

L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld au niveau des points

Laurent FARGUES



Institut des Hautes Études Scientifiques
35, route de Chartres
91440 – Bures-sur-Yvette (France)

Avril 2006

IHES/M/06/19

L'ISOMORPHISME ENTRE LES TOURS DE LUBIN-TATE ET DE DRINFELD AU NIVEAU DES POINTS

par

Laurent Fargues

Résumé. — Dans cet article on construit l'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld au niveau des points de ces espaces. Les points considérés sont ceux intervenant dans la théorie des espaces analytiques de Berkovich.

Abstract. — In this article we construct the isomorphism between Lubin-Tate and Drinfeld towers at the level of points. The points we consider are the one of the theory of analytic spaces in the sens of Berkovich.

Introduction

Le but de cet article est de démontrer l'existence de l'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld au niveau des points c'est à dire de décrire la bijection correspondante. Nous nous inspirons bien sûr de [4] (cependant l'auteur ne garantit pas que la bijection décrite coïncide avec celle de [4] qu'il n'a pu complètement comprendre).

Cet isomorphisme n'est pas algébrique : un $\overline{\mathbb{Q}_p}$ -point peut s'envoyer sur un $\mathbb{C}_p$ -point ne provenant pas d'un $\overline{\mathbb{Q}_p}$ -point. C'est pourquoi nous devons travailler avec des points à valeurs dans des "gros corps" du type $\mathbb{C}_p$. Par points nous entendons donc ceux intervenant par exemple dans la théorie des espaces analytiques de Berkovich : ce sont ceux à valeurs dans un corps valué complet pour une valuation de rang 1 extension de $\mathbb{Q}_p$.

La simplification par rapport à la construction de l'isomorphisme dans le cas général provient de ce que l'on n'a pas à introduire d'éclatements admissibles ou de modèles entiers particuliers des espaces de Lubin-Tate et de Drinfeld : si $K|\mathbb{Q}_p$ est valué complet pour une valuation de rang 1 les points à valeurs dans K de la tour de Lubin-Tate et de Drinfeld sont définis indépendamment du modèle entier. En particulier cet article est indépendant de la construction du schéma formel de [6].

L'utilisation de corps valués pour des valuations non-discrètes à corps résiduel non forcément parfait introduit des problèmes de théorie de Hodge p -adique non disponibles dans la littérature. Les résultats associés peuvent se déduire de l'approche utilisée dans [3]. Nous ne les démontrons pas dans cet article mais nous y consacrons un appendice dans lequel nous y exposons les résultats auxquels on peut parvenir en utilisant les méthodes de [3]. L'auteur y consacrera un article plus général ([8]).

L'un des autres problèmes auquel on est confronté est le fait que l'on travaille avec des $\mathcal{O}$ -modules formels, le cas usuel correspondant à $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p$. Pour y remédier on applique la théorie des $\mathcal{O}$ -extensions vectorielles universelles développée dans l'appendice B de [6]. Très peu est nécessaire : seules les sections un à quatre de ce cet appendice sont utilisées, nous n'utiliserons pas le fait que le cristal algèbre de Lie de la $\mathcal{O}$ -extension vectorielle universelle s'étend aux $\mathcal{O}$ -puissances π -divisées, qui est la partie délicate de l'appendice B de [6]. L'utilisation de cette théorie relative à $\mathcal{O}$ rend la rédaction des problèmes reliés purement formels. Seul le cas de l'utilisation des théorèmes de

comparaison cristallins n'est pas rédigé dans ce cadre relatif : l'auteur n'a pas eu le courage de développer la théorie des anneaux de Fontaine obtenus en remplaçant les vecteurs de Witt par les vecteurs de Witt ramifiés...

Dans cet article nous donnons deux descriptions différentes de l'isomorphisme. La première dans le chapitre 9 est la plus simple. La seconde dans le chapitre 12 est plus alambiquée mais s'adapte mieux au cas relatif (on renvoie à l'introduction du chapitre 12 pour plus de détails).

Avant de décrire succinctement la bijection rappelons quelques faits sur les espaces de Lubin-Tate et de Drinfeld associés à $F|\mathbb{Q}_p$. Plaçons nous au niveau des points de ces espaces. Soit D l'algèbre à division d'invariant $\frac{1}{n}$ sur F . La tour de Lubin-Tate $(\mathcal{LT}_K)_{K \subset GL_n(\mathcal{O}_F)}$ est une tour indexée par les sous-groupes ouverts K de $GL_n(\mathcal{O}_F)$ munie d'une action "horizontale" de $D^\times$ (sur chaque élément de la tour) et verticale (par correspondances de Hecke) de $GL_n(F)$. Soit $\mathcal{LT}_\infty = \varprojlim_K \mathcal{LT}_K$ (cela a bien un sens au niveau des points) qui est muni d'une action de $GL_n(F) \times D^\times$. Elle forme un pro-revêtement de groupe $GL_n(\mathcal{O}_F)$

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{LT}_\infty & \\
 K \swarrow & \downarrow & \searrow GL_n(\mathcal{O}_F) \\
 D^\times \curvearrowright & \mathcal{LT}_K & \\
 & \downarrow & \\
 & \mathcal{LT}_{GL_n(\mathcal{O}_F)} = \coprod_{\mathbb{Z}} \mathring{\mathbb{B}}^{n-1} &
 \end{array}$$

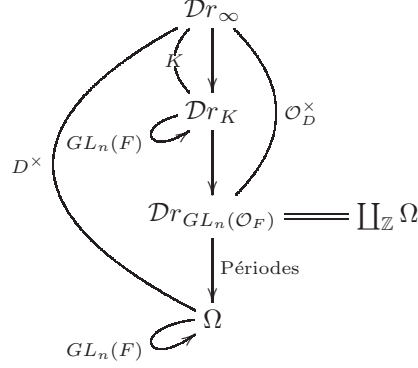
où $\mathcal{LT}_{GL_n(\mathcal{O}_F)}$ est l'espace de Lubin-Tate sans niveau (une union disjointes de boules p -adiques ouvertes de dimension $n-1$ car on travaille en fait avec des espaces de Rapoport-Zink et non les espaces de Lubin-Tate classiques) qui classifie des déformations de groupes formels de dimension 1 et $\mathcal{LT}_K$ est obtenu en trivialisant partiellement le module de Tate de la déformation universelle au dessus de $\mathcal{LT}_{GL_n(\mathcal{O}_F)}$ (on force la monodromie sur le module de Tate à vivre dans K).

On a donc $\mathcal{LT}_\infty/GL_n(\mathcal{O}_F) = \coprod_{\mathbb{Z}} \mathring{\mathbb{B}}^{n-1}$. Il y a de plus une application des périodes de Hodge-De-Rham $\mathcal{LT}_K \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ donnée par la filtration de Hodge du module filtré définissant la déformation et dont les fibres sont les orbites de Hecke. Et donc $\mathcal{LT}_\infty/GL_n(F) = \mathbb{P}^{n-1}$.

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{LT}_\infty & \\
 GL_n(F) \swarrow & \downarrow & \searrow GL_n(\mathcal{O}_F) \\
 & \coprod_{\mathbb{Z}} \mathring{\mathbb{B}}^{n-1} & \\
 & \downarrow \text{Périodes} & \\
 D^\times \curvearrowright & \mathbb{P}^{n-1} &
 \end{array}$$

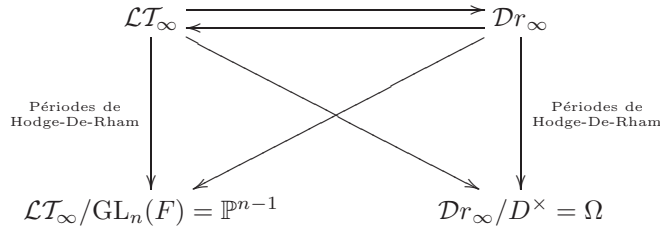
Il y a une description du même type pour la tour de Drinfeld. L'espace de Drinfeld en niveau infini Dr_∞ est muni d'une action de $GL_n(F) \times D^\times$, l'action de $GL_n(F)$ est "horizontale" sur chaque

élément de la tour. Il y a un diagramme pour $K \subset \mathcal{O}_D^\times$ un sous-groupe ouvert



L'application des périodes de Hodge-De-Rham n'est rien d'autre que la projection de $\coprod_{\mathbb{Z}} \Omega$ sur Ω , c'est à dire le quotient par $D^\times / \mathcal{O}_D^\times = \Pi^\mathbb{Z}$.

Les deux applications inverses l'une de l'autre entre $\mathcal{LT}_\infty$ et Dr_∞ sont construites en deux étapes.



On commence par construire une application de périodes de Hodge-Tate d'un des espaces en niveau infini vers l'espace des périodes de Hodge-De-Rham de l'autre espace (les flèches diagonales dans la figure précédente). Les périodes de Hodge-Tate sont données par la rigidification du module de Tate (le fait qu'on ai fixé une base de ce module au sommet de la tour) et la suite de Hodge-Tate, contrairement aux périodes de Hodge-De-Rham données elles par la rigidification de la cohomologie cristalline (l'isocrystal du groupe p -divisible) et la filtration de Hodge. Puis on relève la flèche en niveau infini en utilisant la théorie de Messing qui permet de construire des éléments dans le module de Tate en les construisant modulo p .

Nous n'expliquerons pas d'avantage ce dernier point dans l'introduction, mais afin d'en donner un avant-goût citons le point clef suivant : soit $K|\mathbb{Q}_p$ une extension valuée complète et H un groupe p -divisible sur $\mathcal{O}_K$. Notons $\bar{\eta} = \text{Spec}(\bar{K})$. Alors le module de Tate de H admet deux définitions : l'une en fibre générique, la définition usuelle

$$T_p(H) = \varprojlim_n H[p^n](\bar{K}) = \text{Hom}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, H_{\bar{\eta}})$$

l'autre modulo p

$$T_p(H) = \{ f \in \text{Hom}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, H \otimes \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}) \mid f_*(1) \in \text{Fil Lie}(E(H)) \otimes \mathcal{O}_{\bar{K}} \}$$

où $\text{Lie } E(H)$ désigne l'algèbre de Lie de l'extension vectorielle universelle de H muni de sa filtration de Hodge et $f_* : \mathcal{O}_{\bar{K}} \rightarrow \text{Lie } E(H) \otimes \mathcal{O}_{\bar{K}}$ est le morphisme induit sur les cristaux de Messing évalués sur l'épaississement à puissances divisées $\mathcal{O}_{\bar{K}} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$. La démonstration est un jeu basé sur ces deux aspects : fibre générique et modulo p . Les deux groupes p -divisibles sur $\bar{\mathbb{F}}_p$ que l'on déforme pour définir les espaces de Lubin-Tate et de Drinfeld sont reliés modulo p , l'un est isogène à un produit d'un nombre fini de copies de l'autre, et l'on peut ainsi "transférer" des éléments du module de Tate sur une des tours vers l'autre.

Une autre interprétation de cet isomorphisme est donnée dans la section 10. On peut associer à un point de l'une des deux tours en niveau infini une matrice de périodes dans $M_n(B_{\text{cris}}^+)$. En

effet, pour la tour de Lubin-Tate le théorème de comparaison entre cohomologie cristalline et cohomologie étale p -adique pour les groupes p -divisibles fournit une matrice de périodes X_{cris} à coefficients dans B_{cris}^+ une fois que l'on a fixé une base du module de Tate (la rigidification en niveau infini) et une base du module de Dieudonné (la rigidification définissant la déformation)

$$(B_{cris}^+)^n \xrightarrow{\sim} V_p \otimes B_{cris}^+ \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^{\mathcal{LT}} \otimes B_{cris}^+ \xleftarrow{\sim} (B_{cris}^+)^n$$

Pour la tour de Drinfeld il y a un isomorphisme de $D \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}^+$ -modules en niveau infini

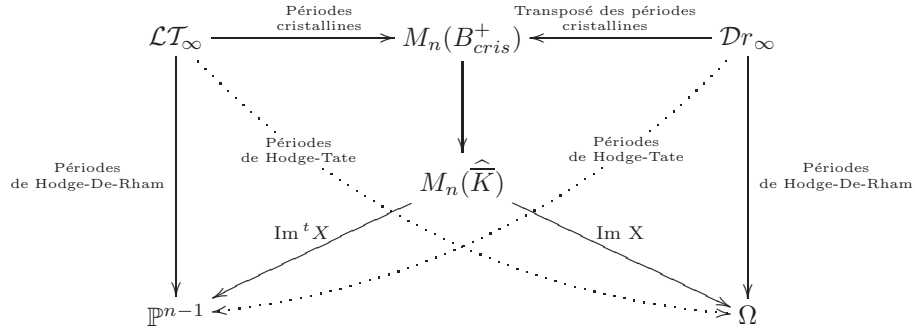
$$D \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}^+ \xrightarrow{\sim} V_p \otimes B_{cris}^+ \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^{\mathcal{Dr}} \otimes B_{cris}^+ \xleftarrow{\sim} D \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}^+$$

utilisant la D -équivalence de l'isomorphisme des périodes cristalline on en déduit une matrice $Y_{cris} \in M_n(B_{cris}^+)$ comme précédemment.

L'isomorphisme entre les deux tours consiste alors à prendre la transposée de ces matrices de périodes

$$Y_{cris} = {}^t X_{cris}$$

Si X_{cris} désigne la matrice de périodes sur $\mathcal{LT}_\infty$ sa réduction modulo l'idéal d'augmentation $B_{cris}^+ \rightarrow \mathcal{O}_{\widehat{K}}^+$, X , est telle que les colonnes de X engendrent les périodes de Hodge-De-Rham et ses lignes les périodes de Hodge-Tate!



(les deux flèches $M_n(\widehat{K}) \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ et $M_n(\widehat{K}) \rightarrow \Omega$ ne sont définies que sur le sous-ensemble des matrices de rang $n-1$). Dans le diagramme précédent l'image des deux flèches "Périodes cristallines" sont les matrices $X_{cris} \in M_n(B_{cris}^+)$ vérifiant une équation fonctionnelle "à la Fontaine" du type

$$X_{cris}^\varphi \Psi = p X_{cris}$$

où $\Psi \in \mathrm{GL}_n(W(\overline{\mathbb{F}}_p)[\frac{1}{p}])$ est la matrice d'un Frobenius sur un certain isocrystal, X_{cris}^φ est obtenue en appliquant le Frobenius cristallin aux termes de la matrice et la réduite via $B_{cris}^+ \rightarrow \widehat{K}$, $X \in M_n(\widehat{K})$ vérifie

$$\mathrm{rang}(X) = n - 1$$

Prérequis : La chapitre 3 fournit les rappels nécessaires concernant les espaces de Lubin-Tate et de Drinfeld. Le seul prérequis non rappelé est la théorie de la déformation de Grothendieck-Messing ([11]).

Avertissements : Dans tout l'article on supposera $p \neq 2$. Il est conseillé au lecteur de supposer en première lecture que $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p$.

Remerciement : L'auteur remercie Jean François Dat qui, à partir d'une version préliminaire de cet article, a donné un exposé sur le sujet au groupe de travail de l'IHES au printemps 2004 et ainsi suggéré des améliorations.

1. Décomposition de Hodge-Tate des groupes p -divisibles dans le cas infiniment ramifié

Soit $K|\mathbb{Q}_p$ un corps valué complet pour une valuation à valeurs dans $\mathbb{R}$ étendant celle de $\mathbb{Q}_p$.

Le théorème suivant se déduit du théorème A.5 de l'appendice, lui même démontré dans [8].

Théorème 1.1 ([8]). — *Soit G un groupe p -divisible sur $\mathcal{O}_K$. Il y a une décomposition de Hodge-Tate : une suite de $\text{Gal}(\overline{K}|K)$ -modules continus*

$$0 \longrightarrow \omega_G^* \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}}(1) \longrightarrow T_p(G) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{K}} \longrightarrow \omega_{G^D} \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0$$

dont la cohomologie comme suite de $\mathcal{O}_{\widehat{K}}$ -modules est annulée par $p^{\frac{1}{p-1}}$. Si $\mathcal{O}_{K_0} \subset \mathcal{O}_K$ est un anneau de Cohen il existe des morphismes $\mathcal{O}_{K_0}$ -linéaires Galois équivariantes des deux cotés de la suite exacte tels que composés avec les applications de droite et de gauche on obtienne la multiplication par un élément de valuation p -adique $\frac{1}{p-1}$.

Bien sûr la suite est définie sans recours à la théorie de Hodge p -adique, celle-ci ne sert que pour démontrer que la cohomologie de la suite est annulée par tout élément de valuation supérieure ou égale à $\frac{1}{p-1}$. Rappelons en effet que

$$\alpha_G : T_p(G) \longrightarrow \omega_{G^D} \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}}$$

est défini de la façon suivante : pour $x \in T_p(G) = \text{Hom}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, G/\mathcal{O}_{\widehat{K}})$ celui ci donne par dualité de Cartier un morphisme

$$x^D : G^D/\mathcal{O}_{\widehat{K}} \longrightarrow \mu_{p^\infty}$$

sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_{\widehat{K}})$, donc sur $\text{Spf}(\mathcal{O}_{\widehat{K}})$. Il induit un morphisme

$$(x^D)^* : \mathcal{O}_{\widehat{K}} \xrightarrow{dT} \omega_{G^D} \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}}$$

et alors

$$\alpha_G(x) = (x^D)^* \frac{dT}{T}$$

L'application $\omega_G^* \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}}(1) \longrightarrow T_p(G) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{K}}$ est définie par dualisation de α_{G^D} , c'est ${}^t\alpha_{G^D}(1)$ après identification de $T_p(G^D)$ avec $T_p(G)^*(1)$.

