

**Sur quelques représentations potentiellement cristallines
de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$**

Laurent BERGER et Christophe BREUIL



Institut des Hautes Études Scientifiques
35, route de Chartres
91440 – Bures-sur-Yvette (France)

Janvier 2006

IHES/M/06/03

SUR QUELQUES REPRÉSENTATIONS POTENTIELLEMENT CRISTALLINES DE $GL_2(\mathbf{Q}_p)$

par

Laurent Berger & Christophe Breuil

Résumé. — On associe aux représentations p -adiques irréductibles de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ de dimension 2 devenant cristallines sur une extension abélienne de \mathbf{Q}_p des espaces de Banach p -adiques $B(V)$ munis d'une action linéaire continue unitaire de $GL_2(\mathbf{Q}_p)$. Lorsque V est de plus φ -semi-simple, on utilise le (φ, Γ) -module et le module de Wach de V pour montrer que la représentation $B(V)$ est non nulle, topologiquement irréductible et admissible.

Abstract (On some potentially crystalline representations of $GL_2(\mathbf{Q}_p)$)

To each 2-dimensional irreducible p -adic representation of $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ which becomes crystalline over an abelian extension of \mathbf{Q}_p , we associate a Banach space $B(V)$ endowed with a linear continuous unitary action of $GL_2(\mathbf{Q}_p)$. When V is moreover φ -semi-simple, we use the (φ, Γ) -module and the Wach module associated to V to show that the representation $B(V)$ is nonzero, topologically irreducible and admissible.

Table des matières

1. Introduction.....	2
1.1. Introduction.....	2
1.2. Notations.....	3
2. Représentations p -adiques.....	4
2.1. Quelques anneaux de séries formelles.....	4
2.2. Représentations p -adiques et (φ, Γ) -modules.....	6
2.3. Topologie faible et treillis.....	9
2.4. Théorie de Hodge p -adique.....	12
2.5. Théorie de Hodge p -adique et (φ, Γ) -modules.....	15
3. Représentations apc.....	16
3.1. Modules de Wach.....	17
3.2. De $N(V)$ à $D_{\text{cris}}(V)$	19
3.3. Une autre construction de $N(V)$	22
3.4. Représentations apc de dimension 2 et représentations du Borel ..	27
4. Représentations apc irréductibles de $GL_2(\mathbf{Q}_p)$	31
4.1. Fonctions de classe \mathcal{C}^r et distributions d'ordre r	31
4.2. Définition de $B(V)$	34
4.3. Une autre description de $B(V)$	37
5. Représentations de $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ et (φ, Γ) -modules.....	43

5.1. Deux lemmes.....	43
5.2. D'un monde à l'autre.....	47
5.3. Irréductibilité et admissibilité.....	52
5.4. Le cas non générique.....	55
Références.....	56

1. Introduction

1.1. Introduction. — Soit p un nombre premier et $n \in \mathbf{N}$. Dans la recherche d'une correspondance éventuelle entre (certaines) représentations p -adiques V de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ de dimension n et (certaines) représentations p -adiques $B(V)$ de $\text{GL}_n(\mathbf{Q}_p)$, un des cas importants à regarder est certainement celui où $n = 2$, V est absolument irréductible, devient cristalline sur une extension abélienne de \mathbf{Q}_p et est φ -semi-simple. Cette dernière condition signifie que le Frobenius φ sur le φ -module filtré $D_{\text{cris}}(V)$ associé par Fontaine à V est semi-simple. La représentation V a des poids de Hodge-Tate distincts $i_1 < i_2$ et, si l'on note $\text{Alg}(V)$ la représentation algébrique de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ de plus haut poids $(i_1, i_2 - 1)$ et $\text{Lisse}(V)$ la représentation lisse irréductible de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ associée par la correspondance locale de Hecke à la représentation de Weil déduite de V par [Fon94c], la représentation $B(V)$ est simplement le complété p -adique de la représentation localement algébrique $\text{Alg}(V) \otimes \text{Lisse}(V)$ par rapport à un réseau stable par $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et de type fini sous l'action de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Notons que $\text{Lisse}(V)$ est toujours ici une représentation de la série principale. Ainsi, $B(V)$ est un espace de Banach p -adique muni d'une action continue unitaire de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ (i.e. laissant une norme invariante). Notons que, lorsque $\text{Lisse}(V)$ est de dimension 1, cette définition de $B(V)$ doit être modifiée.

Le problème est qu'il n'est pas du tout évident qu'un tel réseau existe, ou, de manière équivalente, que $B(V)$ soit non nul. Dans [Bre03a, théorème 1.3], la non nullité de $B(V)$ est démontrée lorsque V est cristalline et $i_2 - i_1 < 2p$ (essentiellement), et dans [Bre03b, théorème 1.3.3], son admissibilité (au sens de [ST02b]) et son irréductibilité topologique (avec une condition supplémentaire pour cette dernière). La méthode repose sur le calcul de la réduction d'une boule unité de $B(V)$ modulo l'idéal maximal des coefficients.

Lorsque V est de dimension 2, absolument irréductible mais cette fois semi-stable non cristalline, $B(V)$ est défini dans [Bre03b] et [Bre03c] et des conjectures analogues (non nullité, admissibilité, etc.) formulées et très partiellement démontrées. P. Colmez dans [Col04a] a vu que la théorie des (φ, Γ) -modules de Fontaine permettait de démontrer élégamment ces conjectures dans le cas semi-stable en construisant un modèle de la restriction au Borel supérieur de la représentation duale $B(V)^*$ à partir du (φ, Γ) -module de V .

Il était donc naturel de regarder si un tel modèle existait aussi dans le cas des représentations V potentiellement cristallines ci-dessus et s'il permettait de démontrer

les conjectures de non nullité, d'irréductibilité et d'admissibilité. La réponse est affirmative et fait l'objet du présent article. Comme dans [Col04a], on démontre donc un isomorphisme Borel-équivariant entre $B(V)^*$ et $(\varprojlim_{\psi} D(V))^b$ (théorème 5.2.7) où $D(V)$ est le (φ, Γ) -module associé à la représentation potentiellement cristalline V et où la limite projective consiste en les suites ψ -compatibles bornées d'éléments de $D(V)$. Pour montrer cet isomorphisme, il est nécessaire d'une part d'étendre au cas potentiellement cristallin considéré la théorie des modules de Wach de [Ber04a] et [Wa96], d'autre part de passer par une description intermédiaire de $B(V)$ comme espace de fonctions continues sur \mathbf{Q}_p d'un certain type (théorème 4.3.1). Les résultats côté (φ, Γ) -modules permettent alors de déduire le résultat principal de cet article (§5.3) :

Théorème. — *Si V est une représentation p -adique absolument irréductible de dimension 2 de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, qui devient cristalline sur une extension abélienne de \mathbf{Q}_p et qui est φ -semi-simple, alors $B(V)$ est non nul, topologiquement irréductible et admissible.*

On obtient aussi deux autres corollaires, l'un concernant tous les réseaux possibles stables par $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ dans $\text{Alg}(V) \otimes \text{Lisse}(V)$ (corollaire 5.3.4), l'autre concernant les vecteurs localement analytiques dans $B(V)$ (corollaires 5.3.6 et 5.4.3).

D'autres isomorphismes $B(V)^* \simeq (\varprojlim_{\psi} D(V))^b$ sont démontrés lorsque V est trianguline non de Rham dans [Col04b], mais les méthodes d'analyse p -adique côté $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ y sont sensiblement différentes. Ici, on utilise de manière essentielle l'existence d'un entrelacement entre deux façons d'écrire la série principale $\text{Lisse}(V)$ (correspondant essentiellement aux deux façons d'ordonner les caractères que l'on induit), entrelacement qui « passe à la complétion p -adique » et permet de définir un *entrelacement p -adique* entre deux façons d'écrire le Banach $B(V)$. On s'aperçoit alors que cet entrelacement p -adique a une interprétation en théorie de Hodge p -adique : si deux distributions de $B(V)^*$ se correspondent par cet entrelacement (on ne distingue pas ici les deux manières d'écrire $B(V)$), alors les deux éléments qu'on leur associe dans $(\varprojlim_{\psi} D(V))^b$ sont reliés par une condition équivalente à la donnée de la *filtration de Hodge* sur $D_{\text{cris}}(V)$ (voir §5.1 et lemme 5.2.3).

Lorsque V n'est pas φ -semi-simple, signalons que $B(V)^*$ et $(\varprojlim_{\psi} D(V))^b$ sont toujours définis mais que l'on ignore s'ils sont naturellement isomorphes (l'entrelacement ci-dessus est dans ce cas l'identité).

Une première version de cet article (octobre 2004), dont une version préliminaire avait fait l'objet d'un cours au C.M.S. de Hangzhou en août 2004 ([BB04]), ne traitait que le cas des représentations cristallines.

1.2. Notations. — On fixe $\overline{\mathbf{Q}}_p$ une clôture algébrique de \mathbf{Q}_p , on note « val » la valuation sur $\overline{\mathbf{Q}}_p$ telle que $\text{val}(p) \stackrel{\text{déf}}{=} 1$, $|\cdot|$ la norme p -adique $|x| \stackrel{\text{déf}}{=} p^{-\text{val}(x)}$ et \mathbf{C}_p le complété de $\overline{\mathbf{Q}}_p$ pour $|\cdot|$. On normalise l'isomorphisme de la théorie du corps de classes local

en envoyant les uniformisantes sur les Frobenius géométriques. On note ε le caractère cyclotomique p -adique de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ vu aussi comme caractère de \mathbf{Q}_p^\times . En particulier, $\varepsilon(p) = 1$ et $\varepsilon|_{\mathbf{Z}_p^\times} : \mathbf{Z}_p^\times \rightarrow \mathbf{Z}_p^\times$ est l'identité. On note $\text{nr}(x)$ le caractère non ramifié de \mathbf{Q}_p^\times envoyant p sur x . On désigne par L une extension finie de \mathbf{Q}_p , \mathcal{O}_L son anneau d'entiers, k_L son corps résiduel et π_L une uniformisante. On note V une représentation p -adique de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, c'est-à-dire un L -espace vectoriel de dimension finie muni d'une action linéaire et continue de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, et T un \mathcal{O}_L -réseau de V stable par $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$. Enfin, $\text{B}(\mathbf{Q}_p)$ désigne les matrices triangulaires supérieures dans $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et $\text{B}(\mathbf{Z}_p)$ le sous-groupe de ces matrices qui sont dans $\text{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$.

On note F_n l'extension finie de \mathbf{Q}_p dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$ engendrée par les racines p^n -ièmes de l'unité et $F_\infty \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcup_{n \geq 0} F_n$. On fixe dans tout cet article le choix d'une suite compatible $(\zeta_{p^n})_{n \geq 0}$ de racines primitives p^n -ièmes de l'unité. Le groupe de Galois $\Gamma \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Gal}(F_\infty/\mathbf{Q}_p)$ est isomorphe à \mathbf{Z}_p^\times via le caractère cyclotomique et si $n \geq 1$, alors $\Gamma_n \stackrel{\text{déf}}{=} \varepsilon^{-1}(1 + p^n \mathbf{Z}_p)$ s'identifie au groupe de Galois $\text{Gal}(F_\infty/F_n)$. On note $L_n = L \otimes_{\mathbf{Q}_p} F_n$, ce qui fait que L_n est un produit de corps et un $L_n[\Gamma]$ -module simple. Si $\eta : \Gamma \rightarrow \mathcal{O}_L^\times$ est un caractère fini à valeurs dans L , on note $G(\eta)$ la somme de Gauss associée à η : si $\eta = 1$, alors $G(\eta) = 1$ et si η est de conducteur $n = n(\eta) \geq 1$, alors $G(\eta) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_n} \eta^{-1}(\gamma) \otimes \gamma(\zeta_{p^n}) \in L_n$. On vérifie facilement les propriétés suivantes des sommes de Gauss :

- (i) si $g \in \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, alors $g(G(\eta)) = \eta(g)G(\eta)$ (g agissant linéairement sur L) ;
- (ii) on a $G(\eta) \cdot G(\eta^{-1}) = p^{n(\eta)}\eta(-1)$ et en particulier $G(\eta) \in L_n^\times$.

Tous les espaces de Banach B de ce texte sont p -adiques et tels que $\|B\| \subseteq |L|$. On appelle $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -Banach unitaire un espace de Banach B muni d'une action à gauche L -linéaire de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ telle que les applications $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p) \rightarrow B, g \mapsto gv$ sont continues pour tout $v \in B$ et telle que, pour un choix de norme $\|\cdot\|$ sur B , on a $\|gv\| = \|v\|$ pour tout $g \in \text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et tout $v \in B$. Un $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -Banach unitaire est dit admissible (suivant [ST02b]) si le Banach dual est de type fini sur $L \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_L[[\text{GL}_2(\mathbf{Z}_p)]]$ où $\mathcal{O}_L[[\text{GL}_2(\mathbf{Z}_p)]] \stackrel{\text{déf}}{=} \varprojlim \mathcal{O}_L[\text{GL}_2(\mathbf{Z}_p)/H]$, la limite projective étant prise sur les sous-groupes de congruences principaux H de $\text{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$.

2. Représentations p -adiques

2.1. Quelques anneaux de séries formelles. — Le but de ce paragraphe est d'introduire certains anneaux de séries formelles ($\mathcal{O}_\mathcal{E}, \mathcal{E}, \mathcal{E}^+, \mathcal{R}^+, \mathcal{E}^\dagger$ et \mathcal{R}), ainsi que certaines des structures dont ils sont munis et dont nous avons besoin dans la suite de cet article. On commence par rappeler succinctement les définitions de ces divers anneaux.

(i) On note $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ l'anneau formé des séries $\sum_{i \in \mathbf{Z}} a_i X^i$ telles que $a_i \in \mathcal{O}_L$ et $a_{-i} \rightarrow 0$ quand $i \rightarrow +\infty$. C'est un anneau local de corps résiduel $k_L((X))$.

(ii) On note $\mathcal{E} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{O}_\mathcal{E}[1/p]$, c'est un corps local de dimension 2.

(iii) On note $\mathcal{E}^+ \stackrel{\text{déf}}{=} L \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_L[[X]]$.

(iv) On note \mathcal{R}^+ l'anneau des séries formelles $f(X) \in L[[X]]$ qui convergent sur le disque unité, ce qui fait que \mathcal{E}^+ s'identifie au sous-anneau de \mathcal{R}^+ constitué des séries formelles à coefficients bornés.

(v) On note \mathcal{E}^\dagger le sous-corps de \mathcal{E} constitué des séries $f(X) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} a_i X^i$ telles qu'il existe $\rho < 1$ pour lequel $|a_{-i}| \rho^{-i} \rightarrow 0$ quand $i \rightarrow +\infty$.

(vi) On note \mathcal{R} l'anneau formé des séries $\sum_{i \in \mathbf{Z}} a_i X^i$ telles que $a_i \in L$, telles qu'il existe $\rho < 1$ pour lequel $|a_{-i}| \rho^{-i} \rightarrow 0$ quand $i \rightarrow +\infty$, et telles que pour tout $\sigma < 1$, on ait $|a_i| \sigma^i \rightarrow 0$ quand $i \rightarrow +\infty$. Le corps \mathcal{E}^\dagger s'identifie alors au sous-anneau de \mathcal{R} constitué des séries formelles à coefficients bornés.

Le corps \mathcal{E} est muni de la norme de Gauss $\|\cdot\|_{\text{Gauss}}$ définie par $\|f(X)\|_{\text{Gauss}} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{i \in \mathbf{Z}} |a_i|$ si $f(X) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} a_i X^i$. L'anneau des entiers de \mathcal{E} pour cette norme est $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, et la norme de Gauss induit sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ la topologie π_L -adique. L'application naturelle $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \rightarrow k_L((X))$ est alors continue si l'on donne à $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ la topologie π_L -adique et à $k_L((X))$ la topologie discrète.

On peut définir une topologie moins fine sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, la topologie faible, définie par le fait que les $\{\pi_L^i \mathcal{O}_{\mathcal{E}} + X^j \mathcal{O}_L[[X]]\}_{i,j \geq 0}$ forment une base de voisinages de zéro, et la topologie faible sur $\mathcal{E} = \cup_{k \geq 0} \pi_L^{-k} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ qui est la topologie de la limite inductive. Cette topologie induit la topologie (π_L, X) -adique sur $\mathcal{O}_L[[X]]$, et l'application naturelle $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \rightarrow k_L((X))$ est alors continue si l'on donne à $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ la topologie faible et à $k_L((X))$ la topologie X -adique.

Si $\rho < 1$, alors on peut définir une norme $\|\cdot\|_{D(0,\rho)}$ sur \mathcal{R}^+ par la formule :

$$(1) \quad \|f(X)\|_{D(0,\rho)} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{\substack{z \in \mathbf{C}_p \\ |z| \leq \rho}} |f(z)| = \sup_{i \geq 0} |a_i| \rho^i,$$

si $f(X) = \sum_{i \geq 0} a_i X^i$. L'ensemble des normes $\{\|\cdot\|_{D(0,\rho)}\}_{0 < \rho < 1}$ définit une topologie sur \mathcal{R}^+ qui en fait un espace de Fréchet.

Définition 2.1.1. — Si $f(X) \in \mathcal{R}^+$ et $r \in \mathbf{R}_{\geq 0}$, on dit que $f(X)$ est d'ordre r (il serait plus correct de dire « d'ordre $\leq r$ ») si pour un ρ tel que $0 < \rho < 1$, la suite $\{p^{-nr} \|f(X)\|_{D(0,\rho^{1/p^n})}\}_{n \geq 0}$ est bornée.

Il est facile de voir que si c'est vrai pour un choix de $0 < \rho < 1$, alors c'est vrai pour tout choix de $0 < \rho < 1$. Un exemple de série d'ordre 1 est donné par $f(X) = \log(1+X)$.

Nous allons maintenant rappeler les formules qui définissent l'action de Γ , le frobenius φ et l'opérateur ψ sur ces anneaux. Soit R l'un des anneaux $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, \mathcal{E} , \mathcal{E}^+ , \mathcal{R}^+ , \mathcal{E}^\dagger ou \mathcal{R} .

Commençons par l'action de Γ ; le caractère cyclotomique $\varepsilon : \Gamma \rightarrow \mathbf{Z}_p^\times$ est un isomorphisme. L'anneau R est alors muni d'une action de Γ , telle que si $\gamma \in \Gamma$, alors γ agit par un morphisme de L -algèbres, et $\gamma(X) \stackrel{\text{déf}}{=} (1+X)^{\varepsilon(\gamma)} - 1$. On vérifie facilement que Γ agit par des isométries, pour toutes les normes et topologies définies ci-dessus. Les idéaux de

\mathcal{R}^+ ou de \mathcal{E}^+ qui sont stables sous l'action de Γ sont d'une forme très particulière. Pour $n \geq 1$, on note :

$$Q_n(X) = \frac{(1+X)^{p^n} - 1}{(1+X)^{p^{n-1}} - 1}$$

ce qui fait par exemple que $Q_1(X) = ((1+X)^p - 1)/X$ et que $Q_n(X) = \varphi^{n-1}(Q_1(X))$. Le polynôme $Q_n(X)$ est le polynôme minimal sur \mathbf{Q}_p de $\zeta_{p^n} - 1$ et l'idéal de $L[X]$ qu'il engendre est donc stable sous l'action de Γ .

Lemme 2.1.2. — *Si I est un idéal principal de \mathcal{R}^+ , qui est stable par Γ , alors il existe une suite d'entiers $\{j_n\}_{n \geq 0}$ telle que I est engendré par un élément de la forme $X^{j_0} \prod_{n=1}^{+\infty} (Q_n(X)/p)^{j_n}$.*

Si I est un idéal de \mathcal{E}^+ , qui est stable par Γ , alors il existe une suite finie d'entiers j_0, j_1, \dots, j_m telle que I est engendré par un élément de la forme $X^{j_0} \prod_{n=1}^m Q_n(X)^{j_n}$.

Pour $L = \mathbf{Q}_p$ ce lemme fait l'objet de [Ber04a, lemme I.3.2] et la démonstration s'adapte sans problème. Signalons tout de même que les polynômes $Q_n(X)$ ne sont plus nécessairement irréductibles dans $L[X]$, et que leurs diviseurs éventuels engendrent des idéaux de $L[X]$ stables par des sous-groupes ouverts de Γ .

L'anneau R est aussi muni d'un morphisme de Frobenius φ , qui est lui-aussi un morphisme de L -algèbres, tel que $\varphi(X) \stackrel{\text{déf}}{=} (1+X)^p - 1$. Cette application est continue pour toutes les topologies ci-dessus et commute à l'action de Γ .

Passons maintenant à l'opérateur ψ . L'anneau R est un $\varphi(R)$ -module libre de rang p , dont une base est donnée par $\{(1+X)^i\}_{0 \leq i \leq p-1}$. Si $y \in R$, on peut donc écrire $y = \sum_{i=0}^{p-1} (1+X)^i \varphi(y_i)$.

Définition 2.1.3. — Si R est l'un des anneaux $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, \mathcal{E} , \mathcal{E}^+ , \mathcal{R}^+ , \mathcal{E}^\dagger ou \mathcal{R} , alors on définit un opérateur $\psi : R \rightarrow R$ par la formule $\psi(y) \stackrel{\text{déf}}{=} y_0$ si $y = \sum_{i=0}^{p-1} (1+X)^i \varphi(y_i)$.

Cet opérateur vérifie alors $\psi(\varphi(x)y) = x\psi(y)$ et commute à l'action de Γ . Il ne commute pas à φ et n'est pas $\mathcal{O}_L[[X]]$ -linéaire.

2.2. Représentations p -adiques et (φ, Γ) -modules. — Rappelons qu'une représentation L -linéaire de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ est un L -espace vectoriel V de dimension finie muni d'une action linéaire et continue de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$. Il est assez difficile de décrire un tel objet, et nous allons voir dans ce paragraphe qu'une certaine classe de « (φ, Γ) -modules » permet d'en donner une description explicite.

Un φ -module sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ -module de type fini D muni d'un morphisme φ -semi-linéaire $\varphi : D \rightarrow D$. On écrit $\varphi^*(D)$ pour le $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ -module engendré par $\varphi(D)$ dans D et on dit que D est étale si $D = \varphi^*(D)$. Un φ -module sur \mathcal{E} est un \mathcal{E} -espace vectoriel de dimension finie D muni d'un morphisme φ -semi-linéaire $\varphi : D \rightarrow D$. On dit que D est étale si D a un $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ -réseau stable par φ et étale. Un (φ, Γ) -module est un φ -module muni

d'une action continue de Γ par des morphismes semi-linéaires (par rapport à l'action de Γ sur les coefficients) et commutant à φ .

Si D est un (φ, Γ) -module étale sur \mathcal{E} , et si $\mathbf{B} = \widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}$ est l'anneau construit par Fontaine dans [Fon90, §A1.2], alors $V(D) \stackrel{\text{déf}}{=} (\mathbf{B} \otimes_{\mathcal{E}} D)^{\varphi=1}$ est un L -espace vectoriel de dimension $\dim_{\mathcal{E}}(D)$ muni d'une action linéaire et continue de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$: c'est une représentation L -linéaire de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$. On a alors le résultat suivant (cf. [Fon90, §A3.4]) :

Théorème 2.2.1. — *Le foncteur $D \mapsto V(D)$ est une équivalence de catégories :*

- (i) *de la catégorie des (φ, Γ) -modules étales sur \mathcal{E} vers la catégorie des représentations L -linéaires de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$;*
- (ii) *de la catégorie des (φ, Γ) -modules étales sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ vers la catégorie des \mathcal{O}_L -représentations de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$.*

L'inverse de ce foncteur est noté $V \mapsto D(V)$, et on peut montrer que $D(V) = (\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/F_{\infty})}$. Les (φ, Γ) -modules étales nous donnent donc un moyen commode de travailler avec les représentations L -linéaires. En théorie, les (φ, Γ) -modules permettent de retrouver tous les objets que l'on peut associer aux représentations L -linéaires (et en pratique, c'est souvent le cas). Dans ce paragraphe et les suivants, nous allons rappeler quelques unes de ces constructions.

Si R est l'un des anneaux \mathcal{E}^{\dagger} ou \mathcal{R} , alors on définit de la même manière la notion de φ -module et de (φ, Γ) -module sur R .

Si D^{\dagger} est un φ -module sur \mathcal{E}^{\dagger} , alors $D \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{E}^{\dagger}} D^{\dagger}$ est un φ -module sur \mathcal{E} et on dit que D^{\dagger} est étale si D l'est. Le résultat ci-dessous (dont l'analogie pour des φ -modules sans action de Γ est faux) est dû à Cherbonnier et Colmez (cf. [CC98, §III.5]).

Théorème 2.2.2. — *Le foncteur $D^{\dagger} \mapsto \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{E}^{\dagger}} D^{\dagger}$, de la catégorie des (φ, Γ) -modules étales sur \mathcal{E}^{\dagger} vers la catégorie des (φ, Γ) -modules étales sur \mathcal{E} , est une équivalence de catégories.*

En particulier, si V est une représentation p -adique de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, alors on peut lui associer, grâce au théorème ci-dessus, un (φ, Γ) -module sur \mathcal{E}^{\dagger} noté $D^{\dagger}(V)$. Il existe d'ailleurs un anneau $\mathbf{B}^{\dagger} \subset \mathbf{B}$ tel que $D^{\dagger}(V) = (\mathbf{B}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/F_{\infty})}$.

Si D^{\dagger} est un φ -module sur \mathcal{E}^{\dagger} , alors $D_{\text{rig}}^{\dagger} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{E}^{\dagger}} D^{\dagger}$ est un φ -module sur \mathcal{R} et D^{\dagger} est étale si et seulement si D_{rig}^{\dagger} est « pur de pente nulle » au sens de [Ked04]. Nous donnons pour référence le résultat ci-dessous (cf. [Ked04]) qui ne nous servira pas dans le reste de cet article :

Théorème 2.2.3. — *Le foncteur $D^{\dagger} \mapsto \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{E}^{\dagger}} D^{\dagger}$, de la catégorie des φ -modules étales sur \mathcal{E}^{\dagger} vers la catégorie des φ -modules de pente nulle sur \mathcal{R} , est une équivalence de catégories.*

Pour terminer, donnons dès à présent la définition ci-dessous, qui joue un rôle important pour les représentations que nous considérons dans cet article.

Définition 2.2.4. — Si V est une représentation L -linéaire de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, on dit que V est de hauteur finie s'il existe un sous- \mathcal{E}^+ -module D^+ de D qui est stable par φ et Γ et tel que l'application naturelle $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{E}^+} D^+ \rightarrow D$ est un isomorphisme.

On peut montrer (cf. [Fon90, §B1.8]) que si $\mathbf{B}^+ = A_S^+[1/p]$ est l'anneau construit dans [Fon90, §B1.8], et que l'on pose $D^+(V) = (\mathbf{B}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/F_\infty)}$, alors tout \mathcal{E}^+ -module D^+ satisfaisant les conditions de la définition ci-dessus est contenu dans $D^+(V)$ et donc que V est de hauteur finie si et seulement si $D(V)$ a une base constituée d'éléments de $D^+(V)$. Les représentations de hauteur finie sont étudiées dans [Fon90, §B] et dans [Col99].

Passons maintenant à la définition de l'opérateur ψ sur les (φ, Γ) -modules. Si D est un φ -module étale (sur \mathcal{E}^\dagger ou sur \mathcal{E}) et si $y \in D$, alors on peut écrire $y = \sum_{i=0}^{p-1} (1+X)^i \varphi(y_i)$ où les $y_i \in D$ sont bien déterminés.

Définition 2.2.5. — Si D est un φ -module étale sur \mathcal{E}^\dagger ou sur \mathcal{E} , alors on définit un opérateur $\psi : D \rightarrow D$ par la formule $\psi(y) \stackrel{\text{déf}}{=} y_0$ si $y = \sum_{i=0}^{p-1} (1+X)^i \varphi(y_i)$.

Cet opérateur vérifie alors $\psi(\varphi(x)y) = x\psi(y)$ et $\psi(x\varphi(y)) = \psi(x)y$ si $x \in \mathcal{E}^\dagger$ (ou \mathcal{E}) et $y \in D$, et commute à l'action de Γ si D est un (φ, Γ) -module. C'est cet opérateur qui permet de faire le lien entre les représentations L -linéaires de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ et les représentations de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ (ce qui est l'objet de cet article), et aussi le lien entre les (φ, Γ) -modules et la cohomologie d'Iwasawa des représentations de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, ce que nous rappelons ci-dessous.

Si V est une représentation L -linéaire, alors les invariants de $D(V)$ sous l'action de ψ jouent un rôle important. Nous commençons par rappeler ci-dessous deux propriétés importantes de ce module.

Proposition 2.2.6. — On a $D(V)^{\psi=1} = D^\dagger(V)^{\psi=1}$ et le \mathcal{E} -espace vectoriel $D(V)$ a une base constituée d'éléments de $D(V)^{\psi=1}$.

Démonstration. — Le fait que $D(V)^{\psi=1} = D^\dagger(V)^{\psi=1}$ est un résultat de Cherbonnier dont on trouvera une démonstration dans [CC99, §III.3] et la deuxième assertion est démontrée dans [CC99, §I.7]. \square

Corollaire 2.2.7. — Si V est une représentation L -linéaire de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, alors $D(V)^{\psi=1} \neq 0$.

