{\ell'}(1)$$

et si T désigne un élément de I s'envoyant sur un générateur de $\mathbb{Z}_\ell(1)$ dans l'isomorphisme précédent,

$$T \in \mathrm{End}_{\mathrm{Perv}(X_{\overline{s}})}(\mathrm{R}\Psi_\eta \mathcal{F})$$

qui est quasi-unipotent au sens où si n est suffisamment divisible $T^n - Id$ est un endomorphisme nilpotent de $\mathrm{R}\Psi_\eta \mathcal{F}$. Cela permet de définir l'endomorphisme nilpotent

$$N = \log T = \frac{1}{n} \log\left(Id + (T^n - Id)\right) \text{ pour } n >> 0$$

$$N : \mathrm{R}\Psi_\eta \mathcal{F}(1) \longrightarrow \mathrm{R}\Psi_\eta \mathcal{F}$$

Il définit une filtration de monodromie dans $\mathrm{Perv}(X_{\overline{s}})$, $\mathrm{Fil}^\bullet \mathrm{R}\Psi_\eta \mathcal{F}$ qui ne dépends pas du choix de T, et donc (cf. la section 3) un objet $K(\mathcal{F})$ de la catégorie dérivée filtrée $\mathbb{D}^b_c F(X_{\overline{s}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.

Soit $x : \overline{s} \longrightarrow X_{\overline{s}}$ un point géométrique fermé. Le complexe de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-espaces vectoriels $\mathrm{R}\Psi_\eta(\mathcal{F})_x$ est muni d'une action de N mais n'est pas pervers en général (en quelque sens que ce soit). Néanmoins il provient par oubli de la filtration du complexe filtré $K(\mathcal{F})_x \in \mathbb{D}^b F(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ la catégorie dérivée filtrée des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-espaces vectoriels.

Rappelons

***Théorème 1* (Berkovich [1] th. 3.1, Fujiwara [6] cor. 7.1.7, Huber [8] prop. 3.15)**
Soit $(X', \mathcal{F}', x')$ un triplet analogue à $(X, \mathcal{F}, x)$. Tout isomorphisme

$$f : \widehat{\mathcal{O}}_{X,x} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{O}}_{X',x'}$$

entre les complétés formels des anneaux locaux tel que

$$\mathcal{F}_{|Spec(\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}[\frac{1}{\pi}])} = f^* \left(\mathcal{F}'_{|Spec(\widehat{\mathcal{O}}_{X',x'}[\frac{1}{\pi}])} \right)$$

induit naturellement un isomorphisme

$$R\Psi_\eta(\mathcal{F})_x \xrightarrow{\sim} R\Psi_\eta(\mathcal{F})_{x'}$$

Le but de cet appendice est d'établir la version raffinée suivante de cet énoncé :

Théorème 2. — *Soit $(X', \mathcal{F}', x')$ un triplet analogue à $(X, \mathcal{F}, x)$. Soient $K(\mathcal{F})$, resp. $K(\mathcal{F}')$, le complexe filtré associé à $R\Psi(\mathcal{F})$, resp. $R\Psi(\mathcal{F}')$, muni de sa filtration de monodromie.*

Tout isomorphisme

$$f : \widehat{\mathcal{O}}_{X,x} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{O}}_{X',x'}$$

tel que

$$\mathcal{F}_{|Spec(\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}[\frac{1}{\pi}])} = f^* \left(\mathcal{F}'_{|Spec(\widehat{\mathcal{O}}_{X',x'}[\frac{1}{\pi}])} \right)$$

induit naturellement un isomorphisme

$$K(\mathcal{F})_x \xrightarrow{\sim} K(\mathcal{F})_{x'}$$

dans la catégorie dérivée filtrée des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-espaces vectoriels $\mathbb{D}^b F(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.

La démonstration de ce théorème repose sur le théorème de désingularisation de Popescu (cf. par exemple [**12**]) ainsi que la définition d'une catégorie de faisceaux pervers ℓ-adiques sur des schémas pour lesquels les théorèmes de finitude de Deligne de SGA $4^{1/2}$ et l'existence d'un module dualisant ne sont pas connus comme le complété formel d'un anneau local d'un schéma de type fini sur un corps. La nécessité des coefficients ℓ-adiques est imposée par la définition de l'opérateur de monodromie comme logarithme d'un autre opérateur. Sans théorèmes de finitude l'argument d'autorité "le cas des coefficients de torsion s'étend aussitôt au cas ℓ-adique" ne peut être employé ce qui induit de difficiles contorsions basées sur les travaux d'Ekedahl ([**4**]).
Le résultat de cet article est utilisé de façon cruciale par P.Boyer dans [**3**].

L'auteur ce cet appendice tient à remercier Ofer Gabber pour d'intéressantes discussions sur le sujet.

2. Catégories dérivées filtrées

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. On utilise les catégories dérivées filtrées pour des filtrations décroissantes finies (et pas seulement finies degré par degré) $\mathbb{D}F(\mathcal{A}), \mathbb{D}^b F(\mathcal{A}), \mathbb{D}^+ F(\mathcal{A})$ telles qu'elles sont définies dans le chapitre V de [**9**], cf. également le chapitre 3 de [**2**]. Elles sont munies de foncteurs d'oubli de la filtration, Gr^i pour $i \in \mathbb{Z}$, et $\mathrm{Fil}^i/\mathrm{Fil}^j$ pour $i < j$ vers les catégories dérivées usuelles. Les foncteurs $\mathrm{Fil}^i/\mathrm{Fil}^j$ se factorisent par les catégories dérivées filtrées et on notera également par abus de notations $\mathrm{Fil}^i/\mathrm{Fil}^j$ ces factorisations.

3. Catégories dérivées filtrées et faisceaux pervers filtrés

On reprend les hypothèses du début de la section 3.1.5 de [**2**]. Plus précisément, supposons que $\mathcal{A}$ possède suffisamment d'injectifs, que $\mathcal{D}$ soit une sous-catégorie triangulée pleine de $\mathbb{D}^+(\mathcal{A})$ et que $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ soit une t-structure sur $\mathcal{D}$ de coeur $\mathcal{C} = \mathcal{D}^{\leq 0} \cap \mathcal{D}^{\geq 0}$. Soit $\mathcal{D}F$ la sous-catégorie triangulée de $\mathbb{D}^+F(\mathcal{A})$ formée des objets A tels que $\forall i \in \mathbb{Z}\ Gr^i A \in \mathcal{D}$.

Proposition 1. — *Il y a une équivalence de catégories entre la catégorie formée des couples $(X, Fil^\bullet X)$ où $X \in \mathcal{C}$ et $Fil^\bullet X$ est une filtration décroissante finie de X et la sous-catégorie de $\mathcal{D}F$ formée des objets A tels que $\forall i\ Gr^i A \in \mathcal{C}$. Dans cette équivalence les foncteurs de graduation Gr^i se correspondent et plus généralement si A est associé à X $\forall i < j$ $Fil^i/Fil^j(A) = Fil^i X/Fil^j X$. Ainsi via le foncteur d'oubli de la filtration $\omega = Fil^{-\infty}/Fil^{\infty} : \mathcal{D}F \to \mathcal{D}$, $\omega A = X$.*

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{D}F$ comme dans l'énoncé. Il y a des triangles exactes dans $\mathcal{D}$ pour $j > i$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Fil}^i/\mathrm{Fil}^j(A) \arrow[rr] & & \mathrm{Fil}^{i-1}/\mathrm{Fil}^j(A) \arrow[dl] \\ & Gr^{i-1}A \arrow[ul, "+1"] & \end{tikzcd}$$

desquels on déduit aisément en procédant à j fixé par récurrence sur $i, i > j$ à partir de $i = j-1$, que

$$\forall j > i\ \ \mathrm{Fil}^i/\mathrm{Fil}^j(A) \in \mathcal{C}$$

et en particulier $A \in \mathcal{C}$. Donc, dans le triangle exacte

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Fil}^i A \arrow[rr] & & \omega A \arrow[dl] \\ & \mathrm{Fil}^{-\infty}/\mathrm{Fil}^i A \arrow[ul, "+1"] & \end{tikzcd}$$

les trois objets sont dans $\mathcal{C}$. On en déduit que $\mathrm{Fil}^i A \to \omega A$ est un monomorphisme dans $\mathcal{C}$ et définit une filtration finie de $X = \omega A$ ayant comme gradués les $Gr^\bullet A$. Cela définit un foncteur $A \mapsto (X, \mathrm{Fil}^\bullet)$. Montrons qu'il est pleinement fidèle.

Commençons par remarquer que pour A, B dans $\mathcal{D}F$ comme précédemment

$$\mathrm{Hom}^{-1}_{\mathcal{D}F}(A, B) = 0 \tag{1}$$

Utilisons pour cela la suite spectrale (3.1.3.5) p.78 de [**2**] :

$$E_1^{pq} = \begin{cases} \prod_{j-i=p} \mathrm{Hom}^{p+q}(Gr^i A, Gr^j B) & \text{si } p \geq 0 \\ 0 \ \text{ si } p < 0 \end{cases}$$

$$E_1^{pq} \Longrightarrow \mathrm{Hom}^{p+q}_{\mathcal{D}F}(A, B)$$

Les $Gr^i A$ et $Gr^j B$ étant dans $\mathcal{C}$, $E_1^{pq} = 0$ si $p + q < 0$ et l'égalité (1) en résulte.
Notons $(X, \mathrm{Fil}^\bullet X), (Y, \mathrm{Fil}^\bullet Y)$ les objets associés à A et B. On pourrait être tenté d'utiliser la suite spectrale précédente couplée à une même suite spectrale pour $\mathbb{D}^+F(\mathcal{C})$ pour montrer que $\mathrm{Hom}(A, B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}((X, \mathrm{Fil}^\bullet X), (Y, \mathrm{Fil}^\bullet Y))$. Néanmoins cela s'avère délicat à cause de l'identification de certaines flèches dans la suite spectrale et parce qu'à priori une telle suite spectrale n'existe pour les objets filtrés de $\mathcal{C}$ que si $\mathcal{C}$ possède suffisamment d'injectifs (néanmoins ce type d'argument est sûrement possible). Supposant $B \neq 0$, procédons plutôt par récurrence sur l'amplitude de la filtration $\sup\{i \mid Gr^i B \neq 0\} - \inf\{i \mid Gr^i B \neq 0\}$. Lorsque cet entier est égal à 0, soit i tel que $Gr^i B \neq 0$. On a donc $\mathrm{Fil}^{i+1} B = 0$ ainsi que $\mathrm{Fil}^i B = B$ ce qui implique $\mathrm{Fil}^{i+1} X = 0$ et $\mathrm{Fil}^i X = X$. Alors