Remarque 1.2. — Lorsque $K|K_0$ est de degré fini il existe de telles quasi-sections $\mathcal{O}_K$ -linéaires telles que les composées donnent la multiplication par un élément de valuation $\frac{1}{p-1} + v_p(\mathcal{D}_{K/K_0})$ où $\mathcal{D}$ désigne la différentielle. cf. [9]. Cela peut s'obtenir avec les méthodes précédentes en calculant l'annulateur de t dans un gradué de $A_{\text{cris}} \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \mathcal{O}_K$. Dans notre cas infiniment ramifié cette suite exacte n'est en général pas scindée après inversion de p , il n'y a pas de décomposition de Hodge-Tate ; l'obstruction provient de la Connexion de Gauss Manin et du fait que $\Omega_{K/K_0}^1 \neq 0$ alors que ce module est nul dans l'article [9]. Un tel théorème ne peut s'obtenir par les méthodes de [9] qui sont purement “de Rham” : il faut utiliser les propriétés cristallines de certains objets associés aux groupe p -divisibles.

Remarque 1.3. — Si pour une extension K' de K contenue dans $\overline{K}$ l'action de $\text{Gal}(\overline{K}|K)$ sur $T_p(G)$ se factorise via $\text{Gal}(K'|K)$ il y a alors une décomposition de Hodge-Tate sur K' c'est à dire une suite

$$0 \longrightarrow \omega_G^* \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K'}}(1) \longrightarrow T_p(G) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{K'}} \longrightarrow \omega_{G^D} \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K'}} \longrightarrow 0$$

dont la cohomologie est annulée par tout élément de valuation $\geq \frac{1}{p-1}$. Cela résulte de ce que la suite peut être définie sans recours à la théorie de Fontaine comme ci-dessus et que $\mathcal{O}_{\widehat{K}}$ est fidèlement plat sur $\mathcal{O}_{\widehat{K'}}$.

Soit $\mathrm{Lie} E(G)$ l'algèbre de Lie de l'extension vectorielle universelle de G . Elle possède une filtration donnée par la partie vectorielle

$$0 \longrightarrow \omega_{G^D} \longrightarrow \mathrm{Lie} E(G) \longrightarrow \omega_G^* \longrightarrow 0$$

Alors, l'application de Hodge-Tate α_G se décrit également de la façon suivante

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, G) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Filtré}}(\mathrm{Lie} E(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p), \mathrm{Lie} E(G)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_K, \omega_{G^D}) \longrightarrow \omega_{G^D} \\ f &\longmapsto f(1) \end{aligned}$$

puisque $\mathrm{Lie} E(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = \mathrm{Fil} \mathrm{Lie} E(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = \mathcal{O}_K$.

1.1. Décomposition de Hodge-Tate d'un $\mathcal{O}$ -module π -divisible. — On reprend les notations de l'appendice B de [6]. On y note F une extension de degré fini de $\mathbb{Q}_p$ et $\mathcal{O} = \mathcal{O}_F$ son anneau des entiers.

Soit K comme dans les sections précédentes et supposons que $K|F$. Soit G un $\mathcal{O}$ -module π -divisible sur $\mathcal{O}_K$, c'est à dire un groupe p -divisible muni d'une action de $\mathcal{O}$ induisant l'action naturelle sur son algèbre de Lie. Soit la suite exacte de Hodge-Tate définie dans la section précédente

$$0 \longrightarrow \omega_G^* \otimes \widehat{K} \longrightarrow V_p(G) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \widehat{K} \longrightarrow \omega_{G^D} \otimes \widehat{K} \longrightarrow 0$$

Il s'agit d'une suite de $\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K$ -modules.

Rappelons ([6]) que l'on pose

$$\widetilde{\omega}_{G^D} = \omega_{G^D} / I \cdot \mathrm{Lie} E(G) \text{ où } I = \ker(\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K \twoheadrightarrow \mathcal{O}_K)$$

qui est la partie vectorielle de la $\mathcal{O}$ -extension vectorielle universelle de G . Rappelons en effet que si

$$0 \longrightarrow V(G) \longrightarrow E(G) \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

est l'extension vectorielle universelle de G alors la $\mathcal{O}$ -extension vectorielle universelle est le poussé en avant par l'application $V(G) \twoheadrightarrow V(G)/I \cdot \mathrm{Lie} E(G)$ de cette extension.

Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \omega_G^* \otimes \widehat{K} & \longrightarrow & V_p(G) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \widehat{K} & \longrightarrow & \omega_{G^D} \otimes \widehat{K} \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & V_p(G) \otimes_F \widehat{K} & \longrightarrow & \widetilde{\omega}_{G^D} \otimes \widehat{K} \end{array}$$

Proposition 1.4. — *La suite*

$$0 \longrightarrow \omega_G^* \otimes \widehat{K} \longrightarrow V_p(G) \otimes_F \widehat{K} \longrightarrow \widetilde{\omega}_{G^D} \otimes \widehat{K} \longrightarrow 0$$

extraite du diagramme précédent est exacte.

Démonstration. La surjectivité de l'application de droite est claire. De plus la composée des deux applications est nulle. D'après la remarque B.9 de l'appendice B de [6]

$$\dim \omega_G^* \otimes \widehat{K} + \dim \widetilde{\omega}_{G^D} \otimes \widehat{K} = \dim V_p(G) \otimes_F \widehat{K}$$

Il suffit donc de montrer que l'application de gauche est injective c'est à dire

$$\omega_G^* \otimes \widehat{K} \cap I \cdot V_p(G) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \widehat{K} = 0$$

Mais $I[\frac{1}{p}]$ est un produit de corps, il existe donc $e \in I[\frac{1}{p}]$ tel que $e \cdot I[\frac{1}{p}] = I[\frac{1}{p}]$. Mais $I[\frac{1}{p}] \cdot \omega_G^* \otimes \widehat{K} = 0$, d'où le résultat. $\square$

Remarque 1.5. — Comme dans la section précédente l'application $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F/\mathcal{O}_F, G) \longrightarrow \tilde{\omega}_{G^D}$ se définit de la façon suivante en termes de la $\mathcal{O}$ -extension vectorielle universelle $E_{\mathcal{O}}(G)$: si $x : F/\mathcal{O}_F \longrightarrow G_{\mathcal{O}_K}$ alors il induit un morphisme $x_* : \mathcal{O}_K \longrightarrow \mathrm{Lie}(E_{\mathcal{O}}(G))$ puisque $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$ le faisceau structural du site cristallin s'identifie au cristal algèbre de Lie de la $\mathcal{O}$ -extension vectorielle universelle de $F/\mathcal{O}_F$.

2. Propriétés particulières de l'application de Hodge-Tate pour les groupes p -divisibles formels de dimension un

On reprend les notations de la section précédente.

2.1. Les périodes de Hodge-Tate vivent dans l'espace de Drinfeld. — Nous utiliserons la proposition suivante afin de définir l'isomorphisme au niveau des points.

Proposition 2.1. — *Soit G un groupe p -divisible sur $\mathcal{O}_K$. Considérons la suite de Hodge-Tate de G^D*

$$0 \longrightarrow \omega_{G^D}^* \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}}(1) \longrightarrow T_p(G)^*(1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\widehat{K}} \longrightarrow \omega_G \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0$$

et plus particulièrement l'application $\alpha_{G^D} : T_p(G)^(1) \longrightarrow \omega_G \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}}$. Si G est un groupe p -divisible formel c'est à dire si sa fibre spéciale G_k ne possède pas de partie étale alors l'application α_{G^D} est injective.*

Démonstration. Si $x : \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \longrightarrow G_{\mathcal{O}_K}^D$ et $x^D : G/\mathcal{O}_K \longrightarrow \mu_{p^\infty}$ alors, $x = 0 \Leftrightarrow x^D = 0$. De plus, G étant formel $x^D = 0$ ssi l'application tangente associée est nulle, d'où le résultat. $\square$

Corollaire 2.2. — *Soit G un $\mathcal{O}$ -module π -divisible formel de dimension 1 sur $\mathcal{O}_K$. Notons $\Omega \subset \mathbb{P}(V_p(G)^*(1))$ l'espace de Drinfeld au sens de Berkovich obtenu en enlevant les hyperplans F -rationnels. Alors, avec les notations précédentes*

$$(V_p(G)^*(1) \otimes_F \widehat{K} \twoheadrightarrow \omega_G \otimes \widehat{K}) \in \Omega(\widehat{K})$$

2.2. Raffinement, d'après Faltings. —

Remarque 2.3. — Soit G un groupe p -divisible sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$ et

$$0 \longrightarrow \omega_{G^D} \longrightarrow E(G) \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

son extension vectorielle universelle sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$. Alors, si

$$\begin{aligned} E(G)(\mathcal{O}_{\widehat{K}}) &= \varprojlim_n E(G)(\mathcal{O}_{\widehat{K}}/p^n \mathcal{O}_{\widehat{K}}) \\ G(\mathcal{O}_{\widehat{K}}) &= \varprojlim_n G(\mathcal{O}_{\widehat{K}}/p^n \mathcal{O}_{\widehat{K}}) \end{aligned}$$

il y a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \omega_{G^D} \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}} \longrightarrow E(G)(\mathcal{O}_{\widehat{K}}) \longrightarrow G(\mathcal{O}_{\widehat{K}}) \longrightarrow 0$$

Cela résulte aisément de la lissité des morphismes $E(G) \longrightarrow G$ réduits mod $\mathcal{O}_{\widehat{K}, \geq \lambda}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}_{>0}$ et de la surjectivité sur $\widehat{k}$. Nous n'auront besoin de cela que pour $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ pour lequel les points à valeurs dans une $\mathbb{Z}_p$ -algèbre de $E(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ sont $(R \oplus \mathbb{Q}_p)/\mathbb{Z}_p$, et cela est donc évident.

Lemme 2.4. — *Soit G un groupe p -divisible sur $\mathcal{O}_K$. Notons*

$$\alpha_G : T_p(G) \longrightarrow \omega_{G^D} \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}}$$

l'application de Hodge-Tate. Soit $x = (x_n)_{n \geq 1} \in T_p(G)$ où $x_n \in G[p^n](\mathcal{O}_{\widehat{K}})$. Soit k un entier positif. Alors, $\alpha_G(x) \in p^k \omega_{G^D} \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}}$ ssi x_k se relève en un point de p^k -torsion dans l'extension vectorielle universelle de G i.e. un point de $E(G)[p^n](\mathcal{O}_{\widehat{K}})$.

Démonstration. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\widehat{K}} & \longrightarrow & (\mathcal{O}_{\widehat{K}} \oplus \mathbb{Q}_p)/\mathbb{Z}_p & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \times \alpha_G(x) & & \downarrow E(x) & & \downarrow x \\ 0 & \longrightarrow & \omega_{G^D} \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}} & \longrightarrow & E(G)(\mathcal{O}_{\widehat{K}}) & \longrightarrow & G(\mathcal{O}_{\widehat{K}}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

L'élément $x_k \in G[p^k]$ se relève en un élément $\widetilde{x}_k = E(x)([(0, p^{-k})]) \in E(G)(\mathcal{O}_{\widehat{K}})$ et de plus

$$p^k \widetilde{x}_k = \alpha_G(x)$$

Les relèvements de x_k à $E(G)(\mathcal{O}_{\widehat{K}})$ formant un $\omega_{G^D} \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}}$ -torseur le résultat s'en déduit. $\square$

La proposition qui suit s'applique en particulier aux groupes p -divisibles formels de dimension 1 et est une légère amélioration d'un résultat de Faltings.

Proposition 2.5 (Faltings). — *Soit G un groupe p -divisible formel sur $\mathcal{O}_K$. Considérons la suite de Hodge-Tate de G^D*

$$0 \longrightarrow \omega_{G^D}^* \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}}(1) \longrightarrow T_p(G)^*(1) \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}} \xrightarrow{\alpha_{G^D} \otimes Id} \omega_G \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}} \longrightarrow 0$$

Supposons qu'il existe un groupe p -divisible isocline H sur k de hauteur h tel que $\mathbb{Z}_{p^h} \hookrightarrow \text{End}(H_{\bar{k}})$ et une isogénie $\rho : H \otimes_k \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K \rightarrow G \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$ telle que $p^n \rho^{-1}$ soit une isogénie. Alors, si on note pour M un "réseau" et $m \in M$ $\delta(m) = \sup\{k \mid p^{-k}m \in M\}$ on a

$$\forall x \in T_p(G)^*(1) \quad \delta(x) \leq \delta(\alpha_{G^D}(x)) \leq \delta(x) + n + 1$$

Démonstration. Tout repose sur le lemme précédent. On peut supposer k algébriquement clos. Soit H_0 un relèvement C.M. par $\mathbb{Z}_{p^h}$ de H à $W(k)$.

Soit $x \in T_p(G^D) \setminus pT_p(G^D)$. Supposons que $\alpha_{G^D}(x) \in p^{n+1}\omega_G \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}}$. Le lemme précédent implique que $x_{n+1} \in G^D[p^{n+1}](\mathcal{O}_{\widehat{K}})$ se relève en un élément

$$\widetilde{x_{n+1}} \in E(G^D)[p^{n+1}](\mathcal{O}_{\widehat{K}})$$

Il résulte de la nature cristalline de l'extension vectorielle universelle que ρ^D et $(p^n \rho^{-1})^D = p^n(\rho^D)^{-1}$ se relèvent en des morphismes

$$E(H_0^D)_{/\mathcal{O}_K} \begin{array}{c} \xrightarrow{E(p^n(\rho^D)^{-1})} \\ \xleftarrow{E(\rho^D)} \end{array} E(G^D)$$

tels que $E(\rho^D)E(p^n(\rho^D)^{-1}) = p^n$ et $E(p^n(\rho^D)^{-1})E(\rho^D) = p^n$. Considérons l'élément $y = E(\rho^D)(\widetilde{x_{n+1}}) \in E(H_0^D)[p^{n+1}](\mathcal{O}_{\widehat{K}})$. Alors,

$$y \neq 0$$

car sinon on aurait

$$p^n \widetilde{x_{n+1}} = E(p^n(\rho^D)^{-1})(y) = 0$$

mais via $E(G^D) \rightarrow G^D$, $p^n \widetilde{x_{n+1}} \mapsto x_1 \in G[p]^D$ ce qui est en contradiction avec $x_1 \neq 1$ puisque $x \notin pT_p(G^D)$.

Donc, $\exists z \in E(H_0^D)[p](\mathcal{O}_{\widehat{K}})$, $z \neq 0$. Soit $w \in H_0[p]^D(\mathcal{O}_{\widehat{K}})$ son image. On a $w \neq 0$ car

$$\ker(E(H_0^D)[p](\mathcal{O}_{\widehat{K}}) \rightarrow H_0[p]^D(\mathcal{O}_{\widehat{K}})) = (\omega_{H_0} \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}})[p] = 0$$

Soit $\iota : \mathbb{Z}_{p^h} \rightarrow \text{End}(H_0^D)$ l'action C.M. obtenue par dualisation de Cartier de l'action C.M. sur H_0 . Le module de Tate $T_p(H_0^D)$ est $\mathbb{Z}_{p^h}$ -libre de rang 1. Donc, $\iota(\mathbb{Z}_{p^h}).w = H_0[p]^D(\mathcal{O}_{\widehat{K}})$ qui est dans l'image de $E(H_0^D)[p] \rightarrow H_0^D[p]$ puisque le morphisme $E(H_0^D) \rightarrow H_0^D$ est $\mathbb{Z}_{p^h}$ -équivariant. Par application du lemme 2.4 on en déduit que

$$\alpha_{H_0^D}(T_p(H_0^D)) \subset p\omega_{H_0} \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}}$$

ce qui est en contradiction avec le fait que le conoyau du morphisme de Hodge-Tate pour H_0^D est annulé par un élément de valuation $\frac{1}{p-1}$. $\square$

Interprétation : Dans les cas des groupes p -divisibles formels de dimension 1 la proposition précédent dit plus précisément que si le point (G, ρ) est “à distance $\leq n$ ” du centre de l’espace de Lubin-Tate alors ses périodes de Hodge-Tate dans l’espace de Drinfeld sont “dans une boule de rayon $n + 1$ ” dans l’immeuble associé à l’espace de Drinfeld.

2.3. Formule exacte. — Dans l’article [5] nous donnons une formule exacte plus précise que la proposition précédente dans le cas des groupes formels de dimension 1 pour le point associé dans l’espace de Drinfeld (cf. corollaire 2.2). Soit $|\mathcal{I}|$ la réalisation géométrique de l’immeuble de Bruhat-Tits du groupe PGL_n . Il y a une application $s : \Omega(\widehat{K}) \longrightarrow |\mathcal{I}|$. Cette formule exprime l’image par s du point de Hodge-Tate en fonction de la filtration de ramification sur le module de Tate du groupe p -divisible.

3. Notations concernant les espaces de Lubin-Tate et de Drinfeld

Nous reprenons les notations du premier chapitre de [6]. Rappelons que l’on note $\mathcal{O} = \mathcal{O}_F$. On note $L = W_{\mathcal{O}}(\overline{\mathbb{F}}_q)_{\mathbb{Q}}$ et σ son Frobenius.