Rappelons brièvement la définition de la cohomologie d'Iwasawa. Si V est une représentation L -linéaire de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, si T est un \mathcal{O}_L -réseau $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ -stable de V , et si

$i \geq 0$, alors on définit :

$$H_{\mathrm{Iw}}^i(\mathbf{Q}_p, T) \stackrel{\mathrm{d}\acute{\mathrm{e}}\mathrm{f}}{=} \varprojlim_{\mathrm{cor}_{F_{n+1}/F_n}} H^i(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/F_n), T).$$

Le groupe $H_{\mathrm{Iw}}^i(\mathbf{Q}_p, V) \stackrel{\mathrm{d}\acute{\mathrm{e}}\mathrm{f}}{=} \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} H_{\mathrm{Iw}}^i(\mathbf{Q}_p, T)$ ne dépend alors pas du choix de T . Les $\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Z}_p[[\Gamma]]$ -modules $H_{\mathrm{Iw}}^i(\mathbf{Q}_p, V)$ ont été étudiés en détail par Perrin-Riou, qui a notamment montré (cf. [Per94, §3.2]) :

Proposition 2.2.8. — *Si V est une représentation p -adique de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, alors on a $H_{\mathrm{Iw}}^i(\mathbf{Q}_p, V) = 0$ si $i \neq 1, 2$. De plus :*

- (i) *le sous-module de $\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Z}_p[[\Gamma]]$ -torsion de $H_{\mathrm{Iw}}^1(\mathbf{Q}_p, V)$ est isomorphe à $V^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/F_\infty)}$ et $H_{\mathrm{Iw}}^1(\mathbf{Q}_p, V)/\{\text{torsion}\}$ est un $\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Z}_p[[\Gamma]]$ -module libre de rang $\dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$;*
- (ii) $H_{\mathrm{Iw}}^2(\mathbf{Q}_p, V) = (V^*(1)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/F_\infty)})^*$.

Les espaces $D(V)^{\psi=1}$ et $D(V)/(1-\psi)$ sont eux aussi des $\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Z}_p[[\Gamma]]$ -modules et on a le résultat suivant (cf. [CC99, §II.1]) :

Proposition 2.2.9. — *On a des isomorphismes canoniques de $\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Z}_p[[\Gamma]]$ -modules $H_{\mathrm{Iw}}^1(\mathbf{Q}_p, V) \simeq D(V)^{\psi=1}$ et $H_{\mathrm{Iw}}^2(\mathbf{Q}_p, V) \simeq D(V)/(1-\psi)$.*

Terminons ce paragraphe avec un lemme technique concernant l'action de ψ sur les (φ, Γ) -modules.

Lemme 2.2.10. — *Si T est une \mathcal{O}_L -représentation sans torsion ou une k_L -représentation et si $M \subset D(T)$ est un $\mathcal{O}_L[[X]]$ -module de type fini et stable par ψ tel que $\bigcap_{j \geq 0} \psi^j(M) = 0$, alors $M = 0$.*

Démonstration. — Montrons tout d'abord le lemme pour les k_L -représentations. Le module M n'est pas nécessairement stable par φ , mais il existe $r \geq 0$ tel que $\varphi(M) \subset X^{-r}M$ et alors $\varphi(X^r M) \subset X^r M$ ce qui fait que $X^r M \subset \psi(X^r M)$ et donc que :

$$X^r M \subset \bigcap_{j \geq 0} \psi^j(X^r M) \subset \bigcap_{j \geq 0} \psi^j(M) = 0,$$

ce qui fait que $X^r M = 0$ et donc que $M = 0$.

Passons à présent au cas des \mathcal{O}_L -représentations. Dans ce cas, en considérant l'image de M dans $D(T/\pi_L T)$, et en utilisant le lemme pour la k_L -représentation $T/\pi_L T$, on voit qu'un M qui satisfait les hypothèses du lemme est inclus dans $\pi_L D(T)$ et en itérant ce procédé, on trouve que $M \subset \bigcap_{k \geq 0} \pi_L^k D(T) = 0$. \square

2.3. Topologie faible et treillis. — Nous allons maintenant nous intéresser à la topologie des (φ, Γ) -modules sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ et \mathcal{E} . Si D est un $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ -module libre de rang d , alors le choix d'une base de D donne un isomorphisme $D \simeq \mathcal{O}_\mathcal{E}^d$ et on peut munir D de la topologie faible induite par cet isomorphisme. Un petit calcul montre qu'une application

$\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ -linéaire $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^d \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^d$ est nécessairement continue et donc que la topologie définie sur D par $D \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^d$ ne dépend pas du choix d'une base de D .

Lemme 2.3.1. — *Si P est une partie d'un $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ -module libre D , et $M(P)$ est le $\mathcal{O}_L[[X]]$ -module engendré par P , alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) P est bornée pour la topologie faible ;
- (ii) $M(P)$ est borné pour la topologie faible ;
- (iii) pour tout $j \geq 1$, l'image de $M(P)$ dans $D/\pi_L^j D$ est un $\mathcal{O}_L[[X]]$ -module de type fini.

Démonstration. — Choisissons une base de D , et notons D^+ le $\mathcal{O}_L[[X]]$ -module engendré par cette base. Ainsi, la topologie faible sur D est définie par le fait que les $\{\pi_L^i D + X^j D^+\}_{i,j \geq 0}$ forment une base de voisinages de zéro. En particulier, une partie P de D est bornée si et seulement si pour tout $k \geq 0$, il existe $n(k, P) \in \mathbf{Z}$ tel que $P \subset \pi_L^k D + X^{n(k, P)} D^+$. Comme le $\mathcal{O}_L[[X]]$ -module engendré par $\pi_L^k D + X^{n(k, P)} D^+$ est $\pi_L^k D + X^{n(k, P)} D^+$ lui-même, on voit que les propriétés (i) et (ii) sont équivalentes. Il reste donc à montrer que les $\mathcal{O}_L[[X]]$ -modules bornés sont ceux qui satisfont (iii), c'est-à-dire qu'un $\mathcal{O}_L[[X]]$ -module M est borné si et seulement si pour tout $j \geq 1$, l'image de M dans $D/\pi_L^j D$ est un $\mathcal{O}_L[[X]]$ -module de type fini. Si M est borné, alors par définition, pour tout $j \geq 1$, il existe $n(j, M)$ tel que $M \subset \pi_L^j D + X^{n(j, M)} D^+$ ce qui fait que l'image de M dans $D/\pi_L^j D$ est contenue dans celle de $X^{n(j, M)} D^+$ et est de type fini puisque $\mathcal{O}_L[[X]]$ est un anneau noetherien. Réciproquement, si M satisfait (iii), alors pour tout $j \geq 1$ l'image de M dans $D/\pi_L^j D$ est un $\mathcal{O}_L[[X]]$ -module de type fini et est donc contenue dans $X^{n(j, M)} D^+$ pour un $n(j, M) \in \mathbf{Z}$, ce qui fait que $M \subset \pi_L^j D + X^{n(j, M)} D^+$ et donc que M est borné pour la topologie faible. \square

Définition 2.3.2. — Un treillis de D est un $\mathcal{O}_L[[X]]$ -module borné $M \subset D$ tel que l'image de M dans $D/\pi_L D$ en est un $k_L[[X]]$ -réseau. Un treillis d'un \mathcal{E} -module D est un treillis d'un $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ -réseau de D .

Les treillis font l'objet d'une étude détaillée dans [Col04a, §4]. Rappelons le résultat de base sur les treillis stables par ψ d'un φ -module D (c'est la proposition 4.29 de [Col04a]) :

Proposition 2.3.3. — *Si D est un φ -module étale sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, il existe un unique treillis D^\sharp de D vérifiant les propriétés suivantes :*

- (i) quels que soient $x \in D$ et $k \in \mathbf{N}$, il existe $n(x, k) \in \mathbf{N}$ tel que $\psi^n(x) \in D^\sharp + p^k D$ si $n \geq n(x, k)$;
- (ii) l'opérateur ψ induit une surjection de D^\sharp sur lui-même.

De plus :

- (iii) si N est un sous- $\mathcal{O}_L[[X]]$ module borné de D et $k \in \mathbf{N}$, il existe $n(N, k)$ tel que $\psi^n(N) \subset D^\sharp + p^k D$ si $n \geq n(N, k)$;

(iv) si N est un treillis de D stable par ψ tel que ψ induise une surjection de N sur lui-même, alors $N \subset D^\sharp$ et D^\sharp/N est annihilé par X .

Si V est une représentation L -linéaire de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, on note $D^\sharp(V)$ le treillis associé à $D(V)$ dans la proposition ci-dessus. Le lemme ci-dessous précise le (iv) de cette proposition.

Lemme 2.3.4. — Si V est irréductible et de dimension ≥ 2 , et si N est un treillis de $D(V)$ stable par ψ et tel que ψ induise une surjection de N sur lui-même, alors $N = D^\sharp(V)$.

Démonstration. — Si V est irréductible et de dimension ≥ 2 , alors $V^{\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p^{\text{ab}})} = 0$ et le lemme suit alors du (iii) de la remarque 5.5 de [Col04a] et de la démonstration de la proposition 4.47 de [Col04a]. \square

Le reste de ce paragraphe est consacré au début de l'étude des limites projectives définies ci-dessous.

Définition 2.3.5. — (i) On note $(\varprojlim_{\psi} D(V))^{\text{b}}$ le L -espace vectoriel des suites $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $D(V)$ telles que l'ensemble $\{x_n\}_{n \geq 0}$ est borné (d'où le « b ») pour la topologie faible et telles que $\psi(x_{n+1}) = x_n$.

(ii) On note $(\varprojlim_{\psi} D^\sharp(V))^{\text{b}}$ le L -espace vectoriel des suites $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $D^\sharp(V)$ telles que l'ensemble $\{x_n\}_{n \geq 0}$ est borné pour la topologie faible et telles que $\psi(x_{n+1}) = x_n$.

(iii) Si T est un \mathcal{O}_L -réseau de V stable par $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, on note $(\varprojlim_{\psi} D^\sharp(T))^{\text{b}}$ le \mathcal{O}_L -module des suites ψ -compatibles et bornées pour la topologie faible d'éléments de $D^\sharp(T)$.

Ces trois espaces sont munis de la topologie de la limite projective.

Proposition 2.3.6. — L'injection $D^\sharp(V) \hookrightarrow D(V)$ induit un isomorphisme topologique $(\varprojlim_{\psi} D^\sharp(V))^{\text{b}} \rightarrow (\varprojlim_{\psi} D(V))^{\text{b}}$ et si T est un \mathcal{O}_L -réseau de V stable par $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, alors $L \otimes_{\mathcal{O}_L} (\varprojlim_{\psi} D^\sharp(T))^{\text{b}} = (\varprojlim_{\psi} D^\sharp(V))^{\text{b}}$.

Démonstration. — Il est clair que l'application $(\varprojlim_{\psi} D^\sharp(V))^{\text{b}} \rightarrow (\varprojlim_{\psi} D(V))^{\text{b}}$ est injective. Fixons un \mathcal{O}_L -réseau T de V stable par $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$. Si $x = (x_n)_{n \geq 0} \in (\varprojlim_{\psi} D(V))^{\text{b}}$, alors par définition l'ensemble $P \stackrel{\text{déf}}{=} \{x_n\}_{n \geq 0}$ est borné pour la topologie faible et par le lemme 2.3.1, le $\mathcal{O}_L[[X]]$ -module $M(P)$ engendré par P est borné (pour la topologie faible). Quitte à multiplier x par une puissance de π_L , on peut d'ailleurs supposer que $x_m \in D(T)$ pour tout $m \geq 0$. Si $k, m \geq 0$, alors la proposition 2.3.3 appliquée à $N = M(P)$ montre que $x_m = \psi^n(x_{m+n}) \in D^\sharp(T) + p^k D(T)$ si n est assez grand. Comme c'est vrai pour tout k , on en déduit que $x_m \in D^\sharp(T)$ pour tout m et donc que l'application $L \otimes_{\mathcal{O}_L} (\varprojlim_{\psi} D^\sharp(T))^{\text{b}} \rightarrow (\varprojlim_{\psi} D(V))^{\text{b}}$ est une bijection. C'est un homéomorphisme car la

topologie de $D^\sharp(T)$ est la topologie induite par la topologie faible de $D(T)$ via l'inclusion $D^\sharp(T) \subset D(T)$. On en déduit les deux points de la proposition. \square

Rappelons que $\psi : D^\sharp(T) \rightarrow D^\sharp(T)$ est surjective, ce qui fait que les applications de transition dans $\varprojlim_\psi D^\sharp(T)$ le sont. Le lemme ci-dessous et son corollaire seront utilisés dans le paragraphe §5.2. Nous verrons en effet plus bas que, *pour les représentations que nous considérons*, on a $(\varprojlim_\psi D^\sharp(T))^b = \varprojlim_\psi D^\sharp(T)$.

Lemme 2.3.7. — *L'application naturelle $(\varprojlim_\psi D^\sharp(T))/(1 - \psi) \rightarrow D^\sharp(T)/(1 - \psi)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Cette application est évidemment surjective, et nous allons montrer qu'elle est injective, c'est-à-dire que si $x = (x_n)_{n \geq 0} \in \varprojlim_\psi D^\sharp(T)$, avec $x_0 \in (1 - \psi)D^\sharp(T)$, alors $x \in (1 - \psi)\varprojlim_\psi D^\sharp(T)$. Soit $y_0 \in D^\sharp(T)$ tel que $(1 - \psi)y_0 = x_0$. Pour tout $m \geq 0$, il existe $y_m^0 \in D^\sharp(T)$ tel que $\psi^m(y_m^0) = y_0$ et on a alors $(1 - \psi)y_m^0 - x_m \in D^\sharp(T)^{\psi^m=0}$. L'opérateur $1 - \psi$ est bijectif sur $D^\sharp(T)^{\psi^m=0}$ (un inverse étant donné par $1 + \psi + \psi^2 + \dots + \psi^{m-1}$) et il existe donc $y_m \in D^\sharp(T)$ tel que $(1 - \psi)y_m = x_m$. Pour tout $k \geq 0$, soit $z_k \stackrel{\text{déf}}{=} (z_{k,n})_{n \geq 0} \in \varprojlim_\psi D^\sharp(T)$ tel que $z_{k,k} = y_k$. Comme $\varprojlim_\psi D^\sharp(T)$ est un espace topologique compact, la suite $\{z_k\}_{k \geq 0}$ a une valeur d'adhérence z et comme $(1 - \psi)z_k \rightarrow x$ quand $k \rightarrow \infty$ (par la continuité de ψ , voir la proposition 3.4.4 ci-dessous), on voit que $(1 - \psi)z = x$ et donc que $x \in (1 - \psi)\varprojlim_\psi D^\sharp(T)$. \square

Corollaire 2.3.8. — *On a un isomorphisme de $\mathcal{O}_L[[\Gamma]]$ -modules $(\varprojlim_\psi D^\sharp(T))/(1 - \psi) \simeq H_{\text{Iw}}^2(\mathbf{Q}_p, T)$.*

Démonstration. — La proposition 4.43 de [Col04a] affirme que $D^\sharp(T)/(1 - \psi) = D(T)/(1 - \psi)$, et la remarque II.3.2 de [CC99] (cf. la proposition 2.2.9 ci-dessus) nous dit que $D(T)/(1 - \psi) = H_{\text{Iw}}^2(\mathbf{Q}_p, T)$ ce qui fait que l'on a une succession d'isomorphismes :

$$(\varprojlim_\psi D^\sharp(T))/(1 - \psi) \simeq D^\sharp(T)/(1 - \psi)D^\sharp(T) \simeq D(T)/(1 - \psi)D(T) \simeq H_{\text{Iw}}^2(\mathbf{Q}_p, T).$$

\square

2.4. Théorie de Hodge p -adique. — Le but de ce paragraphe est de rappeler la classification de certaines représentations p -adiques, les représentations apc (qui sont définies ci-dessous), en terme de certains $(\varphi, \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p))$ -modules filtrés.

Afin de classifier certaines représentations L -linéaires du groupe $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, Fontaine a introduit (entre autres) les anneaux \mathbf{B}_{cris} et \mathbf{B}_{dR} (cf. [Fon94a]). Ces anneaux vérifient les propriétés suivantes :

(i) L'anneau \mathbf{B}_{cris} est une \mathbf{Q}_p -algèbre munie d'une action de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, telle que $\mathbf{B}_{\text{cris}}^{\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)} = \mathbf{Q}_p$ et d'un Frobenius φ qui commute à l'action de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$;

(ii) le corps \mathbf{B}_{dR} est le corps des fractions d'un anneau complet de valuation discrète \mathbf{B}_{dR}^+ (dont le corps résiduel est \mathbf{C}_p), et il est donc muni de la filtration définie par les puissances de l'idéal maximal. Il est aussi muni d'une action continue de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, telle que $\mathbf{B}_{\text{dR}}^{\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)} = \mathbf{Q}_p$ et la filtration est stable sous l'action de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$;

(iii) on a une inclusion naturelle $\mathbf{B}_{\text{cris}} \subset \mathbf{B}_{\text{dR}}$ et une suite exacte (dite « fondamentale ») :

$$0 \rightarrow \mathbf{Q}_p \rightarrow \mathbf{B}_{\text{cris}}^{\varphi=1} \rightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}}/\mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \rightarrow 0;$$

(iv) il existe $t \in \mathbf{B}_{\text{cris}}$ tel que $\varphi(t) = pt$ et t est un générateur de l'idéal maximal de \mathbf{B}_{dR}^+ . Le choix d'un tel t , qui est déterminé par le choix d'une suite compatible $(\zeta_{p^n})_{n \geq 0}$ de racines primitives p^n -ièmes de l'unité, détermine une application injective $\mathcal{R}^+ \rightarrow L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{B}_{\text{cris}}$, donnée par la formule $f(X) \mapsto f(\exp(t) - 1)$, ce qui fait par exemple que t est l'image de $\log(1 + X)$, et cette injection commute à $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ et à φ ;

(v) si $m \geq 0$, alors on a une application injective $\iota_m \stackrel{\text{déf}}{=} \varphi^{-m} : L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{B}_{\text{cris}} \rightarrow L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{B}_{\text{dR}}$, donnée sur \mathcal{R}^+ par la formule $f(X) \mapsto f(\zeta_{p^m} \exp(t/p^m) - 1)$, et la filtration de \mathcal{R}^+ induite par cette application est donnée par la filtration « ordre d'annulation en $\zeta_{p^m} - 1$ ».

Étant donnée une représentation L -linéaire V de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, on pose :

$$(2) \quad D_{\text{cris}}(V) \stackrel{\text{déf}}{=} (\mathbf{B}_{\text{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)} \quad \text{et} \quad D_{\text{dR}}(V) \stackrel{\text{déf}}{=} (\mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)}.$$

En général, ces \mathbf{Q}_p -espaces vectoriels sont de dimensions inférieures ou égales à $\dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$ et on dit que V est cristalline (resp. de de Rham) si $\dim_{\mathbf{Q}_p} D_{\text{cris}}(V)$ (resp. $\dim_{\mathbf{Q}_p} D_{\text{dR}}(V)$) est égale à $\dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$. Comme $\mathbf{B}_{\text{cris}} \subset \mathbf{B}_{\text{dR}}$, une représentation cristalline est nécessairement de de Rham.

Le Frobenius φ de \mathbf{B}_{cris} commute à l'action de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ et la filtration de \mathbf{B}_{dR} est stable par $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, ce qui fait que $D_{\text{cris}}(V)$ est un φ -module et que $D_{\text{dR}}(V)$ est un \mathbf{Q}_p -espace vectoriel filtré. Si V est une représentation cristalline, alors l'application naturelle de $D_{\text{cris}}(V)$ dans $D_{\text{dR}}(V)$ est un isomorphisme et $D_{\text{cris}}(V)$ est donc un φ -module filtré. Si V est L -linéaire, alors $D_{\text{cris}}(V)$ et $D_{\text{dR}}(V)$ sont naturellement des L -espaces vectoriels, et $\varphi : D_{\text{cris}}(V) \rightarrow D_{\text{cris}}(V)$ ainsi que la filtration sur $D_{\text{dR}}(V)$ sont L -linéaires.

Si V est une représentation de de Rham, les poids de Hodge-Tate de V sont par définition les entiers h tels que $\text{Fil}^{-h} D_{\text{dR}}(V) \neq \text{Fil}^{-h+1} D_{\text{dR}}(V)$, comptés avec la multiplicité $\dim_L \text{Fil}^{-h} D_{\text{dR}}(V) / \text{Fil}^{-h+1} D_{\text{dR}}(V)$.

Si D est un φ -module de dimension 1, on définit $t_N(D) \stackrel{\text{déf}}{=} \text{val}(\alpha)$ où α est la matrice de φ dans une base de D et si D est un espace vectoriel filtré de dimension 1, on définit $t_H(D)$ comme étant le plus grand $h \in \mathbf{Z}$ tel que $\text{Fil}^h D \neq 0$. Si D est un φ -module de dimension ≥ 1 , on définit $t_N(D) \stackrel{\text{déf}}{=} t_N(\det D)$ et $t_H(D) \stackrel{\text{déf}}{=} t_H(\det D)$, ce qui fait que $t_H(D)$ est aussi l'opposé de la somme des poids de Hodge-Tate de V , comptés avec multiplicités.

Si D est un φ -module filtré, on dit que D est admissible si $t_N(D) = t_H(D)$ et si $t_N(D') - t_H(D') \geq 0$ pour tout sous- φ -module $D' \subset D$. Le fait que pour tout $h \geq 1$, on a

$\mathrm{Fil}^{h+1} \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=p^h} = 0$ permet de montrer (cf. [Fon94b, §5.4]) que si V est une représentation cristalline, alors $D_{\mathrm{cris}}(V)$ est admissible.

On peut aussi définir la notion de $(\varphi, \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p))$ -modules filtrés L -linéaires admissibles (cf. [Fon94b, §4]), et la notion de représentation potentiellement cristalline (cf. [Fon94b, §5]); on a alors le théorème de Colmez-Fontaine (voir [CF00, théorème A] et aussi [Ber04b]) :

Théorème 2.4.1. — *Le foncteur $D_{\mathrm{cris}}(\cdot)$ est une équivalence de catégories de la catégorie des représentations L -linéaires potentiellement cristallines de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ dans la catégorie des $(\varphi, \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p))$ -modules filtrés L -linéaires admissibles.*

Passons maintenant à la classe de représentations qui nous intéressent.

Définition 2.4.2. — Si V est une représentation p -adique de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, alors on dit que V est apc (« abéliennement potentiellement cristalline ») s'il existe $n \geq 0$ tel que la restriction de V à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/F_n)$ est cristalline.

Si V est apc, alors on définit $n(V)$ comme étant le plus petit entier $n \geq 1$ tel que la restriction de V à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/F_n)$ est cristalline. On a donc $n(V) = 1$ plutôt que $n(V) = 0$ si V est cristalline, ceci pour des raisons techniques liées aux modules de Wach (cf. ci-dessous). Remarquons que bien entendu, une représentation apc est de de Rham. Si V est une représentation apc, alors on pose $D_{\mathrm{cris}}(V) \stackrel{\mathrm{déf}}{=} (\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/F_n)}$ et cette définition ne dépend pas de $n \geq n(V)$; $D_{\mathrm{cris}}(V)$ est alors un L -espace vectoriel muni d'un frobenius L -linéaire et d'une action de Γ qui commute à φ et qui est triviale sur $\Gamma_{n(V)}$. Si $F_{n(V)} \subset K \subset F_\infty$, alors $K \otimes_{\mathbf{Q}_p} D_{\mathrm{cris}}(V) = K \otimes_{\mathbf{Q}_p} D_{\mathrm{dR}}(V)$.

Définition 2.4.3. — On pose $m(V) \stackrel{\mathrm{déf}}{=} \inf_\chi n(V(\chi))$ où χ parcourt l'ensemble des caractères d'ordre fini de Γ . C'est donc le « conducteur essentiel » de V .

Les représentations qui nous intéressent dans la suite de cet article sont les représentations L -linéaires V de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ qui sont apc, absolument irréductibles, de dimension 2 et dont les poids de Hodge-Tate sont 0 et $k-1$ avec $k \geq 2$. Par le théorème 2.4.1, pour se donner une telle représentation, il suffit de se donner un $(\varphi, \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p))$ -module filtré L -linéaire admissible vérifiant certaines conditions.

Soient α et β deux caractères localement constants $\alpha, \beta : \mathbf{Q}_p^\times \rightarrow L^\times$, qui vérifient $-(k-1) < \mathrm{val}(\alpha(p)) \leq \mathrm{val}(\beta(p)) < 0$ et $\mathrm{val}(\alpha(p)) + \mathrm{val}(\beta(p)) = -(k-1)$ et qui sont triviaux sur $1 + p^n \mathbf{Z}_p$ pour un $n \geq 1$. On pose $\alpha_p = \alpha(p)^{-1}$ et $\beta_p = \beta(p)^{-1}$, ce qui fait que α_p et β_p appartiennent à l'idéal maximal de \mathcal{O}_L .

Définition 2.4.4. — On note $D(\alpha, \beta)$ le $(\varphi, \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p))$ -module filtré défini par $D(\alpha, \beta) = L \cdot e_\alpha \oplus L \cdot e_\beta$ où :

(i) Si $\alpha \neq \beta$, alors :

$$\begin{cases} \varphi(e_\alpha) &= \alpha_p^{-1} e_\alpha \\ \varphi(e_\beta) &= \beta_p^{-1} e_\beta \end{cases} \quad \text{et si } g \in \Gamma, \text{ alors :} \quad \begin{cases} g(e_\alpha) &= \alpha(\chi(g)) e_\alpha \\ g(e_\beta) &= \beta(\chi(g)) e_\beta \end{cases}$$

et

$$\mathrm{Fil}^i(L_n \otimes_L D(\alpha, \beta)) = \begin{cases} L_n \otimes_L D(\alpha, \beta) & \text{si } i \leq -(k-1); \\ L_n \cdot (e_\alpha + G(\beta\alpha^{-1}) \cdot e_\beta) & \text{si } -(k-2) \leq i \leq 0; \\ 0 & \text{si } i \geq 1. \end{cases}$$

(ii) Si $\alpha = \beta$, alors :

$$\begin{cases} \varphi(e_\alpha) &= \alpha_p^{-1} e_\alpha \\ \varphi(e_\beta) &= \beta_p^{-1} (e_\beta - e_\alpha) \end{cases} \quad \text{et si } g \in \Gamma, \text{ alors :} \quad \begin{cases} g(e_\alpha) &= \alpha(\chi(g)) e_\alpha \\ g(e_\beta) &= \beta(\chi(g)) e_\beta \end{cases}$$

et

$$\mathrm{Fil}^i(L_n \otimes_L D(\alpha, \beta)) = \begin{cases} L_n \otimes_L D(\alpha, \beta) & \text{si } i \leq -(k-1); \\ L_n \cdot e_\beta & \text{si } -(k-2) \leq i \leq 0; \\ 0 & \text{si } i \geq 1. \end{cases}$$

Proposition 2.4.5. — Si V est une représentation L -linéaire apc de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, absolument irréductible, de dimension 2 et dont les poids de Hodge-Tate sont 0 et $k-1$ avec $k \geq 2$, alors il existe deux caractères α et β comme ci-dessus tels que $D_{\mathrm{cris}}(V) = D(\alpha, \beta)$.

Réciproquement, si α et β sont deux tels caractères, alors il existe une représentation L -linéaire apc V de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, absolument irréductible, telle que $D_{\mathrm{cris}}(V) = D(\alpha, \beta)$.

Voir [Col04b, §5.5] pour une démonstration. Terminons ce paragraphe en remarquant que si V dénote la représentation associée à $D(\alpha, \beta)$, alors $n(V) = \sup(n(\alpha), n(\beta), 1)$ tandis que $m(V) = \sup(n(\alpha^{-1}\beta), 1)$.

2.5. Théorie de Hodge p -adique et (φ, Γ) -modules. — Dans le paragraphe §2.2, nous avons rappelé quelques points de la théorie des (φ, Γ) -modules et dans le paragraphe §2.4, nous avons rappelé quelques points de la théorie de Hodge p -adique. Ces deux théories ne sont pas indépendantes, et dans ce paragraphe nous allons rappeler le résultat essentiel (le théorème 2.5.1 ci-dessous) permettant de passer de l'une à l'autre. Avant de faire cela, rappelons que dans [Ber02], on a construit un anneau $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^\dagger$ qui a la propriété que $\mathbf{B}^\dagger \subset \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^\dagger$ et que $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \subset \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^\dagger[1/t]$, ce qui fait que si V est une représentation L -linéaire de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, alors $D^\dagger(V) \subset \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^\dagger[1/t] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ et $D_{\mathrm{cris}}(V) \subset \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^\dagger[1/t] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$. L'un des résultats principaux de [Ber02] (cf. [Ber02, théorème 0.2]) est alors le suivant.

Théorème 2.5.1. — Si V est une représentation apc , alors :

(i) $D^\dagger(V) \subset \mathcal{R}[1/t] \otimes_L D_{\mathrm{cris}}(V)$ et de plus :

$$\mathcal{R}[1/t] \otimes_{\mathcal{O}^\dagger} D^\dagger(V) = \mathcal{R}[1/t] \otimes_L D_{\mathrm{cris}}(V);$$

(ii) si l'on suppose de plus que les poids de Hodge-Tate de V sont ≥ 0 , alors $D^\dagger(V) \subset \mathcal{R} \otimes_L D_{\text{cris}}(V)$.

Comme on l'a rappelé dans la proposition 2.2.6, $D^\dagger(V)$ a une base formée d'éléments de $D^\dagger(V)^{\psi=1}$. L'avantage de ces éléments est que, comme ils sont fixés par ψ , ils tendent à avoir peu de dénominateurs, comme le montre la proposition ci-dessous.

Proposition 2.5.2. — Si V est une représentation apc, telle que les pentes de φ sur $D_{\text{cris}}(V)$ sont < 0 , et si $y \in \mathcal{R} \otimes_L D_{\text{cris}}(V)$ vérifie $\psi(y) = y$, alors $y \in \mathcal{R}^+ \otimes_L D_{\text{cris}}(V)$.

Démonstration. — On suppose que L contient les valeurs propres de φ sur $D_{\text{cris}}(V)$ et fixe une base e_1, \dots, e_d de $D_{\text{cris}}(V)$ dans laquelle la matrice $(p_{i,j})$ de φ est triangulaire supérieure. Si l'on écrit $y = \sum_{i=1}^d y_i \otimes \varphi(e_i)$, alors l'équation $\psi(y) = y$ devient :

$$\psi(y_k) = p_{k,k}y_k + \sum_{j>k} p_{k,j}y_j,$$

pour $k = 1, \dots, d$. Comme on a supposé que les $p_{k,k}$ sont de valuations < 0 , la proposition 1.10 de [Col04a] montre que si $\psi(y_k) - p_{k,k}y_k \in \mathcal{R}^+$, alors $y_k \in \mathcal{R}^+$, ce qui permet de conclure par récurrence descendante sur k . \square

Le théorème ci-dessous est une généralisation de [Col99, théorème 1].