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}F}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathrm{Fil}^{-\infty}/\mathrm{Fil}^{i+1} A, B) = \mathrm{Hom}(X/\mathrm{Fil}^{i+1} X, Y) = \mathrm{Hom}((X, \mathrm{Fil}^\bullet X), (Y, \mathrm{Fil}^\bullet Y))$$

Supposons maintenant l'amplitude de la filtration non-nulle et soit i tel que $\mathrm{Fil}^i B \neq 0$, $\mathrm{Fil}^{i+1}B = 0$ et donc $\mathrm{Fil}^{i+1}Y = 0$. D'après l'annulation (1) il y a un morphisme de suite exactes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}F}(A,\mathrm{Fil}^iB) \arrow[r] \arrow[d, "u"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}F}(A,B) \arrow[r] \arrow[d, "v"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}F}(A,\mathrm{Fil}^{-\infty}/\mathrm{Fil}^iB) \arrow[r] \arrow[d, "w"] & \mathrm{Hom}^1_{\mathcal{D}F}(A,\mathrm{Fil}^iB) \arrow[d, "x"] \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\mathrm{Fil}^\bullet X,\mathrm{Fil}^iY) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\mathrm{Fil}^\bullet X,\mathrm{Fil}^\bullet Y) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\mathrm{Fil}^\bullet X,\mathrm{Fil}^\bullet Y/\mathrm{Fil}^iY) \arrow[r, "\delta"] & \mathrm{Ext}^1(\mathrm{Fil}^\bullet X,\mathrm{Fil}^iY) \end{tikzcd}$$

où les Hom de la ligne du bas sont des morphismes d'objets filtrés, Fil^iY étant muni de la filtration induite, et où $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{Fil}^\bullet X,\mathrm{Fil}^iY)$ est défini comme

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C},\mathrm{Yoneda}}(X/\mathrm{Fil}^{i+1}X,\mathrm{Fil}^iY)$$

De plus si $[\xi]$ désigne la classe de l'extension

$$\xi \ : \quad 0 \to \mathrm{Fil}^iY \to Y \to Y/\mathrm{Fil}^iY \to 0$$

alors l'application δ est définie par le composé

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(\mathrm{Fil}^\bullet X,\mathrm{Fil}^\bullet Y/\mathrm{Fil}^iY) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}(\mathrm{Fil}^\bullet X/\mathrm{Fil}^{i+1}X,\mathrm{Fil}^\bullet Y/\mathrm{Fil}^iY) \arrow[d] & \\ & \mathrm{Hom}(X/\mathrm{Fil}^{i+1}X, Y/\mathrm{Fil}^iY) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C},\mathrm{Yoneda}}(X/\mathrm{Fil}^{i+1}X,Y) \\ & f \arrow[r, mapsto] & f^*[\xi] \end{tikzcd}$$

Avec cette définition on vérifie facilement que le carré de droite est commutatif dans le diagramme précédent (pour la définition de l'application x cf. la ligne qui suit).
D'après le cas étudié précédemment initialisant la récurrence l'application u est un isomorphisme. Par hypothèse de récurrence w en est également un. Quant à l'application x cela résulte de

$$\mathrm{Hom}^1_{\mathcal{D}F}(A,\mathrm{Fil}^iB) = \mathrm{Hom}^1_{\mathcal{D}}(\mathrm{Fil}^{-\infty}/\mathrm{Fil}^{i+1}A,\mathrm{Fil}^iB) = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C},\mathrm{Yoneda}}(X/\mathrm{Fil}^{i+1}X,Y)$$

L'application v est donc un isomorphisme.

La surjectivité essentielle du foncteur $A \mapsto (X,\mathrm{Fil}^\bullet X)$ résulte de ce que tout morphisme de complexes dans $\mathbb{D}^+(\mathcal{A})$ peut être représenté par un morphisme injectif de complexe d'objets injectifs (toute flèche dans $\mathbb{D}^+(\mathcal{A})$ peut être vue comme un cône d'une autre flèche) et que donc si $(X,\mathrm{Fil}^\bullet X)$ est comme dans l'énoncé, on peut représenter Fil^iXpar un complexe $(K^{ij})_{j\in\mathbb{Z}}$ et les flèches $\mathrm{Fil}^{i+1}X \to \mathrm{Fil}^iX$ par des morphismes injectifs $K^{i+1\bullet} \hookrightarrow K^{i\bullet}$. L'objet de $\mathcal{D}F$ associé convient alors. $\square$

4. Faisceaux pervers sans conditions de finitude d'après Gabber

Le théorème suivant est un cas particulier des résultats de [**7**]. On y note $Ri_x^!\mathcal{F}^\bullet$ la fibre en un point géométrique au dessus du point générique de $\overline{\{x\}}$ de $Ri^!_{\overline{\{x\}}}\mathcal{F}^\bullet$. Ainsi, si $\overline{x} \to X$ est un tel point géométrique

$$\mathcal{H}^i(i_x^!\mathcal{F}^\bullet) = \varinjlim_{\substack{U \\ \nearrow \ \downarrow a,\text{étale} \\ \overline{x} \to X}} H^i_{a^{-1}(\overline{\{x\}})}(U,\mathcal{F}^\bullet)$$

L'annulation d'un tel groupe ne dépend pas du choix de $\overline{x}$ au dessus de x, de même pour $\mathcal{H}^i(i_x^*\mathcal{F}^\bullet)$.

***Théorème 3* (Gabber).** — *Soit X un schéma noethérien de dimension finie. Soit Λ un anneau. Posons*

$${}^p\mathbb{D}^{\leq 0}(X,\Lambda) = \{\mathcal{F}^\bullet \in \mathbb{D}(X_{ét},\Lambda) \mid \forall x\in X\ \forall i > -\dim\overline{\{x\}}\ \ \mathcal{H}^i(i_x^*\mathcal{F}^\bullet) = 0\ \}$$
$${}^p\mathbb{D}^{\geq 0}(X,\Lambda) = \{\mathcal{F}^\bullet \in \mathbb{D}^+(X_{ét},\Lambda) \mid \forall x\in X\ \forall i < -\dim\overline{\{x\}}\ \ \mathcal{H}^i(Ri_x^!\mathcal{F}^\bullet) = 0\ \}$$

Alors, $({}^p\mathbb{D}^{\leq 0}, {}^p\mathbb{D}^{\geq 0})$ définit une t-structure sur $\mathbb{D}(X_{ét},\Lambda)$ et induit une t-structure sur $\mathbb{D}^+(X_{ét},\Lambda)$, $\mathbb{D}^-(X_{ét},\Lambda)$ et $\mathbb{D}^b(X_{ét},\Lambda)$.

On note $Perv(X,\Lambda) = {}^p\mathbb{D}^{\leq 0} \cap {}^p\mathbb{D}^{\geq 0} \subset \mathbb{D}^b(X_{ét},\Lambda)$, une catégorie abélienne Λ-linéaire.

Si de plus $\Lambda = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, n est inversible sur X et X possède un module dualisant au sens de Grothendieck (SGA 5, exposé I) alors la t-structure précédente induit une t-structure sur $\mathbb{D}^b_c(X_{ét},\Lambda)$ et tout objet de $Perv(X) \cap \mathbb{D}^b_c(X_{ét},\Lambda)$ est de longueur finie.

L'intérêt de ce théorème est qu'il permet de construire la t-structure perverse sans hypothèse de finitude sur les Rj_* pour j une immersion ouverte, $Ri^!$ pour i une immersion fermée, ou bien l'existence d'un module dualisant (ce qui est le cas considéré dans [**2**] que l'on retrouve à la fin de l'énoncé du théorème précédent). La dernière hypothèse sur l'existence d'un module dualisant permet de s'assurer que les opérateurs de troncature perverse préservent les faisceaux pervers à cohomologie bornée constructible.

Exemple 1. — *Supposons X excellent régulier de dimension d et $\mathcal{L}$ un faisceau localement constant sur $X_{ét}$. Alors, $\mathcal{L}[d] \in Perv(X,\Lambda)$. C'est une conséquence de ce que $\forall x \in X$ le schéma réduit sous-jacent à $\overline{\{x\}}$ est génériquement régulier et du théorème principal de* [**5**].

5. Extension aux coefficients ℓ-adiques

Soit $L_\lambda|\mathbb{Q}_\ell$ une extension de degré fini, $\mathcal{O}_\lambda$ son anneau des entiers et ϖ_λ une uniformisante de $\mathcal{O}_\lambda$.

Soit X un schéma. Nous allons utiliser le formalisme de [**4**]. Certains des énoncés de [**4**] sont trop elliptiques (par exemple le (v) du théorème 3.6 où la t-structure tautologique n'est pas définie). De plus nous aurons besoin de généralisations, c'est pourquoi nous rappelons le formalisme de [**4**] dans les paragraphes qui suivent.