Soit $\mathbb{H}$ un $\mathcal{O}$ -module π -divisible formel de dimension 1 et hauteur n sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ qui est défini sur $\mathbb{F}_q$. On a donc $\mathbb{H} = \mathbb{H}^{(q)}$. On note alors $\Pi = \mathrm{Frob}_q \in \mathrm{End}(\mathbb{H})$. Alors,

$$\mathcal{O}_D = \mathcal{O}_{F_n}[\Pi] \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(\mathbb{H})$$

où l’on pose

$$\mathcal{O}_{F_n} = W_{\mathcal{O}}(\mathbb{F}_{q^n})$$

Posons $\mathbb{G} = \mathbb{H}^n$ qui est un $\mathcal{O}$ -module π -divisible formel de dimension n et $\mathcal{O}$ -hauteur n^2 . Munissons le d’une structure de $\mathcal{O}_D$ -module formel spécial au sens de Drinfeld en posant

$$\iota : \mathcal{O}_D \longrightarrow \mathrm{End}(\mathbb{G}) = M_n(\mathcal{O}_D)$$

tel que

$$\forall x \in \mathcal{O}_{F_n} \quad \iota(x) = \mathrm{diag}(x, x^\sigma, \dots, x^{\sigma^{n-1}})$$

et

$$\iota(\Pi) = \mathrm{diag}(\Pi, \dots, \Pi)$$

et donc

$$\forall x \in \mathcal{O}_D \quad \iota(x) = \mathrm{diag}(x, \Pi x \Pi^{-1}, \dots, \Pi^{n-1} x \Pi^{-(n-1)})$$

Tous les indices de $\mathbb{G}$ sont critiques et comme élément de $\mathrm{PGL}_n(F) \backslash \widehat{\Omega}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ cela définit un point dans l’intersection de n composantes irréductibles de la fibre spéciale. Il y a de plus une isogénie de $\mathcal{O}$ -modules π -divisibles munis d’une action de $\mathcal{O}_D$

$$(1) \quad \mathrm{Id} \oplus \Pi \oplus \dots \oplus \Pi^{n-1} : \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{G}$$

de degré $q^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ où $\mathcal{O}_D$ agit diagonalement sur $\mathbb{H}^n$ (qui n’est pas spécial). Il y a donc un isomorphisme d’isocristaux munis d’une action de D

$$\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}^n$$

où les modules de Dieudonné sont les modules de Dieudonné covariants relatifs à $\mathcal{O}$ (il s’agit de l’évaluation du cristal algèbre de Lie de la $\mathcal{O}$ -extension vectorielle universelle sur $\mathcal{O}_L \twoheadrightarrow k$, cf. l’appendice B de [6]).

Convention : Désormais on notera $\mathbb{D}$ le module de Dieudonné covariant relatif à $\mathcal{O}$ d’un $\mathcal{O}$ -module π -divisible noté $\mathbb{D}_{\mathcal{O}}$ dans l’appendice B de [6] et par cristal de Messing on entendra le cristal de Messing $\mathcal{O}$ -extension vectorielle universelle défini dans l’appendice B de [6].

3.1. Modules de Dieudonné. — Nous n'utiliserons pas cette sous-section plus tard.

Il y a une identification

$$\mathbb{D}(\mathbb{H}) = \mathcal{O}_D \otimes_{\mathcal{O}_{F_n}} \mathcal{O}_L$$

muni de $\iota : \mathcal{O}_D \longrightarrow \text{End}(\mathbb{H})$ tels que si V désigne le Verschiebung

$$\begin{aligned} \forall d \otimes \lambda \in \mathbb{D}(\mathbb{H}) \quad V(d \otimes \lambda) &= d\Pi \otimes \lambda^{\sigma^{-1}} \\ \forall d' \in \mathcal{O}_D \quad \iota(d')(d \otimes \lambda) &= d'd \otimes \lambda \end{aligned}$$

Alors,

$$\mathbb{D}(\mathbb{G}) = \mathcal{O}_D \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathcal{O}_L$$

muni de son action de ι de $\mathcal{O}_D$ et

$$\begin{aligned} \forall d \otimes \lambda \in \mathbb{D}(\mathbb{G}) \quad V(d \otimes \lambda) &= d\Pi \otimes \lambda^{\sigma^{-1}} \\ \forall d' \in \mathcal{O}_D \quad \iota(d')(d \otimes \lambda) &= d'd \otimes \lambda \end{aligned}$$

Dès lors on a un isomorphisme de $\mathcal{O}_L$ -modules

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_D \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathcal{O}_L &\xrightarrow{\sim} \prod_{k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathcal{O}_D \otimes_{\mathcal{O}_{F_n}, \sigma^k} \mathcal{O}_L \\ d \otimes \lambda &\longmapsto (d \otimes \lambda)_{k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

Et dans ces coordonnées l'identification $\mathbb{D}(\mathbb{H})^n = \mathbb{D}(\mathbb{G})$ est donnée par

$$\begin{aligned} (\mathcal{O}_D \otimes_{\mathcal{O}_{F_n}} \mathcal{O}_L)^n &\longrightarrow \prod_{k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathcal{O}_D \otimes_{\mathcal{O}_{F_n}, \sigma^k} \mathcal{O}_L \\ (x_k \otimes \lambda_k)_{0 \leq k \leq n-1} &\longmapsto (\Pi^{-k} x_k \Pi^k \otimes \lambda_k)_{k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

et l'isogénie (1) par

$$\begin{aligned} (\mathcal{O}_D \otimes_{\mathcal{O}_{F_n}} \mathcal{O}_L)^n &\longrightarrow \prod_{k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathcal{O}_D \otimes_{\mathcal{O}_{F_n}, \sigma^k} \mathcal{O}_L \\ (x_k \otimes \lambda_k)_k &\longmapsto (x_k \Pi^k \otimes \lambda_k)_k \end{aligned}$$

3.2. Notations concernant les espaces de Lubin-Tate. — Rappelons que l'on note $\check{F} = \widehat{F^{nr}}$ le complété de l'extension maximale non-ramifiée de F dans une clôture algébrique de celui-ci. On fixe un isomorphisme entre $\overline{\mathbb{F}}_q$ et le corps résiduel de $\check{F}$. Celui-ci induit un isomorphisme $L \simeq \check{F}$. Néanmoins on ne confondra pas toujours ces deux corps, l'un, L , étant un corps “abstrait”, l'autre, $\check{F}$, un corps plongé (un corps reflex).

Définition 3.1. — Soit K un corps valué complet (pour une valuation de rang 1 c'est à dire à valeurs dans $\mathbb{R}$) extension de $\check{F}$. On appelle point à valeurs dans K de la tour de Lubin-Tate un triplet (H, ρ, η) à isomorphisme près où

- H est un $\mathcal{O}$ -module π -divisible formel de dimension 1 sur $\mathcal{O}_K$
- ρ est une quasi-isogénie $\mathbb{H} \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_q} \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K \rightarrow H \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$
- $\eta : \mathcal{O}^n \xrightarrow{\sim} T_p(H)$ est un isomorphisme de $\text{Gal}(\overline{K}|K)$ -modules, le membre de gauche étant muni de l'action triviale de Galois.

On note $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{LT}}(K)$ cet ensemble qui est muni d'une action de $D^{\times} \times \text{GL}_n(\mathcal{O}_F)$, où $D^{\times}$ agit à gauche par $d \cdot \rho = \rho \circ d^{-1}$ et $\text{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ à droite par $\eta \cdot g = \eta \circ g$, et d'une donnée de descente α vers F .

On renvoie à la section 1.4 de [6] pour la définition de la donnée de descente α . On verra bientôt que cet ensemble est en fait muni d'une action de $\text{GL}_n(F)$.

Remarque 3.2. — Dans la définition précédente, la définition de η peut être remplacée par : η est un isomorphisme

$$\eta : \mathcal{O}^n \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{O}}(F/\mathcal{O}, H)$$

Définition 3.3. — On note $\mathcal{M}^{\mathcal{L}^T}(K)/\sim$ l'ensemble des couples (H, ρ) comme précédemment à isogénie déformant un élément de $F^\times$ près i.e. $(H, \rho) \sim (H', \rho') \Leftrightarrow \exists f : H \rightarrow H'$ une isogénie et un $x \in F^\times$ tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} H \bmod \pi & \xrightarrow{f \bmod \pi} & H' \bmod \pi \\ \rho \uparrow & & \rho' \uparrow \\ \mathbb{H} \otimes \mathcal{O}_K / \pi \mathcal{O}_K & \xrightarrow{x} & \mathbb{H} \otimes \mathcal{O}_K / \pi \mathcal{O}_K \end{array}$$

Cet ensemble est muni d'une action de $D^\times$.

Une définition équivalente consiste à remplacer à isogénie déformant un élément de $F^\times$ près par à isogénie déformant une puissance de π près.

Une troisième définition équivalente consiste à dire que (H, ρ) est équivalent à (H', ρ') ssi il existe une quasi-isogénie $f : H \rightarrow H'$ sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_K)$ telle que $f\rho = \rho'$ i.e. ssi la quasi-isogénie $\rho'\rho^{-1}$ sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)$ se relève en une quasi-isogénie sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_K)$.

3.3. Notations concernant les espaces de Drinfeld. —

Définition 3.4. — Soit K un corps valué complet extension de $\check{F}$. On appelle point à valeur dans K de la tour de Drinfeld un triplet (G, ρ, η) à isomorphisme près où

- G est un $\mathcal{O}_D$ -module π -divisible formel spécial sur $\text{Spf}(\mathcal{O}_K)$
- ρ est une quasi-isogénie $\mathcal{O}_D$ -équivariante $\mathbb{G} \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K \rightarrow G \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$
- $\eta : \mathcal{O}_D \xrightarrow{\sim} T_p(G)$ est un isomorphisme de $\mathcal{O}_D$ -modules galoisiens.

On note $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{D}^r}(K)$ cet ensemble muni de son action de $\text{GL}_n(F) \times D^\times$ où $\text{GL}_n(F) = \text{End}_{D-\text{éq.}}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}}^\times$ agit à gauche via $g.\rho = \rho \circ g^{-1}$ et $\mathcal{O}_D^\times$ agit à droite via $\eta.d = \eta \circ d^{-1}$ où $d^{-1} : \mathcal{O}_D \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_D$ est $d' \mapsto d'd^{-1}$. L'action de $\Pi \in D^\times$ est définie par $\Pi.(G, \rho, \eta) = (G/G[\Pi], \varphi \circ \rho, \eta.\Pi)$ où $\varphi : G \rightarrow G/G[\Pi]$ et

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_D & \xrightarrow[\sim]{\eta} & T_p(G) \\ \downarrow .\Pi & & \downarrow \varphi_* \\ \mathcal{O}_D & \xrightarrow[\sim]{\eta.\Pi} & T_p(G/G[\Pi]) \end{array}$$

Remarque 3.5. — On renvoi à la section 1 de [7] pour la définition générale de l'action d'un élément de $D^\times$. On notera que $\{(x, x) \mid x \in F^\times\} \subset \text{GL}_n(F) \times D^\times$ agit trivialement.

Remarque 3.6. — Dans la définition précédente, la définition de η peut être remplacée par : on se donne un élément

$$\eta(1) \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(F/\mathcal{O}, G) \setminus \Pi.\text{Hom}_{\mathcal{O}}(F/\mathcal{O}, G)$$

Remarque 3.7. — Le groupe associé à l'espace de Rapoport-Zink précédent et noté G dans [12] est dans notre cas $(D^{\text{opp}})^\times$. Dans la définition précédente on l'a identifié à $D^\times$ via $d \mapsto d^{-1}$ ce qui explique que l'on pose $d.\eta = \eta \circ d^{-1}$ alors que la définition usuelle des correspondances de Hecke est pour $g \in G(\mathbb{Q}_p)$, $\eta \mapsto \eta \circ g$.

Remarque 3.8. — L'identification $\text{GL}_n(F) = \text{End}_{D-\text{éq.}}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}}^\times$ se déduit, avec les notations des sections qui suivent, de l'identification

$$\text{End}_{D-\text{éq.}}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} = \text{End}_{D-\text{éq.}}(\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}}, V) = \text{End}_{\mathcal{O}}\left(\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0}^{V^{-1}\Pi}\right)$$

et d'un choix d'une base de $\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0}^{V^{-1}\Pi}$ (cf. les section suivantes).

Définition 3.9. — Comme dans la définition 3.3 on note $\mathcal{M}^{\mathcal{D}^r}(K)/\sim$ l'ensemble des couples (G, ρ) à isogénie déformant un élément de $F^\times$ près. Cet ensemble est muni d'une action de $\text{GL}_n(F)$.

3.4. Quelques rappels sur Drinfeld classique. — Notons

$$N^{\mathcal{D}r} = \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} = D \otimes_F L$$

un isocrystal relativement à l'extension $L|F$. On a

$$N^{\mathcal{D}r} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} N_i^{\mathcal{D}r} \quad \text{où } N_i^{\mathcal{D}r} = \{n \in N \mid \forall x \in F_n \iota(x).n = x^{\sigma^{-i}} n\}$$

où relativement à cette graduation $\deg V = \deg \Pi = +1$. On a de plus

$$\begin{aligned} D \otimes_F L &= \bigoplus_{a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} D \otimes_{F_n, \sigma^{-a}} L \\ &= \bigoplus_{a, b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} L \cdot \underbrace{\iota(\Pi^b)(e_a)}_{e_{a,b}} \end{aligned}$$

où $e_a = 1 \otimes 1 \in D \otimes_{F_n, \sigma^{-1}} L$ et $e_{a,b} = \Pi^b \otimes 1$. De plus, avec ces coordonnées

$$V(e_{a,b}) = \iota(\Pi)(e_{a,b}) = \pi^{\delta_{b,n-1}} e_{a,b+1}$$

et

$$N_i^{\mathcal{D}r} = \bigoplus_{a+b=i} L \cdot e_{a,b}$$

L'opérateur

$$V^{-1}\Pi : N_0^{\mathcal{D}r} \longrightarrow N_0^{\mathcal{D}r}$$

est de pente 0 et fait de $(N_0^{\mathcal{D}r}, V^{-1}\Pi)$ un isocrystal unité :

$$\begin{aligned} (N_0^{\mathcal{D}r}, V^{-1}\Pi) &\simeq ((N_0^{\mathcal{D}r})^{V^{-1}\Pi} \otimes_F L, Id \otimes \sigma) \\ (N^{\mathcal{D}r})_0^{V^{-1}\Pi} &= \bigoplus_{a+b=0} F \cdot e_{a,b} \simeq F^n \end{aligned}$$

Rappelons maintenant qu'il y a des bijections

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} \text{Sous isocristaux } D\text{-stables de} \\ (N^{\mathcal{D}r}, \varphi) \end{array} \right\} &\xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Sous } F\text{-ev. de} \\ (N^{\mathcal{D}r})^{V^{-1}\Pi} \end{array} \right\} \\ N &\longmapsto N_0^{V^{-1}\Pi} \end{aligned}$$

où φ désigne le Frobenius, et pour $K|L$ une extension valuée comme dans le premier chapitre

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} \text{Filtrations } D\text{-stables de codimension } n \\ \text{dans } N^{\mathcal{D}r} \otimes_L K \end{array} \right\} &\xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Filtrations de codimension 1 dans} \\ (N_0^{\mathcal{D}r})^{V^{-1}\Pi} \otimes_F K \end{array} \right\} \\ \text{Fil} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \text{Fil}_i &\longmapsto \text{Fil}_0 \end{aligned}$$

Alors, $(N^{\mathcal{D}r}, \varphi, \text{Fil})$ est faiblement admissible ssi pour tout sous-isocrystal $N \subset N^{\mathcal{D}r}$ on a

$$t_H(N, N \otimes_L K \cap \text{Fil}) \leq t_N(N, \varphi)$$

où t_H , resp. t_N , désigne le point terminal du polygone de Hodge, resp. Newton. L'existence de la filtration de Harder-Narashiman et sa canonicité sur $(N^{\mathcal{D}r}, \varphi, \text{Fil})$ impliquent que celle-ci est D -stable si Fil l'est et qu'il suffit donc dans ce cas là de tester la condition d'admissibilité faible sur les sous-isocristaux D -stables ([12] chapitre 1). Restreignons-nous aux filtrations Fil D -stables de codimension n . Via les deux bijections ci dessus on trouve aisément :

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Fil} \subset N^{\mathcal{D}r} \otimes_L K \text{ telles que } (N^{\mathcal{D}r}, \varphi, \text{Fil}) \\ \text{est faiblement admissible} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Fil}' \subset (N_0^{\mathcal{D}r})^{V^{-1}\Pi} \otimes K \text{ telles que} \\ \forall N' \subset (N_0^{\mathcal{D}r})^{V^{-1}\Pi} \text{ de dim.1 } \text{Fil}' \cap (N' \otimes K) = (0) \end{array} \right\}$$

la condition portant donc sur les sous-isocristaux D -stables de dimension n dans $(N^{\mathcal{D}r}, \varphi)$ qui sont paramétrés par $\check{\mathbb{P}}((N_0^{\mathcal{D}r})^{V^{-1}\Pi})(F)$ où pour E un F -e.v. on note $\mathbb{P}(E)$ l'espace des filtrations de codimension 1 de E et $\check{\mathbb{P}}(E) = \mathbb{P}(\check{E})$ l'espace des droites de E . La relation d'incidence entre $\mathbb{P}(E)$ et $\check{\mathbb{P}}(E)$ est donnée par : pour $H \in \check{\mathbb{P}}(E)$, H définit une droite D dans E et donc un hyperplan

encore noté H dans $\mathbb{P}(E)$ formé des filtrations contenant D . Ainsi $\check{\mathbb{P}}(E)$ paramètre les hyperplans dans $\mathbb{P}(E)$. On a donc

$$\left\{ \begin{array}{l} (N^{\mathcal{D}r}, \varphi, \text{Fil}) \text{ faiblement admissible} \\ \text{Fil } D\text{-stable} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(N_0^{\mathcal{D}r})(K) \setminus \bigcup_{H \in \check{\mathbb{P}}((N_0^{\mathcal{D}r})^{V^{-1}\Pi})(F)} H(K) = \Omega(K)$$

où Ω désigne l'espace de Drinfeld vu comme espace de Berkovich.