Théorème 2.5.3. — Si V est une représentation apc, alors V est de hauteur finie.

Démonstration. — Il s'agit de montrer que le \mathcal{E} -espace vectoriel $D(V)$ admet une base dont les éléments appartiennent à $D^+(V)$. Comme les séries $\varphi^n(X)$ sont inversibles dans \mathcal{E} , il suffit de montrer que le \mathcal{E} -espace vectoriel $D(V)$ admet une base dont les éléments appartiennent à $D^+(V)[\{\varphi^n(1/X)\}_{n \geq 0}]$. Le corollaire I.7.6 de [CC99] montre que $D(V)$ admet une base dont les éléments appartiennent à $D(V)^{\psi=1}$ et il suffit par suite de voir que si $y \in D(V)^{\psi=1}$, alors $y \in D^+(V)[\{\varphi^n(1/X)\}_{n \geq 0}]$. Quitte à tordre V , on suppose que ses poids de Hodge-Tate sont > 0 .

Si $y \in D(V)^{\psi=1}$, alors $y \in D^\dagger(V)$ par la proposition 2.2.6 et donc par le théorème 2.5.1, $y \in \mathcal{R} \otimes_L D_{\text{cris}}(V)$. La proposition 2.5.2 nous dit alors que $y \in \mathcal{R}^+ \otimes_L D_{\text{cris}}(V)$. On en déduit que d'une part $y \in \mathbf{B}^\dagger \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ et d'autre part que $y \in \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+[1/t] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$. Comme $\mathbf{B}^\dagger \cap \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+[1/t] = \mathbf{B}^+[\{\varphi^n(1/X)\}_{n \geq 0}]$, on en déduit que $y \in D^+(V)[\{\varphi^n(1/X)\}_{n \geq 0}]$. \square

Si V est une représentation de hauteur finie, alors l'application $\iota_m = \varphi^{-m} : \mathbf{B}^+ \rightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ évoquée au paragraphe précédent nous donne une application $\iota_m : D^+(V) \rightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ qui se prolonge d'ailleurs en $\iota_m : \mathcal{R}^+[1/t] \otimes_{\mathcal{E}^+} D^+(V) \rightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$.

3. Représentations apc

La théorie des modules de Wach, qui est développée pour les représentations cristallines dans [Ber04a], s'étend aux représentations apc et l'objet de cette partie est de donner des

démonstrations des résultats que l'on obtient. Remarquons que l'hypothèse « apc » est optimale en un certain sens puisque Wach a montré qu'une représentation de de Rham est de hauteur finie si et seulement si elle est apc (cf. [Wa96, §A.5]). La plupart des résultats de ce chapitre, ainsi que leurs démonstrations, sont similaires à ceux de [Ber04a].

3.1. Modules de Wach. — On dit qu'une représentation de Hodge-Tate est positive si ses poids de Hodge-Tate sont ≤ 0 (terminologie un peu malheureuse). Rappelons que l'on a montré au paragraphe §2.5 qu'une représentation apc est de hauteur finie.

Théorème 3.1.1. — *Si V est une représentation apc positive, alors il existe un unique sous- \mathcal{E}^+ -module $N(V)$ de $D^+(V)$ qui satisfait les conditions suivantes :*

- (i) On a $D(V) = \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{E}^+} N(V)$;
- (ii) l'action de Γ préserve $N(V)$ et est finie sur $N(V)/XN(V)$;
- (iii) il existe $h \geq 0$ tel que $X^h D^+(V) \subset N(V)$.

Le module $N(V)$ est alors stable par φ .

Démonstration. — Le point de départ de la démonstration est un résultat de Wach (cf. [Wa96, p. 380]), qui affirme que si V est de hauteur finie, alors elle est positive et apc si et seulement s'il existe $N \subset D^+(V)$ satisfaisant les conditions (i) et (ii) ci-dessus. Il nous reste donc à montrer que l'on peut imposer la condition (iii) et qu'alors N est uniquement déterminé.

Soit donc N vérifiant (i) et (ii) et soit I_N l'idéal de \mathcal{E}^+ constitué de l'ensemble des $\lambda \in \mathcal{E}^+$ tels que $\lambda \cdot D^+(V) \subset N$. Cet idéal est non nul (par le (i)) et stable par Γ (par le (ii)) ce qui fait que, par le lemme 2.1.2, il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ tels que I_N est engendré par $X^{\alpha_0} Q_1(X)^{\alpha_1} \dots Q_n(X)^{\alpha_n}$. Si l'on pose $N(V) = D^+(V) \cap N[\{Q_i(X)^{-1}\}_{i \geq 1}]$, alors $N(V)$ est un \mathcal{E}^+ -module libre de rang d (puisque \mathcal{E}^+ est principal et que l'on a $N \subset N(V) \subset D^+(V)$) qui est toujours stable par Γ . L'application naturelle $N/XN \rightarrow N(V)/XN(V)$ est injective et donc bijective (puisque N/XN et $N(V)/XN(V)$ sont deux L -espaces vectoriels de dimension d). Enfin, si $y \in D^+(V)$, alors $X^{\alpha_0} Q_1(X)^{\alpha_1} \dots Q_n(X)^{\alpha_n} y \in N$ et donc $X^{\alpha_0} y \in N(V)$ ce qui fait que (iii) est vérifiée avec $h = \alpha_0$.

Ceci montre l'existence de $N(V)$, et il reste à en montrer l'unicité. Ceci montrera d'ailleurs que $N(V)$ est stable par φ , puisque $N(V)$ et $N(V) + \varphi^* N(V)$ satisfont tous les deux les conditions (i), (ii) et (iii). Supposons donc que l'on ait deux \mathcal{E}^+ -modules N_1 et N_2 satisfaisant les trois conditions du théorème. La condition (iii) implique qu'il existe $r \geq 0$ tel que $X^r N_1 \subset N_2$. Supposons que $r \geq 1$. On a dans ce cas une suite exacte $0 \rightarrow X^r N_1 \rightarrow N_2 \rightarrow N_2/X^r N_1 \rightarrow 0$ et en appliquant le lemme du serpent à la multiplication par X dans cette suite, on obtient :

$$0 \rightarrow (N_2/X^r N_1)[X] \rightarrow X^r N_1/X^{r+1} N_1 \rightarrow N_2/XN_2 \rightarrow N_2/(XN_2 + X^r N_1) \rightarrow 0.$$

Par la condition (ii), un sous-groupe ouvert du groupe Γ agit par χ^r sur $X^r N_1 / X^{r+1} N_1$ et par 1 sur $N_2 / X N_2$ ce qui fait que, si $r \geq 1$, alors l'application $X^r N_1 / X^{r+1} N_1 \rightarrow N_2 / X N_2$ est nulle et donc que l'application $N_2 / X N_2 \rightarrow N_2 / (X N_2 + X^r N_1)$ est un isomorphisme. On en conclut que si $r \geq 1$, alors en fait $X^r N_1 \subset X N_2$ et donc que $X^{r-1} N_1 \subset N_2$; en itérant ce procédé, on se ramène à $r = 0$ ce qui fait que $N_1 \subset N_2$. Par symétrie, on en conclut aussi que $N_2 \subset N_1$ et donc finalement que $N_1 = N_2$, ce qui termine la démonstration du théorème. \square

Si V est une représentation apc telle que $V(1)$ est positive, alors on voit que $N(V) = X \cdot N(V(1))$, ce qui justifie la définition suivante.

Définition 3.1.2. — Si V est une représentation apc, et $h \geq 0$ un entier tel que $V(-h)$ est positive, alors on pose $N(V) = X^{-h} N(V(-h))$.

Comme $N(V) \subset \mathbf{B}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$, on peut composer les applications $\iota_n : \mathbf{B}^+ \rightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ et $\theta : \mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \rightarrow \mathbf{C}_p$ pour obtenir une application $\theta \circ \iota_n : N(V) \rightarrow \mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$, qui est nulle sur $Q_n(X)N(V)$.

Comme V est une représentation de Hodge-Tate de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$, on a une décomposition $(\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/F_\infty)} \simeq \bigoplus_{j=1}^d \widehat{L}_\infty(-h_j)$, où les h_j sont les opposés des poids de Hodge-Tate de V , et on peut montrer (cf. [Sen80, theorem 3] par exemple) que la réunion $D_{\text{sen}}(V) \stackrel{\text{déf}}{=} (\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)_{\text{fini}}^{\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/F_\infty)}$ des sous- F_∞ -espaces vectoriels de dimension finie stables par Γ de $(\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/F_\infty)}$ est égale à $\bigoplus_{j=1}^d L_\infty(-h_j)$.

Le (ii) du théorème 3.1.1 nous renseigne sur le module de Wach « évalué en 0 » et le lemme suivant nous renseigne sur le module de Wach « évalué en $\zeta_{p^n} - 1$ pour $n \geq 1$ ».

Lemme 3.1.3. — Si $n \geq 1$, alors l'application $\theta \circ \iota_n : N(V)/Q_n(X)N(V) \rightarrow \mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ est injective et son image est incluse dans $D_{\text{sen}}(V)$.

Démonstration. — Commençons par montrer que l'application déduite de $\theta \circ \iota_n$ est injective. Si $y \in N(V)$ est tel que $\theta \circ \iota_n(y) = 0$, alors y est divisible par $Q_n(X)$ dans $\mathbf{B}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ et donc dans $D^+(V)$. La définition de $N(V)$ donnée dans la démonstration du théorème 3.1.1 montre alors que y est divisible par $Q_n(X)$ dans $N(V)$ et donc que $y \in Q_n(X)N(V)$ ce qui fait que l'application $\theta \circ \iota_n : N(V)/Q_n(X)N(V) \rightarrow \mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ est injective.

L'image de cette application est un sous- F_n -espace vectoriel de dimension finie et stable par Γ de $(\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/F_\infty)}$, ce qui fait qu'il est inclus dans $D_{\text{sen}}(V)$. \square

On en déduit une application $L_\infty \otimes_{L_n} N(V)/Q_n(X)N(V) \rightarrow D_{\text{sen}}(V)$. Nous verrons dans la suite de cet article que si $n \geq m(V)$, alors cette application est une bijection.

Pour terminer ce paragraphe, donnons le lemme technique ci-dessous, qui nous servira dans la suite.

Lemme 3.1.4. — Si $h \geq 0$ et si $y \in \mathcal{R}^+ \otimes_{\mathcal{E}^+} N(V)$ sont tels que $\gamma(y) = \chi(\gamma)^h y$ pour tout γ dans un sous-groupe ouvert de Γ , alors $y \in X^h \mathcal{R}^+ \otimes_{\mathcal{E}^+} N(V)$.

Démonstration. — Si γ appartient de plus à un sous-groupe ouvert de Γ qui agit trivialement sur $N(V)/XN(V)$, alors on voit que d'une part $\gamma - \chi(\gamma)^j$ envoie $X^j \mathcal{R}^+ \otimes_{\mathcal{E}^+} N(V)$ dans $X^{j+1} \mathcal{R}^+ \otimes_{\mathcal{E}^+} N(V)$ pour tout $j \geq 0$, et donc que :

$$(\gamma - 1) \cdot (\gamma - \chi(\gamma)) \cdots (\gamma - \chi(\gamma)^{h-1}) \mathcal{R}^+ \otimes_{\mathcal{E}^+} N(V) \subset X^h \mathcal{R}^+ \otimes_{\mathcal{E}^+} N(V)$$

et d'autre part que :

$$y = \frac{(\gamma - 1) \cdot (\gamma - \chi(\gamma)) \cdots (\gamma - \chi(\gamma)^{h-1}) y}{(\chi(\gamma)^h - 1) \cdot (\chi(\gamma)^h - \chi(\gamma)) \cdots (\chi(\gamma)^h - \chi(\gamma)^{h-1})},$$

d'où l'on déduit le lemme. □

3.2. De $N(V)$ à $D_{\text{cris}}(V)$. — Le théorème 2.5.1 combiné au théorème 3.1.1 nous montre que si V est une représentation apc, alors $D_{\text{cris}}(V) \subset \mathcal{R}[1/t] \otimes_{\mathcal{E}^+} N(V)$. On peut en fait préciser ce résultat, c'est l'objet du théorème ci-dessous.

Théorème 3.2.1. — Si V est une représentation apc positive, alors $D_{\text{cris}}(V) = (\mathcal{R}^+ \otimes_{\mathcal{E}^+} N(V))^{\Gamma_n}$ pour n assez grand.

Démonstration. — Le début de la démonstration est le même que celui de [Ber04a, prop II.2.1] : on choisit une base de $N(V)$, et on appelle P et G les matrices de φ et d'un élément $\gamma \in \Gamma$ (différent de 1 et qui agit trivialement sur $N(V)/XN(V)$) dans cette base, ce qui fait que $P\varphi(G) = G\gamma(P)$. En particulier, on a $\det P\varphi(\det G) = \det G\gamma(\det P)$ et comme $\det G$ est une unité, le lemme 2.1.2 montre qu'il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ et une unité U tels que $\det P = UX^{\alpha_0} Q_1(X)^{\alpha_1} \cdots Q_n(X)^{\alpha_n}$. On a par ailleurs $\alpha_0 = 0$ car $\det P/\gamma(\det P) = \det G/\varphi(\det G)$ et le membre de gauche est égal à $\chi(\gamma)^{\alpha_0}$ modulo X alors que le membre de droite vaut 1 modulo X .

Par le théorème 2.5.1, on a $D_{\text{cris}}(V) \subset \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{E}^+} N(V)$; soit $M \in M(d, \mathcal{R})$ la matrice d'une base de $D_{\text{cris}}(V)$ dans la base de $N(V)$ que l'on a choisie précédemment. Si P_0 dénote la matrice de φ sur $D_{\text{cris}}(V)$, si Q dénote la transposée de la matrice des cofacteurs de P , et si $N = X^{\alpha_1} \varphi(X)^{\alpha_2} \cdots \varphi^{n-1}(X)^{\alpha_n} M$, alors un petit calcul montre que $\varphi(N) = U^{-1} Q N P_0$ et le corollaire I.4.2 de [Ber04a] montre qu'alors $N \in M(d, \mathcal{R}^+)$. Il existe donc $n, h \geq 0$ tels que $D_{\text{cris}}(V) \subset \varphi^n(X^{-h}) \mathcal{R}^+ \otimes_{\mathcal{E}^+} N(V)$.

On en déduit que si $y \in D_{\text{cris}}(V)$, alors $t^h y \in \mathcal{R}^+ \otimes_{\mathcal{E}^+} N(V)$ et le lemme 3.1.4 nous dit alors que $(t/X)^h y \in \mathcal{R}^+ \otimes_{\mathcal{E}^+} N(V)$, ce qui fait finalement que l'on a $(\varphi^n(X)/X)^h D_{\text{cris}}(V) \subset \mathcal{R}^+ \otimes_{\mathcal{E}^+} N(V)$. En appliquant φ^n aux deux membres, on trouve que $(\varphi^{2n}(X)/\varphi^n(X))^h D_{\text{cris}}(V) \subset \mathcal{R}^+ \otimes_{\mathcal{E}^+} N(V)$ et comme $\varphi^n(X)/X$ et $\varphi^{2n}(X)/\varphi^n(X)$ sont premiers entre eux, on en déduit que $D_{\text{cris}}(V) \subset \mathcal{R}^+ \otimes_{\mathcal{E}^+} N(V)$. □

Par le théorème 3.2.1, on a une inclusion $\mathcal{R}^+ \otimes_L D_{\text{cris}}(V) \subset \mathcal{R}^+ \otimes_{\mathcal{E}^+} N(V)$; la théorie des diviseurs élémentaires marche pour l'anneau \mathcal{R}^+ (cf. [Ber04a, §4.2]), et nous notons $\delta_1, \dots, \delta_d$ les idéaux (principaux) ainsi déterminés, ordonnés de telle manière que $\delta_1 \mid \dots \mid \delta_d$. Comme $\mathcal{R}^+ \otimes_L D_{\text{cris}}(V)$ et $\mathcal{R}^+ \otimes_{\mathcal{E}^+} N(V)$ sont munis d'une action de Γ , les idéaux δ_i sont stables sous cette action et par le lemme 2.1.2, il existe des entiers $\{\beta_{n,i}\}_{n \geq 0, 1 \leq i \leq d}$ tels que :

$$\delta_i = X^{\beta_{0,i}} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{Q_n(X)}{p} \right)^{\beta_{n,i}} \cdot \mathcal{R}^+.$$

Le calcul des $\beta_{n,i}$ est un point important de la théorie des modules de Wach des représentations apc.

Théorème 3.2.2. — *Soit V une représentation apc positive, soient h_1, \dots, h_d les opposés des poids de Hodge-Tate de V , rangés dans l'ordre croissant, et soit $t_W^n(V) \stackrel{\text{déf}}{=} \beta_{n,1} + \dots + \beta_{n,d}$ pour $n \geq 1$, où les $\beta_{n,i}$ sont définis ci-dessus.*

On a alors :

- (i) $\beta_{0,i} = 0$ pour tout i ;
- (ii) si $n \geq 1$, alors $\beta_{n,i} \in \{h_1, \dots, h_d\}$ pour tout i ;
- (iii) si $n \geq m(V)$, alors en fait $\beta_{n,i} = h_i$ pour tout i ;
- (iv) on a $t_W^1(V) \leq t_W^2(V) \leq \dots \leq t_W^{n(V)}(V) = t_H(V) \stackrel{\text{déf}}{=} h_1 + \dots + h_d$.

La démonstration de ce théorème nécessite quelques lemmes préparatoires.

Comme $\mathcal{R}^+ \otimes_L D_{\text{cris}}(V) \subset \mathcal{R}^+ \otimes_{\mathcal{E}^+} N(V)$, on peut « localiser et compléter » via l'application $\iota_n : \mathcal{R}^+ \rightarrow L_n[[t]]$ et on en déduit que pour tout $n \geq 0$:

$$L_n[[t]] \otimes_L D_{\text{cris}}(V) \subset L_n[[t]] \otimes_{\mathcal{E}^+}^{\iota_n} N(V).$$

Les diviseurs élémentaires de cette inclusion sont alors les idéaux : $(t^{\beta_{n,1}}), \dots, (t^{\beta_{n,d}})$.

Proposition 3.2.3. — *On a $N(V)/Q_n(X)N(V) = \bigoplus_{i=1}^d L_n(-\beta_{n,i})$ en tant que représentations de $\Gamma_{\max(n,n(V))}$.*

Démonstration. — Etant donné que $L_n((t)) \otimes_L D_{\text{cris}}(V) = L_n((t)) \otimes_{\mathcal{E}^+}^{\iota_n} N(V)$, le L_n -module $N(V)/Q_n(X) = L_n[[t]] \otimes_{\mathcal{E}^+}^{\iota_n} N(V)/t$ est un sous-quotient stable par Γ de $L_n((t)) \otimes_L D_{\text{cris}}(V)$ et comme L_n est un $L_n[\Gamma]$ -module simple, il existe des entiers $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_d$ tels qu'il est isomorphe à $\bigoplus_{i=1}^d L_n(-\alpha_i)$ en tant que représentations de $\Gamma_{\max(n,n(V))}$. Il s'agit donc de montrer que $\alpha_i = \beta_{n,i}$.

Par la théorie des diviseurs élémentaires, il existe une base de $L_n[[t]] \otimes_{\mathcal{E}^+}^{\iota_n} N(V)$ telle que les éléments de cette base, multipliés par les $t^{\beta_{n,i}}$, forment une base de $L_n[[t]] \otimes_L D_{\text{cris}}(V)$. Si G est la matrice d'un élément $\gamma \in \Gamma_{\max(n,n(V))}$ dans cette base de $L_n[[t]] \otimes_{\mathcal{E}^+}^{\iota_n} N(V)$ et si $\Lambda = \text{diag}(t^{\beta_{n,1}}, \dots, t^{\beta_{n,d}})$, alors la matrice de γ dans la base construite ci-dessus de $L_n[[t]] \otimes_L D_{\text{cris}}(V)$ est $\Lambda^{-1}G\gamma(\Lambda) = \Lambda^{-1}G\Lambda \cdot \Lambda^{-1}\gamma(\Lambda)$. Le groupe $\Gamma_{\max(n,n(V))}$ agit

trivialement sur $D_{\text{cris}}(V)$ ce qui fait que $\Lambda^{-1}G\gamma(\Lambda) \in \text{Id} + tM_d(L_n[[t]])$. Comme on a par ailleurs $\gamma(\Lambda)^{-1}\Lambda = \text{diag}(\chi(\gamma)^{-\beta_{n,1}}, \dots, \chi(\gamma)^{-\beta_{n,d}})$, on en déduit que :

$$\Lambda^{-1}G\Lambda = \Lambda^{-1}G\gamma(\Lambda) \cdot \gamma(\Lambda)^{-1}\Lambda \in \text{diag}(\chi(\gamma)^{-\beta_{n,1}}, \dots, \chi(\gamma)^{-\beta_{n,d}}) + tM_d(L_n[[t]]).$$

Le polynôme caractéristique de G est le même que celui de $\Lambda^{-1}G\Lambda$, et en réduisant ce polynôme modulo t et en comparant les valeurs propres de l'action de γ , on en déduit que $\alpha_i = \beta_{n,i}$. \square

Lemme 3.2.4. — Soient m et n deux entiers ≥ 1 , W_n et W_∞ un L_n -module et un L_∞ -module tous deux libres et munis d'actions semi-linéaires de Γ et tels que, en tant que représentations de Γ_m , ils soient isomorphes à $\bigoplus_{i=1}^d L_n(a_i)$ et à $\bigoplus_{i=1}^d L_\infty(b_i)$ pour des entiers $a_1 \leq \dots \leq a_d$ et $b_1 \leq \dots \leq b_d$.

S'il existe une injection Γ -équivariante de W_n dans W_∞ , alors $a_i \in \{b_1, \dots, b_d\}$ pour tout i , et si en plus $m \leq n$, alors en fait $a_i = b_i$ pour tout i .

Démonstration. — Soit ∇ l'opérateur F_∞ -linéaire provenant de l'action de l'algèbre de Lie de Γ . On a $W_n = \bigoplus_{i=1}^d W_n^{\nabla=a_i}$ et $W_\infty = \bigoplus_{i=1}^d W_\infty^{\nabla=b_i}$ et en comparant les valeurs propres de ∇ , on voit que $a_i \in \{b_1, \dots, b_d\}$ pour tout i .

Pour montrer que $a_i = b_i$ pour tout i si $m \leq n$, il suffit voir que sous cette hypothèse, l'application naturelle $F_\infty \otimes_{F_n} W_n \rightarrow W_\infty$ est bijective. Pour des raisons de dimensions, il suffit de voir qu'elle est injective. Si ce n'était pas le cas, il existerait un élément $\sum \lambda_j \otimes w_j \in F_\infty \otimes_{F_n} W_n$ dont l'image dans W_∞ est nulle, avec w_j appartenant à l'un des $L_n(a_i)$, et de longueur minimale. En faisant agir Γ_n et en utilisant l'hypothèse de minimalité de la longueur de la relation, on voit que l'on a forcément $\lambda_j/\lambda_1 \in F_n$, ce qui fait que l'application $F_\infty \otimes_{F_n} W_n \rightarrow W_\infty$ est bien bijective. \square

Démonstration du théorème 3.2.2. — Commençons par remarquer que quitte à tordre V par un caractère d'ordre fini (ce qui ne change pas la valeur des $\beta_{n,i}$ ou des h_i), on peut supposer que $m(V) = n(V)$.

Le fait que $\beta_{0,i} = 0$ résulte du fait que $N(V)/X$ est isomorphe à $\bigoplus_{i=1}^d L(-\beta_{0,i})$ en tant que représentations de $\Gamma_{n(V)}$ (par un raisonnement analogue à celui de la proposition 3.2.3) d'une part et du fait qu'un sous-groupe ouvert de Γ agit trivialement sur $N(V)/X$ par définition d'autre part.

Le fait que pour tous $n, i \geq 1$, $\beta_{n,i}$ est l'un des h_j , et que $\beta_{n,i} = h_i$ si $n \geq n(V)$ résulte de la proposition 3.2.3, et de la réunion des lemmes 3.1.3 et 3.2.4.

On en déduit immédiatement que $t_W^n(V) = \sum_{i=1}^d h_i$ pour tout $n \geq n(V)$. Si $\delta = \delta_1 \times \dots \times \delta_d$, alors un calcul simple, qui utilise le fait que $\varphi^*(\mathcal{R}^+ \otimes_L D_{\text{cris}}(V)) = \mathcal{R}^+ \otimes_L D_{\text{cris}}(V)$, montre que l'idéal de \mathcal{R}^+ engendré par le déterminant de φ sur $N(V)$ est engendré par $\delta/\varphi(\delta)$, c'est-à-dire qu'il est engendré par :

$$Q_1(X)^{t_W^{n(V)}} \cdot Q_2(X)^{t_W^2(V) - t_W^1(V)} \dots Q_{n(V)}(X)^{t_W^{n(V)}(V) - t_W^{n(V)-1}(V)}.$$

Comme $N(V)$ est stable par φ , on en déduit que $t_W^1(V) \leq t_W^2(V) \leq \dots \leq t_W^{n(V)}(V)$. \square

Remarque 3.2.5. — Dans le cas où $m(V) = 1$, on retrouve les résultats de [Ber04a]. Dans les cas où $m(V) > 1$, nous verrons des exemples (cf. la proposition 3.4.1) qui montrent que le déterminant de φ sur $N(V)$ peut effectivement être divisible par $Q_i(X)$ avec $i > 1$.

Les trois résultats ci-dessous sont des corollaires immédiats du théorème 3.2.2 et de sa démonstration.

Corollaire 3.2.6. — *Si V est une représentation apc positive, alors :*

$$Q_1(X)^{t_W^1(V)} \cdot Q_2(X)^{t_W^2(V) - t_W^1(V)} \dots Q_{n(V)}(X)^{t_W^{n(V)}(V) - t_W^{n(V)-1}(V)} \cdot N(V) \subset \varphi^*(N(V)).$$

Corollaire 3.2.7. — *Si V est une représentation apc dont les poids de Hodge-Tate sont dans l'intervalle $[-h; 0]$, alors $\mathcal{R}^+ \otimes_{\mathcal{E}^+} N(V) \subset (t/X)^{-h} \mathcal{R}^+ \otimes_L D_{\text{cris}}(V)$.*

Corollaire 3.2.8. — *Si V est une représentation apc positive, alors :*

$$\begin{aligned} X^{t_W^1(V)} \cdot \varphi(X)^{t_W^2(V) - t_W^1(V)} \dots \varphi^{n(V)-1}(X)^{t_W^{n(V)}(V) - t_W^{n(V)-1}(V)} \cdot \mathbf{B}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \\ \subset (L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{B}^+) \otimes_{\mathcal{E}^+} N(V). \end{aligned}$$

En particulier, si les poids de Hodge-Tate de V sont dans un intervalle $[-h, 0]$, alors $\varphi^{n(V)-1}(X^{dh}) \mathbf{B}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \subset (L \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{B}^+) \otimes_{\mathcal{E}^+} N(V)$.

Proposition 3.2.9. — *Si $\lambda : D_{\text{cris}}(V) \rightarrow N(V)/XN(V)$ dénote l'application déduite de l'inclusion de $D_{\text{cris}}(V)$ dans $\mathcal{R}^+ \otimes_{\mathcal{E}^+} N(V)$ et de la projection de $\mathcal{R}^+ \otimes_{\mathcal{E}^+} N(V)$ sur $N(V)/XN(V)$, alors λ est un isomorphisme qui commute à φ et à l'action de Γ .*

Démonstration. — Il est clair que λ commute à φ et à l'action de Γ , et il suffit donc de montrer que c'est un isomorphisme. Pour des raisons de dimension, il suffit de montrer que λ est injective, c'est-à-dire que $D_{\text{cris}}(V) \cap X \mathcal{R}^+ \otimes_{\mathcal{E}^+} N(V) = 0$. Nous allons montrer par récurrence sur $j \geq 1$ que $D_{\text{cris}}(V) \cap X^j \mathcal{R}^+ \otimes_{\mathcal{E}^+} N(V) \subset X^j \mathcal{R}^+ \otimes_{\mathcal{E}^+} N(V)$. Pour $j = 1$, c'est trivialement vrai.

Choisissons $\gamma \in \Gamma$ différent de 1 mais agissant trivialement sur $D_{\text{cris}}(V)$ et sur $N(V)/X$. L'application $\gamma - \chi(\gamma)^j$ est alors bijective sur $D_{\text{cris}}(V)$, et envoie $X^j \mathcal{R}^+ \otimes_{\mathcal{E}^+} N(V)$ dans $X^{j+1} \mathcal{R}^+ \otimes_{\mathcal{E}^+} N(V)$ ce qui fait que $D_{\text{cris}}(V) \cap X^j \mathcal{R}^+ \otimes_{\mathcal{E}^+} N(V) \subset X^{j+1} \mathcal{R}^+ \otimes_{\mathcal{E}^+} N(V)$ et la proposition est démontrée. \square

3.3. Une autre construction de $N(V)$. — Dans ce paragraphe, on suppose que V est une représentation apc dont les poids de Hodge-Tate sont dans l'intervalle $[-h; 0]$. Par le corollaire 3.2.7, on a $N(V) \subset t^{-h} \mathcal{R}^+ \otimes_L D_{\text{cris}}(V)$ et l'objet de ce paragraphe est de montrer comment l'on peut récupérer $N(V)$ comme sous-module de $t^{-h} \mathcal{R}^+ \otimes_L D_{\text{cris}}(V)$.