5.1. Généralités : $R\pi_*$ et $\mathbb{L}\pi^*$. — Soit $\widetilde{X}^{\mathbb{N}}_{\text{ét}} - \mathcal{O}_{\lambda\bullet}$ la catégorie abélienne des systèmes projectifs $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$

$$\to \mathcal{F}_{n+1} \to \mathcal{F}_n \to \cdots \to \mathcal{F}_1$$

où $\mathcal{F}_n$ est un $\mathcal{O}_\lambda/\varpi_\lambda^n$-module sur $X_{\text{ét}}$ le site étale de X et les flèches de transition sont $\mathcal{O}_\lambda$-linéaires. Soit $\widetilde{X}_{\text{ét}} - \mathcal{O}_\lambda$ la catégorie des $\mathcal{O}_\lambda$-modules sur $X_{\text{ét}}$. Soit

$$(\pi^*,\pi_*) : \widetilde{X}^{\mathbb{N}}_{\text{ét}} - \mathcal{O}_{\lambda\bullet} \longrightarrow \widetilde{X}_{\text{ét}} - \mathcal{O}_\lambda$$

le couple de foncteurs défini par

$$\pi^*\mathcal{F} = (\mathcal{F}/\varpi_\lambda^n\mathcal{F})_{n\geq 1}$$

et

$$\pi_*(\mathcal{F}_n)_n = \varprojlim_n \mathcal{F}_n$$

On note donc π^* pour le foncteur image inverse associé au morphisme de topos annelés et π^{-1} le foncteur "sans anneau" :

$$\pi^*\mathcal{F} = \pi^{-1}\mathcal{F} \otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{O}_\lambda)} \mathcal{O}_{\lambda\bullet}$$

Remarque 1. — *On remarquera qu'en général $R\pi_*$ n'est pas de dimension cohomologique finie (en général on a seulement $cd(R\pi_*) \leq cd_\ell(X_{ét}) + 1$). Néanmoins $\mathbb{L}\pi^*$ est de dimension cohomologique finie (égale à 1).*

Définition 1. — *On note $\mathbb{D}(X^{\mathbb{N}},\mathcal{O}_{\lambda\bullet})$ pour la catégorie dérivée $\mathbb{D}(\widetilde{X}^{\mathbb{N}}_{ét} - \mathcal{O}_{\lambda\bullet})$.*

Remarque 2. — *Le morphisme de topos annelés $\widetilde{X}^{\mathbb{N}}_{ét} \longrightarrow \widetilde{X}_{ét}$ est un cas particulier de morphisme associé à un topos fibré tel qu'expliqué dans* [**10**]. *Nous renvoyons en particulier à* [**10**] *pour les généralités concernant les résolutions dans les topos fibrés.*

5.2. Complexes essentiellement nuls/constants. —

Définition 2 **([4] déf. 2.1)**. — *Un système projectif* $(\mathcal{F}_n)_n$ *est dit essentiellement nul si* $\forall n$, *localement sur* $X_{\text{ét}}$, $\exists N$ $\mathcal{F}_{n+N} \to \mathcal{F}_n$ *est le morphisme nul.*

Un complexe $C \in \mathbb{D}(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet})$ *est dit essentiellement nul si* $\forall i$ $\mathcal{H}^i(C)$ *l'est.*

Remarquons que lorsque X est quasicompact on peut enlever “localement sur $X_{\text{ét}}$” dans la définition précédente.

Remarque 3. — *Les systèmes essentiellement nuls forment une sous-catégorie épaisse de la catégorie des systèmes projectifs de faisceaux et la catégorie quotient des systèmes projectifs de faisceaux par les systèmes essentiellement nuls est donc abélienne. On peut donc définir le localisé de* $\mathbb{D}(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet})$ *par rapport au flèches de cône essentiellement nul. C'est une catégorie triangulée. En effet, si* $\mathcal{D}$ *est une catégorie triangulée et* H *est un foncteur cohomologique sur* $\mathcal{D}$ *(à valeurs dans une catégorie abélienne, par définition) alors les flèches* f *dont un cône* $C(f)$ *vérifie* $\forall i$ $H(C(f)[i]) = 0$ *permettent un calcul des fraction à gauche et à droite, et la catégorie localisée est triangulée (appliquer cela à* $\mathcal{D} = \mathbb{D}(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet})$ *et* H *le foncteur composé* $\mathcal{D} \xrightarrow{\mathcal{H}^0} \widetilde{X}^{\mathbb{N}}_{\text{ét}} \longrightarrow \widetilde{X}^{\mathbb{N}}_{\text{ét}}/$*ess. nuls).*

Définition 3 **([4] section 1)**. — *On note* $\mathbb{D}^{e+}(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet})$ *la sous-catégorie de* $\mathbb{D}(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet})$ *formée des complexes* C *tels que pour* $i << 0$ $\mathcal{H}^i(C)$ *soit essentiellement nul. Il s'agit donc des complexes isomorphes aux objets de* $\mathbb{D}^+$ *dans la catégorie modulo les complexes essentiellement nuls de la remarque précédente.*

Si $C \in \mathbb{D}^+(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet})$ est essentiellement nul alors $R\pi_* C = 0$. On en déduit que si $C \in \mathbb{D}^{e+}(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet})$ le système projectif

$$\tau(C) = (\dots \to \tau_{\geq i} C \to \tau_{\geq i+1} C \to \dots)$$

est tel que le système projectif $R\pi_*\tau(C) := (R\pi_*\tau_{\geq i}C)_i$ est essentiellement constant. Cela permet d'étendre $R\pi_*$ à $\mathbb{D}^{e+}(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet})$ en posant

$$R\pi_* C = \varprojlim R\pi_*\tau(C)$$

Définition 4. — *Un objet de* $\mathbb{D}^+(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet})$ *est essentiellement constant s'il est isomorphe modulo les complexes essentiellement nuls à un objets de la forme* $\pi^{-1}(D)$.

Remarque 4. — *Le complexe* C *est essentiellement constant ssi l'application d'adjonction* $\pi^{-1}R\pi_*C \to C$ *a un cône essentiellement nul ssi* $\forall i$ *l'application* $\pi^{-1}\pi_*\mathcal{H}^i(C) \to \mathcal{H}^i(C)$ *a un noyau et conoyau essentiellement nuls.*

5.3. Le foncteur $\pi^*(\mathcal{O}_\lambda/\varpi_\lambda) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{\lambda\bullet}} -$**.** — Bien que $\pi^*(\mathcal{O}_\lambda/\varpi_\lambda)$ ne soit pas un $\mathcal{O}_{\lambda\bullet}$-module de Tor-dimension finie, modulo les complexes essentiellement nuls il l'est et on peut identifier $\pi^*(\mathcal{O}_\lambda/\varpi_\lambda)$ au complexe

$$[\underset{-1}{\mathcal{O}_{\lambda\bullet}} \xrightarrow{\times\varpi_\lambda} \underset{0}{\mathcal{O}_{\lambda\bullet}}]$$

puisque $\ker(\mathcal{O}_{\lambda\bullet} \xrightarrow{\times\varpi_\lambda} \mathcal{O}_{\lambda\bullet})$ est essentiellement nul. Cela permet de définir pour $C \in \mathbb{D}^{e+}(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet})$

$$\pi^*(\mathcal{O}_\lambda/\varpi_\lambda) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{\lambda\bullet}} C = \mathrm{Tot}^{\oplus}[C \xrightarrow{\varpi_\lambda} C]$$

dans la catégorie $\mathbb{D}^{e+}(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet})$ modulo les complexes essentiellement nuls. On peut donc définir ce que cela veut dire que ce complexe est essentiellement constant. On peut également définir son image par $R\pi_*$.

5.4. $\mathcal{O}_\lambda$-complexes. —

Définition 5 **([4] déf. 2.1).** — *Un $\mathcal{O}_\lambda$-complexe est un $C \in \mathbb{D}^{e+}(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet})$ tel que $\pi^*(\mathcal{O}_\lambda/\varpi_\lambda) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{\lambda\bullet}} C$ soit essentiellement constant*

Les $\mathcal{O}_\lambda$-complexes sont les objets de base introduits par Ekedahl afin de définir la catégorie dérivée λ-adique.

5.5. La catégorie $\mathbb{D}^+(X, \mathcal{O}_\lambda)$. —

Définition 6 **([4] déf. 2.1).** — *Un objet $C \in \mathbb{D}^{e+}(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet})$ est négligeable si $\pi^*(\mathcal{O}_\lambda/\varpi_\lambda) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{\lambda\bullet}} C$ est essentiellement nul et un morphisme f est essentiellement un isomorphisme si un cône de f est négligeable.*

Remarque 5. — *Les morphismes qui sont essentiellement des isomorphismes permettent un calcul des fractions à gauche et à droite dans $\mathbb{D}^{e+}(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet})$ et la catégorie localisée est triangulée. En effet, le foncteur $C \mapsto \mathcal{H}^0\left(\pi^*(\mathcal{O}_\lambda/\varpi_\lambda) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{\lambda\bullet}} C\right)$ à valeurs dans la catégorie des systèmes projectifs λ-adiques sur $X_{ét}$ modulo les complexes essentiellement nuls est un foncteur cohomologique (cf. la remarque 3).*

Définition 7 **([4] déf. 2.5).** — *La catégorie des $\mathcal{O}_\lambda$-complexes a pour objets les $\mathcal{O}_\lambda$-complexes munis des morphismes*

$$Hom_{\mathcal{O}_\lambda-complexes}(A, B) = Hom_{pro-\mathbb{D}^{e+}}(\tau(A), \tau(B))$$

Ekedahl pose alors $\mathbb{D}^+(X, \mathcal{O}_\lambda) =$ la catégorie des $\mathcal{O}_\lambda$-complexes localisée par rapport aux flèches qui sont essentiellement des isomorphismes. C'est une catégorie triangulée.

5.6. Complexes normalisés. — Ekedahl introduit des représentants particuliers des $\mathcal{O}_\lambda$ complexes dans leur classes d'isomorphisme appelés complexes normalisés.

Définition 8 **([4] section 2).** — *Pour $\mathcal{F} \in \mathbb{D}^{e+}(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet})$ on note*

$$\widehat{\mathcal{F}} = \mathbb{L}\pi^* R\pi_* \mathcal{F} \in \mathbb{D}^+(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet})$$

Le foncteur $\mathcal{F} \mapsto \widehat{\mathcal{F}}$ se factorise par la catégorie localisée par les morphismes qui sont essentiellement des isomorphismes. Cela résulte des formules ([4] lemme 1.5.ii))

$$\forall n \;\; i_n^* \widehat{\mathcal{F}} = R\pi_* \left(\pi^*(\mathcal{O}_\lambda/\varpi_\lambda^n) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{\lambda\bullet}} \mathcal{F}\right)$$

où $i_n : \widetilde{X}_{\text{ét}} \longrightarrow \widetilde{X}_{\text{ét}}^{\mathbb{N}}$ est le morphisme de topos "étage n". Ekedahl démontre alors qu'un complexe $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_\lambda$-complexe ssi la flèche d'adjonction $\widehat{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathcal{F}$ est essentiellement un isomorphisme ([4] proposition 2.2.i)).

Définition 9. — *Les complexes $\mathcal{F} \in \mathbb{D}^+(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet})$ tels que $\widehat{\mathcal{F}} \to \mathcal{F}$ soit un isomorphisme dans $\mathbb{D}^+(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet})$ sont des $\mathcal{O}_\lambda$-complexes appelés complexes normalisés. On note $\mathbb{D}^+(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet})_{norm}$ la sous-catégorie des complexes normalisés.*

On renvoi à la proposition 2.2.ii) de [4] pour une caractérisation intrinsèque des complexes normalisés.