Dit d'une autre façon, $\Omega(K)$ est l'ensemble des filtrations Fil de codimension 1 dans $N_0^{\mathcal{D}r} \otimes_L K$ telles que l'application suivante soit injective

$$(N_0^{\mathcal{D}r})^{V^{-1}\Pi} \hookrightarrow N_0^{\mathcal{D}r} \otimes_L K / \text{Fil}$$

4. Description de $\mathcal{M}^{\mathcal{L}T}(K)/\sim$ en termes de modules filtrés

Il s'agit ici d'étendre la théorie de Fontaine des modules faiblement admissibles pour les groupes de dimension 1 à des corps K non forcément de valuation discrète.

Soit un couple (H, ρ) où H est un $\mathcal{O}$ -module π -divisible sur $\text{Spf}(\mathcal{O}_K)$ et ρ une rigidification avec $\mathbb{H}$ modulo p . L'algèbre de Lie de la $\mathcal{O}$ -extension vectorielle universelle de H , M , est munie d'une filtration $\text{Fil} \subset M$ telle que $M/\text{Fil} \simeq \omega_H^*$. La nature cristalline de la $\mathcal{O}$ -extension vectorielle universelle induit un isomorphisme

$$\rho_* : \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes_L K \xrightarrow{\sim} M\left[\frac{1}{p}\right]$$

et $\text{Fil}_H = \rho_*^{-1}(\text{Fil}[\frac{1}{p}]) \subset \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes K$ est une filtration de codimension 1.

Proposition 4.1. — *L'application précédente $(H, \rho_H) \mapsto \text{Fil}_H$ induit une bijection $D^\times$ -équivariante*

$$\mathcal{M}^{\mathcal{L}T}(K)/\sim \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}})(K)$$

Démonstration. C'est une conséquence de l'existence du domaine fondamental de Gross Hopkins et du fait que la restriction du morphisme des périodes à ce domaine est un isomorphisme d'espaces rigides (cf. [10] et [6]).

Plus précisément, étant donné une filtration $\text{Fil} \in \mathbb{P}(K)$ il existe un entier i tel que $\Pi^i \cdot \text{Fil}$ soit dans l'image du domaine fondamental de Gross-Hopkins. Il existe donc un couple $(H, \rho) \in \mathcal{M}^{\mathcal{L}T}(K)$ induisant $\Pi^i \cdot \text{Fil}$. Alors, $\Pi^{-i} \cdot (H, \rho)$ induit Fil , d'où la surjectivité de l'application.

Pour l'injectivité, si (H, ρ) et (H', ρ') induisent la même filtration alors la quasi-isogénie

$$\rho' \circ \rho^{-1} : H \otimes \mathcal{O}_K / p\mathcal{O}_K \longrightarrow H' \otimes \mathcal{O}_K / p\mathcal{O}_K$$

est telle que l'application induite

$$(\rho' \circ \rho^{-1})_* : \text{Lie}(E(H)) \longrightarrow \text{Lie}(E(H'))$$

vérifie

$$\exists a \in \mathbb{N} \ (\rho' \circ \rho^{-1})_*(\omega_{H^D}) \subset p^{-a} \omega_{H'^D}$$

et donc d'après la théorie de Messing l'isogénie

$$p^a \rho' \circ \rho^{-1} : (H, \rho) \longrightarrow (H', \rho') \text{ mod } p$$

sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)$ se relève en une isogénie : $(H, \rho) \sim (H', \rho')$. □

Remarque 4.2. — Il se peut qu'en général pour des espaces de périodes plus généraux l'application des périodes ne soit pas surjectivité sur les K -points! i.e. qu'un module faiblement admissible ne provienne pas forcément d'un groupe p -divisible sur K quelconque. Par contre le calcul des fibres de l'application des périodes (la partie injectivité dans la démonstration précédente) reste valable en général.

5. Description de $\mathcal{M}^{\mathcal{D}^r}(K)/\sim$ en termes de module filtré

Soit (G, ρ) où G est un $\mathcal{O}_D$ -module formel spécial sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$ et ρ une rigidification avec $\mathbb{G}$. Soit M l'extension vectorielle universelle de G qui est filtrée via $\mathrm{Fil} \subset M$ où $M/\mathrm{Fil} \simeq \omega_G^*$. Il y a une décomposition sous l'action de F_n

$$M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{N}} M_i \quad \text{et} \quad \mathrm{Fil} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathrm{Fil}_i$$

d'où un élément $\mathrm{Fil}_{G,0} = \rho_*^{-1}(\mathrm{Fil}_0) \subset \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0} \otimes K$, $\mathrm{Fil}_{G,0} \in \Omega(K)$.

Proposition 5.1. — *L'application $(G, \rho) \mapsto \mathrm{Fil}_{G,0}$ induit une bijection $\mathrm{GL}_n(F)$ -équivariante entre $\mathcal{M}^{\mathcal{D}^r}(K)/\sim$ et $\Omega(K)$ avec*

$$\Omega(K) = \mathbb{P}(\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0})(K) \setminus \bigcup_{H \in \mathbb{P}((\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0})^{V=\Pi})(F)} H(K)$$

Démonstration. Cela résulte de ce que l'application des périodes est un isomorphisme rigide pour les espaces de Drinfeld, de l'égalité $\Omega(K) = \widehat{\Omega}(\mathcal{O}_K)$ où $\widehat{\Omega}$ est le schéma formel de Drinfeld, du théorème de Drinfeld et du fait que les deux applications de périodes, celle définie par Drinfeld et celle définie dans [12], coïncident. $\square$

6. Prolongement des isogénies

6.1. Prolongement. — Soit H un groupe p -divisible sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de couples (H', f) où H' est un groupe p -divisible sur $\mathcal{O}_K$ et $f : H' \rightarrow H$ une quasi-isogénie sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$. Pour un tel couple $T_p(f) : T_p(H') \hookrightarrow V_p(H)$.

Lemme 6.1. — *L'application*

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &\rightarrow \{ \text{réseaux } \mathrm{Gal}(\overline{K}|K) - \text{stables dans } V_p(H) \} \\ (H', f) &\mapsto \mathrm{Im} T_p(f) \end{aligned}$$

est une bijection.

Démonstration. C'est une conséquence de ce que pour $\mathcal{G}$ un groupe fini localement libre sur $\mathcal{O}_K$ et $I \subset \mathcal{G}_\eta$ un sous-groupe fini localement libre il existe un unique prolongement $\mathcal{I} \hookrightarrow \mathcal{G}$ de l'inclusion $I \subset \mathcal{G}_\eta$ où $\mathcal{I}$ est un sous-groupe fini localement libre. Le groupe $\mathcal{I}$ est obtenu par adhérence schématique (cf. le chapitre 2 de [13] pour le cas de valuation discrète et le lemme qui suit en général). $\square$

Lemme 6.2. — *Soit $E \subset K^n$ un sous- K -espace vectoriel. Alors, $E \cap \mathcal{O}_K^n$ est un $\mathcal{O}_K$ -module libre de rang fini facteur direct.*

6.2. Définition de l'action de $\mathrm{GL}_n(F)$ sur $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{L}^T}(K)$. — On a défini une action de $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ sur $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{L}^T}(K)$. Utilisons le lemme précédent pour étendre cette action à $\mathrm{GL}_n(F)$. Soient $[(H, \rho, \eta)] \in \mathcal{M}_\infty^{\mathcal{L}^T}(K)$ et $g \in \mathrm{GL}_n(F)$ (les crochets signifient que l'on prend une classe d'isomorphisme de triplets). D'après le lemme précédent au réseau Galois-stable $\eta(g, \mathcal{O}_F^n)$ dans $V_p(H)$ correspond une quasi-isogénie $\varphi : H \rightarrow H'$ sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ telle que $\varphi_*^{-1}(T_p(H')) = \eta(g, \mathcal{O}_F^n)$ où $\varphi_* : V_p(H) \xrightarrow{\sim} V_p(H')$. On pose alors

$$g \cdot [(H, \rho, \eta)] = [(H', (\varphi \bmod p) \circ \rho, \varphi_* \circ \eta \circ g)]$$

7. Description de $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{LT}}(K)$ en termes de modules filtrés rigidifiés

Définition 7.1. — Soit $[(H, \rho)] \in \mathcal{M}^{\mathcal{LT}}(K)/\sim$. Une rigidification du module de Tate de la classe d'isogénie $[(H, \rho)]$ est un isomorphisme de modules galoisiens

$$\eta : F^n \xrightarrow{\sim} V_p(H)$$

qui induit donc naturellement $\forall (H', \rho') \sim (H, \rho)$ un isomorphisme

$$F^n \xrightarrow{\sim} V_p(H')$$

via l'isomorphisme canonique $V_p(H) \xrightarrow{\sim} V_p(H')$ induit par le relèvement de la quasi-isogénie $\rho'\rho^{-1}$ sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_K)$.

Proposition 7.2. — *L'application naturelle*

$$\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{LT}}(K) \longrightarrow \{([(H, \rho)], \eta) \mid [(H, \rho)] \in \mathcal{M}^{\mathcal{LT}}(K)/\sim \text{ et } \eta \text{ une rigidification} \}$$

est une bijection $GL_n(F) \times D^\times$ -équivariante.

Démonstration. Décrivons l'inverse de cette application. Soit $([(H, \rho)], \eta)$ dans le membre de droite. D'après le lemme 6.1 il existe un unique $(H', \rho') \sim (H, \rho)$ tel que

$$\eta : \mathcal{O}_F^n \xrightarrow{\sim} T_p(H')$$

On associe alors à $([(H, \rho)], \eta)$ le triplet (H', ρ', η') . On vérifie aisément que ces deux applications sont inverses l'une de l'autre. $\square$

Ainsi les fibres de l'application $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{LT}}(K) \longrightarrow \mathcal{M}^{\mathcal{LT}}(K)/\sim$ sont des $GL_n(F)$ -torseurs. Soit $U \subset GL_n(\mathcal{O}_F)$ un sous-groupe compact-ouvert et $\mathcal{M}_U^{\mathcal{LT}}(K)$ l'ensemble des K -points de l'espace de Lubin-Tate en niveau U (que nous n'avons pas défini dans cet article). En fait on a la décomposition plus précise d'extensions "Galoisiennes"

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{M}_\infty^{\mathcal{LT}}(K) & \\ & \downarrow & \\ GL_n(F) \curvearrowright & \mathcal{M}_U^{\mathcal{LT}}(K) & \curvearrowright U \\ & \downarrow & \\ & \mathcal{M}^{\mathcal{LT}}(K)/\sim & \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(\mathbb{D}(\mathbb{H}))(K) \end{array}$$

et on peut donc ainsi dire que l'espace des périodes de Gross-Hopkins est le quotient de l'espace de Lubin-Tate en niveau infini par $GL_n(F)$.

Théorème 7.3. — *Il y a une bijection $GL_n(F) \times D^\times$ -équivariante entre l'ensemble $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{LT}}(K)$ et l'ensemble des couples (Fil, ζ) où*

$$\text{Fil} \in \mathbb{P}(\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}})(K)$$

$\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ où

$$\forall i \ \zeta_i \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(F/\mathcal{O}_F, \mathbb{H} \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_p} \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)[\frac{1}{p}]$$

sont linéairement indépendants sur F i.e. induisent une injection $F^n \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}}(F/\mathcal{O}_F, \mathbb{H} \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)[\frac{1}{p}]$, et $\forall i$ le morphisme induit sur l'évaluation du cristal de Messing sur l'épaississement $\mathcal{O}_K \twoheadrightarrow \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$, $\zeta_{i*} : K \rightarrow \mathbb{D}(\mathbb{H}) \otimes K$, vérifie $\zeta_{i*}(1) \in \text{Fil}$.

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence de la proposition précédente couplée à la proposition 4.1 et au critère de relèvement de Messing vis à vis de l'idéal à puissances divisées engendré par p . Dans cet énoncé, si $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est la base canonique de F^n on a posé

$$\zeta_i = \rho^{-1} \circ (\eta(e_i) \bmod p)$$

$\square$

7.1. Description de $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{L}^T}(K)$ en termes d'algèbre linéaire. — Cette sous-section ne sera pas nécessaire dans la suite mais donne une description purement en termes d'algèbre linéaire de $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{L}^T}(K)$.

Théorème 7.4. — *Supposons $F = \mathbb{Q}_p$. Il y a une bijection $GL_n(F) \times D^\times$ -équivariante entre l'ensemble $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{L}^T}(K)$ et l'ensemble des couples (Fil, ξ) tels que*

$$Fil \in \mathbb{P}(\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}})(K)$$

et

$$\xi : F^n \hookrightarrow Fil(\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes_L B_{cris}^+(\mathcal{O}_K))^{\varphi=p}$$

(qui est alors automatiquement un isomorphisme)

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence de la proposition 7.2 couplée à la proposition 4.1 et au théorème A.4. $\square$

8. Description de $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{D}r}(K)$ en termes de modules filtrés rigidifiés

Définition 8.1. — Soit $[(G, \rho)] \in \mathcal{M}^{\mathcal{D}r}(K)/\sim$. Une rigidification de la classe d'isogénie $[(G, \rho)]$ est un isomorphisme de D -modules galoisiens

$$\eta : D \xrightarrow{\sim} V_p(G)$$

qui induit donc naturellement $\forall (G', \rho') \sim (G, \rho)$ un isomorphisme

$$D \xrightarrow{\sim} V_p(G')$$

via l'identification $V_p(G) \xrightarrow{\sim} V_p(G')$ induite par le relèvement de $\rho'\rho^{-1}$.

Remarque 8.2. — Dans la proposition précédente la donnée de η est équivalente à celle de $\zeta = \eta(1) \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(F/\mathcal{O}_F, G)[\frac{1}{p}] \setminus \{0\}$.

Proposition 8.3. — *L'application naturelle*

$$\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{D}r}(K) \longrightarrow \{ [(G, \rho)], \eta \mid [(G, \rho)] \in \mathcal{M}^{\mathcal{D}r}(K)/\sim \text{ et } \eta \text{ une rigidification} \}$$

est une bijection $GL_n(F) \times D^\times$ -équivariante.

Démonstration. Elle est identique à celle de la proposition 7.2 en utilisant le lemme 6.1. $\square$

Comme pour l'espace de Lubin-Tate il y a une description pour $U \subset \mathcal{O}_D^\times$ un sous-groupe ouvert

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{M}_\infty^{\mathcal{D}r}(K) & \\ & \downarrow & \uparrow U \\ D^\times & \mathcal{M}_U^{\mathcal{D}r}(K) & \\ & \downarrow & \\ & \mathcal{M}^{\mathcal{D}r}(K)/\sim & \xrightarrow{\sim} \Omega(K) \end{array}$$

Théorème 8.4. — *Il y a une bijection $GL_n(F) \times D^\times$ -équivariante entre l'ensemble $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{D}r}(K)$ et l'ensemble des couples (Fil, ζ) où*

$$Fil \in \Omega(K) \subset \mathbb{P}(\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0})(K)$$

et

$$\zeta \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(F/\mathcal{O}_F, \mathbb{G} \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)[\frac{1}{p}] \setminus \{0\}$$

est tel que si $\zeta_ : K \rightarrow \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \otimes K$ est l'application induite sur l'évaluation du cristal de Messing alors si*

$$\zeta_*(1) = \oplus_i \zeta_*(1)_i \in \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},i} \otimes K$$

on a

$$\forall i \quad \Pi^{-i} \zeta_*(1)_i \in Fil$$

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition précédente couplée à la remarque 8.2 et au théorème de relèvement de Messing. Dans l'énoncé on a posé

$$\zeta = \rho^{-1} \circ (\eta(1) \bmod p)$$

□

8.1. Description de $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{D}r}(K)$ en termes d'algèbre linéaire. — Comme dans la section 7.1 cette section ne servira pas dans la suite.

Théorème 8.5. — *Supposons $F = \mathbb{Q}_p$. Il y a une bijection $GL_n(F) \times D^\times$ -équivariante entre l'ensemble $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{D}r}(K)$ et l'ensemble des couples (Fil, ξ) où*

$$Fil \in \Omega(K) \subset \mathbb{P}(\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0})(K)$$

et

$$\xi \in Fil(\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0} \otimes B_{cris}^+(\mathcal{O}_K))^{(V^{-1}\Pi \otimes \varphi)^n = p} \setminus \{0\}$$

9. La bijection au niveau des points

On fixe

$$\Delta : \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{G}$$

une quasi-isogénie compatible à l'action de $\mathcal{O}_D$ comme par exemple celle définie dans la section 3.

On fixe un isomorphisme

$$(2) \quad \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0}^{V=\Pi} \simeq F$$

qui induit via Δ un isomorphisme

$$\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0}^{V=\Pi} \simeq F^n$$

et induit donc

$$\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0} \simeq L^n$$

De plus, l'isomorphisme (2) induit également un isomorphisme $\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0} \simeq L$ et

$$\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},j} \xrightarrow[\sum_j \Pi^{-j}]{\sim} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0}^n \simeq L^n$$

Le choix de l'isomorphisme (2) et de ceux qui s'en suivent n'est pas vraiment nécessaire à la démonstration mais permet d'identifier les espaces de périodes du coté Lubin-Tate et Drinfeld à des sous-espaces de $\mathbb{P}^n$.

Rappelons que l'on a des extensions de corps valués

$$K|\breve{F}|F|\mathbb{Q}_p$$

et un isomorphisme $L \simeq \breve{F}$.