Lemme 3.3.1. — Si $m \geq 0$, alors l'image de $L_m[[t]] \otimes_{\mathcal{E}^+}^{\iota_m} N(V)$ dans $L_m((t)) \otimes_L D_{\text{cris}}(V)$ est incluse dans $\text{Fil}^0(t^{-h}L_m[[t]] \otimes_L D_{\text{cris}}(V))$ et si $m \geq m(V)$, alors l'application :

$$L_m[[t]] \otimes_{\mathcal{E}^+}^{\iota_m} N(V) \rightarrow \text{Fil}^0(t^{-h}L_m[[t]] \otimes_L D_{\text{cris}}(V))$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — L'inclusion suit du fait que $N(V) \subset \mathbf{B}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ ce qui fait que l'image de $N(V)$ par ι_m est bien dans le Fil^0 de $L_m((t)) \otimes_L D_{\text{cris}}(V)$, et l'hypothèse sur les poids de V implique que $\text{Fil}^0(L_m((t)) \otimes_L D_{\text{cris}}(V)) = \text{Fil}^0(t^{-h}L_m[[t]] \otimes_L D_{\text{cris}}(V))$.

Supposons maintenant que $m \geq m(V)$; en considérant (par exemple) une base de $L_m \otimes_L D_{\text{cris}}(V)$ adaptée à la filtration, on voit que le déterminant de l'inclusion de $\text{Fil}^0(t^{-h}L_m[[t]] \otimes_L D_{\text{cris}}(V))$ dans $t^{-h}L_m[[t]] \otimes_L D_{\text{cris}}(V)$ est le même que celui de l'inclusion de $L_m[[t]] \otimes_{\mathcal{E}^+}^{\iota_m} N(V)$ dans $t^{-h}L_m[[t]] \otimes_L D_{\text{cris}}(V)$ (c'est-à-dire $t^{dh - \sum_{i=1}^d h_i}$) ce qui fait que l'application du lemme est bien un isomorphisme dans ce cas-là. \square

Définition 3.3.2. — On appelle $M(V)$ l'ensemble des $f \in t^{-h}\mathcal{R}^+ \otimes_L D_{\text{cris}}(V)$ tels que $\iota_m(f) \in \text{Fil}^0(t^{-h}L_m[[t]] \otimes_L D_{\text{cris}}(V))$ pour tout $m \geq m(V)$.

Proposition 3.3.3. — Le \mathcal{R}^+ -module $M(V)$ est libre de rang d , stable par ψ , et il vérifie :

$$X^{-h}\mathcal{R}^+ \otimes_{\mathcal{E}^+} N(V) \subset M(V) \subset \varphi^{m(V)-1}(X)^{-h} \cdot \mathcal{R}^+ \otimes_{\mathcal{E}^+} N(V).$$

Démonstration. — Le fait que $X^{-h}\mathcal{R}^+ \otimes_{\mathcal{E}^+} N(V) \subset M(V)$ suit immédiatement du corollaire 3.2.7 et de la première partie du lemme 3.3.1. Comme les applications ι_m sont continues, $M(V)$ est un sous-module fermé de $t^{-h}\mathcal{R}^+ \otimes_L D_{\text{cris}}(V)$ et par le théorème de Forster (cf. par exemple [Ber02, théorème 4.10]), il est libre de rang $\leq d$ et comme il contient $X^{-h}\mathcal{R}^+ \otimes_{\mathcal{E}^+} N(V)$, son rang est en fait égal à d .

Montrons à présent que $M(V)$ est stable par ψ . Il est clair que $t^{-h}\mathcal{R}^+ \otimes_L D_{\text{cris}}(V)$ est stable par ψ , et pour conclure, nous allons montrer que si $\iota_{m+1}(f) \in \text{Fil}^0(t^{-h}L_{m+1}[[t]] \otimes_L D_{\text{cris}}(V))$, alors $\iota_m(\psi(f)) \in \text{Fil}^0(t^{-h}L_m[[t]] \otimes_L D_{\text{cris}}(V))$. Pour cela, rappelons que si $g(X) \in \mathcal{R}^+$, alors :

$$(\varphi \circ \psi)(g(X)) = \frac{1}{p} \sum_{\eta^p=1} g(\eta(1+X) - 1)$$

et donc que :

$$\iota_m(\psi(f)) = \frac{1}{p} \sum_{\eta^p=1} \iota_{m+1}(f)(\eta(1+X) - 1).$$

Si $\gamma \in \Gamma$ est tel que $\gamma(\zeta_{p^{m+1}}) = \eta\zeta_{p^{m+1}}$, et si $z(t) \stackrel{\text{déf}}{=} f^{\varphi^{-(m+1)}}(\zeta_{p^{m+1}} \exp(t/p^{m+1}) - 1)$, alors $f^{\varphi^{-(m+1)}}(\eta\zeta_{p^{m+1}} \exp(t/p^{m+1}) - 1) = \gamma(z(\chi(\gamma)^{-1}t))$ et comme $\text{Fil}^0(t^{-h}L_{m+1}[[t]] \otimes_L D_{\text{cris}}(V))$ est un $L_{m+1}[[t]]$ -module qui a une base fixée par Γ , on en déduit que si $\iota_{m+1}(f) \in \text{Fil}^0(t^{-h}L_{m+1}[[t]] \otimes_L D_{\text{cris}}(V))$, alors $\iota_m(\psi(f)) \in \text{Fil}^0(t^{-h}L_m[[t]] \otimes_L D_{\text{cris}}(V))$ et donc que $M(V)$ est stable par ψ .

Montrons enfin que $M(V) \subset \varphi^{m(V)-1}(X)^{-h} \cdot \mathcal{R}^+ \otimes_{\mathcal{E}^+} N(V)$; pour cela, fixons une base n_1, \dots, n_d de $N(V)$. Si $f \in M(V)$, alors $f \in t^{-h} \mathcal{R}^+ \otimes_{\mathcal{E}^+} N(V)$, et l'on peut donc écrire $f = \sum_{i=1}^d f_i n_i$ avec $f_i \in t^{-h} \mathcal{R}^+$. La deuxième inclusion de la proposition revient à dire que pour tout $m \geq m(V)$, la fonction f_i n'a pas de pôle en $\zeta_{p^m} - 1$, c'est-à-dire que $\iota_m(f_i) \in L_m[[t]]$. Par le lemme 3.3.1, la famille $\iota_m(n_1), \dots, \iota_m(n_d)$ forme une base de $\text{Fil}^0(t^{-h} L_m[[t]] \otimes_L D_{\text{cris}}(V))$. Si $f \in M(V)$, alors par définition $\iota_m(f) \in \text{Fil}^0(t^{-h} L_m[[t]] \otimes_L D_{\text{cris}}(V))$, et donc $\iota_m(f_i) \in L_m[[t]]$. \square

Remarque 3.3.4. — Si $m(V) = 1$, alors on trouve que $\mathcal{R}^+ \otimes_{\mathcal{E}^+} N(V)$ s'identifie à l'ensemble des $f \in (t/X)^{-h} \mathcal{R}^+ \otimes_L D_{\text{cris}}(V)$ tels que $\iota_m(f) \in \text{Fil}^0(t^{-h} L_m[[t]] \otimes_L D_{\text{cris}}(V))$ pour tout $m \geq 1$.

Les calculs précédents montrent comment récupérer $\mathcal{R}^+ \otimes_{\mathcal{E}^+} N(V)$, et la deuxième étape est d'extraire $N(V)$ de $\mathcal{R}^+ \otimes_{\mathcal{E}^+} N(V)$. Pour cela, nous avons besoin de la notion d'ordre (de croissance).

Rappelons (cf. la définition 2.1.1) qu'une série $f \in \mathcal{R}^+$ est d'ordre r si et seulement si quel que soit ρ tel que $0 < \rho < 1$, la suite $\{p^{-nr} \|f(X)\|_{D(0, \rho^{1/p^n})}\}_{n \geq 0}$ est bornée. On pose alors $\|f\|_{\rho, r} = \sup_{n \geq 0} p^{-nr} \|f(X)\|_{D(0, \rho^{1/p^n})}$. Si $f(X) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j X^j \in \mathcal{R}^+$, alors on peut montrer (cf. le lemme 4.1.6 ci-dessous pour un énoncé précis) que f est d'ordre r si et seulement si la suite $\{(n+1)^{-r} |a_n|\}_{n \geq 0}$ est bornée. Si c'est le cas, alors on pose $\|f\|_r = \sup_{n \geq 0} (n+1)^{-r} |a_n|$, et les normes $\|\cdot\|_r$ et $\|\cdot\|_{\rho, r}$ sont équivalentes.

La notion d'ordre est étendue aux éléments de $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+[1/t]$ (voir [Ber04b, §V.3]) ce qui permet de parler de l'ordre des éléments de $\mathcal{R}^+[1/t] \otimes_L D_{\text{cris}}(V)$ et de $\mathcal{R}^+[1/t] \otimes_{\mathcal{E}^+} N(V)$ (ces deux espaces étant bien-sûr les mêmes). Dans $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+$, on peut utiliser le frobenius pour donner une troisième définition de l'ordre : si $f \in \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+$, alors f est d'ordre r si et seulement si quel que soit ρ tel que $0 < \rho < 1$, la suite $\{p^{-nr} \|\varphi^{-n}(f)\|_{D(0, \rho)}\}_{n \geq 0}$ est bornée. On en déduit en particulier le résultat suivant (rappelons que la matrice d'un endomorphisme est dite être sous forme de Jordan si elle est triangulaire supérieure et adaptée à la décomposition en espaces caractéristiques).

Lemme 3.3.5. — Si l'on se donne une base $\{e_1, \dots, e_d\}$ de $D_{\text{cris}}(V)$ dans laquelle la matrice de φ est sous forme de Jordan, la valeur propre correspondant à e_i étant notée α_i^{-1} , alors $y = \sum_{i=1}^d y_i \otimes e_i \in \mathcal{R}^+ \otimes_L D_{\text{cris}}(V)$ est d'ordre r si et seulement si y_i est d'ordre $r + \text{val}(\alpha_i)$.

Démonstration. — Comme la base $\{e_1, \dots, e_d\}$ respecte la décomposition de $D_{\text{cris}}(V)$ en espaces caractéristiques, on peut supposer qu'il n'y a qu'une seule valeur propre α , et en tordant l'action du frobenius, on peut supposer par ailleurs que $r = 0$ et que $\alpha = 1$. Si l'on note P la matrice de φ , l'ensemble $\{P^j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ est alors borné (pour la topologie p -adique) et on en déduit que $\{\varphi^{-n}(y)\}_{n \geq 0}$ est borné si et seulement si pour tout $1 \leq i \leq d$,

$\{\varphi^{-n}(y_i)\}_{n \geq 0}$ est borné (pour la norme $\|\cdot\|_{D(0,\rho)}$), c'est-à-dire si et seulement si pour tout $1 \leq i \leq d$, la série y_i est d'ordre 0. \square

Lemme 3.3.6. — Si $g(X) \in \mathcal{E}^+$, alors l'ensemble des éléments de $g(X)^{-1}\mathcal{R}^+ \otimes_{\mathcal{E}^+} \mathbf{N}(V)$ qui sont d'ordre 0 est $g(X)^{-1}\mathbf{N}(V)$.

Démonstration. — On a $g(X)^{-1}\mathcal{R}^+ \otimes_{\mathcal{E}^+} \mathbf{N}(V) \subset \widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ et l'ensemble des éléments d'ordre 0 de $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ est $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$. Le lemme résulte alors de ce que :

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \cap g(X)^{-1}\mathcal{R}^+ \otimes_{\mathcal{E}^+} \mathbf{N}(V) \\ = \mathcal{E}^\dagger \otimes_{\mathcal{E}^+} \mathbf{N}(V) \cap g(X)^{-1}\mathcal{R}^+ \otimes_{\mathcal{E}^+} \mathbf{N}(V) = g(X)^{-1}\mathbf{N}(V), \end{aligned}$$

puisque $g(X)^{-1}\mathcal{R}^+ \cap \mathcal{E}^\dagger = g(X)^{-1}\mathcal{E}^+$. \square

Théorème 3.3.7. — On se donne une représentation *apc* V dont les poids de Hodge-Tate sont dans l'intervalle $[-h; 0]$, ainsi qu'une base $\{e_1, \dots, e_d\}$ de $D_{\text{cris}}(V)$ dans laquelle la matrice de φ est sous forme de Jordan, la valeur propre correspondant à e_i étant notée α_i^{-1} . Si l'on appelle $M^0(V)$ l'ensemble des $f = \sum_{i=1}^d t^{-h} f_i \otimes e_i \in t^{-h}\mathcal{R}^+ \otimes_L D_{\text{cris}}(V)$ tels que :

- (i) f_i est d'ordre $h + \text{val}(\alpha_i)$;
- (ii) $\iota_m(f) \in \text{Fil}^0(t^{-h}L_m[[t]] \otimes_L D_{\text{cris}}(V))$ pour tout $m \geq m(V)$,

alors $M^0(V)$ est un \mathcal{E}^+ -module libre de rang d stable par ψ , et $X^{-h}\mathbf{N}(V) \subset M^0(V) \subset \varphi^{m(V)-1}(X)^{-h} \cdot \mathbf{N}(V)$.

Démonstration. — Par le lemme 3.3.5, l'ensemble $M^0(V)$ est le sous-ensemble de $M(V)$ constitué des éléments qui sont d'ordre nul. Le fait que $X^{-h}\mathbf{N}(V) \subset M^0(V) \subset \varphi^{m(V)-1}(X)^{-h} \cdot \mathbf{N}(V)$ suit alors de la proposition 3.3.3 et du lemme 3.3.6. On en déduit immédiatement que $M^0(V)$ est un \mathcal{E}^+ -module libre de rang d . Comme $M(V)$ est stable par ψ , le fait que $M^0(V)$ est stable par ψ suit du fait que si une série $f \in \mathcal{R}^+$ est d'ordre r , alors $\psi(f)$ est elle-aussi d'ordre r (cf. par exemple [Col04a, proposition 1.15]). \square

Si r est un réel, on note \mathcal{R}_r^+ l'anneau des séries d'ordre r ; cet anneau est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_r$. De la définition de $M^0(V)$ donnée ci-dessus, on déduit une application $\lambda : M^0(V) \rightarrow \prod_{i=1}^d \mathcal{R}_{h+\text{val}(\alpha_i)}^+$, qui à $f = \sum_{i=1}^d t^{-h} f_i \otimes e_i$ associe (f_1, \dots, f_d) .

Proposition 3.3.8. — L'application λ définie ci-dessus est continue et son image est fermée, si l'on munit $M^0(V)$ de la topologie p -adique et $\prod_{i=1}^d \mathcal{R}_{h+\text{val}(\alpha_i)}^+$ de la topologie provenant de la norme $\|(f_1, \dots, f_d)\| \stackrel{\text{déf}}{=} \sup \|f_i\|_{h+\text{val}(\alpha_i)}$.

Démonstration. — Si $m \geq m(V)$, alors $\text{Fil}^0(t^{-h}L_m[[t]] \otimes_L D_{\text{cris}}(V))$ est de codimension finie dans $t^{-h}L_m[[t]] \otimes_L D_{\text{cris}}(V)$ et le noyau de l'application :

$$\prod_{i=1}^d \mathcal{R}_{h+\text{val}(\alpha_i)}^+ \rightarrow t^{-h}L_m[[t]] \otimes_L D_{\text{cris}}(V) / \text{Fil}^0(t^{-h}L_m[[t]] \otimes_L D_{\text{cris}}(V)),$$

qui à (f_1, \dots, f_d) associe l'image de $\sum_{i=1}^d \varphi^{-m}(t^{-h}f_i \otimes e_i)$ est donc un sous-espace fermé E_m de $\prod_{i=1}^d \mathcal{R}_{h+\text{val}(\alpha_i)}^+$ ce qui fait que l'image de λ , $E \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcap_{m \geq 1} E_m$ est elle aussi fermée dans $\prod_{i=1}^d \mathcal{R}_{h+\text{val}(\alpha_i)}^+$. L'application naturelle $M^0(V) \rightarrow E$ est un isomorphisme par définition ; par le théorème de l'image ouverte, pour montrer que $M^0(V) \rightarrow E$ est un isomorphisme topologique, il suffit de montrer que l'application $M^0(V) \rightarrow \prod_{i=1}^d \mathcal{R}_{h+\text{val}(\alpha_i)}^+$ est continue, c'est-à-dire qu'elle est bornée. Pour cela, il suffit d'observer qu'une boule unité de $M^0(V)$ (pour une norme induisant la topologie p -adique) est un $\mathcal{O}_L[[X]]$ -module de type fini. \square

Proposition 3.3.9. — *Si V est irréductible et de dimension ≥ 2 , alors il existe $\ell \geq 0$ tel que $D^\sharp(V) = \psi^\ell(N(V))$.*

Démonstration. — Le fait que $\varphi(N(V)) \subset N(V)$ implique que $N(V) \subset \psi(N(V))$. Par ailleurs, le fait que $N(V) \subset M^0(V)$ et que $M^0(V)$ est stable par ψ implique que pour tout $k \geq 0$, on a $\psi^k(N(V)) \subset M^0(V)$. La suite des $\psi^k(N(V))$ est donc une suite croissante de sous- \mathcal{E}^+ -modules d'un \mathcal{E}^+ -module de type fini, et comme \mathcal{E}^+ est noetherien, il existe $\ell \geq 0$ tel que $\psi^\ell(N(V)) = \psi^{\ell+k}(N(V))$ pour tout $k \geq 0$. Le \mathcal{E}^+ -module $\psi^\ell(N(V))$ est un treillis stable par ψ et sur lequel ψ est surjectif, et le lemme 2.3.4 nous dit alors que $D^\sharp(V) = \psi^\ell(N(V))$. \square

Corollaire 3.3.10. — *Si V est irréductible et de dimension ≥ 2 , alors $D^\sharp(V) \subset M^0(V) \subset \varphi^{m(V)-1}(X)^{-h} \cdot D^\sharp(V)$.*

Démonstration. — Cela résulte directement de la proposition 3.3.9 ci-dessus et du théorème 3.3.7 puisque $N(V) \subset D^\sharp(V)$. \square

Lemme 3.3.11. — *Si V est irréductible et de dimension ≥ 2 , alors la topologie faible sur $D^\sharp(V)$ est induite par la topologie (p, X) -adique sur $M^0(V)$ via l'inclusion $D^\sharp(V) \subset M^0(V)$.*

Une suite d'éléments de $D^\sharp(V)$ est bornée pour la topologie faible si et seulement si elle est bornée pour la topologie p -adique dans $M^0(V)$.

Démonstration. — Ces deux points suivent du fait que $D^\sharp(V)$ est un \mathcal{E}^+ -module de type fini. \square

Corollaire 3.3.12. — *Si T est un \mathcal{O}_L -réseau de V qui est stable par $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, alors $(\varprojlim_{\psi} D^\sharp(T))^b = \varprojlim_{\psi} D^\sharp(T)$ et donc $(\varprojlim_{\psi} D^\sharp(V))^b = L \otimes_{\mathcal{O}_L} \varprojlim_{\psi} D^\sharp(T)$.*

Lemme 3.3.13. — *L'application naturelle $(\varprojlim_{\psi} D^{\sharp}(V))^b \rightarrow (\varprojlim_{\psi} M^0(V))^b$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Cette application est bien sûr injective, et il faut vérifier qu'elle est surjective. Si T est un \mathcal{O}_L -réseau de V stable par $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, et si l'on pose $M^0(T) = D(T) \cap M^0(V)$, alors l'intersection $\cap_{n \geq 0} \psi^n(M^0(T))$ est un treillis de $D(T)$ (puisqu'il contient $D^{\sharp}(T)$) stable par ψ et sur lequel ψ est surjectif. Par la proposition 2.3.3, on en déduit que $\cap_{n \geq 0} \psi^n(M^0(T)) = D^{\sharp}(T)$ et donc que si $(v_n)_{n \geq 0} \in \varprojlim_{\psi} M^0(T)$, alors $v_n \in D^{\sharp}(T)$ pour tout n , d'où le lemme. \square

3.4. Représentations apc de dimension 2 et représentations du Borel. — On reprend maintenant les notations de la fin du paragraphe §2.4, c'est-à-dire que l'on se donne une représentation apc V qui est absolument irréductible, de dimension 2 et dont les poids de Hodge-Tate sont 0 et $k-1$ pour un entier $k \geq 2$. En particulier, si l'on pose $h = k-1$, alors les résultats des paragraphes §§3.1-3.3 s'appliquent à $V(-h)$.

La proposition ci-dessous ne nous servira pas, mais elle a l'intérêt de fournir des exemples de modules de Wach pour lesquels le déterminant de φ est divisible par $Q_i(X)$ avec $i \geq 2$ (contrairement à ce qui se passe si $m(V) = 1$). Rappelons que pour les représentations qui nous intéressent, $m(V)$ est le plus petit entier $m \geq 1$ tel que $G(\beta\alpha^{-1}) \in F_m$.

Proposition 3.4.1. — *Dans les notations du théorème 3.2.2, on a $t_W^i(V(-h)) = 0$ pour $i \leq m(V) - 1$ et $t_W^i(V(-h)) = h$ pour $i \geq m(V)$. En particulier, le déterminant de φ sur $N(V(-h))$ est $Q_{m(V)}^h$.*

Démonstration. — Observons que comme les opposés des poids de Hodge-Tate de $V(-h)$ sont 0 et h , on a forcément $t_W^n(V(-h)) \in \{0; h\}$. Si $m \leq m(V) - 1$, alors par définition $G(\beta\alpha^{-1}) \notin F_m$ ce qui fait que $\text{Fil}^0(t^{-h}L_m[[t]] \otimes_L D_{\text{cris}}(V(-h))) = L_m[[t]] \otimes_L D_{\text{cris}}(V(-h))$ et le lemme 3.3.1 montre alors que les $\beta_{m,i}$ du théorème 3.2.2 sont tous les deux nuls et donc que $t_W^m(V(-h)) = 0$ dans ce cas. Enfin, le (iii) du théorème 3.2.2 implique que $t_W^i(V(-h)) = h$ pour $i \geq m(V)$. \square

Revenons à présent à $D^{\sharp}(V)$. Par le corollaire 3.3.10, on a une inclusion $D^{\sharp}(V(-h)) \subset M^0(V(-h))$ et on en déduit des applications (bien sûr toujours injectives) :

$$(\varprojlim_{\psi} D^{\sharp}(V(-h)))^b \rightarrow \varprojlim_{\psi} M^0(V(-h)) \rightarrow \varprojlim_{\psi} t^{-h}\mathcal{R}^+ \otimes_L D_{\text{cris}}(V(-h)).$$

Remarquons que $D^{\sharp}(V(-h)) = D^{\sharp}(V)(-h)$ et que $D_{\text{cris}}(V(-h)) = t^h D_{\text{cris}}(V)(-h)$, ce qui fait que l'on a une injection $(\varprojlim_{\psi} D^{\sharp}(V))^b \rightarrow \varprojlim_{\psi} \mathcal{R}^+ \otimes_L D_{\text{cris}}(V)$.

Nous en arrivons maintenant au résultat principal de ce chapitre.

Théorème 3.4.2. — Supposons $\alpha \neq \beta$. Si $(w_{\alpha,n})_{n \geq 0}$ et $(w_{\beta,n})_{n \geq 0}$ sont deux suites d'éléments de \mathcal{R}^+ , alors la suite :

$$(w_{\alpha,n} \otimes e_\alpha + w_{\beta,n} \otimes e_\beta)_{n \geq 0} \in \varprojlim \mathcal{R}^+ \otimes_L D_{\text{cris}}(V)$$

appartient à $(\varprojlim_\psi D^\sharp(V))^b$ si et seulement si :

- (i) pour tout $n \geq 0$, $w_{\alpha,n}$ est d'ordre $\text{val}(\alpha_p)$ et $w_{\beta,n}$ est d'ordre $\text{val}(\beta_p)$, et les deux suites $(\|w_{\alpha,n}\|_{\text{val}(\alpha_p)})_{n \geq 0}$ et $(\|w_{\beta,n}\|_{\text{val}(\beta_p)})_{n \geq 0}$ sont bornées ;
- (ii) pour tout $m \geq m(V)$, et pour tout $n \geq 0$, on a $\varphi^{-m}(w_{\alpha,n} \otimes e_\alpha + w_{\beta,n} \otimes e_\beta) \in \text{Fil}^0(L_m[[t]] \otimes_L D_{\text{cris}}(V))$, c'est-à-dire $\varphi^{-m}(w_{\alpha,n})\alpha_p^m - G(\alpha\beta^{-1})\varphi^{-m}(w_{\beta,n})\beta_p^m \in t^{k-1}L_m[[t]]$;
- (iii) pour tout $n \geq 0$, on a $\psi(w_{\alpha,n+1}) = \alpha_p^{-1}w_{\alpha,n}$ et $\psi(w_{\beta,n+1}) = \beta_p^{-1}w_{\beta,n}$.

Démonstration. — Posons $w_n = w_{\alpha,n} \otimes e_\alpha + w_{\beta,n} \otimes e_\beta \in t^{-h}\mathcal{R}^+ \otimes_L D_{\text{cris}}(V(-h))$.

- La condition (iii) est équivalente à dire que pour tout $n \geq 0$, on a $\psi(w_{n+1}) = w_n$.
- Le fait que $w_{\alpha,n}$ est d'ordre $\text{val}(\alpha_p)$ et $w_{\beta,n}$ est d'ordre $\text{val}(\beta_p)$ avec la condition (ii) sont équivalents, par le théorème 3.3.7, au fait que $w_n \in M^0(V(-h))$.
- Le fait que les deux suites $\{\|w_{\alpha,n}\|_{\text{val}(\alpha_p)}\}_{n \geq 0}$ et $\{\|w_{\beta,n}\|_{\text{val}(\beta_p)}\}_{n \geq 0}$ sont bornées est alors équivalent, par la proposition 3.3.8, au fait que la suite $(w_n)_{n \geq 0}$ est bornée pour la topologie p -adique dans $M^0(V(-h))$.

On voit donc que les conditions (i), (ii) et (iii) sont satisfaites si et seulement si $(w_n)_{n \geq 0} \in (\varprojlim_\psi M^0(V(-h)))^b$. Le théorème résulte alors du lemme 3.3.13, qui nous dit que l'application $(\varprojlim_\psi D^\sharp(V(-h)))^b \rightarrow (\varprojlim_\psi M^0(V(-h)))^b$ est un isomorphisme (et de l'identification de $D^\sharp(V)$ à $D^\sharp(V(-h))$). \square

Le théorème ci-dessus nous fournit une description de $(\varprojlim_\psi D^\sharp(V))^b$ en termes de fonctions analytiques vérifiant certaines conditions. Nous reviendrons là-dessus plus loin dans l'article.

Pour le moment, terminons ce paragraphe en définissant une action du groupe :

$$B(\mathbf{Q}_p) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_p^\times & \mathbf{Q}_p \\ 0 & \mathbf{Q}_p^\times \end{pmatrix} \right\} \subset \text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$$

sur $(\varprojlim_\psi D^\sharp(V))^b$. Nous allons aussi montrer que cette action est continue, topologiquement irréductible, et que le lemme de Schur est vérifié.

On fixe un caractère lisse χ de \mathbf{Q}_p^\times et on munit $(\varprojlim_\psi D^\sharp(V))^b$ d'une action de $B(\mathbf{Q}_p)$ comme suit. Tout élément $g \in B(\mathbf{Q}_p)$ peut s'écrire comme produit :

$$g = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où $x \in \mathbf{Q}_p^\times$, $j \in \mathbf{Z}$, $a \in \mathbf{Z}_p^\times$ et $z \in \mathbf{Q}_p$.

Définition 3.4.3. — Si $v = (v_i)_{i \geq 0} \in (\varprojlim_{\psi} D^{\sharp}(V))^b$, alors on pose pour $i \geq 0$:

$$\begin{aligned} \left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \cdot v \right)_i &= \chi^{-1}(x)v_i; \\ \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^j \end{pmatrix} \cdot v \right)_i &= v_{i-j} = \psi^j(v_i); \\ \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot v \right)_i &= \gamma_a^{-1}(v_i), \text{ où } \gamma_a \in \Gamma \text{ est tel que } \varepsilon(\gamma_a) = a; \\ \left(\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v \right)_i &= \psi^j((1+X)^{p^{i+j}z}v_{i+j}), \text{ pour } i+j \geq -\text{val}(z). \end{aligned}$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier que les formules ci-dessus définissent bien une action du groupe $B(\mathbf{Q}_p)$ sur $(\varprojlim_{\psi} D^{\sharp}(V))^b$. On définit aussi une structure de $\mathcal{O}_L[[X]]$ -module sur $(\varprojlim_{\psi} D^{\sharp}(V))^b$ en posant $(1+X)^z \cdot v \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v$ pour $z \in \mathbf{Z}_p$.

Proposition 3.4.4. — L'application $B(\mathbf{Q}_p) \times (\varprojlim_{\psi} D^{\sharp}(V))^b \rightarrow (\varprojlim_{\psi} D^{\sharp}(V))^b$ est continue.

Démonstration. — On vérifie qu'il suffit de montrer que l'application $\psi : \varprojlim_{\psi} D^{\sharp}(T) \rightarrow \varprojlim_{\psi} D^{\sharp}(T)$ est continue et que l'application $B(\mathbf{Z}_p) \times \varprojlim_{\psi} D^{\sharp}(T) \rightarrow \varprojlim_{\psi} D^{\sharp}(T)$ est continue. Si E et $\{X_i\}_{i \in I}$ sont des espaces topologiques et si pour tout i , on se donne une application continue $f_i : E \times X_i \rightarrow E \times X_i$, alors l'application $E \times \prod_{i \in I} X_i \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ donnée par $(e, (x_i)_i) \mapsto (f_i(e, x_i))_i$ est continue. En effet, la diagonale Δ_E de $\prod_{i \in I} E$ y est fermée, et l'application $(e, (x_i)_i) \mapsto (f_i(e, x_i))_i$ est la composition des applications :

$$E \times \prod_{i \in I} X_i = \Delta_E \times \prod_{i \in I} X_i \subset \prod_{i \in I} (E \times X_i) \xrightarrow{\prod_{i \in I} f_i} \prod_{i \in I} (E \times X_i) \xrightarrow{\prod_{i \in I} \text{pr}_i} \prod_{i \in I} X_i.$$

On se ramène donc à montrer que si chaque f_i est continue, alors $\prod_{i \in I} f_i$ est continue (pour la topologie produit) ce qui est laissé en exercice facile au lecteur.