Proposition 2 **([4]).** — *La catégorie $\mathbb{D}^+(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet})_{norm}$ est l'image essentielle du foncteur $\mathbb{L}\pi^*$: $\mathbb{D}^+(X, \mathcal{O}_\lambda)_{litt}$ (la catégorie dérivée usuelle des $\mathcal{O}_\lambda$-modules sur $X_{ét}$). De plus les foncteurs $\mathcal{F} \mapsto \widehat{\mathcal{F}}$ et le foncteur canonique $\mathbb{D}^+(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet})_{norm} \to \mathbb{D}^+(X, \mathcal{O}_\lambda)$ induisent une équivalence de catégories entre $\mathbb{D}^+(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet})_{norm}$ et $\mathbb{D}^+(X, \mathcal{O}_\lambda)$.*

Remarque 6. — *Soit $\mathbb{D}^+(X, \mathcal{O}_\lambda)_{litt}$ la catégorie dérivée "usuelle" des complexes de $\mathcal{O}_\lambda$-faisceaux sur $X_{ét}$. Le foncteur $\mathbb{L}\pi^*$ permet d'identifier $\mathbb{D}^+(X, \mathcal{O}_\lambda)$ à la catégorie quotient de $\mathbb{D}^+(X, \mathcal{O}_\lambda)_{litt}$ par les complexes $\mathcal{F}$ tels que $\mathbb{L}\pi^*\mathcal{F} = 0$.*

5.7. La catégorie $\mathbb{D}^b(X,\mathcal{O}_\lambda)$. —

Définition 10. — *On note $\mathbb{D}^b(X,\mathcal{O}_\lambda)$ la sous-catégorie de $\mathbb{D}^+(X,\mathcal{O}_\lambda)$ formée des complexes dans $\mathbb{D}^-$.*

L'un des points clef qui simplifie nettement la théorie par rapport au cas de $\mathbb{D}^+$ est le (i) de la proposition 3.4 de [**4**] :

Proposition 3 ([**4**]). — *Un complexe $\mathcal{F}\in\mathbb{D}^-(X^{\mathbb{N}},\mathcal{O}_{\lambda\bullet})$ est négligeable ssi il est essentiellement nul.*

Corollaire 1. — *La catégorie $\mathbb{D}^b(X,\mathcal{O}_\lambda)$ s'identifie au localisé de la catégorie des $\mathcal{O}_\lambda$-complexes dans $\mathbb{D}^-$ relativement aux flèches dont le cône est essentiellement nul.*

Lemme 1. — *Soit $\mathcal{F}\in\mathbb{D}^b(X,\mathcal{O}_\lambda)$. Alors, $\widehat{\mathcal{F}}\in\mathbb{D}^b(X^{\mathbb{N}},\mathcal{O}_{\lambda\bullet})_{norm}$. Si de plus $\forall i\notin[a\,b]$ $\mathcal{H}^i(\mathcal{F})$ est essentiellement nul alors $\forall i\notin[a-1\;b]$ $\mathcal{H}^i(\widehat{\mathcal{F}})$ est nul.*

Démonstration. On utilise les formules

$$\forall n\;\; i_n^*\widehat{\mathcal{F}}=R\pi_*\left(\pi^*(\mathcal{O}_\lambda/\varpi_\lambda^n)\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{\lambda\bullet}}\mathcal{F}\right)$$

$$\pi^*(\mathcal{O}_\lambda/\varpi_\lambda^n)\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{\lambda\bullet}}\mathcal{F}\simeq[\underset{-1}{\mathcal{F}}\xrightarrow{\times\varpi_\lambda^n}\underset{0}{\mathcal{F}}]$$

le dernier isomorphisme étant modulo les complexes essentiellement nuls. Soit donc

$$f:\pi^{-1}C\to[\mathcal{F}\xrightarrow{\varpi_\lambda^n}\mathcal{F}]$$

un morphisme de complexes de cône essentiellement nul. Alors,

$$i_n^*\widehat{\mathcal{F}}=C$$

De plus, le cône de f étant essentiellement nul on en déduit que $\forall i\notin[a-1\;b]$ $\mathcal{H}^i(\pi^{-1}C)$ est essentiellement nul et donc

$$\forall i\notin[a-1\;b]\;\mathcal{H}^i(C)=0$$

□

Corollaire 2. — *Le foncteur de normalisation induit une équivalence entre $\mathbb{D}^b(X,\mathcal{O}_\lambda)$ et $\mathbb{D}^b(X^{\mathbb{N}},\mathcal{O}_{\lambda\bullet})_{norm}$.*

5.8. La catégorie $\mathbb{D}^b_c(X,\mathcal{O}_\lambda)$ et sa t-structure tautologique. —

Désormais on supposera toujours que X est localement noethérien.

Rappelons qu'Ekedhal pose pour $\mathcal{F}\in\mathbb{D}^b(X,\mathcal{O}_\lambda)$

$$\mathcal{O}_\lambda/\varpi_\lambda\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_\lambda}\mathcal{F}:=i_1^*\widehat{\mathcal{F}}=\mathcal{O}_\lambda/\varpi_\lambda\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_\lambda}R\pi_*\mathcal{F}\in\mathbb{D}^b_c(X,\mathcal{O}_\lambda/\varpi_\lambda)$$

Définition 11 ([**4**]). — *On pose*

$$\mathbb{D}^b_c(X,\mathcal{O}_\lambda)=\{\;\mathcal{F}\in\mathbb{D}^b(X,\mathcal{O}_\lambda)\mid\mathcal{O}_\lambda/\varpi_\lambda\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_\lambda}\mathcal{F}\in\mathbb{D}^b_c(X,\mathcal{O}_\lambda/\varpi_\lambda)\;\}$$

Définition 12. —
- *Un faisceau λ-adique constructible sur $X_{\acute{e}t}$ est un $\mathcal{O}_{\lambda\bullet}$-module sur $X_{\acute{e}t}$, $(\mathcal{F}_n)_n$ tel que $\forall n$ $\mathcal{F}_{n+1}\otimes\mathcal{O}_\lambda/\varpi_\lambda^n\xrightarrow{\sim}\mathcal{F}_n$ et $\mathcal{F}_1$ soit constructible.*
- *La catégorie des faisceau λ-adiques constructibles est la sous-catégorie des $\mathcal{O}_{\lambda\bullet}$-modules ayant pour objets les faisceaux λ-adique constructibles*
- *Un faisceau essentiellement λ-adique constructible est un $\mathcal{O}_{\lambda\bullet}$-module isomorphe modulo les complexes essentiellement nuls à un faisceau λ-adique constructible*
- *La catégorie des faisceaux essentiellement λ-adiques constructibles est la sous-catégorie de la catégorie quotient des $\mathcal{O}_{\lambda\bullet}$-modules par les modules essentiellement nuls ayant pour objets les faisceaux essentiellement λ-adique constructible*

Il est aisé de vérifier que le foncteur naturel de la catégorie des faisceaux λ-adiques constructibles vers la catégorie des faisceaux essentiellement λ-adiques constructibles induit une équivalence de catégories.

Rappelons le théorème principal de [**11**] :

Théorème 4 **([11])**. — *La catégorie des faisceaux (essentiellement) λ-adiques constructibles est abélienne noethérienne et est équivalente à la catégorie des faisceaux localement AR-λ-adiques constructibles.*

Ici la condition *AR*-nul (pour Artin-Rees) est plus forte que la condition essentiellement nul. Si X est quasicompact, si $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ est un morphisme de faisceau λ-adique constructibles et si $\mathcal{H}$ désigne le noyau de $\mathcal{F}$ dans la catégorie des $\mathcal{O}_{\lambda_\bullet}$-modules, celui-ci vérifie la condition de Mittag-Lefler-Artin-Rees. Si $\mathcal{H}'$ désigne le système projectif des images universelle de $\mathcal{H}$ alors pour $r >> 0$ le $\mathcal{O}_{\lambda_\bullet}$-module $\mathcal{H}[r] \otimes \mathcal{O}_{\lambda_\bullet}$ (où l'on pose $\mathcal{H}[r]_i = \mathcal{H}_{r+i}$) est λ-adique constructible égal au noyau de f dans la catégorie des faisceaux λ-adiques constructibles.

On renvoie plus généralement à [**11**] pour les propriétés de base des faisceaux λ-adiques constructibles.

Proposition 4 **([4] section 3)**. —
- *Pour $(\mathcal{F}_n)_n$ un faisceau essentiellement λ-adique constructible, $(\mathcal{F}_n)_n$ placé en degré 0 est un $\mathcal{O}_\lambda$-complexe.*
- *Un $\mathcal{F} \in \mathbb{D}^b(X, \mathcal{O}_\lambda)$ appartient à $\mathbb{D}^b_c(X, \mathcal{O}_\lambda)$ ssi $\forall i$ $\mathcal{H}^i(\mathcal{F})$ est un faisceau essentiellement λ-adique constructible.*
- *Si $(\mathcal{F}_n)_n$ est un faisceau essentiellement λ-adique constructible et $\mathcal{F}$ le complexe concentré en degré 0 associé alors $\mathcal{H}^0(\widehat{\mathcal{F}})$ est un faisceau λ-adique constructible tel que les noyaux et conoyaux de l'application $\mathcal{H}^0(\widehat{\mathcal{F}}) \to (\mathcal{F}_n)_n$ sont essentiellement nuls. Le foncteur $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{H}^0(\widehat{\mathcal{F}})$ induit une équivalence entre la catégorie des faisceaux essentiellement λ-adiques constructibles et la catégorie des faisceaux λ-adiques constructibles, inverse de l'équivalence naturelle décrite précédemment après la définition 12.*

Théorème 5. — *Soit X un schéma localement noethérien et $\mathcal{D} = \mathbb{D}^b_c(X, \mathcal{O}_\lambda)$. Posons*

$$\mathcal{D}^{\leq 0} = \{ \mathcal{F} \in \mathcal{D} \mid \forall i > 0 \ \mathcal{H}^i(\mathcal{F}) \text{ est essentiellement nul} \}$$

$$\mathcal{D}^{\geq 0} = \{ \mathcal{F} \in \mathcal{D} \mid \forall i < 0 \ \mathcal{H}^i(\mathcal{F}) \text{ est essentiellement nul} \}$$

Alors, $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ est une t-structure sur $\mathcal{D}$ de coeur la catégorie des faisceaux essentiellement λ-adiques constructibles. Le foncteur cohomologique associé est $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{H}^0(\mathcal{F})$ et les opérateurs de troncature $\tau_{\leq i}, \tau_{\geq i}$ sont ceux induits par les opérateurs de troncatures usuels.