9.1. L'application $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{D}r}(K) \longrightarrow \mathcal{M}_\infty^{\mathcal{L}T}(K)$. — Soit $(G, \rho_G, \eta_G) \in \mathcal{M}_\infty^{\mathcal{D}r}(K)$. Rappelons (cf. théorème 8.4) qu'on lui associe un couple (Fil_G, ζ_G) où

$$\text{Fil}_G \in \Omega(K)$$

et

$$\zeta_G \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(F/\mathcal{O}_F, \mathbb{G} \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)[\frac{1}{p}] \setminus \{0\}$$

Soit

$$\zeta_{G*} : K \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \otimes K$$

l'application induite au niveau de l'évaluation des cristaux de Messing sur l'épaississement $\mathcal{O}_K \rightarrow \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$. Considérons le composé

$$\begin{aligned} K &\xrightarrow{\zeta_{G*}} \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \otimes K \xrightarrow{\Delta_*^{-1}} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}^n \otimes K \stackrel{=}{=} \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},j}^n \otimes K \\ 1 &\longmapsto \longrightarrow (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

et posons $x_{ij} = \Pi^{-j} a_{ij} \in \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0} \otimes K \simeq K$. Soit

$$X = (x_{ij})_{i,j} \in M_n(K)$$

Lemme 9.1. — *L'application K -linéaire de K^n dans lui même induite par X a pour image Fil_G .*

Démonstration. D'après le théorème 1.1 et la remarque 1.3 le sous-module engendré par l'image de ζ_{G*} dans $\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \otimes K$ est $\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \Pi^j \text{Fil}_G$. Il en résulte aussitôt que

$$K(x_{i0})_i + \cdots + K(x_{in})_i = \text{Fil}_G \subset K^n = \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0} \otimes K$$

□

Définition 9.2. — On note $\text{Fil}_H \in \mathbb{P}^n(K)$ l'image de ${}^t X$ dans K^n i.e. le sous-espace engendré par les lignes de X .

Via l'identification $\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes K \simeq K^n$ si

$$K \xrightarrow{\zeta_{G*}} \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \otimes K \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}^n \otimes K$$

$$1 \longmapsto \longrightarrow (\alpha_i)_i$$

alors $\text{Fil}_H \in \mathbb{P}(\mathbb{D}(\mathbb{H}))(K)$ est l'image de l'application $K^n \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes K$ définie par $(\alpha_i)_i$.

La filtration Fil_H définit donc d'après la proposition 4.1 un élément $\mathcal{M}^{\mathcal{L}T}(K)/\sim$ dont il reste à définir la rigidification du module de Tate (cf. théorème 7.3). Considérons le composé

$$F/\mathcal{O}_F \xrightarrow{\zeta_G} \mathbb{G} \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K \xrightarrow{\Delta^{-1}} \mathbb{H}^n \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$$

qui fournit des éléments

$$(\zeta_{H,i})_{1 \leq i \leq n} \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(F/\mathcal{O}_F, \mathbb{H} \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)[\frac{1}{p}]$$

Pour un entier $i \in \{1, \dots, n\}$ le morphisme induit entre cristaux de Messing évalués sur $\mathcal{O}_K \rightarrow \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$ est

$$(\zeta_{H,i})_* : K \xrightarrow{\zeta_{G*}} \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \otimes K \xrightarrow{\Delta_*^{-1}} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}^n \otimes K \xrightarrow{\text{proj}_i} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes K$$

$$1 \longmapsto \longrightarrow \alpha_i$$

et donc $\forall i \text{ Im}((\zeta_{H,i})_*) \subset \text{Fil}_H$.

Il reste à voir que les $(\zeta_{H,i})$ sont F -linéairement indépendants. Mais si $(\lambda_i)_i \in F^n$ est tel que $\sum_i \lambda_i \zeta_{H,i} = 0$ alors $(\lambda_i)_i$ définit une forme linéaire sur F^n . Et l'égalité $\sum_i \lambda_i \zeta_{H,i}$ implique sur l'évaluation des cristaux l'égalité $\sum_i \lambda_i (a_{ij})_j = 0$ et donc $\sum_i \lambda_i (x_{ij})_j = 0$ ce qui implique d'après le lemme 9.1 que la forme linéaire associée à $(\lambda_i)_i$ s'annule sur Fil_G . Si $(\lambda_i)_i$ est non-nul alors Fil_G est égal au noyau de la forme linéaire associée, est donc défini sur F et contient donc à fortiori une droite F -rationnelle. Donc, puisque $\text{Fil}_G \in \Omega(K)$, $\forall i \lambda_i = 0$.

D'après le théorème 7.3 on en déduit un triplet $(H, \rho_H, \eta_H) \in \mathcal{M}_\infty^{\mathcal{L}^T}(K)$.

9.2. L'application $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{L}^T}(K) \longrightarrow \mathcal{M}_\infty^{\mathcal{D}^r}(K)$. — Soit $(H, \rho_H, \eta_H) \in \mathcal{M}_\infty^{\mathcal{L}^T}(K)$. Rappelons (cf. théorème 7.3) qu'on lui associe un couple (Fil_H, ζ_H) où

$$\text{Fil}_H \in \mathbb{P}^n(K)$$

et

$$\zeta_H = (\zeta_{H,i})_i : F^n \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}}(F/\mathcal{O}_F, \mathbb{H} \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)\left[\frac{1}{p}\right]$$

Soit

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{(\zeta_{H,1*}, \dots, \zeta_{H,n*})} & \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}^n \otimes K \xlongequal{\quad} \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},j}^n \otimes K \\ & & \downarrow \\ & & 1 \longmapsto (a_{ij})_{i,j} \end{array}$$

l'application induite sur l'évaluation des cristaux sur l'épaississement $\mathcal{O}_K \twoheadrightarrow \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$. Notons $x_{ij} = \Pi^{-j} a_{ij} \in \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0} \otimes K \simeq K$. Alors,

$$X = (x_{ij})_{i,j} \in M_n(K)$$

Lemme 9.3. — *L'endomorphisme K -linéaire de K^n induit par tX a pour image Fil_H .*

Démonstration. C'est une conséquence du théorème 1.1. $\square$

Définition 9.4. — On note $\text{Fil}_G = \text{Im}(X) \in \mathbb{P}^n(K) = \mathbb{P}(\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0})(K)$ via $\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0}^n \simeq \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0}$ induit par Δ .

Proposition 9.5. — $\text{Fil}_G \in \Omega(K) \subset \mathbb{P}(\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0}^{V=\Pi})(K)$

Démonstration. On a

$$\text{Fil}_G = K(x_{i1})_i + \dots + K(x_{in})_i$$

Soit $(\mu_j)_j \in K^n$ tel que

$$\sum_j \mu_j (x_{ij})_i \in F^n$$

Soit alors la forme F -linéaire à valeurs dans F définie sur $V_p(H)$ par

$$\varphi : \zeta_{H,i} \longmapsto \sum_j \mu_j x_{ij} \in F$$

Elle définit un élément de $V_p(H)^*$. D'après le corollaire 2.2 dans la suite de Hodge-Tate de H^D

$$0 \rightarrow \omega_{H^D}^* \otimes K \rightarrow V_p(H)^* \otimes_F K \rightarrow \omega_H \otimes K \rightarrow 0$$

l'application $V_p(H)^* \longrightarrow \omega_H \otimes K$ est injective. Or

$$[V_p(H)^* \otimes_F K \rightarrow \omega_H \otimes K] = [\ker \alpha \hookrightarrow V_p(H) \otimes_F K]^*$$

où $\alpha : V_p(H) \otimes_F K \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes K$ est l'application de matrice ${}^t(a_{ij})_{i,j}$. Mais $\varphi|_{\ker \alpha} = 0$ par définition. Donc $\varphi = 0$ et $\sum_j \mu_j (x_{ij})_i = 0$. $\square$

On obtient donc d'après la proposition 5.1 un couple $(G, \rho_G) \in \mathcal{M}^{\mathcal{D}^r}(K)/\sim$. Reste à définir une rigidification de G . Considérons le morphisme composé

$$\zeta_G : F/\mathcal{O}_F \xrightarrow{(\zeta_{H,1}, \dots, \zeta_{H,n})} \mathbb{H}^n \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K \xrightarrow{\Delta} \mathbb{G} \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$$

On vérifie aussitôt que par définition de Fil_G le morphisme induit au niveau de l'évaluation des cristaux a son image contenue dans Fil_G . D'après le théorème 8.4 on obtient donc un élément (G, ρ_G, η_G) . $\square$

9.3. Les deux applications sont inverses l'une de l'autre. — Cela ne pose pas de problème.

9.4. Retraçage des actions. —

Proposition 9.6. — Dans la bijection entre $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{LT}}(K)$ et $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{Dr}}(K)$ si

$$(H, \rho_H, \eta_H) \mapsto (G, \rho_G, \eta_G)$$

et $(g, d) \in \text{GL}_n(F) \times D^\times$ alors

$$(g, d) \cdot (H, \rho_H, \eta_H) \mapsto ({}^t g, d^{-1}) \cdot (G, \rho_G, \eta_G)$$

Démonstration. Cela ne pose aucun problème. $\square$

9.5. Bijection entre les points de l'espace de Berkovich associé. — Soit $K \hookrightarrow K'$ une extension isométrique de corps valués complets pour une valuation de rang 1. On vérifie alors aussitôt que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_\infty^{\mathcal{LT}}(K) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{M}_\infty^{\mathcal{Dr}}(K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}_\infty^{\mathcal{LT}}(K') & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{M}_\infty^{\mathcal{Dr}}(K') \end{array}$$

Pour $* \in \{\mathcal{LT}, \mathcal{Dr}\}$ posons

$$|\mathcal{M}_\infty^*| = \coprod_K \mathcal{M}_\infty^*(K) / \sim$$

où pour $x \in \mathcal{M}_\infty^*(K_1)$ et $y \in \mathcal{M}_\infty^*(K_2)$ $x \sim y$ ssi il existe une extension valuée comme précédemment

$$\begin{array}{ccc} K_1 & & \\ & \searrow & \\ & & K_3 \\ & \nearrow & \\ K_2 & & \end{array}$$

telle que x et y aient même image dans $\mathcal{M}_\infty^*(K_3)$.

Cette classe d'équivalence est bien définie au sens où c'est un ensemble. Cela résulte de l'existence de modèles entiers de nos espaces qui implique que l'on peut se limiter à des corps K de cardinalité bornée. On a donc une bijection $\text{GL}_n(F) \times D^\times$ -équivariante

$$|\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{LT}}| \xrightarrow{\sim} |\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{Dr}}|$$

Le choix de modèles entiers de nos espaces permet de munir ces ensembles d'une structure d'espace topologique localement compact et l'existence de l'isomorphisme au niveau de ces modèles entiers ([7]) impliquera que la bijection précédente est un homéomorphisme.

10. La matrice X

Les triplets (H, ρ_H, η_H) et (G, ρ_G, η_G) qui se correspondent ont en commun la matrice de rang $n-1$ $X \in M_n(K)$ où comme précédemment on identifie

$$\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}^n \otimes K \simeq \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},j}^n \otimes K \xrightarrow[\sim]{\oplus_j \Pi^{-j}} \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0}^n \otimes K \simeq M_n(K)$$

Celle-ci vérifie

- Les lignes de X engendrent $\text{Fil}_H \in \mathbb{P}^n(K)$
- Les colonnes de X engendrent $\text{Fil}_G \in \Omega(K)$

Supposons maintenant pour simplifier que $F = \mathbb{Q}_p$. Alors, X possède un relèvement

$$X_{cris} \in M_n(B_{cris}^+(\mathcal{O}_K))$$

i.e. via $\theta : B_{cris}^+(\mathcal{O}_K) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\widehat{K}}$ on a $\theta(X_{cris}) = X$. Ce relèvement est défini de manière similaire à X en évaluant les cristaux sur $A_{cris}(\mathcal{O}_K) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\widehat{K}}/p\mathcal{O}_{\widehat{K}}$ au lieu de $\mathcal{O}_K \twoheadrightarrow \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$ (cf. les propositions 11.1 et 11.2 de la section 11 pour plus de détails).

De plus,

$$\det(X_{cris}) \in \mathbb{Q}_p^\times \cdot t$$

où la valuation de l'élément de $\mathbb{Q}_p^\times$ est liée aux hauteurs de ρ_H, ρ_G et Δ (cf. la section suivante). Si

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & p & & \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & p \\ 1 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

est la matrice du Frobenius de $\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}$ relativement à la base définie par l'isomorphisme $\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0} \simeq L$ et $\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \simeq \bigoplus_j \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},j} \xrightarrow[\sim]{\sum_j \Pi^{-j}} \bigoplus_j \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0}$

(3)

$$\boxed{\varphi(X_{cris})^t \Phi = pX_{cris}}$$

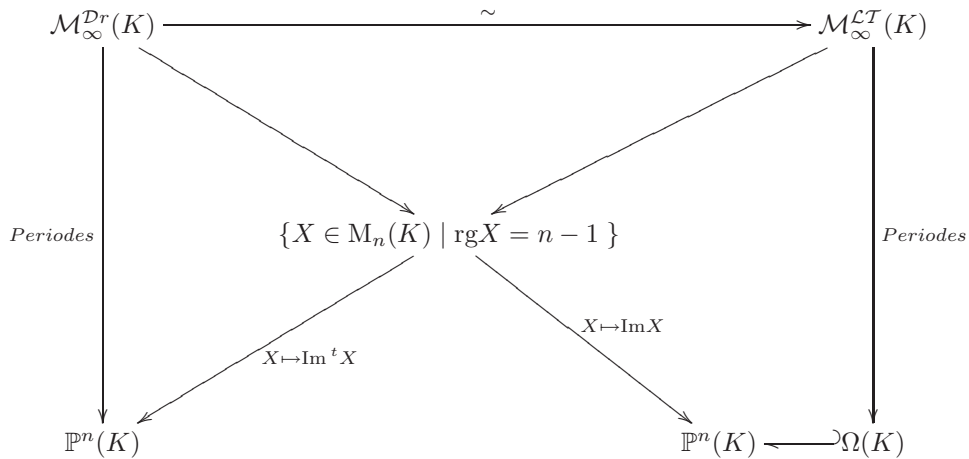
où $\varphi(X_{cris})$ est obtenue en appliquant le Frobenius cristallin à tous les éléments de la matrice X_{cris} . On peut montrer la proposition suivante :

Proposition 10.1. — *Les espaces $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{L}^T}(K)$ et $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{D}^r}(K)$ s'envoient surjectivement sur l'ensemble des matrices $X \in M_n(K)$ de rang $n - 1$ possédant un relèvement X_{cris} à B_{cris}^+ de déterminant non-nul et vérifiant l'équation (3). De plus les fibres de cette application en X sont en bijection avec l'ensemble des relèvements de X de déterminant non-nul satisfaisant à l'équation (3).*

Cette ensemble de matrices est muni d'une action de $GL_n(F) \times D^\times$ de la façon suivante : l'isomorphisme $\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \simeq L^n$ induit un plongement $D^\times \hookrightarrow GL_n(L)$. Alors

$$\forall (g, d) \in GL_n(F) \times D^\times \quad \forall X \quad (g, d).X = {}^t g X d^{-1}$$

Les applications précédentes sont compatibles à cette action.



Démonstration. Il s'agit d'une application du théorème 7.4 énoncé dans l'appendice. $\square$

Remarque 10.2. — Dans la proposition précédente on peut enlever “de déterminant non-nul” si l'on se restreint aux X telles que $\text{Im } X \in \Omega(K)$.

Remarque 10.3. — Pour les corps locaux de caractéristique positive A.Genestier et V.Lafforgue donnent une interprétation géométrique comme points d'un certain schéma formel de l'analogie en caractéristique positive de l'ensemble des matrices X_{cris} solutions de l'équation précédente. Il n'existe pas de telle interprétation en caractéristique zéro.

11. L'isomorphisme conserve le degré

Il s'agit de démontrer que pour un choix convenable de Δ le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{D}r}(K) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{L}T}(K) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathbb{Z} & \end{array}$$

où les applications vers $\mathbb{Z}$ sont les applications hauteur renormalisées des quasi-isogénies universelles. Cela implique en particulier que les tours de Lubin-Tate et Drinfeld classiques, les fibres en hauteur zéro, sont isomorphes.

Plus précisément, si f est une quasi-isogénie entre $\mathcal{O}$ -modules formels on note $\text{ht}_{\mathcal{O}}(h) = \text{ht}(f)/[F : \mathbb{Q}_p]$. Alors l'application $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{D}r}(K) \rightarrow \mathbb{Z}$ est

$$(G, \rho_G, \eta_G) \mapsto \text{ht}_{\mathcal{O}}(\rho_G)/n$$

et l'application $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{L}T}(K) \rightarrow \mathbb{Z}$ est

$$(H, \rho_H, \eta_H) \mapsto \text{ht}_{\mathcal{O}}(\rho_H)$$

On va appliquer le théorème A.8 de l'appendice. Afin de simplifier on se limite au cas $F = \mathbb{Q}_p$, le cas général étant laissé au lecteur.

Supposons que l'isomorphisme $\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0} \simeq L$ fixé au début de la section 9 provienne d'un isomorphisme $\mathbb{D}(\mathbb{H})_0 \simeq \mathcal{O}_L$.