Afin de montrer la proposition, il suffit donc de montrer que l'application $\psi : D^{\sharp}(T) \rightarrow D^{\sharp}(T)$ est continue, et que l'application $B(\mathbf{Z}_p) \times D^{\sharp}(T) \rightarrow D^{\sharp}(T)$ est continue. Commençons par montrer que si V est une représentation apc, alors (a) l'ensemble $\{p^j D(T) + X^k D^{\sharp}(T)\}_{j,k \geq 0}$ est une base de voisinages de zéro pour la topologie faible et (b) l'ensemble $\{p^j D(T) + \varphi(X)^k D^{\sharp}(T)\}_{j,k \geq 0}$ est aussi une base de voisinages de zéro pour la topologie faible. La proposition 3.3.9 implique que $N(T) \subset D^{\sharp}(T) \subset \varphi^{m(V)-1}(X)^{-h} N(T)$, ce qui montre le point (a) puisque $N(T)$ est un $\mathcal{O}_L[[X]]$ -module libre qui engendre $D(T)$ sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$. Pour montrer le point (b), et comme $p^j D(T) + \varphi(X)^k D^{\sharp}(T) \subset p^j D(T) + X^k D^{\sharp}(T)$, il suffit de montrer (par exemple) que pour tout $k \geq 0$, il existe ℓ tel que $p^j D(T) + X^{\ell} D^{\sharp}(T) \subset p^j D(T) + \varphi(X)^k D^{\sharp}(T)$. Pour cela, remarquons que si $m \geq j$ est tel que $p^m \geq k$, alors $p^j D(T) + X^{p^{m+1}} D^{\sharp}(T) \subset p^j D(T) + \varphi(X)^{p^m} D^{\sharp}(T) \subset p^j D(T) + \varphi(X)^k D^{\sharp}(T)$ et on peut

donc prendre $\ell = p^{m+1}$. Le fait que l'opérateur $\psi : D^\sharp(T) \rightarrow D^\sharp(T)$ est continu pour la topologie faible résulte alors du fait que $\psi(p^j D(T) + \varphi(X)^k D^\sharp(T)) = p^j D(T) + X^k D^\sharp(T)$.

Montrons maintenant que l'application naturelle $B(\mathbf{Z}_p) \times D^\sharp(T) \rightarrow D^\sharp(T)$ est continue (pour la topologie faible). Comme $B(\mathbf{Z}_p)$ agit par multiplication par des éléments de $\mathcal{O}_L[[X]]$ ou par action de Γ , et que la topologie faible de $D^\sharp(T)$ est définie par une base de voisinages de 0 qui sont des $\mathcal{O}_L[[X]]$ -modules stables par Γ , on voit pour chaque $g \in B(\mathbf{Z}_p)$ l'action de g sur $D^\sharp(T)$ est continue. Il reste donc à montrer que si W est un voisinage de zéro dans $D^\sharp(T)$, alors il existe un sous-groupe normal ouvert U de $B(\mathbf{Z}_p)$ tel que $u(x) - x \in W$ pour tous $(u, x) \in U \times D^\sharp(T)$. Cela résulte des faits suivants :

- si $a \in \mathbf{Z}_p$ et $n \geq 0$, alors $(1 + X)^{p^{na}} - 1 \in (p, X)^{n+1}$;
- il existe une constante c telle que si $\gamma \in \Gamma_{n(V)}$ et $n \geq 1$, alors $(\gamma^{p^n} - 1)N(T) \subset (p, X)^{n-c}N(T)$,

que nous laissons en exercices au lecteur. □

La proposition suivante est le « lemme de Schur » pour la représentation de $B(\mathbf{Q}_p)$ que l'on vient de définir.

Proposition 3.4.5. — *Toute application continue $B(\mathbf{Q}_p)$ -équivariante :*

$$f : \varprojlim_{\psi} D^\sharp(V) \longrightarrow \varprojlim_{\psi} D^\sharp(V)$$

est scalaire, i.e. est la multiplication par un élément de L .

Démonstration. — Par compacité, on peut (quitte à multiplier f par une puissance de p) supposer que f envoie $\varprojlim_{\psi} D^\sharp(T)$ dans $\varprojlim_{\psi} D^\sharp(T)$. Notons $\text{pr} : \varprojlim_{\psi} D^\sharp(T) \rightarrow D^\sharp(T)$ l'application $v = (v_n)_{n \geq 0} \mapsto v_0$. Commençons par montrer que si $v = (v_n)_{n \geq 0}$, alors $\text{pr} \circ f(v)$ ne dépend que de $v_0 = \text{pr}(v)$. Soit K_n l'ensemble des $v \in \varprojlim_{\psi} D^\sharp(T)$ dont les n premiers termes sont nuls, ce qui fait que pour $n \geq 1$, K_n est un sous- $\mathcal{O}_L[[X]]$ -module fermé et stable par ψ et Γ de $\varprojlim_{\psi} D^\sharp(T)$ et que $\psi(K_n) = K_{n+1}$. Si l'on pose $M = \text{pr} \circ f(K_1)$, alors $\psi^n(M) = \text{pr} \circ f(K_{n+1})$. On a $\bigcap_{n \geq 1} \text{pr} \circ f(K_n) = \{0\}$; en effet, si l'on peut écrire $y = \text{pr} \circ f(k_n)$ pour tout n , alors comme $k_n \rightarrow 0$, on a nécessairement $y = 0$. On en déduit que $\bigcap_{n \geq 1} \psi^n(M) = 0$ et donc par le lemme 2.2.10 que $M = 0$. Ceci revient à dire que si l'on se donne $v = (v_n)_{n \geq 0}$, et que $v_0 = 0$, alors $f(v)_0 = 0$.

Pour tout $w \in D^\sharp(T)$, soit \tilde{w} un élément de $\varprojlim_{\psi} D^\sharp(T)$ tel que $\tilde{w}_0 = w$. Les calculs précédents montrent que l'application $h : D^\sharp(T) \rightarrow D^\sharp(T)$ donnée par $h(w) \stackrel{\text{déf}}{=} \text{pr} \circ f(\tilde{w})$ est bien définie, et qu'elle est $\mathcal{O}_L[[X]]$ -linéaire et commute à ψ et à l'action de Γ . Par [Col04a, proposition 4.7], elle s'étend en une application de (φ, Γ) -modules $h : D(V) \rightarrow D(V)$ qui est nécessairement scalaire car V est irréductible. Comme $f(v)_n = h(\psi^{-n}v)$ car f commute à ψ^{-n} , on en déduit que f est aussi scalaire. □

Proposition 3.4.6. — *L'action de $B(\mathbf{Q}_p)$ sur $(\varprojlim_{\psi} D^{\sharp}(V))^b$ est topologiquement irréductible.*

Démonstration. — C'est la réunion de la démonstration du corollaire 4.59 et du (iii) de la remarque 5.5 de [Col04a] (puisque V et donc V^* est absolument irréductible). \square

4. Représentations apc irréductibles de $GL_2(\mathbf{Q}_p)$

Le but de cette partie est de définir des espaces de Banach p -adiques $B(V)$ munis d'une action linéaire continue de $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ et d'en commencer l'étude. Les représentations $B(V)$ sont associées aux représentations irréductibles V de dimension 2 de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$ qui deviennent cristallines sur une extension abélienne de \mathbf{Q}_p .

4.1. Fonctions de classe \mathcal{C}^r et distributions d'ordre r . — Le but de ce paragraphe est de rappeler les définitions et énoncés (classiques) d'analyse p -adique utilisés dans la suite. Pour les preuves, nous renvoyons à [Col05].

Si $f : \mathbf{Z}_p \rightarrow L$ est une fonction quelconque, on pose pour n entier positif ou nul :

$$a_n(f) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} f(n-i).$$

Soit r un nombre réel positif ou nul.

Définition 4.1.1. — Une fonction $f : \mathbf{Z}_p \rightarrow L$ est de classe \mathcal{C}^r si $n^r |a_n(f)| \rightarrow 0$ dans $\mathbf{R}_{\geq 0}$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Rappelons que f est continue si et seulement si $a_n(f)$ tend p -adiquement vers 0 quand n tend vers l'infini, de sorte que les fonctions de classe \mathcal{C}^0 au sens de la définition 4.1.1 sont précisément les fonctions continues sur \mathbf{Z}_p . Toute fonction de classe \mathcal{C}^r est aussi de classe \mathcal{C}^s pour $0 \leq s \leq r$ et est donc en particulier toujours continue. On note $\mathcal{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$ le L -espace vectoriel des fonctions $f : \mathbf{Z}_p \rightarrow L$ de classe \mathcal{C}^r .

Toute fonction continue $f : \mathbf{Z}_p \rightarrow L$ s'écrit (développement de Mahler) :

$$(3) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f) \binom{z}{n}$$

où $z \in \mathbf{Z}_p$ et $\binom{z}{0} \stackrel{\text{déf}}{=} 1$, $\binom{z}{n} = z(z-1)\cdots(z-n+1)/n!$ si $n \geq 1$. De plus, $\|f\|_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{z \in \mathbf{Z}_p} |f(z)|$ coïncide avec $\sup_{n \geq 0} |a_n(f)|$. On vérifie facilement que l'espace $\mathcal{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$ est un espace de Banach pour la norme $\|f\|_r \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{n \geq 0} (n+1)^r |a_n(f)|$.

La terminologie « de classe \mathcal{C}^r » provient du fait que, lorsque r est entier strictement positif, les fonctions de $\mathcal{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$ sont aussi les fonctions sur \mathbf{Z}_p qui, moralement, admettent r dérivées avec la r -ième dérivée continue, ce qui explique la terminologie. Par exemple, les fonctions localement analytiques sur \mathbf{Z}_p sont de classe \mathcal{C}^r pour tout $r \in \mathbf{R}_{\geq 0}$.

Théorème 4.1.2 (Amice-Vélu, Vishik). — Soit d un entier tel que $r - 1 < d$. Le sous- L -espace vectoriel $\text{Pol}^d(\mathbf{Z}_p, L)$ de $\mathcal{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$ des fonctions $f : \mathbf{Z}_p \rightarrow L$ localement polynomiales de degré (local) au plus d est dense dans $\mathcal{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$.

Définition 4.1.3. — On appelle distribution tempérée d'ordre r un élément de l'espace $\mathcal{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)^*$, c'est-à-dire une forme linéaire continue sur l'espace de Banach des fonctions de classe \mathcal{C}^r .

On dit parfois aussi distribution tempérée d'ordre $\leq r$. Nous donnons maintenant deux descriptions des distributions tempérées d'ordre r .

Par le théorème 4.1.2, l'inclusion $\text{Pol}^d(\mathbf{Z}_p, L) \subsetneq \mathcal{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$ induit lorsque $r - 1 < d$ une injection :

$$\mathcal{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)^* \hookrightarrow \text{Pol}^d(\mathbf{Z}_p, L)^*$$

où $\text{Pol}^d(\mathbf{Z}_p, L)^*$ est l'espace vectoriel dual de $\text{Pol}^d(\mathbf{Z}_p, L)$. Rappelons que si U est un ouvert de \mathbf{Z}_p et $\mathbf{1}_U$ sa fonction caractéristique, alors on note $\int_U f(z) d\mu(z)$ pour $\mu(\mathbf{1}_U(z)f(z))$.

Théorème 4.1.4 (Amice-Vélu, Vishik). — Soit $\mu \in \text{Pol}^d(\mathbf{Z}_p, L)^*$ et supposons que $r - 1 < d$. Alors $\mu \in \mathcal{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)^*$ si et seulement s'il existe une constante $C_\mu \in L$ telle que, $\forall a \in \mathbf{Z}_p, \forall j \in \{0, \dots, d\}$ et $\forall n \in \mathbf{N}$:

$$(4) \quad \int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} (z-a)^j d\mu(z) \in C_\mu p^{n(j-r)} \mathcal{O}_L.$$

Remarquons que le plus petit entier d tel que le théorème 4.1.4 s'applique est la partie entière de r . Lorsque μ est d'ordre r et $r - 1 < d$, on pose :

$$(5) \quad \|\mu\|_{r,d} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{a \in \mathbf{Z}_p} \sup_{j \in \{0, \dots, d\}} \sup_{n \in \mathbf{N}} \left(p^{n(j-r)} \left| \int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} (z-a)^j d\mu(z) \right| \right).$$

On peut montrer que $\|\mu\|_{r,d}$ est une norme sur $\mathcal{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)^*$ qui redonne la topologie d'espace de Banach de $\mathcal{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)^*$ et qui est équivalente à la norme :

$$(6) \quad \|\mu\|_r \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{a \in \mathbf{Z}_p} \sup_{j,n \in \mathbf{N}} \left(p^{n(j-r)} \left| \int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} (z-a)^j d\mu(z) \right| \right).$$

En particulier, la majoration (4) est équivalente à la même majoration pour tout $j \in \mathbf{N}$ (et tout $a \in \mathbf{Z}_p, n \in \mathbf{N}$), quitte peut-être à modifier C_μ .

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 4.1.5. — Soit $r \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ et d la partie entière de r . Soit $n \in \mathbf{N}$ et :

$$f(z) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{a \in \{0, \dots, p^n - 1\}} \mathbf{1}_{a+p^n\mathbf{Z}_p}(z) \sum_{i=0}^d \lambda_{a,i} (z-a)^i \in \text{Pol}^d(\mathbf{Z}_p, L)$$

où $\lambda_{a,i} \in L$. Alors :

$$(7) \quad \sup_{\mu \in \mathcal{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)^*} \frac{\left| \int_{\mathbf{Z}_p} f(z) d\mu(z) \right|}{\|\mu\|_{r,d}} = \sup_{a \in \{0, \dots, p^n - 1\}} \sup_{i \in \{0, \dots, d\}} |\lambda_{a,i}| p^{n(r-i)}.$$

Démonstration. — Par (5), on voit que le réel de gauche est plus petit que celui de droite. Pour $(a, i) \in \{0, \dots, p^n - 1\} \times \{0, \dots, d\}$, il n'est pas difficile de construire une forme linéaire $\mu_{a,i} \in \text{Pol}^d(\mathbf{Z}_p, L)^*$ à support dans $a + p^n \mathbf{Z}_p$ satisfaisant (4) telle que $\int_{a+p^n \mathbf{Z}_p} (z-a)^j d\mu_{a,i}(z) = 0$ si $j \neq i$ ($j \in \{0, \dots, d\}$), $\int_{a+p^n \mathbf{Z}_p} (z-a)^i d\mu_{a,i}(z) = p^{n(i-r)}$ et $\|\mu_{a,i}\|_{r,d} = 1$ (les détails sont laissés en exercice au lecteur). En particulier :

$$\frac{\left| \int_{a+p^n \mathbf{Z}_p} f(z) d\mu_{a,i}(z) \right|}{\|\mu_{a,i}\|_{r,d}} = |\lambda_{a,i}| p^{n(r-i)}$$

est inférieur au réel de gauche. Comme cela est vrai pour tout $(a, i) \in \{0, \dots, p^n - 1\} \times \{0, \dots, d\}$, on en déduit le résultat. \square

L'espace vectoriel $\text{An}(\mathbf{Z}_p, L)$ des fonctions localement analytiques sur \mathbf{Z}_p (muni de sa topologie d'espace de type compact, cf. [Sch01, §16] ou [Col05, §1.4.3]), est *a fortiori* dense dans $\mathcal{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$ et on dispose donc aussi d'une injection continue entre deux continus :

$$\mathcal{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)^* \hookrightarrow \text{An}(\mathbf{Z}_p, L)^*.$$

La transformée d'Amice-Mahler :

$$(8) \quad \mu \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \mu \left(\binom{z}{n} \right) X^n$$

induit un isomorphisme topologique entre $\text{An}(\mathbf{Z}_p, L)^*$ et \mathcal{R}^+ . Rappelons que (voir §2.1) :

$$\mathcal{R}^+ \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \mid a_n \in L, \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \rho^n = 0 \forall \rho \in [0, 1[\right\}$$

et que cet espace est muni de la topologie d'espace de Fréchet induite par la collection des normes $\|\cdot\|_{D(0,\rho)} = \sup_{n \geq 0} (|a_n| \rho^n)$ pour $0 < \rho < 1$. Rappelons également (définition 2.1.1) qu'un élément $w \in \mathcal{R}^+$ est d'ordre r si, pour un (ou de manière équivalente tous les) $\rho \in]0, 1[$, la suite $(p^{-nr} \|w\|_{D(0,\rho^{1/p^n})})_{n \geq 0}$ est bornée dans $\mathbf{R}_{\geq 0}$.

Lemme 4.1.6. — Soit $w = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}^+$.

(i) Un élément $w = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in \mathcal{R}^+$ est d'ordre r si et seulement si $\{n^{-r} |a_n|\}_{n \geq 1}$ est borné (dans $\mathbf{R}_{\geq 0}$) lorsque n varie.

(ii) Les normes $\sup_{n \geq 0} (p^{-nr} \|w\|_{D(0,\rho^{1/p^n})})$ et $\sup_{n \geq 0} ((n+1)^{-r} |a_n|)$ sont équivalentes pour tout $\rho \in]0, 1[$.

Démonstration. — Voir [Col05, §2.1]. \square

Le résultat suivant découle immédiatement des définitions et du lemme 4.1.6 :

Proposition 4.1.7. — Soit $\mu \in \text{An}(\mathbf{Z}_p, L)^*$. Alors $\mu \in \mathcal{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)^*$ si et seulement l'élément $\sum_{n=0}^{+\infty} \mu\left(\binom{z}{n}\right) X^n$ est d'ordre r dans \mathcal{R}^+ .

On peut montrer que $\|\mu\|'_r \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_n ((n+1)^{-r} |\mu\left(\binom{z}{n}\right)|)$ est une norme sur $\mathcal{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)^*$ qui redonne la topologie d'espace de Banach de $\mathcal{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)^*$ ([Col105, §2.3.1]).

4.2. Définition de $B(V)$. — Le but de ce paragraphe est de donner une première définition de $B(V)$ comme espace fonctionnel.

Soit V une représentation apc absolument irréductible comme au §2.4 (rappelons que V à pour poids de Hodge-Tate $(0, k-1)$ avec nécessairement $k \geq 2$ sinon V n'est pas absolument irréductible). Les valeurs propres α_p^{-1} et β_p^{-1} du semi-simplifié de φ sur $D_{\text{cris}}(V) = D(\alpha_p, \beta_p)$ sont alors telles que $\text{val}(\alpha_p) > 0$, $\text{val}(\beta_p) > 0$ et $\text{val}(\alpha_p) + \text{val}(\beta_p) = k-1$. Remarquons que φ est semi-simple si et seulement si $\alpha \neq \beta$. Quitte à échanger α et β , on suppose dans la suite $\text{val}(\alpha_p) \geq \text{val}(\beta_p)$.

Soit $B(\alpha)$ l'espace de Banach suivant. Son L -espace vectoriel sous-jacent est formé des fonctions $f : \mathbf{Q}_p \rightarrow L$ vérifiant les deux conditions :

- (i) $f|_{\mathbf{Z}_p}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^{\text{val}(\alpha_p)}$;
- (ii) $(\beta\alpha^{-1})(z)|z|^{-1}z^{k-2}f(1/z)|_{\mathbf{Z}_p - \{0\}}$ se prolonge sur \mathbf{Z}_p en une fonction de classe $\mathcal{C}^{\text{val}(\alpha_p)}$.

Comme espace vectoriel, on a donc :

$$(9) \quad B(\alpha) \simeq \mathcal{C}^{\text{val}(\alpha_p)}(\mathbf{Z}_p, L) \oplus \mathcal{C}^{\text{val}(\alpha_p)}(\mathbf{Z}_p, L), \quad f \mapsto f_1 \oplus f_2$$

où, pour $z \in \mathbf{Z}_p$, $f_1(z) \stackrel{\text{déf}}{=} f(pz)$ et $f_2(z) \stackrel{\text{déf}}{=} (\beta\alpha^{-1})(z)|z|^{-1}z^{k-2}f(1/z)$. On munit $B(\alpha)$ de la norme :

$$\|f\| \stackrel{\text{déf}}{=} \max(\|f_1\|_{\text{val}(\alpha_p)}, \|f_2\|_{\text{val}(\alpha_p)}),$$

qui en fait un espace de Banach en vertu du §4.1. On fait agir L -linéairement $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ à gauche sur les fonctions de $B(\alpha)$ comme suit :

$$(10) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot f(z) = \alpha(ad-bc)(\beta\alpha^{-1})(-cz+a)|-cz+a|^{-1}(-cz+a)^{k-2}f\left(\frac{dz-b}{-cz+a}\right).$$

Notons que $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ agit par la multiplication par $\varepsilon^{k-2}(a)(\alpha\beta)(a)|a|^{-(k-1)} \in \mathcal{O}_L^\times$.

Lemme 4.2.1. — Si $f \in B(\alpha)$ et $g \in \text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, alors $g \cdot f \in B(\alpha)$ et l'action de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ sur $B(\alpha)$ se fait par automorphismes continus.

Démonstration. — On pose $r \stackrel{\text{déf}}{=} \text{val}(\alpha_p)$, d la partie entière de r (donc $d \leq k-2$) et on munit l'espace de Banach $\mathcal{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$ de la norme induite par son bidual, c'est-à-dire :

$$\|f\| \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{\mu \in \mathcal{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)^*} \frac{\left| \int_{\mathbf{Z}_p} f(z) d\mu(z) \right|}{\|\mu\|_{r,d}}$$

qui redonne la topologie d'espace de Banach de $\mathcal{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$ par [Sch01, lemme 9.9] et les résultats du §4.1. L'assertion du lemme est triviale si g est scalaire. Par la décomposition de Bruhat et le cas scalaire, on est réduit à montrer la stabilité et la continuité pour les matrices g de la forme $\begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (avec $\lambda \in \mathbf{Q}_p^\times$). Le premier cas est évident puisqu'il envoie $f = (f_1, f_2) \in B(\alpha)$ sur $(f_2, f_1) \in B(\alpha)$ à multiplication près par des scalaires (cf. (9)). Quitte à conjuguer par $\begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et à multiplier par un scalaire convenable, on peut prendre $\lambda \in \mathbf{Z}_p - \{0\}$ dans le deuxième et g envoie alors $(f_1(z), f_2(z)) \in B(\alpha)$ sur $(f_1(\lambda z), f_2(\lambda z))$ (à multiplication près par des scalaires). Il suffit donc de montrer que l'application $f(\cdot) \mapsto f(\lambda \cdot)$ est bien définie et continue de $\mathcal{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$ dans $\mathcal{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$. Elle est bien définie par [Col05, prop 1.38]. Pour la continuité, par le théorème 4.1.2, il suffit de montrer qu'il existe $c \in |L^\times|$ tel que, si $f \in \text{Pol}^d(\mathbf{Z}_p, L) \subset \mathcal{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$, alors $\|f(\lambda \cdot)\| \leq c \|f(\cdot)\|$. En écrivant, pour un $n \in \mathbf{N}$ assez petit et des $\lambda_{n,a,i} \in L$ convenables :

$$f(z) = \sum_{a \in \{0, \dots, p^n - 1\}} \mathbf{1}_{a+p^n \mathbf{Z}_p}(z) \sum_{i=0}^d \lambda_{n,a,i} (z-a)^i,$$

un calcul donne :

$$f(\lambda z) = \sum_{\substack{a \in \{0, \dots, p^n - 1\} \\ \text{val}(a) \geq \text{val}(\lambda)}} \mathbf{1}_{\frac{a}{\lambda} + p^{n-\text{val}(\lambda)} \mathbf{Z}_p}(z) \sum_{i=0}^d \lambda_{n,a,i} \lambda^i \left(z - \frac{a}{\lambda}\right)^i.$$

On en déduit grâce à (5) :

$$\begin{aligned} \|f(\lambda \cdot)\| &\leq \sup_{\substack{a \in \{0, \dots, p^n - 1\} \\ \text{val}(a) \geq \text{val}(\lambda)}} \sup_{i \in \{0, \dots, d\}} |\lambda_{n,a,i} \lambda^i| p^{(n-\text{val}(\lambda))(r-i)} \\ &\leq \sup_{a \in \{0, \dots, p^n - 1\}} \sup_{i \in \{0, \dots, d\}} |\lambda_{n,a,i}| p^{n(r-i)} p^{-r \text{val}(\lambda)} \\ &\leq \|f(\cdot)\| \end{aligned}$$

où la dernière inégalité résulte du lemme 4.1.5 et du fait que $\text{val}(\lambda) \geq 0$. Passons au dernier cas. Quitte à conjuguer $g = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ par un élément convenable de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_p^\times \end{pmatrix}$, on peut supposer $\lambda = p$ et g envoie alors (f_1, f_2) sur $(f_1(z+1), (1+pz)^{k-2} f_2(z/(1+pz)))$ (à multiplication près par des scalaires). Il suffit donc de montrer que les applications $f(\cdot) \mapsto f(\cdot + 1)$ et $f(\cdot) \mapsto (1+pz)^{k-2} f(\cdot/(1+p \cdot))$ sont bien définies et continues de $\mathcal{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$ dans $\mathcal{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$. Elles sont bien définies encore par [Col05, §1.5]. La continuité se vérifie par un argument analogue au précédent avec un calcul utilisant (5) et (6) dont on laisse les détails au lecteur. \square

La représentation $B(\alpha)$ doit être pensée comme une induite parabolique. Sans donner un sens formel à ce qui suit, on a un isomorphisme $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ -équivariant :

$$\left(\text{Ind}_{\mathbf{B}(\mathbf{Q}_p)}^{\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} \alpha \otimes d^{k-2} \beta | \cdot |^{-1} \right)^{\mathcal{C}^{\text{val}(\alpha p)}} \simeq B(\alpha)$$

où l'espace de gauche est celui des fonctions $F : \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p) \rightarrow L$ qui sont de classe $\mathcal{C}^{\mathrm{val}(\alpha_p)}$ (oublions que nous n'avons pas défini de telles fonctions dans ce cadre!) telles que :

$$(11) \quad F \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} g \right) = \alpha(a)\beta(d)|d|^{-1}d^{k-2}F(g)$$

avec action de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ donnée par $(g \cdot F)(g') \stackrel{\mathrm{d\acute{e}f}}{=} F(g'g)$. On passe de F à une fonction $f \in B(\alpha)$ en posant :

$$(12) \quad f(z) \stackrel{\mathrm{d\acute{e}f}}{=} F \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & z \end{pmatrix} \right).$$

On définit de même $B(\beta)$ muni d'une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ par automorphismes en échangeant partout α et β .

Voici des exemples importants de fonctions dans $B(\alpha)$:

Lemme 4.2.2. — Pour $0 \leq j < \mathrm{val}(\alpha_p)$ et $a \in \mathbf{Q}_p$, les fonctions $z \mapsto z^j$ et les fonctions :

$$z \mapsto (\beta\alpha^{-1})(z-a)|z-a|^{-1}(z-a)^{k-2-j}$$

(prolongées par 0 en a) sont dans $B(\alpha)$.

Démonstration. — En faisant agir $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur z^j , il suffit de traiter les deuxièmes fonctions. En faisant agir $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, il suffit même par le lemme 4.2.1 de traiter le cas $a = 0$ et comme $z \mapsto z^j$ est clairement de classe $\mathcal{C}^{\mathrm{val}(\alpha_p)}$ sur \mathbf{Z}_p , il suffit de montrer que $z \mapsto f(z) \stackrel{\mathrm{d\acute{e}f}}{=} (\beta\alpha^{-1})(z)|z|^{-1}z^{k-2-j}$ est de classe $\mathcal{C}^{\mathrm{val}(\alpha_p)}$ sur \mathbf{Z}_p . Soit f_0 la fonction nulle sur \mathbf{Z}_p et, pour $n \in \mathbf{Z}$, $n > 0$, posons $f_n(z) \stackrel{\mathrm{d\acute{e}f}}{=} (\beta\alpha^{-1})(z)|z|^{-1}z^{k-2-j}$ si $\mathrm{val}(z) < n$, $f_n(z) \stackrel{\mathrm{d\acute{e}f}}{=} 0$ sinon. La fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^{\mathrm{val}(\alpha_p)}$ sur \mathbf{Z}_p puisqu'elle est localement polynomiale. Il suffit de montrer que $f_{n+1} - f_n \rightarrow 0$ dans $\mathcal{C}^{\mathrm{val}(\alpha_p)}(\mathbf{Z}_p, L)$ quand $n \rightarrow +\infty$ (car $\sum_{n=0}^{\infty} (f_{n+1} - f_n) = f \in \mathcal{C}^{\mathrm{val}(\alpha_p)}(\mathbf{Z}_p, L)$ puisque $\mathcal{C}^{\mathrm{val}(\alpha_p)}(\mathbf{Z}_p, L)$ est complet). Par [Sch01, lemme 9.9], il suffit de vérifier que $f_{n+1} - f_n \rightarrow 0$ dans $(B(\alpha)^*)^*$, i.e. que :

$$\sup_{\mu \in \mathcal{C}^{\mathrm{val}(\alpha_p)}(\mathbf{Z}_p, L)^*} \frac{\left| \int_{\mathbf{Z}_p} (f_{n+1}(z) - f_n(z)) d\mu(z) \right|}{\|\mu\|_{\mathrm{val}(\alpha_p)}} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Si $S \subset \mathbf{Z}_p^\times$ est un système de représentants des classes de $(\mathbf{Z}/p^{m(V)}\mathbf{Z})^\times$, alors :

$$\int_{\mathbf{Z}_p} (f_{n+1}(z) - f_n(z)) d\mu(z) = \left(\frac{\alpha_p p}{\beta_p} \right)^n \sum_{a_i \in S} \beta\alpha^{-1}(a_i) \int_{p^n a_i + p^{n+m(V)}\mathbf{Z}_p} z^{k-2-j} d\mu(z).$$

En écrivant $z^{k-2-j} = (z - p^n a_i + p^n a_i)^{k-2-j}$ et en développant, on obtient :

$$\left| \int_{\mathbf{Z}_p} (f_{n+1}(z) - f_n(z)) d\mu(z) \right| \leq p^{-n(2\mathrm{val}(\alpha_p) - k + 2)} \cdot \sup_{\substack{a_i \in S \\ 0 \leq j' \leq k-2-j}} p^{-nj'} \left| \int_{p^n a_i + p^{n+m(V)}\mathbf{Z}_p} (z - p^n a_i)^{k-2-j-j'} d\mu(z) \right|,$$

soit, en utilisant (6) :

$$\left| \int_{\mathbf{Z}_p} (f_{n+1}(z) - f_n(z)) d\mu(z) \right| \leq \|\mu\|_{\mathrm{val}(\alpha_p)} p^{-n(2\mathrm{val}(\alpha_p) - k + 2)} \cdot \sup_{0 \leq j' \leq k-2-j} p^{-nj'} p^{-(n+m(V))(k-2-j-j'-\mathrm{val}(\alpha_p))},$$

soit encore :

$$\left| \int_{\mathbf{Z}_p} (f_{n+1}(z) - f_n(z)) d\mu(z) \right| \leq C \|\mu\|_{\mathrm{val}(\alpha_p)} p^{n(j-\mathrm{val}(\alpha_p))},$$

où $C \stackrel{\mathrm{d}\acute{\mathrm{e}}\mathrm{f}}{=} \sup_{0 \leq j' \leq k-2-j} p^{-m(V)(k-2-j-j'-\mathrm{val}(\alpha_p))}$. D'où le résultat puisque $j < \mathrm{val}(\alpha_p)$. \square

On a un lemme analogue en échangeant α et β . On note $L(\alpha)$ l'adhérence dans $B(\alpha)$ du sous- L -espace vectoriel engendré par les fonctions z^j et $(\beta\alpha^{-1})(z-a)|z-a|^{-1}(z-a)^{k-2-j}$ pour $a \in \mathbf{Q}_p$ et j entier, $0 \leq j < \mathrm{val}(\alpha_p)$. De même, on note $L(\beta)$ l'adhérence dans $B(\beta)$ du sous- L -espace vectoriel engendré par les fonctions z^j et $(\alpha\beta^{-1})(z-a)|z-a|^{-1}(z-a)^{k-2-j}$ pour $a \in \mathbf{Q}_p$ et j entier, $0 \leq j < \mathrm{val}(\beta_p)$. Notons que, lorsque $\alpha = \beta|\cdot|$, $L(\beta)$ est de dimension finie et s'identifie aux polynômes en z de degré au plus $k-2$.