Si $\mathcal{D}_2 = \mathbb{D}^b_c(X, \mathcal{O}_{\lambda_\bullet})_{norm}$, via l'équivalence de catégories triangulées $\mathcal{F} \mapsto \widehat{\mathcal{F}}$ entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_2$, la t-structure induite sur $\mathcal{D}_2$ est

$$\mathcal{D}_2^{\leq 0} = \{ \mathcal{F} \in \mathcal{D}_2 \mid \forall i > 0 \ \mathcal{H}^i(\mathcal{F}) = 0 \}$$

$$\mathcal{D}_2^{\geq 0} = \{ \mathcal{F} \in \mathcal{D}_2 \mid \forall i < -1 \ \mathcal{H}^i(\mathcal{F}) = 0 \text{ et } \mathcal{H}^{-1}(\mathcal{F}) \text{ est ess. nul} \}$$

De plus les opérateurs de troncature associés sont $\mathcal{F} \mapsto \tau_{\leq i}\mathcal{F}$ et $\mathcal{F} \mapsto \widehat{\tau_{\geq i}\mathcal{F}}$. Le coeur de $\mathcal{D}_2$ s'identifie à la catégorie des faisceaux λ-adiques constructibles et le foncteur cohomologique associé est $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{H}^0(\widehat{\mathcal{H}^0(\mathcal{F})})$.

Démonstration. C'est une conséquence du théorème précédent couplé au lemme 1. □

5.9. La t-structure perverse sur $\mathbb{D}^b_c(X, \mathcal{O}_\lambda)$. —

Définition 13. — *Soit $\mathcal{D} = \mathbb{D}^b_c(X, \mathcal{O}_\lambda)$. Posons*

$${}^p\mathcal{D}^{\leq 0} = \{ \mathcal{F} \in \mathcal{D} \mid \forall x \in X \ \forall i > -\dim \overline{\{x\}} \ \mathcal{H}^i(i_x^*\mathcal{F}) \text{ est ess. nul} \}$$

$${}^p\mathcal{D}^{\geq 0} = \{ \mathcal{F} \in \mathcal{D} \mid \forall x \in X \ \forall i < -\dim \overline{\{x\}} \ \mathcal{H}^i(Ri_x^!\mathcal{F}) \text{ est ess. nul} \}$$

Théorème 6. — *Supposons X noethérien et que $\mathbb{D}_c^b(X,\mathcal{O}_\lambda/\varpi_\lambda)$ possède un module dualisant. Alors $({}^p\mathcal{D}^{\leq 0}, {}^p\mathcal{D}^{\geq 0})$ est une t-structure sur $\mathcal{D}$. Son coeur noté $Perv(X,\mathcal{O}_\lambda)$ est une catégorie abélienne $\mathcal{O}_\lambda$-linéaire noethérienne.*

De plus, si $\mathcal{D}_2 = \mathbb{D}_c^b(X^{\mathbb{N}},\mathcal{O}_{\lambda\bullet})_{norm}$, dans l'équivalence $\mathcal{F}\mapsto\widehat{\mathcal{F}}$ entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_2$ la t-structure précédente correspond à

$$ {}^p\mathcal{D}_2^{\leq 0} = \{\ \mathcal{F}\in\mathcal{D}_2 \mid \forall x\in X\ \forall i > -\dim\overline{\{x\}}\ \mathcal{H}^i(i_x^*\mathcal{F}) = 0\ \} $$

$$ {}^p\mathcal{D}_2^{\geq 0} = \{\ \mathcal{F}\in\mathcal{D}_2 \mid \forall x\in X\ \forall i < -\dim\overline{\{x\}}-1\ \mathcal{H}^i(Ri_x^!\mathcal{F}) = 0\ \textit{et}\ \mathcal{H}^{-\dim\overline{\{x\}}-1}(Ri_x^!\mathcal{F})\ \textit{est ess. nul}\ \} $$

Démonstration. Montrons que $({}^p\mathcal{D}^{\leq 0}, {}^p\mathcal{D}^{\geq 0})$ est une t-structure par récurrence noethérienne. Supposons donc que pour tout sous-schéma fermé $F\subsetneq X$ la définition donnée définisse une t-structure sur $\mathbb{D}_c^b(F,\mathcal{O}_\lambda)$ (noter qu'un tel schéma F vérifie bien les hypothèses de l'énoncé puisque si $i : F\hookrightarrow X$ et K_X est dualisant sur X alors $Ri^!K_X$ est dualisant sur F). Tout $\mathcal{F}\in\mathcal{D}$ vérifie qu'il existe un ouvert dense U dans X tel que $\forall i\ \mathcal{H}^i(\mathcal{F})_{|U}$ soit un système local λ-adique modulo les systèmes essentiellement nuls ([**11**] proposition 1.2.6). Soit $K_X\in\mathbb{D}_c^b(X,\mathcal{O}_\lambda/\varpi_\lambda)$ un module dualisant. Il existe un ouvert dense V dans X et un entier $\delta\in\mathbb{Z}$ tels que $K_{X|V}\simeq\mathcal{L}[\delta]$ où $\mathcal{L}$ est un $\mathcal{O}_\lambda/\varpi_\lambda$-module localement libre de rang 1.
Pour un ouvert U irréductible dans X tel que le module dualisant $K_{X|U}$ soit de la forme précédente on vérifie facilement que si $\mathcal{D}'_U$ est la sous-catégorie de $\mathbb{D}_c^b(U,\mathcal{O}_\lambda)$ définie par $\mathcal{F}\in\mathcal{D}'_U$ ssi $\forall i\ \mathcal{H}^i(\mathcal{F})$ est essentiellement un système local λ-adique alors la t-structure définie dans l'énoncé définit une t-structure sur $\mathcal{D}'_U$. On utilise pour cela le fait que sur U le module $\mathcal{O}_\lambda/\varpi_\lambda\in\mathbb{D}_c^b(U,\mathcal{O}_\lambda/\varpi_\lambda)$ est dualisant et que donc grâce à la formule (cf. le chapitre 4 de [**4**])

$$ \mathcal{O}_\lambda/\varpi_\lambda \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_\lambda} R\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_\lambda}(\mathcal{F},\mathcal{G}) \simeq R\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_\lambda/\varpi_\lambda}(\mathcal{O}_\lambda/\varpi_\lambda \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathbb{Z}_\ell}\mathcal{F}, \mathcal{O}_\lambda/\varpi_\lambda \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathbb{Z}_\ell}\mathcal{G}) $$

$\mathcal{O}_{\lambda\bullet}\in\mathbb{D}_c^b(X,\mathcal{O}_\lambda)$ est dualisant en un sens évident et échange les foncteurs i_x^* et $Ri_x^!$. Sur $\mathcal{D}'_U$ les opérateurs de troncature pervers sont alors les opérateurs de troncature usuels décalés par la dimension de U).
Pour un ouvert U comme précédemment notons $\widetilde{\mathcal{D}}(U)$ la sous-catégorie triangulée de $\mathcal{D}$ formée des $\mathcal{F}\in\mathcal{D}$ tels que $\forall i\ \mathcal{H}^i(\mathcal{F})_{|U}$ soit essentiellement un système local λ-adique. Si $j : U\hookrightarrow X$ et $i : X\setminus U\hookrightarrow X$ alors, l'existence du module dualisant implique que les foncteurs $Ri^!$ et Rj_* respectent les catégories $\mathbb{D}_c^b$ pour les coefficients de torsion et donc pour les coefficients λ-adiques. Alors, la définition donnée dans l'énoncé induit une t-structure sur $\widetilde{\mathcal{D}}(U)$ par recollement (cf. [**2**]) de la t-structure sur $\mathcal{D}'_U$ et celle sur $\mathbb{D}_c^b(X\setminus U,\mathcal{O}_\lambda)$ obtenue par hypothèse de récurrence. Étant donné que "$\mathcal{D}=\bigcup_U\widetilde{\mathcal{D}}(U)$" on en déduit facilement que l'on a bien une t-structure sur $\mathcal{D}$.

La description de la t-structure sur $\mathbb{D}_c^b(X^{\mathbb{N}},\mathcal{O}_{\lambda\bullet})_{norm}$ résulte de ce que $\forall\mathcal{F}\in\mathbb{D}^b(X,\mathcal{O}_\lambda)$ $\forall x\in X\ i_x^*(\widehat{\mathcal{F}}) = \widehat{i_x^*\mathcal{F}}$, $Ri_x^!(\widehat{\mathcal{F}}) = \widehat{Ri_x^!\mathcal{F}}$ et du lemme 1.

La noethérianité de la catégorie $\mathrm{Perv}(X,\mathcal{O}_\lambda)$ se démontre comme pour le théorème 8.3 de [**7**] en utilisant la noethérianité de la catégorie des faisceaux λ-adiques constructibles. □

5.10. La t-structure perverse sur $\mathbb{D}^b(X^{\mathbb{N}},\mathcal{O}_{\lambda\bullet})$. — Définissons maintenant une t-structure "naïve" sur $\mathbb{D}^b(X^{\mathbb{N}},\mathcal{O}_{\lambda\bullet})$.

Théorème 7. — *Soit X un schéma noethérien de dimension finie. Soit $\mathcal{D}=\mathbb{D}^b(X^{\mathbb{N}},\mathcal{O}_{\lambda\bullet})$. Posons*

$$ {}^p\mathbb{D}^{\leq 0} = \{\ \mathcal{F}\in\mathbb{D}^b(X^{\mathbb{N}},\mathcal{O}_{\lambda\bullet}) \mid \forall x\in X\ \forall i > -\dim\overline{\{x\}}\ \mathcal{H}^i(i_x^*\mathcal{F}) = 0\ \} $$
$$ {}^p\mathbb{D}^{\geq 0} = \{\ \mathcal{F}\in\mathbb{D}^b(X^{\mathbb{N}},\mathcal{O}_{\lambda\bullet}) \mid \forall x\in X\ \forall i < -\dim\overline{\{x\}}\ \mathcal{H}^i(Ri_x^!\mathcal{F}) = 0\ \} $$

Alors, $({}^p\mathbb{D}^{\leq 0}, {}^p\mathbb{D}^{\geq 0})$ forme une t-structure sur $\mathcal{D}$.