Proposition 11.1. — Soit $(H, \rho_H, \eta_H) \in \mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{L}T}(K)$. Soit $\xi : \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{H}^n \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$ associé à η_H, ρ_H et la base canonique de $\mathbb{Z}_p^n$. Soit

$$\xi_* : B_{cris}^+ \rightarrow \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}^n \otimes_L B_{cris}^+$$

le morphisme associé sur l'évaluation des cristaux. Soit $X_{cris} \in \mathcal{M}_n(B_{cris}^+(\mathcal{O}_K))$ la matrice associée via

$$\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}^n \otimes_L B_{cris}^+ = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},j}^n \otimes_L B_{cris}^+ \xrightarrow[\sim]{\oplus_j \Pi^{-j}} \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0}^n \otimes_L B_{cris}^+$$

Alors $\det(X_{cris}) = \lambda.t \in \mathbb{Q}_p^{\times}.t$ et de plus

$$v_p(\lambda) = -\text{ht}(\rho_H) - \frac{1}{2}n(n-1)$$

Démonstration. Soit $M_0 \subset \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}$ le module de Dieudonné de $H \otimes_{\mathcal{O}_K} k$

$$M_0 = \mathbb{D}(\rho_H^{-1})(\mathbb{D}(H_k))$$

D'après le théorème A.8 de l'appendice, dans l'isomorphisme

$$T_p(H) \otimes_{\mathbb{Z}_p} B_{cris}^+ \simeq M_0 \otimes_{\mathcal{O}_L} B_{cris}^+$$

on a

$$\bigwedge^n T_p(H) \otimes_{\mathcal{O}_L} = t. \bigwedge^n M_0$$

De plus, $[M_0 : \mathbb{D}(\mathbb{H})] = \text{ht}(\rho_H)$. Via l'isomorphisme $\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \simeq \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0}$ le réseau $\mathbb{D}(\mathbb{H})$ s'envoie sur

$$\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \Pi^{-j} \mathbb{D}(\mathbb{H})_0$$

Soit W l'image de $T_p(H)$ dans $\bigoplus_j \mathbb{D}(\mathbb{H})_0 \otimes_{\mathcal{O}_L} B_{cris}^+$. Alors

$$\bigwedge^n W \otimes \mathcal{O}_L = p^{-ht(\rho_H) - \frac{1}{2}n(n-1)} t. \mathbb{D}(\mathbb{H})_0$$

D'où le résultat. □

Proposition 11.2. — Soit $(G, \rho_G, \eta_G) \in \mathcal{M}_\infty^{\mathcal{D}r}(K)$. Soit $\zeta = \rho_G^{-1} \circ \eta_G(1) : \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{G} \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$ et $\xi = \Delta^{-1} \circ \zeta : \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{H}^n \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$. Soit X_{cris} la matrice associée comme dans la proposition précédente. Alors $\det(X_{cris}) = \lambda.t \in \mathbb{Q}_p^\times t$ et

$$v_p(\lambda) = -ht(\rho_G)/n - ht(\Delta)$$

Démonstration. La démonstration est identique à celle de la proposition précédente. On applique le théorème A.8 de l'appendice. La matrice des périodes de G est n -copies de la matrice X_{cris} . On en déduit que $\det(X_{cris})^n$ est donné par la valeur annoncée. □

Corollaire 11.3. — Si $ht_{\mathcal{O}}(\Delta) = \frac{1}{2}n(n-1)$ alors la bijection entre $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{L}T}(K)$ et $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{D}r}(K)$ respecte les hauteurs normalisées.

Corollaire 11.4. — Soit $(H, \rho_H, \eta_H) \in \mathcal{M}_\infty(K)$ tel que $ht(\rho_H) = 0$. Alors, le couple (G, ρ_G) associé dans l'espace de Rapoport-Zink au niveau est l'élément de $\Omega(K) \subset \mathcal{M}^{\mathcal{D}r}(K)$ donné par le dual de la décomposition de Hodge-Tate de H couplé à η_H . Plus généralement, soit (G, ρ_G) le point de $\Omega(K)$ associé à la décomposition de Hodge-Tate de H et à η_H . Le point de $\mathcal{M}^{\mathcal{D}r}(K)$ associé par l'isomorphisme de Faltings est alors

$$(G, \rho_G \circ \Pi^{ht(\rho_H)})$$

12. Un point de vue différent sur la bijection

Nous allons redémontrer la bijection précédente d'un point de vue "dual". En particulier, au lieu de considérer des filtrations $\text{Fil}_H \in \mathbb{P}^n, \text{Fil}_G \in \Omega$ nous considérerons plutôt les quotients $K^n \twoheadrightarrow K^n/\text{Fil}_H, K^n \twoheadrightarrow K^n/\text{Fil}_G$. Ce point de vue se prête mieux lorsque l'on travaillera sur une base quelconque (c'est à dire plus sur un point comme dans cet article) puisque que pour un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ il est plus commode de définir $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ comme classifiant les quotients localement libres de rang 1 $\mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{L}$ (en tous cas cela est plus facile à platifier par éclatements). En effet, dans le cas d'une base quelconque l'approche des sections précédentes nous conduirait à définir Fil_H comme sous-module engendré par certaines sections ce qui est moins commode. De plus la matrice définissant ces sous-modules serait une section de $\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}^n \otimes \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}] \simeq M_n(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}])$ où $\mathfrak{X}$ est l'espace de Lubin-Tate ou de Drinfeld en niveau infini. Il faudrait donc procéder à de nouveaux éclatements afin de rendre l'espace engendré par les lignes et celui par les colonnes localement facteur direct entier (cette dernière justification est quelque peu hypocrite puisque de toutes façons dans la démonstration finale on devra à un endroit rendre entier l'application des périodes). Le point de vue qui suit permet de construire directement une application entière du sommet de la tour de Lubin-Tate (resp. la tour de Drinfeld) vers le schéma formel de Drinfeld (resp. $\widehat{\mathbb{P}}^{n-1}$).

Commençons par faire le lien entre le point de vue précédent et celui qui va suivre.

12.1. Identification de $K^n \twoheadrightarrow K^n/\text{Fil}_H$ avec l'application de Hodge-Tate de G^D . — Soit $(G, \rho_G, \eta_G) \in \mathcal{M}_\infty^{\mathcal{D}r}(K)$. Rappelons qu'on a défini une matrice X telle que $\text{Im} X = \text{Fil}_G$ et $\text{Im} {}^t X = \text{Fil}_H$. Tout repose sur une bidualisation, l'exactitude de la suite de Hodge-Tate ainsi que sur un analogue de l'énoncé d'algèbre linéaire suivant : soit $u : E_1 \rightarrow E_2$ une application linéaire entre deux K -espaces vectoriels de dimension finie, il y a alors une identification canonique

$$[E_1^* \twoheadrightarrow E_1^*/\text{Im} {}^t u] \simeq [\ker u \hookrightarrow E_1]^*$$

L'analogue est le suivant : pour E un $D \otimes_F K$ -module de type fini (à gauche ou à droite) posons

$$\Gamma(E) = \text{Hom}_{D \otimes_F L}(E, \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}})$$

un K -espace vectoriel de dimension finie. Alors,

$$(4) \quad \forall u : E_1 \rightarrow E_2 \quad [\Gamma(E_1) \twoheadrightarrow \Gamma(E_1)/\text{Im} {}^\Gamma u] \simeq \Gamma[\ker u \hookrightarrow E_1]$$

Notons maintenant pour W un K -e.v. $\Phi(W) = W^*$ le dual usuel. Si E est un $D \otimes_L K$ -module de type fini à gauche, resp. à droite, alors $\Phi(E)$ est naturellement un $D \otimes_L K$ -module de type fini à droite, resp. à gauche.

Il y a alors un isomorphisme naturel de bidualité pour E comme ci-dessus

$$\Gamma \circ \Phi(E) \simeq \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0} \otimes_L E_0$$

où comme d'habitude $E_0 = \{x \in E \mid \forall a \in F_n \ a \otimes 1.x = 1 \otimes a.x\}$.

Lemme 12.1. — *Soit l'application $D \otimes_F K$ -linéaire composée*

$$u : D \otimes_F K \xrightarrow[\sim]{\eta_G} V_p(G) \otimes_F K \xrightarrow{\alpha_G} \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \otimes_L K$$

Procédons aux identifications suivantes :

$$\begin{aligned} \Gamma(D \otimes_F K) &\xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes_L K \\ f &\longmapsto f(1 \otimes 1) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \otimes_L K) &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_L(\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0}, \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0}) \otimes_L K \simeq K^n \\ f &\longmapsto f|_{\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0} \otimes K} \end{aligned}$$

via l'isomorphisme (2) et Δ . Alors

$$\Gamma u : K^n \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes K \quad (\simeq K^n)$$

s'identifie à ${}^t X$ et donc $\text{Im}(\Gamma u) = \text{Fil}_H$.

Démonstration. Il suffit de retracer les différentes identifications. □

Remarque 12.2. — Étant donné que le module de Tate de G est trivialisé et que $\det V_p(G) \simeq \mathbb{Q}_p(1)$ on en déduit que $\mathbb{Q}_p(1)$ est trivialisé et que donc l'application de Hodge-Tate de G^D est définie sur $K : \alpha_{G^D} : V_p(G^D) \longrightarrow \omega_G \otimes K$. En d'autres termes $\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty}) \subset K$.

Corollaire 12.3. — *Il y a des identifications canoniques*

$$\begin{aligned} [\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes K \twoheadrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes K / \text{Fil}_H] &\simeq \left[(V_p(G^D) \otimes_F K)_0 \xrightarrow{\alpha_{G^D}} \omega_{G,0} \otimes K \right] (-1) \otimes_L \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0} \\ &\simeq [\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes K \twoheadrightarrow \omega_{G,0}(-1) \otimes_L \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0}] \end{aligned}$$

où α_{G^D} est l'application de Hodge-Tate de G^D .

Démonstration. Soit

$$\left[E_1 \xrightarrow{\alpha_G} E_2 \right] = \left[V_p(G) \otimes_F K \xrightarrow{\alpha_G} \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \otimes_L K \right]$$

D'après le lemme précédent

$$[\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes K \twoheadrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes K / \text{Fil}_H] \simeq \left[\Gamma(E_1) \xrightarrow{\Gamma \alpha_G} \Gamma(E_1) / \text{Im}(\Gamma \alpha_G) \right]$$

qui d'après l'identification (4) est isomorphe à

$$\Gamma [\ker \alpha_G \hookrightarrow E_1]$$

Mais d'après la proposition 1.4 (décomposition de Hodge-Tate) la suite

$$0 \longrightarrow \omega_G^* \otimes K(-1) \xrightarrow{\Phi \alpha_{G^D}(-1)} V_p(G) \otimes_F K \xrightarrow{\alpha_G} \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \otimes_L K$$

est exacte. Donc,

$$\begin{aligned} \simeq \Gamma [\ker \alpha_G \hookrightarrow E_1] &\simeq \Gamma \circ \Phi [V_p(G^D) \otimes_F K \twoheadrightarrow \omega_G \otimes K] (-1) \\ &\simeq [(V_p(G^D) \otimes_F K)_0 (-1) \twoheadrightarrow \omega_{G,0} \otimes K(-1)] \otimes_L \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0} \end{aligned}$$

Le dernier isomorphisme dans l'énoncé du corollaire provient de la rigidification $\eta : D \xrightarrow{\sim} V_p(G)$ qui induit

$$\Gamma \circ \Phi (V_p(G) \otimes_F K) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes K$$

□

12.2. Identification de $K^n \twoheadrightarrow K^n/\text{Fil}_G$ avec l'application de Hodge-Tate de H^D . — Soit $(H, \rho_H, \eta_H) \in \mathcal{M}_\infty^{\mathcal{LT}}(K)$. On procède comme dans la section précédente. Pour E un K -espace vectoriel posons

$$\Psi(E) = \text{Hom}_L(E, \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0})$$

Lemme 12.4. — *Soit l'application composée*

$$v : K^n \xrightarrow[\sim]{\eta_H} V_p(H) \otimes_F K \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes_L K$$

Procédons aux identifications suivantes :

$$\begin{aligned} \Psi(K^n) &\simeq \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0}^n \otimes K \simeq \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0} \otimes K \text{ via } \Delta \\ \Psi(\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes_L K) &\simeq \text{Hom}(\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}, \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0}) \otimes K \simeq K^n \end{aligned}$$

où la second identification utilise

$$\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},j} \xrightarrow[\sim]{\oplus_i \Pi^{-i}} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0}^n \simeq L^n$$

Alors $\Psi v : K^n \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0} \otimes K$ s'identifie à la matrice X et donc $\text{Im}(\Psi v) = \text{Fil}_G$.

Corollaire 12.5. — *Il y a des identifications*

$$\begin{aligned} [\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0} \otimes K \twoheadrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0} \otimes K/\text{Fil}_G] &\simeq \left[V_p(H^D) \xrightarrow{\alpha_{H^D}} \omega_H \otimes K \right] (-1) \otimes_L \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0} \\ &\simeq [\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0} \otimes K \twoheadrightarrow \omega_H \otimes K (-1) \otimes_L \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0}] \end{aligned}$$

Démonstration. Soit

$$\left[E_1 \xrightarrow{\alpha_H} E_2 \right] = \left[V_p(H) \otimes_F K \xrightarrow{\alpha_H} \mathbb{D}(\mathbb{H}) \otimes_L K \right]$$

Alors

$$\begin{aligned} [\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0} \otimes K \twoheadrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0} \otimes K/\text{Fil}_G] &\simeq [\Psi(E_1) \twoheadrightarrow \Psi(E_2)] \\ &\simeq \Psi[\ker \alpha_H \hookrightarrow E_1] \\ &\simeq \Psi \circ \Phi \left[V_p(H^D) \otimes_F K (-1) \xrightarrow{\alpha_{H^D}(-1)} \omega_H \otimes K (-1) \right] \\ &\simeq \left[V_p(H^D) \otimes_F K \xrightarrow{\alpha_{H^D}} \omega_H \otimes K \right] (-1) \otimes_L \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0} \end{aligned}$$

où on a utilisé l'exactitude de la suite de Hodge-Tate pour H (proposition 1.4). □

12.3. L'application $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{Dr}}(K) \longrightarrow \mathcal{M}_\infty^{\mathcal{LT}}(K)$. — Soit $(G, \rho_G, \eta_G) \in \mathcal{M}_\infty^{\mathcal{Dr}}(K)$.

12.3.1. Première étape : *on met une structure d'isocrystal sur le module de Tate.* — Posons

$$N = \text{Hom}_D(V_p(G), \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}})$$

un isocrystal relativement à l'extension $L|F$ si on le munit de $\varphi : N \xrightarrow{\sim} N$ défini par $\varphi.f = \varphi \circ f$.

12.3.2. Deuxième étape : *la rigidification du module de Tate induit une rigidification de l'isocrystal.*

— L'isomorphisme de D -modules $\eta_G : D \xrightarrow{\sim} V_p(G)$ induit un isomorphisme d'isocristaux

$$\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} (N, \varphi)$$

12.3.3. *Troisième étape : la filtration de Hodge-Tate induit une filtration du module de Dieudonné.* — Considérons l'application de Hodge-Tate de G^D tordue par $K(-1)$

$$(\mathcal{S}) = \left[V_p(G)^* \otimes_F K \xrightarrow{\alpha_{G^D}(-1)} \omega_G \otimes K(-1) \right] = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \left[(V_p(G)^* \otimes_F L)_j \otimes_L K \rightarrow \omega_{G,j} \otimes K(-1) \right]$$

Tensorisons cette suite

$$(\mathcal{S}) \otimes_{D \otimes_F L} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \simeq [N \otimes_F L \rightarrow \omega_{G,0}(-1) \otimes_L \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0}]$$

qui fournit donc via la deuxième étape un élément

$$\text{Fil}_H \in \mathbb{P}(\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}})(K)$$

On obtient ainsi un couple $[(H, \rho_H)] \in \mathcal{M}^{\text{CT}}(K)/\sim$.

12.3.4. *Quatrième étape : construction d'éléments dans le module de Tate de H .* — Construisons un morphisme

$$\Psi : \text{Hom}_{\mathcal{O}_D}(\mathbb{G}, \mathbb{H})\left[\frac{1}{p}\right] \longrightarrow V_p(H)$$

Soit

$$\zeta_G \in \text{Hom}(F/\mathcal{O}_F, \mathbb{G} \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)\left[\frac{1}{p}\right]$$

comme dans le théorème 8.4. Soit $f \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_D}(\mathbb{G}, \mathbb{H})\left[\frac{1}{p}\right]$. Considérons

$$f \circ \zeta_G \in \text{Hom}(F/\mathcal{O}_F, \mathbb{H} \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)\left[\frac{1}{p}\right]$$

Pour le morphisme induit sur les cristaux évalués sur l'épaississement $\mathcal{O}_K \rightarrow \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$

$$(f \circ \zeta_G)_* : K \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes K$$

montrons que $(f \circ \zeta_G)_*(1) \in \text{Fil}_H$.

Via $\eta_G : D \xrightarrow{\sim} V_p(G)$ le morphisme $f_* : \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \otimes K \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes K$ s'identifie à

$$(V_p(G)^* \otimes_F K) \otimes_{D \otimes L} \left[\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\mathbb{D}(f)} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \right]$$

On doit montrer que $\zeta_{G*}(1) \in (V_p(G)^* \otimes K) \otimes_{D \otimes L} \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}}$ s'envoie sur zéro par la composée donnée par la ligne pointillée diagonale dans le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} (V_p(G)^* \otimes K) & \otimes_{D \otimes L} [\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\mathbb{D}(f)} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}] & \\ \downarrow \alpha_{G^D}(-1) & \downarrow Id \quad \searrow Id & \\ \omega_G \otimes K(-1) & \otimes_{D \otimes L} [\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\mathbb{D}(f)} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}] & \end{array}$$

Il résulte de ce diagramme qu'il suffit de vérifier que l'image de $\zeta_{G*}(1)$ par l'application

$$\alpha_{G^D}(-1) \otimes Id : (V_p(G)^* \otimes K) \otimes_{D \otimes L} \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \omega_G \otimes K(-1) \otimes_{D \otimes L} \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}}$$

est nulle. Mais si $\iota : \tilde{\omega}_{G^D} \otimes K \hookrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \otimes K$ et ${}^t\alpha_G : \tilde{\omega}_{G^D}^* \otimes K \longrightarrow V_p(G)^* \otimes K$ est l'application de gauche dans la suite de Hodge Tate de G^D tordue par $K(-1)$, ${}^t\alpha_G \in V_p(G)^* \otimes K \otimes \omega_{G^D}$, alors

$$\zeta_{G*}(1) = (Id \otimes \iota) ({}^t\alpha_G)$$

Le résultat se déduit donc du fait que dans la suite de Hodge-Tate de G^D la composée des deux applications est nulle : ${}^t\alpha_G \circ \alpha_{G^D}(-1) = 0$. On a donc bien défini l'application Ψ .