Lemme 4.2.3. — *Le sous-espace $L(\alpha)$ (resp. $L(\beta)$) est stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ dans $B(\alpha)$ (resp. $B(\beta)$).*

Démonstration. — Exercice. \square

Définition 4.2.4. — On pose $B(V) \stackrel{\mathrm{d}\acute{\mathrm{e}}\mathrm{f}}{=} B(\alpha)/L(\alpha)$.

Il s'agit encore d'un L -espace de Banach (avec la topologie quotient) muni d'une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ par automorphismes continus. Nous allons voir que l'application $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p) \times B(V) \rightarrow B(V)$ est continue, que $B(V)$ est unitaire et que l'on a un morphisme continu $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -équivariant $\widehat{T} : B(\beta)/L(\beta) \rightarrow B(V)$ qui est un isomorphisme si $\alpha \neq \beta|\cdot|$. En particulier, lorsque $\mathrm{val}(\alpha) = \mathrm{val}(\beta)$, les $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -représentations $B(\alpha)/L(\alpha)$ et $B(\beta)/L(\beta)$ sont topologiquement isomorphes et il n'y a donc pas d'ambiguïté dans ce cas sur la définition de $B(V)$.

4.3. Une autre description de $B(V)$. — Le but de ce paragraphe est de donner une description plus intrinsèque de $B(\alpha)/L(\alpha)$ pour en déduire certaines propriétés de l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ (continuité, unitarité, entrelacements) peu évidentes sur la définition précédente. On conserve les notations du §4.2.

Soit :

$$\pi(\alpha) \stackrel{\mathrm{d}\acute{\mathrm{e}}\mathrm{f}}{=} \mathrm{Sym}^{k-2} L^2 \otimes_L \mathrm{Ind}_{B(\mathbf{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} \alpha \otimes \beta|\cdot|^{-1}$$

la représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ produit tensoriel de la représentation algébrique $\mathrm{Sym}^{k-2} L^2$ par l'induite parabolique lisse $\mathrm{Ind}_{B(\mathbf{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} \alpha \otimes \beta|\cdot|^{-1}$ (c'est-à-dire l'espace des fonctions localement constantes $h : \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p) \rightarrow L$ vérifiant une égalité analogue à (11) avec action

à gauche de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ par translation à droite). On munit $\pi(\alpha)$ de l'unique topologie localement convexe (au sens de [Sch01]) telle que les ouverts sont les sous- \mathcal{O}_L -modules générateurs (sur L). La représentation $\pi(\alpha)$ est dite localement algébrique (cf. l'appendice de [ST01]) et n'est autre que la représentation $\mathrm{Alg}(V) \otimes_L \mathrm{Lisse}(V)$ de l'introduction.

On identifie $\mathrm{Sym}^{k-2} L^2$ à l'espace vectoriel des polynômes $P(z)$ de degré au plus $k-2$ à coefficients dans L munis de l'action à gauche de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$:

$$(13) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot P(z) = (-cz + a)^{k-2} P\left(\frac{dz - b}{-cz + a}\right).$$

Comme en (12), on identifie $\mathrm{Ind}_{\mathbf{B}(\mathbf{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} \alpha \otimes d^{k-2} \beta | \cdot |^{-1}$ à l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbf{Q}_p \rightarrow L$ localement constantes telles que $(\beta \alpha^{-1})(z) |z|^{-1} f(1/z)$ se prolonge sur \mathbf{Q}_p en une fonction localement constante avec action à gauche de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ comme en (10) mais sans le facteur $(-cz + a)^{k-2}$. On en déduit une injection $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -équivariante continue :

$$(14) \quad \pi(\alpha) \hookrightarrow B(\alpha), \quad P(z) \otimes f(z) \mapsto P(z)f(z).$$

Par le théorème 4.1.2, l'image de $\pi(\alpha)$ est dense dans $B(\alpha)$. En particulier, on a une injection continue $B(\alpha)^* \hookrightarrow \pi(\alpha)^*$. On définit de même $\pi(\beta)$ et une injection $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -équivariante continue d'image dense $\pi(\beta) \hookrightarrow B(\beta)$. Ces injections induisent des applications $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -équivariantes continues $\pi(\alpha) \rightarrow B(\alpha)/L(\alpha)$ et $\pi(\beta) \rightarrow B(\beta)/L(\beta)$.

Si π^0 est un sous- \mathcal{O}_L -module générateur d'un L -espace vectoriel π , rappelons qu'on appelle complété de π par rapport à π^0 l'espace de Banach :

$$B \stackrel{\text{déf}}{=} \varprojlim_n \pi^0 / \pi_L^n \pi^0 \otimes_{\mathcal{O}_L} L.$$

On a un morphisme canonique d'image dense $\pi \rightarrow B$ qui n'est pas injectif en général (si $\pi^0 = \pi$, on a $B = 0$). Le dual continu B^* de B s'identifie en tant qu'espace de Banach à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_L}(\pi^0, \mathcal{O}_L) \otimes_{\mathcal{O}_L} L$ (avec $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_L}(\pi^0, \mathcal{O}_L)$ comme boule unité). Si π est un espace localement convexe tonnelé (cf. [Sch01, §6]) muni d'une action continue d'un groupe topologique localement compact G telle que π^0 est ouvert et stable par G , il est facile de vérifier en utilisant le théorème de Banach-Steinhaus (cf. [Sch01, proposition 6.15]) que B et B^* sont des G -Banach unitaires et que la flèche canonique $\pi \rightarrow B$ est continue.

Théorème 4.3.1. — *L'application $\pi(\alpha) \rightarrow B(\alpha)/L(\alpha)$ induit un isomorphisme topologique $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -équivariant entre $B(\alpha)/L(\alpha)$ et le complété de $\pi(\alpha)$ par rapport à un quelconque sous- \mathcal{O}_L -module générateur de $\pi(\alpha)$ stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et de type fini comme $\mathcal{O}_L[\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)]$ -module. On a le même résultat en remplaçant α par β .*

Démonstration. — Notons que le complété ne dépend pas du choix du sous- $\mathcal{O}_L[\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)]$ -module de type fini générateur de $\pi(\alpha)$ car ces \mathcal{O}_L -modules sont tous commensurables dans $\pi(\alpha)$. En utilisant $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p) = \mathbf{B}(\mathbf{Q}_p)\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ et le fait que $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ est compact,

on voit facilement qu'il suffit de compléter par rapport à un sous- $\mathcal{O}_L[\mathbf{B}(\mathbf{Q}_p)]$ -module de type fini générateur quelconque, par exemple :

$$\sum_{j=0}^{k-2} \mathcal{O}_L[\mathbf{B}(\mathbf{Q}_p)](\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}(z)z^j) + \sum_{j=0}^{k-2} \mathcal{O}_L[\mathbf{B}(\mathbf{Q}_p)]((\beta\alpha^{-1})(z)|z|^{-1}\mathbf{1}_{\mathbf{Q}_p-\mathbf{Z}_p}(z)z^j) \subset \pi(\alpha)$$

où $\mathbf{1}_U$ est la fonction caractéristique de l'ouvert U . Le dual du complété cherché est donc isomorphe au Banach :

$$(15) \quad \{\mu \in \pi(\alpha)^* \mid \forall g \in \mathbf{B}(\mathbf{Q}_p), \forall j \in \{0, \dots, k-2\}, |\mu(g(\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}(z)z^j))| \leq 1 \\ \text{et } |\mu(g(\mathbf{1}_{\mathbf{Q}_p-\mathbf{Z}_p}(z)(\beta\alpha^{-1})(z)|z|^{-1}z^j))| \leq 1\} \otimes_{\mathcal{O}_L} L.$$

En utilisant l'intégralité du caractère central, il est équivalent de prendre $g \in \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & \mathbf{Q}_p^\times \end{pmatrix}$ dans (15). Pour $f \in \pi(\alpha)$, vue comme fonction sur \mathbf{Q}_p via (14), et U ouvert de \mathbf{Q}_p , on écrit $\int_U f(z)d\mu(z)$ pour $\mu(\mathbf{1}_U(z)f(z))$. Un calcul donne alors que les conditions sur μ dans (15) sont équivalentes à l'existence d'une constante $C \in L$ indépendante de μ telle que, pour tout $a \in \mathbf{Q}_p$, tout $j \in \{0, \dots, k-2\}$ et tout $n \in \mathbf{Z}$:

$$(16) \quad \int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} (z-a)^j d\mu(z) \in Cp^{n(j-\text{val}(\alpha_p))}\mathcal{O}_L$$

$$(17) \quad \int_{\mathbf{Q}_p-(a+p^n\mathbf{Z}_p)} (\beta\alpha^{-1})(z-a)|z-a|^{-1}(z-a)^{k-2-j} d\mu(z) \in Cp^{n(\text{val}(\alpha_p)-j)}\mathcal{O}_L$$

(si $g = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, poser $n = -\text{val}(\mu)$ et $a = \lambda/\mu$; en fait, on peut prendre $C = 1$). En écrivant $(a + p^{n-1}\mathbf{Z}_p) - (a + p^n\mathbf{Z}_p) = \cup_{a_i \in S} a + p^{n-1}a_i + p^{n-1+m(V)}\mathbf{Z}_p$ et en développant $(z-a)^{k-2-j} = ((z-a-p^{n-1}a_i) + p^{n-1}a_i)^{k-2-j}$ comme dans la preuve du lemme 4.2.2, on déduit facilement de (16) quitte à modifier C :

$$(18) \quad \int_{(a+p^{n-1}\mathbf{Z}_p)-(a+p^n\mathbf{Z}_p)} (\beta\alpha^{-1})(z-a)|z-a|^{-1}(z-a)^{k-2-j} d\mu(z) \in Cp^{n(\text{val}(\alpha_p)-j)}\mathcal{O}_L.$$

En décomposant $\mathbf{Q}_p - (a + p^n\mathbf{Z}_p) = \mathbf{Q}_p - (a + p^{n+1}\mathbf{Z}_p) \setminus (a + p^n\mathbf{Z}_p) - (a + p^{n+1}\mathbf{Z}_p)$, puis $\mathbf{Q}_p - (a + p^{n+1}\mathbf{Z}_p) = \mathbf{Q}_p - (a + p^{n+2}\mathbf{Z}_p) \setminus (a + p^{n+1}\mathbf{Z}_p) - (a + p^{n+2}\mathbf{Z}_p)$ etc. jusqu'à arriver à $\mathbf{Q}_p - (a + p^{n+m}\mathbf{Z}_p)$ avec $n+m \geq 0$, on déduit de (18) que (17) pour $j < \text{val}(\alpha_p)$ découle de (16) et de (17) pour $n \geq 0$ (utiliser (18) pour les morceaux compacts dans la décomposition et (17) avec $n' = n+m \geq 0$ pour le restant). Si $a \neq 0$, en décomposant $\mathbf{Q}_p - (a + p^n\mathbf{Z}_p) = \mathbf{Q}_p - (a + p^{n-1}\mathbf{Z}_p) \amalg (a + p^{n-1}\mathbf{Z}_p) - (a + p^n\mathbf{Z}_p)$, puis $\mathbf{Q}_p - (a + p^{n-1}\mathbf{Z}_p) = \mathbf{Q}_p - (a + p^{n-2}\mathbf{Z}_p) \amalg (a + p^{n-2}\mathbf{Z}_p) - (a + p^{n-1}\mathbf{Z}_p)$ etc. jusqu'à arriver à $\mathbf{Q}_p - (a + p^{n-m}\mathbf{Z}_p)$ avec $n-m < \text{val}(a)$ et $n \leq m$, on déduit de (18) que (17) pour $a \neq 0$ et $j \geq \text{val}(\alpha_p)$ découle de (16) et de (17) pour $a = 0$ et $n \leq 0$ (utiliser (18) pour les morceaux compacts dans la décomposition puis développer $(z-a)^{k-2-j}$ et utiliser (17) avec $a = 0$ et $n' = n-m \leq 0$ pour le restant). Autrement dit, (16) et (17) sont équivalents à :

- (i) (16);
- (ii) (17) pour $n \geq 0$;

(iii) (17) pour $a = 0$ et $n \leq 0$.

Par ailleurs, tout $\mu \in \pi(\alpha)^*$ s'écrit $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ où $\mu_i \in \text{Pol}^{k-2}(\mathbf{Z}_p, L)^*$ (si $f \in \pi(\alpha)$, $\int_{\mathbf{Q}_p} f(z) d\mu(z) = \int_{\mathbf{Z}_p} f_1(z) d\mu_1(z) + \int_{\mathbf{Z}_p} f_2(z) d\mu_2(z)$). Un calcul facile (laissé au lecteur) montre que μ_1 et μ_2 vérifient (4) pour $r = \text{val}(\alpha_p)$ et $d = k - 2$ avec $\|\mu_i\|_{\text{val}(\alpha_p), k-2} \leq C$ (i.e. $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{C}^{\text{val}(\alpha_p)}(\mathbf{Z}_p, L)$ par le théorème 4.1.4 avec leurs normes bornées, i.e. μ est dans une boule de $B(\alpha)^* \subset \pi(\alpha)^*$) si et seulement si μ vérifie (quitte à modifier C) :

$$(19) \quad \int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} (z-a)^j d\mu(z) \in Cp^{n(j-\text{val}(\alpha_p))}\mathcal{O}_L$$

pour tout $a \in p\mathbf{Z}_p$, tout $j \in \{0, \dots, k-2\}$ et tout entier $n \geq 1$, puis :

$$(20) \quad \int_{a^{-1}+p^{n-2\text{val}(a)}\mathbf{Z}_p} (\beta\alpha^{-1})(z)|z|^{-1}z^{k-2-j}(1-az)^j d\mu(z) \in Cp^{n(j-\text{val}(\alpha_p))}\mathcal{O}_L$$

pour tout $a \in \mathbf{Z}_p - \{0\}$, tout $j \in \{0, \dots, k-2\}$ et tout entier $n > \text{val}(a)$, et enfin :

$$(21) \quad \int_{\mathbf{Q}_p-p^n\mathbf{Z}_p} (\beta\alpha^{-1})(z)|z|^{-1}z^{k-2-j} d\mu(z) \in Cp^{n(\text{val}(\alpha_p)-j)}\mathcal{O}_L$$

pour tout $j \in \{0, \dots, k-2\}$ et tout entier $n \leq 0$. En développant $z^{k-2-j} = ((z-a^{-1}) + a^{-1})^{k-2-j}$ dans (20), un calcul montre que, quitte à modifier C , (19), (20) et (21) sont équivalents à :

(iv) (16) pour $a \neq 0$;

(v) (16) pour $a = 0$ et $n \geq 0$;

(vi) (17) pour $a = 0$ et $n \leq 0$.

Si μ est comme en (15), i.e. si μ vérifie (i) à (iii), alors *a fortiori* μ vérifie (iv) à (vi) et donc $\mu \in B(\alpha)^* \subset \pi(\alpha)^*$. Mais on a plus. En faisant tendre n vers $-\infty$ dans (16) lorsque $a = 0$, on voit que (16) pour $j < \text{val}(\alpha_p)$ et $a = 0$ implique que μ annule les fonctions $z^j \in B(\alpha)$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans (17), on voit que (17) pour $j < \text{val}(\alpha_p)$ implique que μ annule les fonctions $(\beta\alpha^{-1})(z-a)|z-a|^{-1}(z-a)^{k-2-j} \in B(\alpha)$. Un examen plus approfondi (sans difficulté mais que nous omettons pour ne pas allonger la preuve) montre que les conditions (i) à (iii) précédentes sont en fait *équivalentes* aux conditions (iv) à (vi) avec les deux conditions supplémentaires que μ annule les fonctions z^j pour $j < \text{val}(\alpha_p)$ et les fonctions $(\beta\alpha^{-1})(z-a)|z-a|^{-1}(z-a)^{k-2-j}$ pour $a \in \mathbf{Q}_p$ et $j < \text{val}(\alpha_p)$, c'est-à-dire les fonctions de $L(\alpha)$. Autrement dit, on obtient que le Banach dual du complété cherché est isomorphe dans $\pi(\alpha)^*$ au sous-espace de Banach de $B(\alpha)^*$ formé des μ qui annulent $L(\alpha)$, c'est-à-dire à $(B(\alpha)/L(\alpha))^*$. En particulier, $(B(\alpha)/L(\alpha))^*$ est un $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -Banach unitaire. Comme les Banach ne sont pas réflexifs, nous allons devoir faire un passage par les topologies faibles pour déduire l'isomorphisme de l'énoncé. L'injection $B(\alpha)/L(\alpha) \hookrightarrow ((B(\alpha)/L(\alpha))^*)^*$ étant une immersion fermée $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -équivariante, $B(\alpha)/L(\alpha)$ est aussi un $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -Banach unitaire. Cela

entraîne facilement que l'application $\pi(\alpha) \rightarrow B(\alpha)/L(\alpha)$ induit un morphisme $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -équivariant continu du complété unitaire ci-dessus de $\pi(\alpha)$ vers $B(\alpha)/L(\alpha)$, donc un morphisme continu sur les duaux munis de leur topologie faible (qui sont des « modules compacts à isogénie près » au sens de [ST02b]). Mais on vient de voir que ce morphisme sur les duaux était bijectif (et même un isomorphisme topologique pour les topologies fortes). Par [Bre03b, lemme 4.2.2], on en déduit que c'est aussi un isomorphisme topologique pour les topologies faibles. Par dualité (cf. [ST02b, théorème 1.2]), on obtient l'isomorphisme topologique $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -équivariant de l'énoncé. Le cas β se traite de même. \square

Rappelons qu'il existe, à multiplication par un scalaire non nul près, un unique morphisme non nul $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -équivariant :

$$(22) \quad I^{\text{lisse}} : \mathrm{Ind}_{\mathbf{B}(\mathbf{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} \beta \otimes \alpha | \cdot |^{-1} \longrightarrow \mathrm{Ind}_{\mathbf{B}(\mathbf{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} \alpha \otimes \beta | \cdot |^{-1}$$

qui est un isomorphisme non trivial lorsque $\alpha \neq \beta$ et $\alpha \neq \beta | \cdot |$, qui est l'identité lorsque $\alpha = \beta$ et qui a un noyau et un conoyau de dimension 1 lorsque $\alpha = \beta | \cdot |$ (voir [Bum98, §4.5] par exemple). En termes de fonctions localement constantes sur \mathbf{Q}_p , ce morphisme lorsque $\alpha \neq \beta$ est donné explicitement par :

$$(23) \quad \begin{aligned} I^{\text{lisse}}(h)(z) &= \int_{\mathbf{Q}_p} (\alpha\beta^{-1})(x) |x|^{-1} h(z + x^{-1}) dx \\ &= \int_{\mathbf{Q}_p} (\beta\alpha^{-1})(x) |x|^{-1} h(z + x) dx \\ &= \int_{\mathbf{Q}_p} (\beta\alpha^{-1})(x - z) |x - z|^{-1} h(x) dx \end{aligned}$$

où dx est la mesure de Haar sur \mathbf{Q}_p (à valeurs dans $\mathbf{Q}_p \subset L$). Comme la théorie des représentations lisses est algébrique, il n'y a pas de problèmes de convergence dans les intégrales ci-dessus car on peut toujours remplacer les sommes infinies aux voisinages de 0 ou de $-\infty$ par des expressions algébriques en $p\alpha_p\beta_p^{-1}$ parfaitement définies. En tensorisant par l'application identité sur $\mathrm{Sym}^{k-2}L^2$, on en déduit un morphisme non nul $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -équivariant :

$$(24) \quad I : \pi(\beta) \longrightarrow \pi(\alpha)$$

qui est un isomorphisme lorsque $\alpha \neq \beta | \cdot |$.

Corollaire 4.3.2. — *Les représentations $B(\alpha)/L(\alpha)$ et $B(\beta)/L(\beta)$ sont des $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -Banach unitaires et on a un diagramme commutatif $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -équivariant :*

$$\begin{array}{ccc} B(\beta)/L(\beta) & \xrightarrow{\hat{I}} & B(\alpha)/L(\alpha) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \pi(\beta) & \xrightarrow{I} & \pi(\alpha) \end{array}$$

où I est le morphisme $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -équivariant de (24). Lorsque $\alpha \neq \beta|\cdot|$, les flèches I et \widehat{I} sont des isomorphismes.

Démonstration. — Cela découle du théorème 4.3.1 car l'image par une flèche $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -équivariante d'un $\mathcal{O}_L[\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)]$ -module de type fini est aussi un $\mathcal{O}_L[\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)]$ -module de type fini. \square

Lorsque $\alpha = \beta|\cdot|$ (ce qui implique $\mathrm{val}(\beta_p) = (k-2)/2$), il est évident que $B(\beta)/L(\beta)$ est non nul puisque $L(\beta)$ est dans ce cas une représentation de dimension finie, isomorphe via (13) à $(\beta \circ \det) \otimes_L \mathrm{Sym}^{k-2} L^2$. On verra quels sont alors l'image et le noyau de \widehat{I} au §5.4. Dans les autres cas, le théorème 4.3.1 ne démontre en rien que les espaces de Banach $B(\alpha)/L(\alpha)$ et $B(\beta)/L(\beta)$ sont non nuls. Mais on a :

Proposition 4.3.3. — *Si $\alpha \neq \beta|\cdot|$, le Banach $B(\alpha)/L(\alpha)$ (resp. $B(\beta)/L(\beta)$) est non nul si et seulement si $\pi(\alpha)$ (resp. $\pi(\beta)$) possède un \mathcal{O}_L -réseau stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Si $\alpha = \beta|\cdot|$, le Banach $B(\alpha)/L(\alpha)$ est non nul si et seulement si $\pi(\alpha)$ possède un \mathcal{O}_L -réseau stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.*

Démonstration. — Rappelons qu'un \mathcal{O}_L -réseau est par définition un sous- \mathcal{O}_L -module générateur qui ne contient pas de L -droite. Supposons d'abord $\alpha \neq \beta|\cdot|$, de sorte que les représentations $\pi(\alpha)$ et $\pi(\beta)$ sont (algébriquement) irréductibles. Si $B(\alpha)/L(\alpha) \neq 0$, l'application canonique $\pi(\alpha) \rightarrow B(\alpha)/L(\alpha)$ est injective car non nulle (car d'image dense) et une boule unité de $B(\alpha)/L(\alpha)$ stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ induit un réseau stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ sur $\pi(\alpha)$. Inversement, supposons que $\pi(\alpha)$ possède un \mathcal{O}_L -réseau stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, alors pour tout f non nul dans $\pi(\alpha)$, $\mathcal{O}_L[\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)]f \subset \pi(\alpha)$ est un \mathcal{O}_L -réseau de $\pi(\alpha)$ de type fini comme $\mathcal{O}_L[\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)]$ -module. Il est générateur car $\pi(\alpha)$ est irréductible et il ne contient pas de \mathcal{O}_L -droite car, à multiplication près par un scalaire, il est contenu dans un \mathcal{O}_L -réseau stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ de $\pi(\alpha)$. L'application de $\pi(\alpha)$ dans son complété par rapport à $\mathcal{O}_L[\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)]f$, qui est $B(\alpha)/L(\alpha)$ par le théorème 4.3.1, est alors injective et en particulier $B(\alpha)/L(\alpha) \neq 0$. Lorsque $\alpha = \beta|\cdot|$, ce qui suppose $k > 2$, $\pi(\alpha)$ n'est plus irréductible et a un quotient isomorphe à $(\beta \circ \det) \otimes_L \mathrm{Sym}^{k-2} L^2$. Si $B(\alpha)/L(\alpha) \neq 0$, l'application non nulle $\pi(\alpha) \rightarrow B(\alpha)/L(\alpha)$ reste injective sinon elle induirait une injection non nulle $(\beta \circ \det) \otimes_L \mathrm{Sym}^{k-2} L^2 \hookrightarrow B(\alpha)/L(\alpha)$ ce qui est impossible car, pour $k > 2$, $(\beta \circ \det) \otimes_L \mathrm{Sym}^{k-2} L^2$ ne possède pas de \mathcal{O}_L -réseau stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. \square

Notons que, lorsque $\alpha = \beta|\cdot|$, $\pi(\beta)$ ne peut posséder de \mathcal{O}_L -réseau stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ puisque sa sous-représentation irréductible $(\beta \circ \det) \otimes_L \mathrm{Sym}^{k-2} L^2$ n'en possède pas. Dans ce cas, l'application $\pi(\beta) \rightarrow B(\beta)/L(\beta)$ est non injective (son noyau est précisément $(\beta \circ \det) \otimes_L \mathrm{Sym}^{k-2} L^2$). Lorsque α et β sont non ramifiés, via la proposition 4.3.3, on peut montrer pour des petites valeurs de k ou pour les valeurs de (k, α, β) provenant des formes modulaires que les Banach $B(\alpha)/L(\alpha)$ et $B(\beta)/L(\beta)$ sont non nuls, voir par

exemple [Bre03a], [Bre03b, §1.3], [Bre03c], [Eme04]. On va voir dans la suite que la non nullité pour tout k et tout α, β , au moins si $\alpha \neq \beta$, découle de la théorie des (φ, Γ) -modules. Une autre approche possible, purement en termes de théorie des représentations, est présentée dans [Eme04, §2] et [Eme05, §§5-6].

5. Représentations de $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ et (φ, Γ) -modules

Le but de cette partie est de démontrer l'existence d'un isomorphisme topologique canonique entre $(\varprojlim_{\psi} D(V))^b$ et le dual $B(V)^*$ (muni de sa topologie faible) lorsque $\alpha \neq \beta$ et d'en déduire que $B(V)$ alors est toujours non nul, topologiquement irréductible et admissible. Ces énoncés étaient conjecturés (et des cas particuliers démontrés) dans [Bre03a] et [Bre03b]. Le fait remarquable est que ces énoncés, entièrement du côté GL_2 , se démontrent en passant par le côté *galoisien*. On fixe une fois pour toutes une représentation apc irréductible V comme au §2.4 avec $D_{\text{cris}}(V) = D(\alpha, \beta)$ et on suppose jusqu'à la fin que $\alpha \neq \beta$.

5.1. Deux lemmes. — Le but de ce paragraphe est de démontrer deux lemmes techniques mais importants utilisés dans les paragraphes suivants. On utilise sans commentaire certaines notations du §2.4.

Lemme 5.1.1. — Soit $m \in \mathbf{N}$, $m \geq m(V)$, $w_\alpha, w_\beta \in \mathcal{R}^+$ et μ_α, μ_β les distributions localement analytiques sur \mathbf{Z}_p correspondantes par (8). La condition :

$$\varphi^{-m}(w_\alpha \otimes e_\alpha + w_\beta \otimes e_\beta) \in \text{Fil}^0(L_m[[t]] \otimes_L D(\alpha, \beta))$$

est équivalente aux égalités dans $\overline{\mathbf{Q}_p}$:

$$\left(\sum_{x \in \mathbf{Z}_p^\times / (1+p^{m(V)}\mathbf{Z}_p)} (\beta\alpha^{-1})(x) \eta_{p^m}^{p^{m-m(V)}x} \right) \alpha_p^m \int_{\mathbf{Z}_p} z^j \eta_{p^m}^z d\mu_\alpha(z) = \beta_p^m \int_{\mathbf{Z}_p} z^j \eta_{p^m}^z d\mu_\beta(z)$$

pour tout $j \in \{0, \dots, k-2\}$ et toute racine primitive p^m -ième η_{p^m} de 1 dans $\overline{\mathbf{Q}_p}$.