Démonstration. Les méthodes de l'article [**7**] s'adaptent aussitôt. □

Définition 14. — *On note $Perv(X^{\mathbb{N}},\mathcal{O}_{\lambda\bullet})$ le coeur de la t-structure précédente. C'est une catégorie abélienne $\mathcal{O}_\lambda$-linéaire.*

5.11. Lien entre les deux t-structures. — Dans cette section le schéma X satisfait aux hypothèses du théorème 6.

Proposition 5. — *Soit $\mathcal{F} \in Perv(X, \mathcal{O}_\lambda)$ sans ϖ_λ-torsion. Alors $\widehat{\mathcal{F}} \in Perv(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet})$.*

Démonstration. D'après la description de la t-structure sur les faisceaux normalisés donnée dans le théorème 6 $\widehat{\mathcal{F}} \in {}^p\left(\mathbb{D}^b(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet})\right)^{\leq 0}$. Soit $\mathcal{G}$ un cône de l'application $\widehat{\mathcal{F}} \xrightarrow{\times\varpi_\lambda} \widehat{\mathcal{F}}$. Par hypothèse

$$\mathcal{G} \in \mathrm{Perv}(X, \mathcal{O}_\lambda) \cap \mathbb{D}^b(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_\lambda)_{norm}$$

Soit $x \in X$ et $i < -\dim \overline{\{x\}}$. Si $i < -\dim \overline{\{x\}} - 1$ d'après le théorème 6 $\mathcal{H}^i(Ri_x^! \widehat{\mathcal{F}}) = 0$. Il y a de plus une suite exacte

$$\underbrace{\mathcal{H}^{-\dim \overline{\{x\}}-2}(Ri_x^! \mathcal{G})}_{0} \longrightarrow \mathcal{H}^{-\dim \overline{\{x\}}-1}(Ri_x^! \mathcal{F}) \xrightarrow{\times\varpi_\lambda} \mathcal{H}^{-\dim \overline{\{x\}}-1}(Ri_x^! \mathcal{F})$$

et donc la multiplication par ϖ_λ sur le $\mathcal{O}_{\lambda\bullet}$-module $\mathcal{H}^{-\dim \overline{\{x\}}-1}(Ri_x^! \mathcal{F})$ est injective, module qui est donc nul. □

Corollaire 3. — *Le foncteur $\mathcal{F} \mapsto \widehat{\mathcal{F}}$ de $\mathbb{D}_c^b(X, \mathcal{O}_\lambda) \otimes L_\lambda$ dans $\mathbb{D}^b(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet}) \otimes L_\lambda$ est t-exact et induit donc un foncteur exact $Perv(X, \mathcal{O}_\lambda) \otimes L_\lambda \longrightarrow Perv(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet}) \otimes L_\lambda$.*

Démonstration. Si $\mathcal{F} \in \mathrm{Perv}(X, \mathcal{O}_\lambda)$, $\mathcal{F}$ étant un objet noethérien il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{F}/\mathcal{F}[\varpi_\lambda^N]$ soit sans ϖ_λ-torsion. L'existence du foncteur exacte entre $\mathrm{Perv}(X, \mathcal{O}_\lambda) \otimes L_\lambda$ et $\mathrm{Perv}(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet}) \otimes L_\lambda$ en résulte. La première assertion sur la t-exactitude s'en déduit par dévissage en "découpant un objet en faisceaux pervers décalés par troncatures succesives". □

5.12. Catégories dérivées filtrées λ-adiques. —

Définition 15. — *On note $\mathbb{D}F(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet})$ la catégorie dérivée filtrée des complexes de $\mathcal{O}_{\lambda\bullet}$-modules sur $X_{ét}^{\mathbb{N}} = (\cdots \to X_{ét} \to \cdots \to X_{ét})$ où les filtrations sont prises décroissantes finies (et non pas finies degré par degré). On note $\mathbb{D}^{e+}F(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet})$ la sous-catégorie formée des complexes filtrés C tels que pour $i << 0$ $\forall j$ $\mathcal{H}^i(Gr^j C)$ soit essentiellement nul.*

Il y a un couple de foncteurs

$$\mathbb{D}^{e+}F(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet}) \underset{\mathbb{L}\pi^*}{\overset{R\pi_*}{\rightleftarrows}} \mathbb{D}^+F(X, \mathcal{O}_\lambda)_{litt}$$

Tout objet de $\mathbb{D}^+F(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet})$ est isomorphe à un complexe $\mathrm{Fil}^\bullet(I_n^\bullet)_n$ où $\forall i \forall j$ $Gr^i(I_n^j)$ est un faisceau injectif et $\forall n$ $Gr^i(I_{n+1}^j) \to Gr^i(I_n^j)$ est un épimorphisme qui possède une section. Pour un tel complexe $R\pi_*(\mathrm{Fil}^\bullet I_\bullet^\bullet) = \varprojlim_n \mathrm{Fil}^\bullet I_n^\bullet$. On définit alors $R\pi_*$ sur $\mathbb{D}^{e+}(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet})$ par une procédure analogue à celle de [**4**] en utilisant le pro-système $\tau(-)$.
Quant au foncteur $\mathbb{L}\pi^*$ il se calcule naturellement sur les complexes filtrés $\mathrm{Fil}^\bullet C^\bullet$ tels que $\forall i, j$ $Gr^i C^j$ soit $\mathcal{O}_\lambda$-plat (ce qui est possible puisque $\mathcal{O}_{\lambda\bullet}$ est un $\pi^{-1}(\mathcal{O}_\lambda)$-module de Tor-dimension finie).

Définition 16. — *Un complexe filtré $C \in \mathbb{D}^{e+}F(X^{\mathbb{N}}, Ab)$ est essentiellement nul si $\forall j$ $Gr^j C$ l'est. Il est essentiellement constant s'il est isomorphe dans la catégorie des complexes filtrés sur $X_{ét}^{\mathbb{N}}$ localisée par les flèches de cône essentiellement nul à un objet de la forme $\pi^{-1}D$ où D est un complexe filtré de groupes abéliens sur $X_{ét}$.*

Définition 17. —
- *Un $\mathcal{O}_\lambda$-complexe filtré est un $C \in \mathbb{D}^{e+}F(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet})$ tel que le complexe filtré $\pi^*(\mathcal{O}_\lambda/\varpi_\lambda) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{\lambda\bullet}} C$ soit essentiellement constant.*
- *Un complexe filtré normalisé est un C tel que le morphisme $\tau(\mathbb{L}\pi^* R\pi_* C) \to \tau(C)$ soit un isomorphisme de pro-objets dans $\mathbb{D}^+F(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet})$.*
- *Le complexe filtré C est négligeable si $\pi^*(\mathcal{O}_\lambda/\varpi_\lambda) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{\lambda\bullet}} C$ est essentiellement nul.*
- *Un morphisme est essentiellement un isomorphisme si son cône est négligeable.*

– *Un morphisme de $\mathcal{O}_\lambda$-complexe est un morphisme entre pro-systèmes $\tau(-)$ associés dans $\mathbb{D}^{e+}F(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet})$.*

Définition 18. — *On note $\mathbb{D}^+F(X, \mathcal{O}_\lambda)$ le localisé de la catégorie des $\mathcal{O}_\lambda$-complexes vis à vis des morphismes qui sont essentiellement des isomorphismes.*

Comme dans [**4**], la sous-catégorie des complexes normalisés dans $\mathbb{D}^+F(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_\lambda)$ s'identifie à $\mathbb{D}^+F(X, \mathcal{O}_\lambda)$. Cette catégorie est munie de foncteurs

$$\forall j \; Gr^j : \mathbb{D}^+F(X, \mathcal{O}_\lambda) \longrightarrow \mathbb{D}^+(X, \mathcal{O}_\lambda)$$

Proposition 6. — *Reprenons les hypothèses du théorème 6. Il y a une équivalence de catégories entre la catégorie des objets de $Perv(X, \mathcal{O}_\lambda)$ munis d'une filtration finie et celle des objets C de $\mathbb{D}^+F(X, \mathcal{O}_\lambda)$ tels que $\forall i \; Gr^i C \in Perv(X, \mathcal{O}_\lambda)$.*

Démonstration. La démonstration de la proposition 1 s'adapte. Pour la pleine fidélité il suffit essentiellement de connaître l'existence d'une suite spectrale

$$\forall A, B \in \mathbb{D}^+F(X, \mathcal{O}_\lambda) \;\; E_1^{pq} \Longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}^+F(X,\mathcal{O}_\lambda)}(A, B[p+q])$$

où

$$E_1^{pq} = \begin{cases} \displaystyle\prod_{j-i=p} \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}^+(X,\mathcal{O}_\lambda)}(Gr^i A, Gr^j B[p+q]) & \text{si } p \geq 0 \\ 0 \;\; \text{si } p < 0 \end{cases}$$

Mais si l'on note $\forall C \in \mathbb{D}^+F(X, \mathcal{O}_\lambda) \;\; \widehat{C} = \mathbb{L}\pi^* R\pi_* C \in \mathbb{D}^+(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet})$ alors

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{D}^+F(X,\mathcal{O}_\lambda)}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}^+F(X^{\mathbb{N}},\mathcal{O}_{\lambda\bullet})}(\widehat{A}, \widehat{B})$$

L'existence de la suite spectrale se déduit alors de celle d'Illusie pour la catégorie dérivée filtrée $\mathbb{D}^+F(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet})$ une fois vérifié que

$$\forall C \in \mathbb{D}^+F(X, \mathcal{O}_\lambda) \;\; Gr^i \widehat{C} = \widehat{Gr^i C}$$

La surjectivité essentielle se démontre exactement de la même façon que dans la proposition 1. □

On vérifie maintenant aussitôt le lemme suivant :

Lemme 2. — *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne $\mathcal{O}_\lambda$-linéaire et $F\mathcal{A}$ la catégorie formée des objets de $\mathcal{A}$ munis d'une filtration de longueur finie. Le foncteur*

$$(F\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{O}_\lambda} L_\lambda \longrightarrow F\left(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_\lambda} L_\lambda\right)$$

induit une équivalence de catégories.

Définition 19. — *Pour $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne $\mathcal{O}_\lambda$-linéaire on note indifféremment $F\mathcal{A} \otimes L_\lambda$ l'une des deux catégories définies dans le lemme précédent et identifiées grâce à celui-ci.*

La vérification du lemme qui suit est également immédiate.