12.3.5. *Sixième étape : l'application ψ est un isomorphisme.* — Il suffit de démontrer qu'elle est injective. Soit donc f tel que $\psi(f) = 0$. On vérifie alors sur l'évaluation des cristaux que cela implique que pour $\mathbb{D}(f) : \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}$

$$\mathbb{D}(f)|_{\tilde{\omega}_{GD} \otimes K} = 0$$

Mais

$$\begin{aligned} \mathbb{D}(f) \in \mathrm{Hom}_{D,\varphi}(\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}}, \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0}^{V=\Pi}, \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0}^{V=\Pi}) \\ h &\longmapsto h|_{\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0}^{V=\Pi}} \end{aligned}$$

or

$$[\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0}^{V=\Pi} \otimes K \twoheadrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0} \otimes K / \tilde{\omega}_{GD,0} \otimes K] \in \Omega(K) \subset \mathbb{P}(\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0}^{V=\Pi})(K)$$

Donc, $\mathbb{D}(f)|_{\omega_{GD} \otimes K} = 0 \Rightarrow \mathbb{D}(f) = 0$ et donc $f = 0$.

La quasi-isogénie Δ induit un isomorphisme

$$F^n \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_D}(\mathbb{G}, \mathbb{H})\left[\frac{1}{p}\right]$$

et on obtient donc une rigidification η_H de $[(H, \rho_H)]$ ce qui détermine le triplet (H, ρ_H, η_H) d'après le théorème 7.3.

12.4. L'application $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{LT}}(K) \longrightarrow \mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{Dr}}(K)$. — Soit maintenant $(H, \rho_H, \eta_H) \in \mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{LT}}(K)$.

12.4.1. *Première étape : On met une structure d'isocrystal sur le module de Tate.* — Soit

$$N = \mathrm{Hom}_F(V_p(H), \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}})$$

qui est muni d'une structure d'isocrystal en posant $\varphi.f = \varphi \circ f$. Notons que cet isocrystal est muni d'une action de D puisque c'est le cas de $\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}$.

12.4.1.1. *Deuxième étape : η_H rigidifie l'isocrystal.* — L'isomorphisme $\eta_H : F^n \xrightarrow{\sim} V_p(H)$ couplé à la quasi-isogénie Δ induit un isomorphisme d'isocristaux munis d'une action de D

$$\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}^n \xrightarrow{\sim} N$$

12.4.2. *Troisième étape : la filtration de Hodge-Tate induit une du module de Dieudonné.* — Considérons l'application de Hodge-Tate de H^D tordue par $K(-1)$

$$(T) = [V_p(H)^* \otimes K \twoheadrightarrow \omega_H \otimes K(-1)]$$

Après application de $- \otimes_F \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}$ on obtient via la deuxième partie une filtration D -invariante

$$(T) \otimes_L \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \simeq [\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \otimes K \twoheadrightarrow \omega_H \otimes K(-1) \otimes \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}]$$

La partie “indice zéro” de cette application est obtenue par

$$(T) \otimes_L \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0} \simeq [\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0} \otimes K \twoheadrightarrow \omega_H \otimes K(-1) \otimes \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0}]$$

qui définit $\mathrm{Fil}_G \in \mathbb{P}(\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0})(K)$. La quasi-isogénie Δ couplée à η_H induit un isomorphisme

$$V_p(H)^* \otimes_F \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q},0}^{V^{-1}\Pi} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0}^{V^{-1}\Pi}$$

D'après le corollaire 2.2 $(T) \in \Omega(K) \subset \mathbb{P}(V_p(H)^*)(K)$. Donc

$$\mathrm{Fil}_G \in \Omega(K) \subset \mathbb{P}(\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q},0}^{V^{-1}\Pi})(K)$$

On obtient donc ainsi un couple $[(G, \rho_G)] \in \mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{Dr}}(K) / \sim$.

12.4.3. *Quatrième étape : Construction d'éléments dans le module de Tate de G .* — A la rigidification $\eta_H : F^n \xrightarrow{\sim} V_p(H)$ est associée un élément

$$\xi \in \text{Hom}(F/\mathcal{O}_F, \mathbb{H}^n \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)[\frac{1}{p}]$$

qui composé avec Δ fournit $\zeta_G \in \text{Hom}(F/\mathcal{O}_F, \mathbb{G} \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)[\frac{1}{p}]$. Il s'agit de montrer que sur l'évaluation des cristaux

$$\zeta_{G*}(1) \in \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \Pi^j \text{Fil}_G \subset \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \otimes K$$

Pour cela il suffit de vérifier que

$$\xi_*(1) \in \ker \left[\mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}^n \otimes K \xrightarrow{\eta_H} V_p(H)^* \otimes K \otimes \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \rightarrow \omega_H \otimes K(-1) \otimes \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \right]$$

Or cela résulte de ce que $\xi_*(1) \in V_p(H)^* \otimes K \otimes \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}$ est donné par

$$V_p(H) \xrightarrow{\alpha_H} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes K$$

et de ce que $\alpha_{H^D}(-1) \circ \alpha_H = 0$ dans la suite de Hodge-Tate de H^D . Donc, ζ_G définit un élément de $V_p(G)$.

12.4.3.1. *Cinquième étape : Rigidification.* — Il suffit de montrer que ζ_G est non-nul mais cela est clair. On obtient donc d'après le théorème 8.4 un triplet $(G, \rho_G, \eta_G) \in \mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{D}^r}(K)$.

12.5. Les deux applications sont inverses l'une de l'autre. — Cela est moins clair que dans la première description de l'isomorphisme.

Partons de $(G, \rho_G, \eta_G) \in \mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{D}^r}(K)$ et soit $(H, \rho_H, \eta_H) \in \mathcal{M}_{\infty}(K)$ le triplet associé. Soit $(G', \rho_{G'}, \eta_{G'}) \in \mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{D}^r}(K)$ le triplet associé à (H, ρ_H, η_H) . Rappelons que la filtration de $\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \otimes K$ définissant $(G', \rho_{G'}) \in \mathcal{M}^{\mathcal{D}^r}(K)/\sim$ s'identifie à

$$[V_p(H)^* \otimes K \rightarrow \omega_H \otimes K(-1)] \otimes_L \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}$$

via

$$V_p(H)^* \otimes \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \xrightarrow[\text{via } \eta_H]{\sim} \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}^n \xrightarrow{\mathbb{D}(\Delta)} \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}}$$

Rappelons que l'on a un isomorphisme

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_D}(\mathbb{G}, \mathbb{H}) \xrightarrow{\sim} V_p(H)$$

et qu'alors l'identification ci-dessus se résume à

$$\begin{aligned} \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_F \left(\text{Hom}_{\mathcal{O}_D}(\mathbb{G}, \mathbb{H})[\frac{1}{p}], \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \right) \xleftarrow{\sim} V_p(H)^* \otimes \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \\ x &\longmapsto [f \longmapsto \mathbb{D}(f)(x)] \end{aligned}$$

D'après l'exactitude de la suite de Hodge-Tate de H^D

$$\ker (V_p(H)^* \otimes K \rightarrow \omega_G \otimes K(-1)) \otimes_L \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} = \{ h : V_p(H) \otimes K \rightarrow \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}} \otimes K \mid \alpha_H(x) = 0 \Rightarrow h(x) = 0 \}$$

Mais via l'identification $\text{Hom}_{\mathcal{O}_D}(\mathbb{G}, \mathbb{H})[\frac{1}{p}] \simeq V_p(H)$ l'application α_H est

$$f \longmapsto (\mathbb{D}(f) \otimes Id) (\zeta_{G*}(1))$$

où $\mathbb{D}(f) \otimes Id : \mathbb{D}(\mathbb{G}) \otimes K \rightarrow \mathbb{D}(\mathbb{H}) \otimes K$, $\zeta_G = \rho_G \circ \eta_G(1)$ et ζ_{G*} est l'application induite sur les cristaux. On en déduit que la filtration définissant $(G', \rho_{G'})$ sur $\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \otimes K$ est

$$\{ x \in \mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}} \otimes K \mid \forall f \in \text{Hom}_{D, \varphi}(\mathbb{D}(\mathbb{G})_{\mathbb{Q}}, \mathbb{D}(\mathbb{H})_{\mathbb{Q}}) (f \otimes Id)(\zeta_{G*}(1)) = 0 \Rightarrow (f \otimes Id)(x) = 0 \} = (Im(\alpha_G)^{\perp})^{\perp}$$

qui est donc égal à $Im \alpha_G$ qui par surjectivité de l'application de Hodge-Tate de G est la filtration définissant G . Donc $(G', \rho_{G'}) = (G, \rho_G)$.

Il est maintenant aisé de vérifier que les rigidifications des modules de Tate de G' et G coïncident puisqu'il suffit de vérifier qu'elles coïncident modulo p , dans $\text{Hom}(F/\mathcal{O}_F, \mathbb{G} \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)$ ce qui

est immédiat. Donc $(G', \rho_{G'}, \eta_{G'}) = (G, \rho_G, \eta_G)$.

On vérifie de la même façon que l'application composée

$$\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{LT}}(K) \longrightarrow \mathcal{M}_\infty^{\mathcal{Dr}}(K) \longrightarrow \mathcal{M}_\infty^{\mathcal{LT}}(K)$$

est l'identité.

Appendice A

Théorèmes de comparaison entiers relatifs pour les groupes p -divisibles d'après Faltings

Dans cet appendice on explique les résultats auxquels on peut parvenir à partir des méthodes de [3] pour les périodes cristallines et de Hodge-Tate des groupes p -divisibles sur les anneaux d'entiers de corps non-archimédiens. Les démonstrations seront données dans [8].

A.1. Groupes p -divisibles sur les anneaux d'entiers de corps non-archimédiens. —

Soit $K|\mathbb{Q}_p$ un corps valué complet pour une valuation de rang 1, c'est à dire à valeurs dans $\mathbb{R}$, étendant celle de $\mathbb{Q}_p$. On note $\mathcal{O}_K$ son anneau des entiers et k son corps résiduel. Fixons $\mathcal{O}_{K_0} \subset \mathcal{O}_K$ un anneau de Cohen. On a des extensions valuées $K|K_0|\mathbb{Q}_p$. Le choix de l'anneau de Cohen fixe en particulier une section ϵ du morphisme $\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K \rightarrow k$. Si k est parfait $\mathcal{O}_{K_0} \simeq W(k)$.

Par définition un groupe p -divisible sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$ est un système compatible de groupes p -divisibles sur les $(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K/p^n\mathcal{O}_K))_{n \geq 1}$ (cf. le début de la section 1 de [6]).

Lemme A.1. — *Soit G un groupe p -divisible sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$. Son équivalents :*

- $G \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$ est isogène à un groupe constant H sur k :

$$G \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K \sim H \otimes_{k,\epsilon} \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$$

- Il existe un nombre réel $\lambda \geq 1$ et H' un groupe p -divisible sur k tels que si $\mathfrak{m}_{K,\lambda} = \{x \in K \mid v_p(x) \geq \lambda\}$ alors

$$G \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathfrak{m}_{K,\lambda} \simeq H' \otimes_{k,\epsilon} \mathcal{O}_K/\mathfrak{m}_{K,\lambda}$$

- Soit $R \simeq \mathcal{O}_{K_0}[[x_i]]_{i \in I}$ l'anneau universel des déformations du groupe $G \otimes k$ sur des $\mathcal{O}_{K_0}$ -algèbres locales complètes et G^{univ} la déformation universelle. Il existe un morphisme

$$x : \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K) \longrightarrow \mathrm{Spf}(R)$$

i.e. $x \in \mathrm{Spf}(R)^{an}(K)$ où an désigne la fibre générique au sens des espaces de Berkovich, tel que $G \simeq x^*G^{univ}$

Démonstration. — Elle ne pose pas de problème. □

On remarquera que si les conditions du lemme précédent sont vérifiées alors nécessairement $H' \simeq G_k$ et on peut choisir $H = G_k$.

Définition A.2. — Un groupe p -divisible satisfaisant les conditions équivalentes du lemme précédent sera dit *isotrivial mod p* .

Remarque A.3. — En utilisant des morphismes non-continus $\mathcal{O}_{K_0}[[x_i]]_{i \in I} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ on peut construire des groupes p -divisibles non-isotriviaux mod p sur $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$.

A.2. Théorèmes de comparaison. — On reprend les notations de la section précédente. On fixe un relèvement de Frobenius $\sigma : \mathcal{O}_{K_0} \rightarrow \mathcal{O}_{K_0}$. Soit G un groupe p -divisible sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$. On note M l'algèbre de Lie de l'extension vectorielle universelle de G . Celle-ci est filtrée :

$$0 \longrightarrow \omega_{G^D} \longrightarrow M \longrightarrow \omega_G^* \longrightarrow 0$$

On note $\mathrm{Fil} M = \omega_{G^D}$. On note $\mathcal{E}$ le cristal de Messing (covariant) de $G \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$ sur le gros site cristallin nilpotent de $[\mathbf{1}]$

$$NCRIS(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)/\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{K_0}))$$

où $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{K_0}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)$ est défini via la section ϵ , et

$$M_0 = \mathcal{E}_{\mathcal{O}_{K_0} \rightarrow k}$$

le module de Dieudonné “classique” de $G \otimes k$ si k est parfait. Il est muni d'une application σ -linéaire $\varphi : M_0 \longrightarrow M_0$ associée au relèvement de Frobenius σ .

Rappelons ([8]) que l'on dispose d'une $\mathcal{O}_{K_0}$ -algèbre $A_{cris}(\mathcal{O}_K)$ augmentée via $\theta : A_{cris}(\mathcal{O}_K) \rightarrow \mathcal{O}_{\widehat{K}}$. On note φ le Frobenius cristallin sur A_{cris} .

L'évaluation

$$E = \mathcal{E}_{A_{cris} \rightarrow \mathcal{O}_{\widehat{K}}}$$

est un A_{cris} -module libre muni d'un morphisme φ -linéaire $\varphi : E \longrightarrow E$ tel que

$$E \otimes_{\theta} \mathcal{O}_{\widehat{K}} \simeq M \otimes_{\mathcal{O}_K} \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}}$$

ce qui permet de filtrer E via $\mathrm{Fil} E = \theta^{-1}(\mathrm{Fil} M \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}})$. On a donc un φ -module filtré $(E, \varphi, \mathrm{Fil} E)$.

Théorème A.4 ([8]). — *Il y a un isomorphisme naturel $\mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$ -équivariant*

$$T_p(G) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Fil} E)^{\varphi=p}$$

Théorème A.5 ([8]). — *Il y a deux inclusions naturelles strictement compatibles aux filtrations et à l'action de Galois*

$$tE \subset T_p(G) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris} \subset E$$

Elles sont compatibles aux Frobenius cristallins lorsque l'on munit $T_p(G) \otimes A_{cris}$ de $p \otimes \varphi$.

Remarque A.6. — Dans le théorème précédent la filtration est indexée de la façon suivante

$$\begin{aligned} \mathrm{Fil}^i(T_p(G) \otimes A_{cris}) &= T_p(G) \otimes \mathrm{Fil}^i A_{cris} \\ \forall i \leq -1 \mathrm{Fil}^i E &= E \\ \mathrm{Fil}^0 E &= \theta^{-1}(\mathrm{Fil} M \otimes \mathcal{O}_{\widehat{K}}) \\ \forall i \geq 1 \mathrm{Fil}^i E &= \mathrm{Fil}^i A_{cris} \cdot \mathrm{Fil}^0 \end{aligned}$$

Lorsque le groupe p -divisible G est isotrivial mod p son isocrystal est engendré par ses section horizontales. On en déduit le théorème suivant.

Théorème A.7. — *Supposons de plus que G est isotrivial mod p . Il y a alors des isomorphismes*

$$M_0[\frac{1}{p}] \otimes_{K_0} K \simeq M[\frac{1}{p}]$$

et

$$E[\frac{1}{p}] \simeq M_0[\frac{1}{p}] \otimes_{K_0} B_{cris}^+$$

comme φ -modules où $B_{cris}^+ = A_{cris}[\frac{1}{p}]$.

Il y a donc des inclusions strictement compatibles aux filtrations

$$tM_0[\frac{1}{p}] \otimes_{K_0} B_{cris}^+ \subset V_p(G) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}^+ \subset M_0[\frac{1}{p}] \otimes_{K_0} B_{cris}^+$$

un isomorphisme

$$M_0[\frac{1}{p}] \otimes_{K_0} B_{cris} \simeq V_p(G) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}$$

avec $B_{cris} = B_{cris}^+[\frac{1}{p}]$ et un autre isomorphisme

$$V_p(G) \xrightarrow{\sim} \text{Fil} \left(M_0[\frac{1}{p}] \otimes_{K_0} B_{cris}^+ \right)^{\varphi=p}$$

où sur $M_0 \otimes B_{cris}^+$, $\varphi = \varphi \otimes \varphi$ et Fil est la filtration associée à celle de $M[\frac{1}{p}]$ via l'isomorphisme $M_0[\frac{1}{p}] \otimes_{K_0} K \simeq M[\frac{1}{p}]$ et θ .