Démonstration. — On a :

$$\varphi^{-m}(X) = \zeta_{p^m} \exp(t/p^m) - 1 = \zeta_{p^m} (\exp(t/p^m) - 1) + \zeta_{p^m} - 1$$

dans $F_m[[t]]$ (voir §2.4). En posant $w_\alpha = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i$ et $w_\beta = \sum_{i=0}^{+\infty} b_i X^i$ ($a_i, b_i \in L$), la condition sur Fil^0 est équivalente à :

$$(25) \quad \alpha_p^m \sum_{i=0}^{+\infty} a_i \varphi^{-m}(X)^i e_\alpha + \beta_p^m \sum_{i=0}^{+\infty} b_i \varphi^{-m}(X)^i e_\beta \in L_m[[t]](e_\alpha + G(\beta\alpha^{-1})e_\beta) \oplus (\exp(t/p^m) - 1)^{k-1} (L_m[[t]]e_\beta)$$

en notant que $\exp(t/p^m) - 1$ engendre $\text{gr}^1(\mathbf{Q}_p[[t]]) = \mathbf{Q}_p\bar{t}$. On peut supposer L aussi grand que l'on veut en (25), et en particulier contenant F_m . En utilisant :

$$L_m = F_m \otimes_{\mathbf{Q}_p} L = \prod_{F_m \hookrightarrow L} L,$$

en développant $\varphi^{-m}(X)^i = (\zeta_{p^m}(\exp(t/p^m) - 1) + \zeta_{p^m} - 1)^i$ et en remplaçant e_α par $(e_\alpha + G(\beta\alpha^{-1})e_\beta) - G(\beta\alpha^{-1})e_\beta$ dans le membre de gauche de (25), un calcul facile montre que la condition (25) est équivalente aux égalités dans L :

$$(26) \quad \left(\sum_{x \in \mathbf{Z}_p^\times / (1+p^m(V)\mathbf{Z}_p)} (\beta\alpha^{-1})(x) \eta_{p^m}^{p^{m-m(V)}x} \right) \alpha_p^m \sum_{i=j}^{+\infty} a_i \binom{i}{j} (\eta_{p^m} - 1)^{i-j} \\ = \beta_p^m \sum_{i=j}^{+\infty} b_i \binom{i}{j} (\eta_{p^m} - 1)^{i-j}$$

pour tout $j \in \{0, \dots, k-2\}$ et toute racine primitive p^m -ième η_{p^m} de 1. Noter que les séries en (26) convergent bien car $\text{val}(\eta_{p^m} - 1) > 0$. En se souvenant que $\alpha_i = \int_{\mathbf{Z}_p} \binom{z}{i} d\mu_\alpha(z)$ et en utilisant le développement de Mahler (3) :

$$\binom{z}{j} \eta_{p^m}^{z-j} = \sum_{i=j}^{+\infty} \binom{i}{j} (\eta_{p^m} - 1)^{i-j} \binom{z}{i}$$

on obtient :

$$\sum_{i=j}^{+\infty} a_i \binom{i}{j} (\eta_{p^m} - 1)^{i-j} = \int_{\mathbf{Z}_p} \left(\sum_{i=j}^{+\infty} \binom{z}{i} \binom{i}{j} (\eta_{p^m} - 1)^{i-j} \right) d\mu_\alpha(z) \\ = \eta_{p^m}^{-j} \int_{\mathbf{Z}_p} \binom{z}{j} \eta_{p^m}^z d\mu_\alpha(z)$$

(la série $\sum_{i=j}^n \binom{i}{j} (\eta_{p^m} - 1)^{i-j} \binom{z}{i}$ convergeant vers $\sum_{i=j}^{+\infty} \binom{i}{j} (\eta_{p^m} - 1)^{i-j} \binom{z}{i}$ dans $\text{An}(\mathbf{Z}_p, L)$ (cf. [Col04a, §2.1.2]), on peut inverser \int et \sum). On a la même égalité avec b_i et μ_β . Avec (26), on en déduit le résultat. \square

Via l'identification $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p = \mathbf{Z}[1/p]/\mathbf{Z}$, on peut définir le nombre complexe algébrique $e^{2i\pi z}$ pour tout $z \in \mathbf{Q}_p$ (par exemple, $e^{2i\pi z} = 1$ si $z \in \mathbf{Z}_p$). En fixant des plongements $\bar{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \mathbf{C}$ et $\bar{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbf{Q}}_p$, on peut voir $e^{2i\pi z}$ comme un élément de $\bar{\mathbf{Q}}_p$. On obtient ainsi un caractère additif localement constant $\mathbf{Q}_p \rightarrow \bar{\mathbf{Q}}_p^\times$, $z \mapsto e^{2i\pi z}$ trivial sur \mathbf{Z}_p . Ce que l'on fera dans la suite ne dépendra pas du choix de ce caractère, i.e. du choix des plongements.

Notons $\text{Pol}^d(\mathbf{Q}_p, L)$ le L -espace vectoriel des fonctions localement polynomiales à support compact $f : \mathbf{Q}_p \rightarrow L$ de degré (local) au plus d . Si μ est une forme linéaire sur $\text{Pol}^d(\mathbf{Q}_p, L)$, U un ouvert compact de \mathbf{Q}_p et $f : \mathbf{Q}_p \rightarrow L$ une fonction localement polynomiale de degré au plus d à support quelconque, on note comme d'habitude $\int_U f(z) d\mu(z) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \mu(\mathbf{1}_U(z)f(z))$.

Lemme 5.1.2. — Soient μ_α et μ_β deux formes linéaires sur l'espace $\text{Pol}^{k-2}(\mathbf{Q}_p, L)$. Les énoncés suivants sont équivalents :

(i) Pour tout $j \in \{0, \dots, k-2\}$, tout $y \in \mathbf{Q}_p^\times$ et tout $N \geq \text{val}(y) + m(V)$, on a :

$$(27) \quad \int_{p^{-N}\mathbf{Z}_p} z^j e^{2i\pi zy} d\mu_\beta(z) = \left(\sum_{x \in \mathbf{Z}_p^\times / (1+p^m(V)\mathbf{Z}_p)} (\beta\alpha^{-1})(x) e^{\frac{2i\pi xy}{\text{val}(y)+m(V)}} \right) \left(\frac{\beta_p}{\alpha_p} \right)^{\text{val}(y)} \int_{p^{-N}\mathbf{Z}_p} z^j e^{2i\pi zy} d\mu_\alpha(z).$$

(ii) Pour tout $f \in \pi(\alpha)$ à support compact (comme fonction sur \mathbf{Q}_p via (14)) tel que $I(f) \in \pi(\beta)$ est aussi à support compact (comme fonction sur \mathbf{Q}_p via (14)), on a :

$$(28) \quad \int_{\mathbf{Q}_p} I(f)(z) d\mu_\alpha(z) = C(\alpha_p, \beta_p) \int_{\mathbf{Q}_p} f(z) d\mu_\beta(z)$$

où :

$$C(\alpha_p, \beta_p) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1 - \frac{\beta_p}{p\alpha_p}}{1 - \frac{\alpha_p}{\beta_p}} \text{ si } \beta\alpha^{-1} \text{ est non ramifié,}$$

et

$$C(\alpha_p, \beta_p) \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\frac{\beta_p}{p\alpha_p} \right)^{m(V)} \text{ si } \beta\alpha^{-1} \text{ est ramifié.}$$

Démonstration. — Soit $h : \mathbf{Q}_p \rightarrow L$ une fonction localement constante à support compact et \widehat{h} la transformée de Fourier (usuelle) de h . Rappelons que \widehat{h} est aussi une fonction localement constante sur \mathbf{Q}_p à support compact telle que $\widehat{h}(x) = \int_{\mathbf{Q}_p} h(z) e^{-2i\pi zx} dz$ et $h(z) = \int_{\mathbf{Q}_p} \widehat{h}(x) e^{2i\pi zx} dx$ où dx, dz désignent la mesure de Haar sur \mathbf{Q}_p . Pour $|z| \gg 0$, on a par (23) :

$$I^{\text{lisse}}(h)(z) = (\beta\alpha^{-1})(z) |z|^{-1} \int_{\mathbf{Q}_p} h(x) dx = (\beta\alpha^{-1})(z) |z|^{-1} \widehat{h}(0)$$

et on voit que $I^{\text{lisse}}(h)$ est à support compact dans \mathbf{Q}_p si et seulement si $\widehat{h}(0) = 0$. Supposons donc $\widehat{h}(0) = 0$ et soit $N \in \mathbf{N}$ tel que h et $I^{\text{lisse}}(h)$ ont leur support dans $p^{-N}\mathbf{Z}_p$ et tel que $\widehat{h}|_{p^N\mathbf{Z}_p} = 0$. Pour $j \in \{0, \dots, k-2\}$ et $z \in p^{-N}\mathbf{Z}_p$, on a :

$$\begin{aligned} I(z^j h)(z) &= z^j I^{\text{lisse}}(h)(z) = z^j \int_{p^{-N}\mathbf{Z}_p} (\beta\alpha^{-1})(x) |x|^{-1} h(z+x) dx \\ &= z^j \int_{p^{-N}\mathbf{Z}_p} (\beta\alpha^{-1})(x) |x|^{-1} \left(\int_{\mathbf{Q}_p - p^N\mathbf{Z}_p} \widehat{h}(y) e^{2i\pi y(z+x)} dy \right) dx \\ &= z^j \int_{\mathbf{Q}_p - p^N\mathbf{Z}_p} \widehat{h}(y) e^{2i\pi zy} \left(\int_{p^{-N}\mathbf{Z}_p} (\beta\alpha^{-1})(x) |x|^{-1} e^{2i\pi xy} dx \right) dy. \end{aligned}$$

On a :

$$\int_{p^{-N}\mathbf{Z}_p} (\beta\alpha^{-1})(x) |x|^{-1} e^{2i\pi xy} dx = \sum_{\ell=-N}^{+\infty} p^\ell \int_{p^\ell\mathbf{Z}_p^\times} (\beta\alpha^{-1})(x) e^{2i\pi xy} dx$$

où, avec les notations de la preuve du lemme 4.2.2 :

$$\begin{aligned} \int_{p^\ell \mathbf{Z}_p^\times} (\beta\alpha^{-1})(x) e^{2i\pi xy} dx &= \sum_{a_i \in S} \int_{p^\ell a_i + p^{\ell+m(V)} \mathbf{Z}_p} (\beta\alpha^{-1})(x) e^{2i\pi xy} dx \\ &= \left(\frac{\alpha_p}{\beta_p} \right)^\ell \sum_{a_i \in S} (\beta\alpha^{-1})(a_i) \int_{p^\ell a_i + p^{\ell+m(V)} \mathbf{Z}_p} e^{2i\pi xy} dx. \end{aligned}$$

Si $\ell + m(V) < -\text{val}(y)$, on vérifie facilement que $\int_{p^\ell a_i + p^{\ell+m(V)} \mathbf{Z}_p} e^{2i\pi xy} dx = 0$ et si $\ell + m(V) \geq -\text{val}(y)$, on a $\int_{p^\ell a_i + p^{\ell+m(V)} \mathbf{Z}_p} e^{2i\pi xy} dx = p^{-\ell-m(V)} e^{2i\pi p^\ell a_i y}$. Supposons d'abord $\beta\alpha^{-1}$ ramifié. Alors on a $\sum_{a_i \in S} (\beta\alpha^{-1})(a_i) e^{2i\pi p^\ell a_i y} = 0$ si $\ell + m(V) > -\text{val}(y)$ et, si $\ell + m(V) = -\text{val}(y)$:

$$\sum_{a_i \in S} (\beta\alpha^{-1})(a_i) e^{2i\pi p^\ell a_i y} = \sum_{x \in \mathbf{Z}_p^\times / (1+p^{m(V)} \mathbf{Z}_p)} (\beta\alpha^{-1})(x) e^{\frac{2i\pi xy}{p^{\text{val}(y)+m(V)}}}.$$

Comme $N \geq \text{val}(y) + m(V)$, on a donc :

$$\begin{aligned} \int_{p^{-N} \mathbf{Z}_p} (\beta\alpha^{-1})(x) |x|^{-1} e^{2i\pi xy} dx \\ = \left(\frac{\beta_p}{p\alpha_p} \right)^{m(V)} \left(\frac{\beta_p}{\alpha_p} \right)^{\text{val}(y)} \sum_{x \in \mathbf{Z}_p^\times / (1+p^{m(V)} \mathbf{Z}_p)} (\beta\alpha^{-1})(x) e^{\frac{2i\pi xy}{p^{\text{val}(y)+m(V)}}}. \end{aligned}$$

Supposons maintenant $\beta\alpha^{-1}$ non ramifié. Alors on a $\sum_{a_i \in S} (\beta\alpha^{-1})(a_i) e^{2i\pi p^\ell a_i y} = p - 1$ si $\ell + 1 > -\text{val}(y)$ et $\sum_{a_i \in S} (\beta\alpha^{-1})(a_i) e^{2i\pi p^\ell a_i y} = -1$ si $\ell + 1 = -\text{val}(y)$ (rappelons que $m(V) = 1$). Comme $N \geq \text{val}(y) + m(V)$, on a donc :

$$\begin{aligned} \int_{p^{-N} \mathbf{Z}_p} (\beta\alpha^{-1})(x) |x|^{-1} e^{2i\pi xy} dx &= -\frac{1}{p} \left(\frac{\alpha_p}{\beta_p} \right)^{-\text{val}(y)-1} + \frac{p-1}{p} \sum_{\ell=-\text{val}(y)}^{+\infty} \left(\frac{\alpha_p}{\beta_p} \right)^\ell \\ &= \frac{1 - \frac{\beta_p}{p\alpha_p}}{1 - \frac{\alpha_p}{\beta_p}} \left(\frac{\beta_p}{\alpha_p} \right)^{\text{val}(y)}. \end{aligned}$$

Pour $y \in \mathbf{Q}_p^\times$, posons $H(\beta\alpha^{-1})(y) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} 1$ si $\beta\alpha^{-1}$ est non ramifié et :

$$H(\beta\alpha^{-1})(y) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \sum_{x \in \mathbf{Z}_p^\times / (1+p^{m(V)} \mathbf{Z}_p)} (\beta\alpha^{-1})(x) e^{\frac{2i\pi xy}{p^{\text{val}(y)+m(V)}}}$$

si $\beta\alpha^{-1}$ est ramifié. On en d\u00e9duit :

$$(29) \quad I(z^j h)(z) = C(\alpha_p, \beta_p) \int_{\mathbf{Q}_p - p^N \mathbf{Z}_p} \widehat{h}(y) z^j e^{2i\pi zy} \left(\frac{\beta_p}{\alpha_p} \right)^{\text{val}(y)} H(\beta\alpha^{-1})(y) dy$$

pour $z \in p^{-N} \mathbf{Z}_p$ et $I(z^j h)(z) = 0$ sinon. De m\u00eame, on a :

$$(30) \quad z^j h(z) = \int_{\mathbf{Q}_p - p^N \mathbf{Z}_p} \widehat{h}(y) z^j e^{2i\pi zy} dy$$

pour $z \in p^{-N}\mathbf{Z}_p$ et $z^j h(z) = 0$ sinon. Notons que (29) and (30) sont en fait des sommes finies sur le même ensemble (fini) de valeurs de y . En remplaçant $I(z^j h)(z)$ et $z^j h(z)$ dans (31) ci-dessous par les sommes finies (29) et (30), on voit que (i) entraîne (ii). Réciproquement, supposons que pour tout $j \in \{0, \dots, k-2\}$, tout $N \in \mathbf{N}$ et toute fonction h comme ci-dessus localement constante à support dans $p^{-N}\mathbf{Z}_p$, on a :

$$(31) \quad \int_{p^{-N}\mathbf{Z}_p} I(z^j h)(z) d\mu_\alpha(z) = C(\alpha_p, \beta_p) \int_{p^{-N}\mathbf{Z}_p} z^j h(z) d\mu_\beta(z).$$

Soit $y \in \mathbf{Q}_p^\times$ tel que $N \geq \text{val}(y) + m(V)$, $\widehat{h}(z) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{1}_{y+p^N\mathbf{Z}_p}(z)$ et :

$$h(z) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbf{Q}_p} \widehat{h}(x) e^{2i\pi zx} dx = \int_{p^N\mathbf{Z}_p} e^{2i\pi z(y+x)} dx = \frac{1}{p^N} \mathbf{1}_{p^{-N}\mathbf{Z}_p}(z) e^{2i\pi zy}.$$

Alors $I(z^j h)$ est aussi à support compact car $\widehat{h}|_{p^N\mathbf{Z}_p} = 0$ et un calcul via (29) montre que :

$$I(z^j h)(z) = C(\alpha_p, \beta_p) \frac{1}{p^N} \left(\frac{\beta_p}{\alpha_p} \right)^{\text{val}(y)} H(\beta\alpha^{-1})(y) \mathbf{1}_{p^{-N}\mathbf{Z}_p}(z) z^j e^{2i\pi zy}.$$

On peut donc appliquer l'égalité (31) à h qui est alors exactement l'égalité (27) multipliée par p^{-N} . Cela montre que (ii) entraîne (i) et achève la preuve. \square

5.2. D'un monde à l'autre. — Le but de ce paragraphe est de construire un isomorphisme topologique $(\varprojlim_\psi D(V))^b \simeq B(V)^*$ (lorsque $\alpha \neq \beta$).

Soit $T \subset V$ un \mathcal{O}_L -réseau stable par $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$. On reprend les notations du §2.3, en particulier on dispose du $\mathcal{O}_L[[X]]$ -module de type fini $D^\sharp(T)$ muni de la surjection $\psi : D^\sharp(T) \rightarrow D^\sharp(T)$ et de l'action semi-linéaire de Γ qui commute à ψ . On dispose aussi de l'isomorphisme topologique de la proposition 2.3.6 qui permet de remplacer $(\varprojlim_\psi D(V))^b$ par $(\varprojlim_\psi D^\sharp(T)) \otimes_{\mathcal{O}_L} L$ et on sait par le théorème 3.4.2 que $(\varprojlim_\psi D^\sharp(T)) \otimes_{\mathcal{O}_L} L$ coïncide avec les suites d'éléments $w_{\alpha,n} \otimes e_\alpha + w_{\beta,n} \otimes e_\beta$ de $\mathcal{R}^+ \otimes_{\mathcal{O}_L} D_{\text{cris}}(V)$ telles que :

- (i) $\forall n \geq 0$, $w_{\alpha,n}$ (resp. $w_{\beta,n}$) est d'ordre $\text{val}(\alpha_p)$ (resp. $\text{val}(\beta_p)$) dans \mathcal{R}^+ et $\|w_{\alpha,n}\|_{\text{val}(\alpha_p)}$ (resp. $\|w_{\beta,n}\|_{\text{val}(\beta_p)}$) est borné ;
- (ii) $\forall n \geq 0$ et $\forall m \geq 1$, on a :

$$\varphi^{-m}(w_{\alpha,n} \otimes e_\alpha + w_{\beta,n} \otimes e_\beta) \in \text{Fil}^0(L_m[[t]] \otimes_{\mathcal{O}_L} D_{\text{cris}}(V));$$

- (iii) $\forall n \geq 1$, $\psi(w_{\alpha,n}) = \alpha_p^{-1} w_{\alpha,n-1}$ et $\psi(w_{\beta,n}) = \beta_p^{-1} w_{\beta,n-1}$.

Nous allons d'abord définir une application L -linéaire $(\varprojlim_\psi D^\sharp(T)) \otimes_{\mathcal{O}_L} L \rightarrow \pi(\alpha)^*$. Soit $\mu_{\alpha,n}$ et $\mu_{\beta,n}$ les distributions sur \mathbf{Z}_p correspondant à $\alpha_p^n w_{\alpha,n}$ et $\beta_p^n w_{\beta,n}$ par la transformée d'Amice-Mahler (8). On associe à $(\mu_{\alpha,n})_n$ et $(\mu_{\beta,n})_n$ deux distributions localement analytiques μ_α et μ_β sur \mathbf{Q}_p à support compact (i.e. deux formes linéaires continues sur l'espace vectoriel des fonctions localement analytiques sur \mathbf{Q}_p à support compact) en

posant :

$$(32) \quad \int_U f(z) d\mu_\alpha(z) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \int_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{1}_U(z/p^N) f(z/p^N) d\mu_{\alpha,N}(z)$$

(resp. avec β au lieu de α) o\u00f9 $f : \mathbf{Q}_p \rightarrow L$ est localement analytique (à support quelconque) et U est un ouvert compact de \mathbf{Q}_p contenu dans $p^{-N}\mathbf{Z}_p$.

Lemme 5.2.1. — *La valeur $\int_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{1}_U(z/p^N) f(z/p^N) d\mu_{\alpha,N}(z)$ ne d\u00e9pend pas du choix de N tel que U est contenu dans $p^{-N}\mathbf{Z}_p$.*

D\u00e9monstration. — Si μ est une distribution localement analytique sur \mathbf{Z}_p correspondant \u00e0 $w \in \mathcal{R}^+$ par (8), il est facile de voir que la distribution localement analytique $\psi(\mu)$ correspondant \u00e0 $\psi(w)$ v\u00e9rifie :

$$(33) \quad \int_{\mathbf{Z}_p} f(z) d\psi(\mu)(z) = \int_{p\mathbf{Z}_p} f(z/p) d\mu(z).$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{1}_U(z/p^N) f(z/p^N) d\mu_{\alpha,N}(z) &= \int_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{1}_U(z/p^N) f(z/p^N) d\psi(\mu_{\alpha,N+1})(z) \\ &\stackrel{(33)}{=} \int_{p\mathbf{Z}_p} \mathbf{1}_U(z/p^{N+1}) f(z/p^{N+1}) d\mu_{\alpha,N+1}(z) \\ &= \int_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{1}_U(z/p^{N+1}) f(z/p^{N+1}) d\mu_{\alpha,N+1}(z), \end{aligned}$$

en remarquant que $\mathbf{1}_U(z/p^{N+1}) f(z/p^{N+1})$ est \u00e0 support dans $p\mathbf{Z}_p$. \square

Par le lemme 5.1.1, la condition (ii) pr\u00e9c\u00e9dente sur $(w_{\alpha,n}, w_{\beta,n})_n$ est \u00e9quivalente aux \u00e9galit\u00e9s :

$$(34) \quad \left(\sum_{x \in \mathbf{Z}_p^\times / (1+p^{m(V)}\mathbf{Z}_p)} (\beta\alpha^{-1})(x) \eta_{p^m}^{p^{m-m(V)}x} \right) \alpha_p^{m-n} \int_{\mathbf{Z}_p} z^j \eta_{p^m}^z d\mu_{\alpha,n}(z) = \beta_p^{m-n} \int_{\mathbf{Z}_p} z^j \eta_{p^m}^z d\mu_{\beta,n}(z)$$

pour tout $j \in \{0, \dots, k-2\}$, tout $n \geq 0$, tout $m \geq m(V)$ et toute racine primitive p^m -i\u00eame η_{p^m} de 1 dans $\overline{\mathbf{Q}_p}$.

Corollaire 5.2.2. — *Avec les notations pr\u00e9c\u00e9dentes, la condition (ii) ci-dessus sur $(w_{\alpha,n}, w_{\beta,n})_n$ est \u00e9quivalente aux \u00e9galit\u00e9s dans $\overline{\mathbf{Q}_p}$:*

$$\int_{p^{-N}\mathbf{Z}_p} z^j e^{2i\pi zy} d\mu_\beta(z) = \left(\sum_{x \in \mathbf{Z}_p^\times / (1+p^{m(V)}\mathbf{Z}_p)} (\beta\alpha^{-1})(x) e^{\frac{2i\pi xy}{p^{\text{val}(y)+m(V)}}} \right) \left(\frac{\beta_p}{\alpha_p} \right)^{\text{val}(y)} \int_{p^{-N}\mathbf{Z}_p} z^j e^{2i\pi zy} d\mu_\alpha(z)$$

pour tout $j \in \{0, \dots, k-2\}$, tout $y \in \mathbf{Q}_p^\times$ et tout $N \geq \text{val}(y) + m(V)$.

Démonstration. — Cela résulte de (32) et de (34) en remarquant que $\mathbf{1}_U(z/p^N) = 1$ si $U = p^{-N}\mathbf{Z}_p$ et $z \in \mathbf{Z}_p$, et en posant $n = N$ et $m = N - \text{val}(y) \geq m(V)$. \square

Par le lemme 5.1.2, on a donc :

$$\int_{\mathbf{Q}_p} I(f)(z) d\mu_\alpha(z) = C(\alpha_p, \beta_p) \int_{\mathbf{Q}_p} f(z) d\mu_\beta(z)$$

pour $f \in \pi(\alpha)$ à support compact tel que $I(f) \in \pi(\beta)$ est aussi à support compact.

Lemme 5.2.3. — *Il y a une manière unique de prolonger μ_α et μ_β comme éléments respectivement de $\pi(\alpha)^*$ et $\pi(\beta)^*$ telle que, pour tout $f \in \pi(\beta)$ (vue comme fonction sur \mathbf{Q}_p par (14)) :*

$$(35) \quad \int_{\mathbf{Q}_p} I(f)(z) d\mu_\alpha(z) = C(\alpha_p, \beta_p) \int_{\mathbf{Q}_p} f(z) d\mu_\beta(z)$$

Démonstration. — Il suffit de montrer que, si M est un entier suffisamment grand et si $j \in \{0, \dots, k-2\}$, alors les intégrales :

$$\int_{\mathbf{Q}_p - p^{-M}\mathbf{Z}_p} (\beta\alpha^{-1})(z) |z|^{-1} z^j d\mu_\alpha(z) \text{ et } \int_{\mathbf{Q}_p - p^{-M}\mathbf{Z}_p} (\alpha\beta^{-1})(z) |z|^{-1} z^j d\mu_\beta(z)$$

sont uniquement déterminées. Si $h(z) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}$, on a $\hat{h}(z) = h(z)$ de sorte que $\hat{h}(0) \neq 0$ et $I^{\text{lisse}}(h)$ n'est pas à support compact dans \mathbf{Q}_p (cf. preuve du lemme 5.1.2). Ainsi, quitte à multiplier h par un scalaire non nul, on a un entier M tel que $I^{\text{lisse}}(h)(z) = (\beta\alpha^{-1})(z) |z|^{-1}$ dans $\pi(\alpha)$ pour $|z| \geq p^M$. L'égalité (35) entraîne :

$$\int_{\mathbf{Q}_p - p^{-M}\mathbf{Z}_p} (\beta\alpha^{-1})(z) |z|^{-1} z^j d\mu_\alpha(z) = C(\alpha_p, \beta_p) \int_{\mathbf{Z}_p} z^j d\mu_\beta(z) - \int_{p^{-M}\mathbf{Z}_p} I^{\text{lisse}}(h)(z) z^j d\mu_\alpha(z).$$

Cela permet déjà de prolonger μ_α à tout $\pi(\alpha)^*$. Le prolongement de μ_β à tout $\pi(\beta)^*$ s'en déduit alors par (35) encore puisque $C(\alpha_p, \beta_p) \neq 0$. \square

Lorsque $\alpha = \beta|\cdot|$, on peut voir que la distribution $\mu_\beta \in \pi(\beta)^*$ du lemme 5.2.3 est nulle contre $\beta \circ \det \otimes_L \text{Sym}^{k-2} L^2 \subset \pi(\beta)$.

Avec les notations précédentes, on déduit du lemme 5.2.3 une application L -linéaire :

$$(36) \quad \varprojlim_{\psi} D^\sharp(T) \otimes_{\mathcal{O}_L} L \longrightarrow \pi(\alpha)^*$$

$$(w_{\alpha,n} \otimes e_\alpha + w_{\beta,n} \otimes e_\beta)_n \longmapsto \mu_\alpha \text{ prolongé}$$

et notons que la définition de cette application utilise l'existence de l'entrelacement I (lemme 5.2.3).

Lemme 5.2.4. — *Soit $\gamma \in \Gamma$ tel que $\varepsilon(\gamma) = a^{-1} \in \mathbf{Z}_p^\times$, $z \in \mathbf{Z}_p$, $(v_n)_n \in \varprojlim_{\psi} D^\sharp(T)$ et $\mu_\alpha \in \pi(\alpha)^*$ l'image de $(v_n)_n$ par (36). Alors :*

- (i) $(\psi(v_n))_n$ s'envoie sur $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \cdot \mu_\alpha$;
- (ii) $(\gamma(v_n))_n$ s'envoie sur $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \mu_\alpha$;
- (iii) $(\varphi^n((1+X)^z v_n))_n$ s'envoie sur $\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mu_\alpha$.

Démonstration. — Cela découle de (32) et de propriétés simples de la transformée d’Amice-Mahler (voir par exemple [Col04a, §2.2.2]). Nous laissons les détails en exercice au lecteur. \square

En particulier, le lemme 5.2.4 induit une action du groupe $B(\mathbf{Q}_p)$ sur $\varprojlim_{\psi} D^{\sharp}(T)$, qui coïncide bien sûr avec celle de la définition 3.4.3 (en faisant agir les scalaires par multiplication par le caractère central de $\pi(\alpha)^*$).

Lemme 5.2.5. — *L’application (36) se factorise par une injection continue $B(\mathbf{Q}_p)$ -équivariante :*

$$\left(\varprojlim_{\psi} D^{\sharp}(T)\right) \otimes_{\mathcal{O}_L} L \hookrightarrow (B(\alpha)/L(\alpha))^*$$

(continue pour la topologie faible sur $(B(\alpha)/L(\alpha))^*$).