Lemme 3. — *Soit X un schéma noethérien de dimension finie tel que $\mathbb{D}_c^b(X, \mathcal{O}_\lambda/\varpi_\lambda)$ possède un module dualisant. Le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} F\,Perv(X, \mathcal{O}_\lambda) \otimes L_\lambda & \xrightarrow{\alpha} & F\,Perv(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet}) \otimes L_\lambda \\ \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} \\ \mathbb{D}_c^b F(X, \mathcal{O}_\lambda) \otimes L_\lambda & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{D}^b F(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet}) \otimes L_\lambda \end{array}$$

où α est le foncteur définit grâce au corollaire 3, β est le foncteur de normalisation $\mathcal{F} \mapsto \widehat{\mathcal{F}}$, γ est définit via la proposition 6 et δ grâce à la proposition 1.

6. Le théorème clef

Théorème 8. — *Soit X_0 un k-schéma de type fini et $x \in X_0$ (un point non nécessairement fermé). Soit*

$$f : Spec(\widehat{\mathcal{O}}_{X_0,x}) \longrightarrow Spec(\mathcal{O}_{X_0,x})$$

Alors, si Λ est de torsion première à p

$$f^* : \mathbb{D}^b_c(Spec(\mathcal{O}_{X_0,x})_{ét}, \Lambda) \longrightarrow \mathbb{D}^+(Spec(\widehat{\mathcal{O}}_{X_0,x})_{ét}, \Lambda)$$

et

$$f^* : \mathbb{D}^b(Spec(\mathcal{O}_{X_0,x})^{\mathbb{N}}_{ét}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet}) \longrightarrow \mathbb{D}^+(Spec(\widehat{\mathcal{O}}_{X_0,x})^{\mathbb{N}}_{ét}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet})$$

sont t-exacts, où dans le second cas la t-structure est celle définie dans le théorème 7.

Démonstration. Il est clair que le cas de torsion implique le second cas puisqu'il suffit de le vérifier étage par étage. Nous nous y restreignons donc. Notons

$$A = \mathcal{O}_{X_0,x}, \quad Y = \mathrm{Spec}(\widehat{A}), \quad Z = \mathrm{Spec}(A)$$

On vérifie facilement que

$$\forall y \in Y \quad \dim \overline{\{f(y)\}} \geq \dim \overline{\{y\}}$$

et que donc f^* est t-exact à droite :

$$f^*\left({}^p\mathbb{D}^{\leq 0}\right) \subset {}^p\mathbb{D}^{\leq 0}$$

La t-exactitude à gauche de f^* repose sur le théorème de désingularisation de Popescu ([**12**]). D'après celui-ci, l'anneau A étant excellent, il existe un système inductif filtrant $(B_i)_{i\in I}$ de A-algèbres lisses et un isomorphisme de A-algèbres

$$\widehat{A} \simeq \varinjlim_{i \in I} B_i$$

Quitte à localiser les B_i on peut supposer que $\forall i$ B_i est un anneau local, les morphismes

$$A \longrightarrow B_i \longrightarrow \widehat{A}$$

sont locaux et B_i est une A-algèbre essentiellement lisse. Notons $W_i = \mathrm{Spec}(B_i)$ et

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h_i"'] & & Z \\ & W_i \arrow[ur, "g_i"'] & \end{tikzcd}$$

Notons d_i la dimension relative de g_i. Soit donc

$$\mathcal{F} \in \mathbb{D}^b_c(Z, \Lambda) \cap {}^p\mathbb{D}^{\geq 0}$$

Il existe un morphisme lisse de k-schémas de type fini de dimension relative d_i

$$\widetilde{W_i} \xrightarrow{\widetilde{g}_i} \widetilde{Z}$$

des points $a \in \widetilde{W_i}$ et $b \in \widetilde{Z}$ tels que $\widetilde{g}_i(a) = b$, un complexe de faisceaux $\widetilde{\mathcal{F}} \in \mathbb{D}^b_c(\widetilde{Z}, \Lambda) \cap {}^p\mathbb{D}^{\geq -\dim \overline{\{x\}}}$ et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} W_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "\alpha", "\simeq"'] & Z \arrow[d, "\beta", "\simeq"'] \\ \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\widetilde{W}_i,a}) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\widetilde{Z},b}) \arrow[d, "\delta"] \\ \widetilde{W_i} \arrow[r, "\widetilde{g}_i"] & \widetilde{Z} \end{tikzcd}$$

tel que

$$(\delta\beta)^* \widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$$

Le décalage $\dim \overline{\{x\}} = \dim \overline{\{b\}}$ provient de ce que pour U un schéma de type fini sur k et $u \in U$ si $\varphi : \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{U,u}) \to U$ alors $\varphi^*[\dim \overline{\{u\}}]$ est t-exact.
D'après [**2**] pages 108-109, $\widetilde{g}_i$ étant lisse $\widetilde{g}_i^*[d_i]$ est t-exact et donc

$$\widetilde{g}_i^* \widetilde{\mathcal{F}}[d_i] \in {}^p\mathbb{D}^{\geq - \dim \overline{\{x\}}}$$

Étant donné que l'extension de corps résiduel induite par le morphisme d'anneaux locaux $A \to B_i$ est triviale, $\dim \overline{\{x\}} = \dim \overline{\{a\}}$. On en déduit que

$$\forall i \;\; g_i^* \mathcal{F}[d_i] = \alpha^* \gamma^* \widetilde{g}_i^* \widetilde{F}[d_i] \in {}^p\mathbb{D}^{\geq 0}$$

Soit maintenant $\mathfrak{q} \in Y$. Il existe un $i_0 \in I$ tel que

$$\forall i \geq i_0 \text{ si } \mathfrak{p}_i = h_i(\mathfrak{q}) \text{ alors } \mathfrak{p}_i.\widehat{A} = \mathfrak{q}$$

On vérifie alors que si

$$\begin{array}{rcl} i_{\mathfrak{q}} & : & \mathrm{Spec}(k(\mathfrak{q})) \longrightarrow Y \\ \mu_i & : & \mathrm{Spec}(k(\mathfrak{q})) \longrightarrow \mathrm{Spec}(k(\mathfrak{p}_i)) \\ i_{\mathfrak{p}_i} & : & \mathrm{Spec}(k(\mathfrak{p}_i)) \longrightarrow W_i \end{array}$$

alors

$$\boxed{Ri_{\mathfrak{q}}^! \left(f^* \mathcal{F} \right) = \varinjlim_{i \geq i_0} \mu_i^* Ri_{\mathfrak{p}_i}^! \left(g_i^* \mathcal{F} \right)}$$

Étant donné que $g_i^* \mathcal{F} \in {}^p\mathbb{D}^{\geq -d_i}$ on en déduit que

$$\mathcal{H}^k \left(Ri_{\mathfrak{q}}^! (f^* \mathcal{F}) \right) = 0 \;\text{ si } \forall i \geq i_0 \;\; k < -\dim \overline{\{\mathfrak{p}_i\}} + d_i$$

Le théorème résulte donc de l'inégalité suivante

$$\forall i \geq i_0 \;\; \dim \overline{\{\mathfrak{p}_i\}} \leq \dim \overline{\{\mathfrak{q}\}} + d_i$$

Celle-ci se démontre de la façon suivante : étant donné que l'extension de corps résiduels induite par le morphisme local essentiellement lisse $A \to B_i$ est triviale, il y a un diagramme commutatif de A-algèbres

$$\begin{tikzcd} B_i \arrow[r] \arrow[d, hook] & \widehat{A} \\ \widehat{B}_i \arrow[r, dash, "\simeq"] & \widehat{A}[[T_1, \ldots, T_{d_i}]] \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

où ψ est continu, $\psi(T_i)$ appartenant à l'idéal maximal de $\widehat{A}$. De plus c'est un morphisme de $\widehat{A}$-algèbres. Dès lors, si $I = \mathfrak{p}_i \widehat{B}_i \subset \widehat{A}[[T_1, \ldots, T_{d_i}]]$, si $\forall k \; \psi(T_k) = t_k$ alors

$$\ker \psi = (T_1 - t_1, \ldots, T_{d_i} - t_{d_i})$$

ce qui implique que

$$\widehat{A}/\mathfrak{q} = \widehat{A}/\psi(I)\widehat{A} \simeq \widehat{A}[[T_1, \ldots, T_{d_i}]] / \left(I + (T_1 - t_1, \ldots, T_{d_i} - t_{d_i}) \right)$$

et donc

$$\dim \widehat{A}/\mathfrak{q} \geq \dim \underbrace{\widehat{A}[[T_1, \ldots, T_{d_i}]]/I}_{\simeq \widehat{B}_i/I \simeq (\widehat{B_i/\mathfrak{p}_i})} - d_i = \dim B_i/\mathfrak{p}_i - d_i$$

La première inégalité résultant de ce que

$$\mathrm{ht}_{\widehat{A}[[T_1, \ldots, T_{d_i}]]/I} \left(I + (T_1 - t_1, \ldots, T_{d_i} - t_{d_i})/I \right) \leq d_i$$

et qu'étant donné que B_i est excellent $\widehat{B}_i/I = \widehat{B_i/\mathfrak{p}_i}$ est équidimensionnel (EGA IV Scholie 7.8.3. (x)). $\square$

7. Démonstration du théorème principal

7.1. Hypothèses et notations. — Soit A une $\mathcal{O}$-algèbre plate locale et complète. On suppose que le corps résiduel de $\mathcal{O}$ est séparablement clos i.e. $s = \overline{s}$ (on vérifie aisément que l'on peut se ramener à ce cas là pour nos besoins). Soit

$$\mathcal{F} \in \mathbb{D}^b(\mathrm{Spec}(A[\frac{1}{\pi}])^{\mathbb{N}}_{\text{ét}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet}) \otimes L_\lambda$$

On suppose qu'il existe un $\mathcal{O}$-schéma de type fini X, un point fermé $x \in X_s$ tel que $A \simeq \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ et un faisceau pervers $\mathcal{G} \in \mathrm{Perv}(X_\eta, \mathcal{O}_\lambda) \otimes L_\lambda$ tel que via le foncteur $\mathcal{G} \mapsto \widehat{\mathcal{G}} \in \mathrm{Perv}(X_\eta^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet}) \otimes L_\lambda$ du corollaire 3 et un isomorphisme $A \simeq \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ on ait

$$\widehat{\mathcal{G}}_{|\mathrm{Spec}(A[\frac{1}{\pi}])} \simeq \mathcal{F}$$

On note encore $\mathcal{F}$ pour l'extension de $\mathcal{F}$ à $\mathrm{Spec}(A)_{\bar{\eta}}$. Considérons le diagramme

$$\mathrm{Spec}(A)_{\bar{\eta}} \xhookrightarrow{j} \mathrm{Spec}(A \otimes_{\mathcal{O}} \overline{\mathcal{O}}) \xhookleftarrow{i} \mathrm{Spec}(A)_s$$

où $\mathrm{Spec}(A)_s = \mathrm{Spec}(A/\pi A)$.