Démonstration. — L’injectivité découle via (32) de l’injectivité de l’isomorphisme $\mathcal{R}^+ \xrightarrow{\sim} \text{An}(\mathbf{Z}_p, L)^*$ (cf. (8)) et la $B(\mathbf{Q}_p)$ -équivariance du lemme 5.2.4. Montrons que l’application $\varprojlim_{\psi} D^{\sharp}(T) \rightarrow \pi(\alpha)^*$ est continue. Notons $\pi(\alpha)_c \subset \pi(\alpha)$ (resp. $\pi(\beta)_c \subset \pi(\beta)$) le sous- L -espace vectoriel des fonctions $f \in \pi(\alpha)$ (resp. $f \in \pi(\beta)$) à support compact dans \mathbf{Q}_p . La flèche $\pi(\alpha)_c \oplus \pi(\beta)_c \xrightarrow{\text{incl} \oplus I} \pi(\alpha)$ est surjective (voir e.g. la preuve du lemme 5.2.3) et induit une immersion fermée entre espaces de Fréchet :

$$\pi(\alpha)^* \hookrightarrow \pi(\alpha)_c^* \oplus \pi(\beta)_c^*.$$

Il suffit donc de montrer la continuité des deux applications $\varprojlim_{\psi} D^{\sharp}(T) \rightarrow \pi(\alpha)_c^*$ et $\varprojlim_{\psi} D^{\sharp}(T) \rightarrow \pi(\beta)_c^*$, ce qui découle après passage à la limite projective via (32) de la continuité de $\mathcal{R}^+ \xrightarrow{\sim} \text{An}(\mathbf{Z}_p, L)^*$ et de celle de l’injection $D^{\sharp}(T) \hookrightarrow \mathcal{R}^+ \otimes_L D_{\text{cris}}(V)$ (cf. la proposition 3.3.8). Notons $\Pi(V)$ l’espace de Banach dual du module compact $\varprojlim_{\psi} D^{\sharp}(T)$ par l’anti-équivalence de catégorie de [ST02b, §1]. Il est muni d’une action continue unitaire de $B(\mathbf{Q}_p)$ par la proposition 3.4.4 (on peut utiliser les arguments de dualité de la preuve de [ST02b, proposition 1.6] pour la continuité de l’action) et on a par ce qui précède un morphisme $B(\mathbf{Q}_p)$ -équivariant (continu) $\pi(\alpha) \rightarrow \Pi(V)$. Par la propriété universelle du complété de $\pi(\alpha)$ par rapport à un sous- $\mathcal{O}_L[B(\mathbf{Q}_p)]$ -module générateur de type fini et par le théorème 4.3.1, ce morphisme s’étend par continuité en un morphisme $B(\mathbf{Q}_p)$ -équivariant continu $B(\alpha)/L(\alpha) \rightarrow \Pi(V)$. En redualisant, ce dernier induit un morphisme continu $(\varprojlim_{\psi} D^{\sharp}(T)) \otimes_{\mathcal{O}_L} L \rightarrow (B(\alpha)/L(\alpha))^*$ qui est le morphisme de l’énoncé. \square

Nous construisons maintenant une application continue $(B(\alpha)/L(\alpha))^* \rightarrow (\varprojlim_{\psi} D(V))^b$ inverse de la précédente.

Soit $\mu_\alpha \in (B(\alpha)/L(\alpha))^*$ et $\mu_\beta \stackrel{\text{déf}}{=} C(\alpha_p, \beta_p)^{-1} \widehat{I} \circ \mu_\alpha \in (B(\beta)/L(\beta))^*$ où \widehat{I} est le morphisme $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -équivariant du corollaire 4.3.2. On définit une suite $(\mu_{\alpha,n})_n$ de distributions localement analytiques sur \mathbf{Z}_p en posant :

$$(37) \quad \int_{\mathbf{Z}_p} f(z) d\mu_{\alpha,n}(z) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} f(p^n z) d\mu_\alpha(z)$$

et on définit de même $(\mu_{\beta,n})_n$. Soient $w_{\alpha,n}, w_{\beta,n} \in \mathcal{R}^+$ les éléments correspondant à $\alpha_p^{-n} \mu_{\alpha,n}, \beta_p^{-n} \mu_{\beta,n}$ par (8).

Lemme 5.2.6. — *La suite d'éléments $w_{\alpha,n} \otimes e_\alpha + w_{\beta,n} \otimes e_\beta$ de $\mathcal{R}^+ \otimes_L D_{\text{cris}}(V)$ satisfait les conditions (i), (ii) et (iii) du théorème 3.4.2.*

Démonstration. — La condition (iii) est évidente à partir de (33) et la condition (ii) découle des définitions, du lemme 5.1.2 et du corollaire 5.2.2. Vérifions la condition (i). Revenant à la preuve du théorème 4.3.1, on a en particulier que μ_α satisfait (16) ce qui entraîne :

$$\begin{aligned} \alpha_p^{-N} \int_{a+p^n\mathbf{Z}_p} (z-a)^j d\mu_{\alpha,N}(z) &= \alpha_p^{-N} p^{Nj} \int_{p^{-N}a+p^{n-N}\mathbf{Z}_p} (z-p^{-N}a)^j d\mu_\alpha(z) \\ &\in C_{\mu_\alpha} p^{-N \text{val}(\alpha_p)} p^{Nj} p^{(n-N)(j-\text{val}(\alpha_p))} \mathcal{O}_L \\ &\in C_{\mu_\alpha} p^{n(j-\text{val}(\alpha_p))} \mathcal{O}_L \end{aligned}$$

pour tout $a \in \mathbf{Z}_p$, tout $j \in \{0, \dots, k-2\}$ et tout $n \in \mathbf{N}$. Avec les notations du §4.1, cela entraîne pour tout $N \in \mathbf{N}$:

$$\|\alpha_p^{-N} \mu_{\alpha,N}\|_{\text{val}(\alpha_p), k-2} \leq c |C_{\mu_\alpha}|$$

pour une constante $c \in \mathbf{R}_{\geq 0}$. On a une borne analogue pour les $\mu_{\beta,N}$. On en déduit (i). \square

Par le lemme 5.2.6 et le théorème 3.4.2, on a une application L -linéaire :

$$(B(\alpha)/L(\alpha))^* \longrightarrow \varprojlim_{\psi} D^\sharp(T) \otimes_{\mathcal{O}_L} L$$

et il est immédiat à partir des définitions et du lemme 5.2.3 de vérifier qu'elle est inverse de celle du lemme 5.2.5.

Théorème 5.2.7. — *Il y a un unique isomorphisme topologique (à multiplication près par un scalaire non nul) entre les L -espaces vectoriels localement convexes (pour la topologie faible des deux côtés) :*

$$(\varprojlim_{\psi} D(V))^b \xrightarrow{\sim} B(V)^*$$

tel que l'action de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p\mathbf{z} \end{pmatrix}$ sur $B(V)^*$ correspond à $(v_n)_n \mapsto (\psi^{\mathbf{z}}(v_n))_n$, l'action de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{z}_p^\times \end{pmatrix}$ à celle de Γ et l'action de $\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ à $(v_n)_n \mapsto ((1+X)^{p^n \mathbf{z}_p} v_n)_n$.

Démonstration. — L'existence d'un tel isomorphisme découle des résultats précédents, sachant qu'une application bijective continue entre deux « modules compacts à isogénie près » est un isomorphisme topologique (c'est la version duale par [ST02b] du théorème de l'image ouverte entre espaces de Banach). Il reste à démontrer l'unicité (à scalaire près) mais cela résulte de la proposition 3.4.5. \square

Rappelons que $H_{\text{Iw}}^i(\mathbf{Q}_p, V) \stackrel{\text{déf}}{=} L \otimes_{\mathcal{O}_L} \varprojlim_n H^i(\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/F_n), T)$ où T est un \mathcal{O}_L -réseau quelconque de V stable par $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ (voir le paragraphe §2.2).

Corollaire 5.2.8. — *On a un isomorphisme de $\mathcal{O}_L[[\mathbf{Z}_p^\times]]$ -modules :*

$$H_{\text{Iw}}^1(\mathbf{Q}_p, V) \simeq \text{B}(V)^* \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p\mathbf{z} \end{pmatrix}$$

où \mathbf{Z}_p^\times agit via l'action de Γ à gauche et via l'action de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{z}_p^\times \end{pmatrix}$ à droite.

Démonstration. — Cela découle du théorème 5.2.7 et de la proposition 2.2.9. \square

Remarque 5.2.9. — Le $\mathcal{O}_L[[\mathbf{Z}_p^\times]]$ -module $H_{\text{Iw}}^2(\mathbf{Q}_p, V)$ s'identifie aussi aux coinvariants de $\text{B}(V)^*$ sous l'action de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p\mathbf{z} \end{pmatrix}$ et en fait, ces deux espaces sont nuls par le (ii) de la proposition 2.2.8 parce que V est irréductible. En effet, le théorème 5.2.7 et le corollaire 2.3.8 nous disent que les coinvariants d'un réseau de $\text{B}(V)^*$ sous l'action de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p\mathbf{z} \end{pmatrix}$ s'identifient à $H_{\text{Iw}}^2(\mathbf{Q}_p, T)$.

5.3. Irréductibilité et admissibilité. — Le but de ce paragraphe est de déduire de tous les résultats précédents la non nullité, l'irréductibilité (topologique) et l'admissibilité de $\text{B}(V)$ (pour $\alpha \neq \beta$).

Corollaire 5.3.1. — *L'espace de Banach $\text{B}(V)$ est non nul.*

Démonstration. — Cela résulte du théorème 5.2.7 et du corollaire 2.2.7 qui implique que $\varprojlim_\psi D^\sharp(T) \neq 0$. \square

Pour $\beta\alpha^{-1}$ non ramifié, le corollaire 5.3.1 était conjecturé (via la proposition 4.3.3) et démontré pour $k \leq 2p$ si $p \neq 2$ et $k < 4$ si $p = 2$ dans [Bre03a, §3.3] par un calcul explicite de réseaux.

Corollaire 5.3.2. — *Le $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -Banach unitaire $\text{B}(V)$ est topologiquement irréductible.*

Démonstration. — Cela résulte du théorème 5.2.7 et de la proposition 3.4.6. \square

La proposition 3.4.6 montre que $\text{B}(V)$ est en fait topologiquement irréductible comme $\text{B}(\mathbf{Q}_p)$ -représentation.

Corollaire 5.3.3. — *Le $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -Banach unitaire $\text{B}(V)$ est admissible.*

Démonstration. — On ignore si le \mathcal{O}_L -module compact $\varprojlim_{\psi} D^{\sharp}(T)$ est stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ dans $B(V)^*$ (via le théorème 5.2.7) mais on peut le remplacer par le \mathcal{O}_L -réseau de $B(V)^*$:

$$\mathcal{M} \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcap_{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)} g \left(\varprojlim_{\psi} D^{\sharp}(T) \right) \subset \varprojlim_{\psi} D^{\sharp}(T)$$

qui est un sous- $\mathcal{O}_L[[X]]$ -module compact stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ dans $B(V)^*$ (on vérifie qu'il est stable par $B(\mathbf{Q}_p)$ en utilisant la décomposition d'Iwasawa de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$). Le \mathcal{O}_L -module \mathcal{M} possède alors deux structures naturelles de $\mathcal{O}_L[[X]]$ -modules : l'une est celle déjà définie et l'autre est :

$$(\lambda, v) \in \mathcal{O}_L[[X]] \times \mathcal{M} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v.$$

La première structure est telle que la multiplication par $(1+X)^{\mathbf{Z}_p}$ correspond à l'action de $\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et la deuxième est telle que la multiplication par $(1+X)^{\mathbf{Z}_p}$ correspond à l'action de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{Z}_p & 1 \end{pmatrix}$. Soit $\mathrm{pr} : \mathcal{M} \rightarrow D^{\sharp}(T)$ la projection sur la première composante et $M \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{pr}(\mathcal{M})$: M est un sous- $\mathcal{O}_L[[X]]$ -module (de type fini) de $D^{\sharp}(T)$. Posons $\mathcal{N} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Ker}(\mathrm{pr}) \subsetneq \mathcal{M}$. L'application :

$$(38) \quad \mathcal{N} \rightarrow M, \quad v \mapsto \mathrm{pr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v \right)$$

est injective : si v a pour image 0, sa distribution associée $\mu_{\alpha} \in B(\alpha)^* \simeq \mathcal{C}^{\mathrm{val}(\alpha_p)}(\mathbf{Z}_p, L)^* \oplus \mathcal{C}^{\mathrm{val}(\alpha_p)}(\mathbf{Z}_p, L)^*$ par (36) et (9) est nulle sur les deux copies de $\mathcal{C}^{\mathrm{val}(\alpha_p)}(\mathbf{Z}_p, L)$, donc est nulle dans $B(V)^*$. En pensant encore en termes de distributions, on voit que \mathcal{N} est un $\mathcal{O}_L[[X]]$ -module pour la première structure mais seulement un $\varphi(\mathcal{O}_L[[X]])$ -module pour la deuxième structure. De plus, pour cette deuxième structure, l'injection (38) est $\varphi(\mathcal{O}_L[[X]])$ -linéaire. Comme M est de type fini sur $\mathcal{O}_L[[X]]$, donc sur $\varphi(\mathcal{O}_L[[X]])$, on obtient que le $\varphi(\mathcal{O}_L[[X]])$ -module \mathcal{N} pour la deuxième action de $\varphi(\mathcal{O}_L[[X]])$ est de type fini. Fixons maintenant des éléments $(e_1, \dots, e_m) \in \mathcal{M}$ (resp. $(f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{N}$) tels que les $\mathrm{pr}(e_i)$ (resp. les f_i) engendrent M sur $\mathcal{O}_L[[X]]$ (resp. \mathcal{N} sur $\varphi(\mathcal{O}_L[[X]])$). Soit $v \in \mathcal{M}$. Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ dans $\mathcal{O}_L[[X]]$ tels que $v - \sum \lambda_i e_i \in \mathcal{N}$ et il existe μ_1, \dots, μ_n dans $\varphi(\mathcal{O}_L[[X]])$ tels que $v - \sum \lambda_i e_i = \sum \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mu_i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} f_i$. Comme les λ_i correspondent à l'action d'éléments de l'algèbre de groupe de $\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et les $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mu_i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ à l'action d'éléments de l'algèbre de groupe de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p\mathbf{Z}_p & 1 \end{pmatrix}$, on voit que \mathcal{M} est *a fortiori* de type fini sur l'algèbre de groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$, d'où l'admissibilité. \square

Pour $\beta\alpha^{-1}$ non ramifié, les corollaires 5.3.2 et 5.3.3 étaient conjecturés et démontrés par un argument de réduction modulo p pour $k \leq 2p$ (et $k < 4$ si $p = 2$) dans [Bre03b, §1.3] avec l'hypothèse supplémentaire $\mathrm{val}(\alpha_p + \beta_p) \neq 1$ pour le premier.

On peut déduire des résultats précédents deux autres corollaires, l'un sur les réseaux dans $\pi(\alpha)$ et $\pi(\beta)$, l'autre sur les vecteurs localement analytiques dans $B(V)$.

Corollaire 5.3.4. — *Supposons $\alpha \neq \beta | \cdot |$, alors $\pi(\alpha)$ (resp. $\pi(\beta)$) possède des \mathcal{O}_L -réseaux stables par $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et tous les \mathcal{O}_L -réseaux stables par $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ dans $\pi(\alpha)$ (resp.*

$\pi(\beta)$) sont commensurables entre eux. Supposons $\alpha = \beta|\cdot|$, alors on a le même résultat pour $\pi(\alpha)$.

Démonstration. — L'existence de tels \mathcal{O}_L -réseaux résulte du corollaire 5.3.1 et de la proposition 4.3.3. Pour montrer qu'ils sont tous commensurables entre eux, il est équivalent de montrer qu'ils sont tous commensurables aux \mathcal{O}_L -réseaux de type fini sur $\mathcal{O}_L[\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)]$. Le \mathcal{O}_L -dual d'un \mathcal{O}_L -réseau stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ est toujours contenu dans le \mathcal{O}_L -dual d'un \mathcal{O}_L -réseau de type fini sur $\mathcal{O}_L[\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)]$. Par le théorème 4.3.1 et le corollaire 5.3.3, ce dernier dual est de type fini sur l'algèbre de groupe complétée de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$. Comme c'est une algèbre noethérienne, il en est de même du premier dual. Cela entraîne que le complété de $\pi(\alpha)$ (ou $\pi(\beta)$ si $\alpha \neq \beta|\cdot|$) par rapport à un \mathcal{O}_L -réseau stable par $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ quelconque est aussi admissible, et donc topologiquement isomorphe à $B(V)$ par le corollaire 5.3.2 et le fait que la catégorie des $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ -Banach admissibles est abélienne ([ST02b, §3]). Tous les \mathcal{O}_L -réseaux stables par $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ induisent donc des normes équivalentes sur $\pi(\alpha)$ (ou $\pi(\beta)$ si $\alpha \neq \beta|\cdot|$) ce qui achève la preuve. \square

Remarque 5.3.5. — Lorsque $\alpha = \beta$, on s'attend à ce que les corollaires 5.3.1 à 5.3.4 restent vrais (cela se déduit de [Bre03a] pour $k \leq 2p$ et $k \neq 4$ si $p = 2$ par un calcul direct, cf. [Bre03b, Th.1.3.3]), mais on ignore si l'on a encore un isomorphisme $(\varprojlim_{\psi} D(V))^b \xrightarrow{\sim} B(V)^*$ comme au théorème 5.2.7.

Comme dans [ST03, §7], on note $B(V)_{\mathrm{an}}$ le sous- L -espace vectoriel de $B(V)$ des vecteurs localement analytiques, i.e. des vecteurs $v \in B(V)$ tels que l'application orbite $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p) \rightarrow B(V)$, $g \mapsto g \cdot v$ est localement analytique. Il est muni d'une topologie naturelle d'espace localement convexe de type compact (cf. [ST03, §7]).

Soit :

$$A(\alpha) \stackrel{\mathrm{d}\acute{\mathrm{e}}\mathrm{f}}{=} \left(\mathrm{Ind}_{B(\mathbf{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} \alpha \otimes d^{k-2} \beta|\cdot|^{-1} \right)^{\mathrm{an}}$$

l'induite parabolique localement analytique au sens de [ST02a]. On définit de même $A(\beta)$ en échangeant α et β . On a des injections naturelles continues $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -équivariantes $A(\alpha) \hookrightarrow B(\alpha)$ et $A(\beta) \hookrightarrow B(\beta)$.

Corollaire 5.3.6. — Supposons $\alpha \neq \beta|\cdot|$. On a une injection continue $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -équivariante :

$$A(\beta) \oplus_{\pi(\beta)} A(\alpha) \hookrightarrow B(V)_{\mathrm{an}}$$

où $\pi(\beta)$ s'envoie dans $A(\alpha)$ via l'entrelacement (24).

Démonstration. — Par [ST01, §4], $\pi(\alpha)$ (resp. $\pi(\beta)$) est le seul sous-objet topologiquement irréductible non nul dans $A(\alpha)$ (resp. $A(\beta)$). Par le théorème 4.3.1, on déduit que les injections ci-dessus induisent encore des injections $A(\alpha) \hookrightarrow B(\alpha)/L(\alpha)$ et $A(\beta) \hookrightarrow B(\beta)/L(\beta)$. Le résultat découle alors du corollaire 4.3.2. \square

Il est naturel de conjecturer :

Conjecture 5.3.7. — *Supposons $\alpha \neq \beta | \cdot |$. L'application $A(\beta) \oplus_{\pi(\beta)} A(\alpha) \hookrightarrow B(V)_{\mathrm{an}}$ du corollaire 5.3.6 est un isomorphisme topologique.*

5.4. Le cas non générique. — On achève ici l'examen complet du cas $\alpha = \beta | \cdot |$ (relations entre les Banach $B(\beta)/L(\beta)$ et $B(\alpha)/L(\alpha)$, vecteurs localement analytiques).

Rappelons que $L(\beta) \simeq (\beta \circ \det) \otimes_L \mathrm{Sym}^{k-2} L^2 \subset B(\beta)$ s'identifie au sous-espace des polynômes de degré $\leq k-2$ à coefficients dans L (voir §4.2). Notons $K(\beta) \subseteq B(\beta)$ l'adhérence du sous- L -espace vectoriel engendré par les fonctions de $L(\beta)$ et les fonctions $f : \mathbf{Q}_p \rightarrow L$ de la forme :

$$(39) \quad f(z) = \sum_{j \in J} \lambda_j (z - z_j)^{n_j} \mathrm{val}(z - z_j)$$

où J est un ensemble fini, $\lambda_j \in L$, $z_j \in \mathbf{Q}_p$, $n_j \in \{\lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor + 1, \dots, k-2\}$ et $\deg(\sum_{j \in J} \lambda_j (z - z_j)^{n_j}) < (k-2)/2$. Pour que $K(\beta)$ soit bien contenu dans $B(\beta)$, il faut vérifier le lemme suivant, dont on laisse les détails au lecteur (voir par exemple [Bre03c, lemmes 3.3.1 et 3.3.2]) :

Lemme 5.4.1. — *Les fonctions f comme en (39) appartiennent à $B(\beta)$.*

La proposition suivante donne précisément le défaut pour l'entrelacement \widehat{I} du corollaire 4.3.2 d'être un isomorphisme dans ce cas.

Proposition 5.4.2. — *On a une suite exacte $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -équivariante d'espaces de Banach :*

$$0 \longrightarrow K(\beta)/L(\beta) \longrightarrow B(\beta)/L(\beta) \xrightarrow{\widehat{I}} B(\alpha)/L(\alpha) \longrightarrow 0$$

où \widehat{I} est le morphisme du corollaire 4.3.2.

Démonstration. — Notons St la représentation de Steinberg de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, c'est-à-dire $(\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} 1) / 1$. On a des extensions de représentations localement algébriques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$:

$$0 \rightarrow L(\beta) \otimes_L \mathrm{St} \rightarrow \pi(\alpha) \rightarrow L(\beta) \rightarrow 0$$

et :

$$0 \rightarrow L(\beta) \rightarrow \pi(\beta) \rightarrow L(\beta) \otimes_L \mathrm{St} \rightarrow 0.$$

L'entrelacement $\pi(\beta)/L(\beta) \rightarrow \pi(\alpha)$ induit par I (cf. §4.2) n'est autre dans ce cas que l'injection $L(\beta) \otimes_L \mathrm{St} \hookrightarrow \pi(\alpha)$. En procédant comme dans [Bre03b, §§2.1-2.2], on vérifie que $\pi(\alpha)$ s'identifie aux fonctions $H : \mathbf{Q}_p \rightarrow L$ localement polynomiales de degré au plus $k-2$ telles que, pour $|z| \gg 0$, on a $H(z) = Q(z) - 2P(z)\mathrm{val}(z)$ où P et Q sont des

polynômes en z de degré au plus $k - 2$ et où l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ est donnée par :

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot H \right] (z) \stackrel{\text{déf}}{=} \beta(ad - bc)(-cz + a)^{k-2} \left[H \left(\frac{dz - b}{-cz + a} \right) + P \left(\frac{dz - b}{-cz + a} \right) \mathrm{val} \left(\frac{ad - bc}{(-cz + a)^2} \right) \right]$$

(prolongé par continuité en z tel que $-cz + a = 0$). Dans cette identification, la sous-représentation $L(\beta) \otimes_L \mathrm{St}$ correspond au sous-espace des fonctions H telles que $H(z) = Q(z)$ pour $|z| \gg 0$ (i.e. $P = 0$). Le complété de $\pi(\alpha)$ par rapport à un quelconque \mathcal{O}_L -réseau invariant de type fini sur $\mathcal{O}_L[\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)]$ (s'il en existe) se calcule alors par dualité exactement comme dans la preuve de [Bre03c, théorème 3.3.3], en remplaçant partout les $\log_{\mathcal{L}}(z)$ par des $\mathrm{val}(z)$. En particulier, on obtient que l'injection $L(\beta) \otimes_L \mathrm{St} \hookrightarrow \pi(\alpha)$ induit une surjection sur les complétés par rapport à des réseaux invariants de type fini, i.e. l'application $\widehat{I} : B(\beta)/L(\beta) \rightarrow B(\alpha)/L(\alpha)$ est surjective, et que le noyau de cette surjection est exactement $K(\beta)/L(\beta)$. \square

Lorsque $\alpha = \beta| \cdot |$, le Banach $B(V)$ admet donc *trois* descriptions différentes. La première comme $B(\alpha)/L(\alpha)$, la deuxième comme complété de $\pi(\alpha)$ et la troisième comme $B(\beta)/K(\beta)$. En fait, dans ce cas, l'isomorphisme $B(\beta)/K(\beta) \xrightarrow{\sim} B(\alpha)/L(\alpha)$ de la proposition 5.4.2 doit être vu comme remplaçant l'isomorphisme $B(\beta)/L(\beta) \xrightarrow{\sim} B(\alpha)/L(\alpha)$ du cas $\alpha \neq \beta| \cdot |$.

Concernant les vecteurs localement analytiques dans $B(V)$, on a le résultat suivant dont la preuve est analogue à celle du corollaire 5.3.6 en remplaçant l'isomorphisme $B(\beta)/L(\beta) \simeq B(\alpha)/L(\alpha)$ par l'isomorphisme $B(\beta)/K(\beta) \simeq B(\alpha)/L(\alpha)$:

Corollaire 5.4.3. — *Supposons $\alpha = \beta| \cdot |$. On a une injection continue $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -équivariante :*

$$A(\beta)/L(\beta) \oplus_{L(\beta) \otimes_L \mathrm{St}} A(\alpha) \hookrightarrow B(V)_{\mathrm{an}}.$$

Comme en §5.3, on termine avec la :

Conjecture 5.4.4. — *Supposons $\alpha = \beta| \cdot |$. L'application $A(\beta)/L(\beta) \oplus_{L(\beta) \otimes_L \mathrm{St}} A(\alpha) \hookrightarrow B(V)_{\mathrm{an}}$ du corollaire 5.4.3 est un isomorphisme topologique.*

Références

- [Ber02] L. BERGER – *Représentations p -adiques et équations différentielles*. Invent. Math. 148 (2002), no. 2, 219–284.
- [Ber04a] L. BERGER – *Limites de représentations cristallines*. Compos. Math. 140 (2004), no. 6, 1473–1498.
- [Ber04b] L. BERGER – *Équations différentielles p -adiques et (φ, N) -modules filtrés*. Pré-publication 2004.

- [BB04] L. BERGER, C. BREUIL – *Towards a p -adic Langlands programme*. Notes d'un cours donné à l'École d'été de Hangzhou (août 2004), disponibles à l'adresse : www.ihes.fr/~breuil/publications.html
- [Bre03a] C. BREUIL – *Sur quelques représentations modulaires et p -adiques de $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ II*. J. Institut Math. Jussieu 2, 2003, 23–58.
- [Bre03b] C. BREUIL – *Invariant \mathcal{L} et série spéciale p -adique*. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 37 (2004), no. 4, 559–610.
- [Bre03c] C. BREUIL – *Série spéciale p -adique et cohomologie étale complétée*. Prépublication 2003, disponible à l'adresse : www.ihes.fr/~breuil/publications.html
- [Bum98] D. BUMP – *Automorphic forms and representations*. Cambridge Studies in Advanced Math. 55, Cambridge University Press, 1998.
- [CC98] F. CHERBONNIER, P. COLMEZ – *Représentations p -adiques surconvergentes*. Invent. Math. 133 (1998), no. 3, 581–611.
- [CC99] F. CHERBONNIER, P. COLMEZ – *Théorie d'Iwasawa des représentations p -adiques d'un corps local*. J. Amer. Math. Soc. 12, 1999, 241–268.
- [Col99] P. COLMEZ – *Représentations cristallines et représentations de hauteur finie*. J. Reine Angew. Math. 514 (1999), 119–143.
- [Col04a] P. COLMEZ – *Une correspondance de Langlands locale p -adique pour les représentations semi-stables de dimension 2*. Prépublication 2004.
- [Col04b] P. COLMEZ – *Série principale unitaire pour $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ et représentations triangulines de dimension 2*. Prépublication 2004.
- [Col05] P. COLMEZ – *Fonctions d'une variable p -adique*. Prépublication 2005.
- [CF00] P. COLMEZ, J.-M. FONTAINE – *Construction des représentations p -adiques semi-stables*. Inv. Math. 140, 2000, 1–43.
- [Eme04] M. EMERTON – *p -adic L -functions and unitary completions of representations of p -adic reductive groups*. Prépublication 2004.
- [Eme05] M. EMERTON – *A local-global compatibility conjecture in the p -adic Langlands programme for GL_2/\mathbf{Q}* . Prépublication 2005.
- [Fon90] J.-M. FONTAINE – *Représentations p -adiques des corps locaux I*. The Grothendieck Festschrift, Vol. II, 249–309, Progr. Math. 87, Birkhäuser Boston, Boston, MA 1990.
- [Fon94a] J.-M. FONTAINE – *Le corps des périodes p -adiques*. Astérisque No. 223 (1994), 59–111.
- [Fon94b] J.-M. FONTAINE – *Représentations p -adiques semi-stables*. Astérisque No. 223 (1994), 113–184.
- [Fon94c] J.-M. FONTAINE – *Représentations ℓ -adiques potentiellement semi-stables*. Astérisque No. 223 (1994), 321–347.
- [Ked04] K. KEDLAYA – *A p -adic local monodromy theorem*. Ann. of Math. (2) 160 (2004), no. 1, 93–184.
- [Per94] B. PERRIN-RIOU – *Théorie d'Iwasawa des représentations p -adiques sur un corps local*. Inv. Math. 115, 1994, 81–161.
- [Sch01] P. SCHNEIDER – *Nonarchimedean Functional Analysis*. Springer-Verlag, 2001.
- [ST01] P. SCHNEIDER, J. TEITELBAUM – *$U(\mathfrak{g})$ -finite locally analytic representations (with an appendix by D. Prasad)*. Representation Theory 5, 2001, 111–128.
- [ST02a] P. SCHNEIDER, J. TEITELBAUM – *Locally analytic distributions and p -adic representation theory, with applications to GL_2* . J. Amer. Math. Soc. 15, 2002, 443–468.
- [ST02b] P. SCHNEIDER, J. TEITELBAUM – *Banach space representations and Iwasawa theory*. Israel J. Math. 127, 2002, 359–380.
- [ST03] P. SCHNEIDER, J. TEITELBAUM – *Algebras of p -adic distributions and admissible representations*. Inv. Math. 153, 2003, 145–196.

- [Sen80] S. SEN – *Continuous cohomology and p -adic Galois representations*. *Inv. Math.* 62 (1980/81) 89–116.
- [Wa96] N. WACH – *Représentations p -adiques potentiellement cristallines*. *Bull. Soc. Math. France* 124, 1996, 375–400.

janvier 2006

L. BERGER, CNRS & IHÉS, Le Bois-Marie, 35 route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette, France
E-mail : laurent.berger@ihes.fr • *Url* : www.ihes.fr/~lberger/

C. BREUIL, CNRS & IHÉS, Le Bois-Marie, 35 route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette, France
E-mail : breuil@ihes.fr • *Url* : www.ihes.fr/~breuil/