7.2. Perversité des cycles évanescents formels et quasi-unipotence de la monodromie. —

Théorème 9. — *Soit*

$$R\Psi_\eta(\mathcal{F}) = i^* Rj_* \mathcal{F} \in \mathbb{D}^+(\mathit{Spec}(A)^{\mathbb{N}}_s, \mathcal{O}_{\lambda\bullet}) \otimes L_\lambda$$

Alors,

$$R\Psi_\eta(\mathcal{F}) \in \mathit{Perv}(\mathit{Spec}(A)^{\mathbb{N}}_s, \mathcal{O}_{\lambda\bullet}) \otimes L_\lambda$$

De plus, pour tout $T \in I_{\bar{\eta}/\eta}$ l'action de T sur $R\Psi_\eta(\mathcal{F})$ est quasi-unipotente : pour N suffisamment divisible et $k >> 0$

$$(T^N - \mathit{Id})^k = 0 \in \mathit{End}(R\Psi_\eta(\mathcal{F}))$$

Démonstration. Fixons un quadruplet $(X, x, \mathcal{G}, f)$ où $(X, x, \mathcal{G})$ est comme dans la section d'auparavant et

$$f : \mathrm{Spec}(A) \longrightarrow X$$

se factorise par $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \longrightarrow X$ et induit un isomorphisme

$$\mathrm{Spec}(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$$

D'après le théorème de changement de base régulier de Fujiwara (corollaire 7.1.6 de [**6**] où il est énoncé dans le cas de torsion mais le cas utilisé ici s'en déduit aussitôt puisqu'il suffit de le vérifier étage par étage dans le topos $X^{\mathbb{N}}_{\text{ét}}$) il y a un isomorphisme

$$\bar{f}^* \mathrm{R}\Psi_\eta(\widehat{\mathcal{G}}) \simeq \mathrm{R}\Psi_\eta(\mathcal{F})$$

où $\bar{f} : \mathrm{Spec}(A \otimes \bar{\mathcal{O}}) \longrightarrow X \otimes \overline{\mathcal{O}}$. Le résultat se déduit alors du cas algébrique connu pour X (i.e. $\mathrm{R}\Psi_\eta(\mathcal{F})$ est de longueur finie, $\mathrm{End}(\mathrm{R}\Psi_\eta(\mathcal{F}))$ est un L_λ-e.v. de dimension finie et l'action de l'inertie $I_{\bar{\eta}|\eta}$ dessus est continue) puisque

$$\mathrm{R}\Psi_\eta(\widehat{\mathcal{G}}) = \widehat{\mathrm{R}\Psi_\eta(\mathcal{G})}$$

et du théorème 8. □

7.3. Énoncé et démonstration du théorème principal. — Rappelons maintenant le lemme suivant :

Lemme 4. — *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne L_λ-linéaire et $A \in \mathcal{A}$. Soit $N \in End(\mathcal{A})$ un endomorphisme nilpotent. Il existe alors une unique filtration croissante finie $Fil_\bullet A$ sur A telle que $\forall i$ $NFil_i A \subset Fil_{i-2} A$ et N induise un isomorphisme $N^i : Gr_i A \xrightarrow{\sim} Gr_{-i} A$. De plus, si $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ est un foncteur exacte entre catégories abéliennes alors l'objet filtré associé à $(F(A), F(N))$ est $F(Fil_\bullet A)$.*

Définition 20. — *Soit $T \in I_{\bar{\eta}|\eta}$ s'envoyant sur un générateur de la composante $\mathbb{Z}_\ell(1)$ dans l'inertie modérée. Soit $N = \log T \in End(R\Psi_\eta(\mathcal{F}))$. Soit $Fil_\bullet R\Psi_\eta(\mathcal{F})$ l'objet filtré associé par le lemme précédent. Nous noterons $K(\mathcal{F}) \in \mathbb{D}^b F(Spec(A)_s^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet}) \otimes L_\lambda$ l'objet associé par la proposition 1 à $(Fil_{-i} R\Psi_\eta(\mathcal{F}))_{i\in\mathbb{Z}}$.*

Proposition 7. — *Soit $(X, x, \mathcal{G}, f)$ comme dans la démonstration du théorème 9. Considérons le complexe filtré $K(\mathcal{G}) \in \mathbb{D}_c^b F(X, \mathcal{O}_\lambda) \otimes L_\lambda$ associé à $R\Psi_\eta(\mathcal{G})$ muni de sa filtration de monodromie par le lemme précédent et la proposition 6. Il y a un isomorphisme canonique*

$$f^*\widehat{K(\mathcal{G})} \simeq K(\mathcal{F})$$

Démonstration. La démonstration résulte du théorème 8 couplé à l'isomorphisme de Fujiwara comme dans la démonstration du théorème 9 ainsi que du lemme 3. Il faut par exemple vérifier que le théorème 8 implique la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
F\mathrm{Perv}(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet}) \otimes L_\lambda \arrow[r, "f^*"] \arrow[d] & F\mathrm{Perv}(\mathrm{Spec}(A)^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet}) \otimes L_\lambda \arrow[d] \\
\mathbb{D}^b F(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet}) \otimes L_\lambda \arrow[r, "f^*"] & \mathbb{D}^b F(\mathrm{Spec}(A)^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet}) \otimes L_\lambda
\end{tikzcd}$$

ce qui est immédiat. □

Lemme 5. — *Dans le cas d'un point, il y a des équivalences de catégories*

$$\mathbb{D}_c^b F(s, \mathcal{O}_\lambda) \otimes L_\lambda \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_c^b F(\mathcal{O}_\lambda) \otimes L_\lambda \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_c^b F(L_\lambda)$$

où $\mathbb{D}_c^b F(\mathcal{O}_\lambda)$ est la catégorie dérivée filtrée bornée des $\mathcal{O}_\lambda$-module de type fini, $\mathbb{D}_c^b F(L_\lambda)$ celle des L_λ-e.v. de dimension finie. La première équivalence est donnée par $R\pi_*$ et un inverse par $\mathbb{L}\pi^*$.

Démonstration. Elle ne pose pas de problèmes particuliers □

Désormais nous identifierons les trois catégories intervenant dans le lemme précédent.

Proposition 8. — *Soit $\kappa : s \longrightarrow Spec(A)_s$ le point fermé. À isomorphisme canonique près il existe un unique complexe $L(\mathcal{F}) \in \mathbb{D}_c^b F(L_\lambda)$ tel que via le foncteur de normalisation $\mathbb{D}_c^b F(s, \mathcal{O}_\lambda) \otimes L_\lambda \longrightarrow \mathbb{D}^b F(s^{\mathbb{N}}, \mathcal{O}_{\lambda\bullet}) \otimes L_\lambda$*

$$L(\mathcal{F}) \longmapsto \kappa^* K(\mathcal{F})$$

Démonstration. L'existence résulte de la proposition 7 et l'unicité de la pleine fidélité du foncteur de normalisation. □

Venons en au théorème principal.

Théorème 10. — *Pour tout quadruplet $(X, x, \mathcal{G}, f)$ il y a un isomorphisme canonique induit par f*

$$K(\mathcal{G})_x \xrightarrow{\sim} L(\mathcal{F})$$

Démonstration. Il s'agit de spécialiser la proposition 7 au point fermé de Spec(A). □

La proposition suivante sera utilisée par Pascal Boyer dans son travail.

Proposition 9. — *Soit $B = A[[X_1, \ldots, X_n]]$ et $h : Spec(B) \longrightarrow Spec(A)$ la projection. Alors,*

$$K(h^*\mathcal{F}[n]) = h^*K(\mathcal{F})[n]$$

$$L(\mathcal{F}) = L(h^*\mathcal{F}[n])[-n]$$

Démonstration. Nous laissons les détails de la démonstration au lecteur. Il s'agit d'utiliser le théorème d'acyclicité local des morphismes lisses couplé à la proposition 7 et à la t-exactitude de h^* (t-exactitude qui se déduit du théorème de Popescu (dans ce cas là c'est un théorème de M.Artin) comme dans la démonstration du théorème 8). □

Références

[1] V. Berkovich – « Vanishing cycles for formal schemes. II », *Invent. Math.* **125** (1996), no. 2, p. 367–390.

[2] J. Bernstein, A. Beilinson & P. Deligne – « Faisceaux pervers », in *Analyse et topologie sur les espaces singuliers, Asterisque 100*, 1982.

[3] P. Boyer – « Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de shimura simples et applications », *preprint*.

[4] T. Ekedahl – « On the adic formalism », in *The Grothendieck Festschrieft*, vol. 2, Birkhauser.

[5] K. Fujiwara – « A proof of the absolute purity conjecture (after gabber) », in *Algebraic geometry 2000, Azumino*, Adv. Stud. Pure Math., 36, 2002, p. 153–183.

[6] K. Fujiwara – « Theory of tubular neighborhood in étale topology », *Duke Math. J.* **80** (1995), no. 1, p. 15–57.

[7] O. Gabber – « Notes on some t-structures », in *Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II*, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2004, p. 711–734.

[8] R. Huber – « A finiteness result for direct image sheaves on the étale site of rigid analytic varieties », *J. Algebraic Geom.* **7** (1998), no. 2, p. 159–403.

[9] L. Illusie – *Complexe cotangent et déformations. I*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 239, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

[10] ———, *Complexe cotangent et déformations. II*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 283, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

[11] J.-P. Jouanolou – « Cohomologie ℓ-adique », in *SGA V*.

[12] M. Spivakovsky – « A new proof of D. Popescu's theorem on smoothing of ring homomorphisms », *J. Amer. Math. Soc.* **12** (1999), no. 2, p. 381–444.

Laurent Fargues, CNRS-université Paris-Sud-IHES • *E-mail :* `laurent.fargues@math.u-psud.fr`