A.3. Le déterminant des périodes divisé par $2i\pi$ est une unité p -adique. —

A.3.1. *Énoncé et dévissage au cas C.M..* — Soit K comme précédemment et supposons de plus que son corps résiduel est algébriquement clos (ce que l'on peut toujours réaliser quitte à étendre les scalaires). Soit G un groupe p -divisible modulaire sur $\text{Spf}(\mathcal{O}_K)$ de dimension d et hauteur h . L'isomorphisme de B_{cris} -modules

$$V_p(G) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris} \xrightarrow{\sim} M_0[\frac{1}{p}] \otimes_{K_0} B_{cris}$$

du théorème A.7 induit un isomorphisme φ -équivalent

$$\alpha : \det V_p(G) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris} \xrightarrow{\sim} (\det M_0)[\frac{1}{p}] \otimes_{K_0} B_{cris}$$

Plus précisément, il y a une inclusion de B_{cris}^+ -modules compatible aux filtrations et Frobenius

$$u : T_p(G) \otimes B_{cris}^+ \hookrightarrow M_0 \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} B_{cris}^+$$

de conoyau annulé par t , d'où une inclusion

$$\det u : \det T_p(G) \otimes_{\mathbb{Z}_p} B_{cris}^+ \hookrightarrow (\det M_0) \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} B_{cris}^+$$

Via l'application de réduction modulo $\text{Fil}^1 B_{cris}^+$ et l'identification $M_0 \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \widehat{K} \simeq M \otimes_{\mathcal{O}_K} \widehat{K}$ (où $M = \text{Lie } E(G)$)

$$(M_0 \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} B_{cris}^+) / \text{Fil}^1 B_{cris}^+ \cdot (M_0 \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} B_{cris}^+) \simeq M \otimes_{\mathcal{O}_K} \widehat{K}$$

et $\text{Fil}(M_0 \otimes B_{cris}^+)$ est l'image réciproque de $\text{Fil } M \otimes \widehat{K}$ (où $\text{Fil } M = \omega_{G^D}$). Il existe donc d'après le lemme de Nakayama une base $(e_1, \dots, e_n)$ du B_{cris}^+ -module $M_0 \otimes B_{cris}^+$ telle que

$$\text{Fil}(M_0 \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} B_{cris}^+) = B_{cris}^+ e_1 \oplus \dots \oplus B_{cris}^+ e_{n-d-1} \oplus \text{Fil}^1 B_{cris}^+ e_{n-d} \oplus \dots \oplus \text{Fil}^1 B_{cris}^+ e_n$$

L'image de u est incluse dans $\text{Fil}(M_0 \otimes B_{cris}^+)$. On en déduit que

$$\det u : \det T_p(G) \otimes B_{cris}^+ \hookrightarrow \det M_0 \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \text{Fil}^d B_{cris}^+$$

qui définit donc un élément

$$\beta \in \left(\det T_p(G)^{-1} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \det M_0 \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \text{Fil}^d B_{cris}^+ \right)^{\varphi=Id}$$

où rappelons que φ agit par la multiplication par p sur $T_p(G)$ (cf. théorème A.5). Mais le corps résiduel de K étant algébriquement clos

$$(\det M_0, \det \varphi) \simeq (\mathcal{O}_{K_0}, p^{h-d} \sigma)$$

Donc,

$$\beta \in \det(T_p(G))^{-1} \otimes_{\mathbb{Z}_p} (\det(M_0))^{\varphi=p^{h-d}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} (\text{Fil}^d B_{cris}^+)^{\varphi=p^d}$$

Mais puisque (cf. [8])

$$(\text{Fil}^d B_{cris}^+)^{\varphi=p^d} = \mathbb{Q}_p \cdot t^d$$

Donc

$$\beta \in (\det T_p(G))^{-1} \otimes (\det M_0)^{\varphi=p^{h-d}} \otimes \mathbb{Q}_p \cdot t^d$$

Les structures entières $\det T_p(G) \simeq \mathbb{Z}_p$, $\det M_0 \simeq \mathcal{O}_{K_0}$ induisent une $\mathbb{Z}_p$ -structure sur $\mathbb{Q}_p t^d$. L'élément β fournit donc un élément de $\mathbb{Q}_p^\times / \mathbb{Z}_p^\times \cdot t^d$

Proposition A.8 (Faltings). — *L'élément β est entier : $\beta \in \mathbb{Z}_p^\times \cdot t^d$.*

Démonstration. Le groupe G étant modulaire on peut le mettre en famille : pour un morphisme $x : \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K) \rightarrow \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{K_0}[[x_i]]_{1 \leq i \leq d(h-d)})$, $G = x^* G^{univ}$ où G^{univ} désigne la déformation universelle de la fibre spéciale de G . Il existe de plus un rationnel $\alpha \in \mathbb{Q}_{>0}$ tel que $\forall i \ v_p(x^*(x_i)) \geq \alpha$. Le morphisme x se factorise donc en

$$x : \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K) \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{K_0}[[x_i]]_i)$$

où $\mathcal{C} = \mathrm{Spf}(R)$ est un modèle formel p -adique normal sans p -torsion sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{K_0})$ de la boule rigide formée des éléments de valuation supérieure ou égale à α . Il y a donc un morphisme de spécialisation $A_{cris}(R) \rightarrow A_{cris}(\mathcal{O}_K)$. Sur $\mathrm{Spec}(R/pR)$ le groupes $H \otimes R/pR$ est isogène au groupe définissant l'espace des déformations. Donc, si H désigne le groupe p -divisible restriction de G^{univ} à $\mathcal{C}$ il y a un isomorphisme de comparaison

$$V_p(H) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris}(R) \xrightarrow{\sim} M_0\left[\frac{1}{p}\right] \otimes_{K_0} B_{cris}(R)$$

(cf. [8]). On obtient comme précédemment un élément

$$\beta' \in \left((\det T_p(H))^{-1} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \det M_0 \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \mathrm{Fil}^d B_{cris}^+(R) \right)^{\varphi=Id} \simeq \mathbb{Q}_p t^d$$

où la dernière égalité résulte de [8]. Et bien sûr, via $A_{cris}(R) \rightarrow A_{cris}(\mathcal{O}_K)$, $\beta' \mapsto \beta$.

L'énoncé du théorème est donc invariant par transport parallèle : on peut transporter β parallèlement en n'importe quel point du disque unité $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{K_0}[[x_i]]_i)^{an}$ (quitte à agrandir le rayon de la boule). Le mieux est de choisir un point pour lequel la matrice des périodes est diagonalisable. On peut par exemple prendre un point C.M. ayant multiplication complexe par $\mathbb{Z}_{p^h}$ où h est la hauteur de G . En effet, l'action de $\mathbb{Z}_{p^h}$ permet de diagonaliser la matrice des périodes si l'on prend des bases de vecteurs propres pour cette action. Le résultat est démontré dans la section suivante dans ce cas particulier. $\square$

A.3.2. Étude des périodes entières des groupes p -divisibles ayant multiplication complexe par un ordre maximal non-ramifié. — Nous étudions ici les périodes des groupes p -divisible C.M. les plus simples, ceux ayant multiplication complexe par l'anneau des entiers d'une extension non-ramifiée de $\mathbb{Q}_p$. Soit donc G un groupe p -divisible de hauteur h et dimension d sur $\mathbb{Z}_{p^h}$ muni d'une action $\iota : \mathbb{Z}_{p^h} \rightarrow \mathrm{End}(G)$. On pourra par exemple prendre lorsque $d = 1$ le groupe formel d'exponentielle

$$f(T) = \sum_{n \geq 0} \frac{T^{p^{nh}}}{p^n}$$

qui est bien muni d'une action de $\mathbb{Z}_{p^h}$ puisque $\forall \zeta \in \mu_{p^h-1} \ f(\zeta T) = \zeta f(T)$ ou n'importe quel groupe de Lubin-Tate de hauteur 1 pour l'extension $\mathbb{Q}_{p^h}$.

Notons

$$\chi : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p} | \mathbb{Q}_{p^h}) \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^h}^\times$$

le caractère de Lubin-Tate. Notons $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{p^h} | \mathbb{Q}_p)$ le Frobenius et $\forall i \ \chi^{\sigma^i} = \sigma^i \circ \chi$. Il résulte de la classification des représentations cristallines abeliennes (Fontaine, cf. [14]) qu'il existe des entiers a_i , $0 \leq a_i \leq d$ tels que

$$V_p(G) = \prod_{i=0}^{h-1} \chi^{a_i \sigma^i}$$

où $\sum_i a_i = d$ et $a_i = \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_{p^h}} \mathrm{Lie}(G)_i$ avec

$$\mathrm{Lie} G = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}} \mathrm{Lie}(G)_i$$

$\iota(\mathbb{Z}_{p^h})$ agissant sur $\mathrm{Lie}(G)_i$ via σ^i .

Considérons l'application de comparaison

$$T_p(G) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{cris}(\mathbb{Z}_{p^h}) \hookrightarrow M_0 \otimes_{\mathbb{Z}_{p^h}} A_{cris}(\mathbb{Z}_{p^h})$$

où M_0 est le module de Dieudonné de la fibre spéciale de G . L'action ι permet de décomposer

$$\begin{aligned} T_p(G) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{\text{cris}}(\mathbb{Z}_{p^h}) &= \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}} (T_p(G) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{\text{cris}}(\mathbb{Z}_{p^h}))_i \\ M_0 &= \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}} M_{0,i} \end{aligned}$$

où $\iota(\mathbb{Z}_{p^h})$ agit sur la composante indexée par i via σ^i . La naturalité du morphisme de comparaison implique que celui-ci est somme directe de morphismes

$$(T_p(G) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{\text{cris}}(\mathbb{Z}_{p^h}))_i \hookrightarrow M_{0,i} \otimes_{\mathbb{Z}_{p^h}} A_{\text{cris}}(\mathbb{Z}_{p^h})$$

Après choix d'une base de $T_p(G)$ et $M_{0,i}$ comme $\mathbb{Z}_{p^h}$ -modules ce morphisme est donnée par la multiplication par un élément $x_i \in A_{\text{cris}}$ bien défini modulo $\mathbb{Z}_{p^h}^\times$. D'après la compatibilité stricte aux filtrations du morphisme de comparaison si $a_i = 0, x_i \notin \text{Fil}^1 A_{\text{cris}}$ et $x_i \in \text{Fil}^1 A_{\text{cris}}$ sinon. Notons alors $y_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ l'image de x_i dans $\text{Gr}^0 A_{\text{cris}}$, resp. $\text{Gr}^1 A_{\text{cris}}$.

Proposition A.9. — *Supposons $d = 1$ et soit i_0 l'unique indice tel que $a_{i_0} \neq 0$. Alors,*

$$\begin{aligned} \forall i < i_0 \quad v(y_i) &= \frac{p^{h+i-i_0}}{p^h - 1} \\ \forall i \geq i_0 \quad v(y_i) &= \frac{p^{i-i_0}}{p^h - 1} \end{aligned}$$

Démonstration. La compatibilité du morphisme de comparaison à l'action de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|\mathbb{Q}_{p^h})$ est équivalente à ce que

$$\forall \tau \in G_{\mathbb{Q}_{p^h}} \quad x_i^\tau = \chi_G(\tau)^{\sigma^i} x_i$$

où χ_G désigne le caractère galoisien associé à $V_p(G)$. Puisque $d = 1$, $\chi_G = \chi^{\sigma^{i_0}}$. Considérons maintenant le lemme suivant :

Lemme A.10. — *Soit $z \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ tel que $\forall \tau \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|\mathbb{Q}_{p^h}) \quad z^\tau = \chi(\tau)^{\sigma^i} z$. Alors,*

$$\exists j \in \mathbb{N} \quad v(z) \in \frac{p^i}{p^{jh}(p^h - 1)} + \mathbb{Z}$$

Démonstration. Pour $\lambda \in \mathbb{Q}$ notons $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p, \geq \lambda}$, resp. $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p, > \lambda}$, les éléments de valuations supérieure à λ , resp. strictement supérieure à λ . Notons $q = p^h$. Décrivons l'action de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|\mathbb{Q}_{p^h})$ sur $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p, \geq \lambda}/\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p, > \lambda} \simeq \overline{\mathbb{F}_p}$. Fixons $p^\lambda \in \overline{\mathbb{Q}_p}$ un élément tel que si $\lambda = \frac{r}{s}$ avec $r \wedge s = 1$ on ait $(p^\lambda)^s = p^r$. Soit $\tau_0 \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|\mathbb{Q}_{p^h}(p^\lambda))$ un relèvement du Frobenius $x \mapsto x^{p^h}$. L'inertie $I_{\mathbb{Q}_{p^h}}$ agit sur $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p, \geq \lambda}/\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p, > \lambda}$ via le caractère modéré

$$\tau \mapsto \frac{\tau(p^\lambda)}{p^\lambda} \bmod \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p, > \lambda} \in \overline{\mathbb{F}_p}^\times$$

Écrivons $z = up^\lambda$ où $u \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^\times$. Alors, modulo $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p, > \lambda}$

$$\begin{aligned} \forall \tau \in I_{\mathbb{Q}_{p^h}} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad \frac{\tau_0^k \tau(z)}{z} &\equiv \frac{\tau_0^k(u)}{u} \cdot \frac{\tau_0^k \tau(p^\lambda)}{p^\lambda} \quad \text{car } \frac{\tau(u)}{u} \equiv 1 \\ &\equiv u^{q^k - 1} \left(\frac{\tau(p^\lambda)}{p^\lambda} \right)^{q^k} \quad \text{car } \tau_0(p^\lambda) = p^\lambda \end{aligned}$$

Quant au caractère χ il vérifie la congruence

$$\forall \tau' \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|\mathbb{Q}_{p^h}) \quad \chi(\tau') \equiv \frac{\tau'(p^{\frac{1}{q-1}})}{p^{\frac{1}{q-1}}} \in \mu_{q-1}$$

L'hypothèse du lemme implique que

$$\forall k \in \mathbb{Z} \forall \tau \in I_{\mathbb{Q}_{p^h}} \quad u^{q^k-1} \frac{\tau(p^{q^k \lambda - \frac{p^i}{q-1}})}{p^{q^k \lambda - \frac{p^i}{q-1}}} \equiv 1$$

ce qui implique d'abord avec $\tau = Id$ que $\bar{u} \in \mathbb{F}_q^\times$ et que l'on peut donc supposer que $u = 1$ dans la congruence ci-dessus. De plus, pour $\mu \in \mathbb{Q}$, le caractère modéré

$$\begin{aligned} I_{\mathbb{Q}_{p^h}} &\longrightarrow \overline{\mathbb{F}_p}^\times \\ \tau &\longmapsto \frac{\tau(p^\mu)}{p^\mu} \end{aligned}$$

est trivial ssi $\mu \in \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$. Donc, $\forall k \in \mathbb{Z} \quad q^k \lambda - \frac{p^i}{q-1} \in \mathbb{Z}[\frac{1}{q}]$ ce qui implique facilement le lemme. $\square$

Il résulte du lemme précédent que

$$\begin{aligned} \forall i > i_0 \quad \exists j \in \mathbb{N} \quad v_p(y_i) &\in \frac{p^{i-i_0}}{q^j(q-1)} + \mathbb{Z} \\ \text{et } \forall i < i_0 \quad \exists j \in \mathbb{N} \quad v_p(y_i) &\in \frac{p^{h+i-i_0}}{q^j(q-1)} + \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Quant à y_{i_0} , étant donné que dans $\text{Gr}^1 A_{\text{cris}}$ t se transforme via $N_{\mathbb{Q}_{p^h}/\mathbb{Q}_p} \circ \chi$ et que $v(t) = \frac{1}{p-1}$,

$$\exists j \in \mathbb{N} \quad v_p(y_{i_0}) \in \frac{1}{q^j(q-1)} + \mathbb{Z}$$

Le morphisme de comparaison possède un quasi-inverse tel qu'avec composition avec celui-ci on obtienne la multiplication par t qui est de valuation $1/(p-1)$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \forall i \leq i_0 \quad 0 \leq v(y_i) &\leq \frac{p^{i-i_0}}{q-1} \\ \forall i < i_0 \quad 0 \leq v(y_i) &\leq \frac{p^{h+i-i_0}}{q-1} \end{aligned}$$

Remarquons maintenant que

$$\prod_i x_i = \beta t$$

où $\beta \in \mathbb{Z}_p$, et

$$v(\beta) + \frac{1}{p-1} = \sum_i v_p(y_i) \leq \frac{1}{p-1}$$

et donc $v(\beta) = 0$ i.e. $\beta \in \mathbb{Z}_p^\times$ et les valuations des y_i sont celle annoncées. $\square$

Il résulte donc de la démonstration de la proposition précédente que

Corollaire A.11. — *L'énoncé du théorème A.8 est vrai dans le cas de dimension 1 et de multiplication complexe par $\mathbb{Z}_{p^h}$.*

Attaquons maintenant le cas de dimension d quelconque. Commençons par remarquer qu'il résulte de l'étude du cas de dimension 1 et du théorème de Tate, $H^0(G_{\mathbb{Q}_{p^h}}, \mathbb{C}_p) = \mathbb{Q}_{p^h}$, que

Corollaire A.12. — *Pour tout entier i compris entre 0 et $h-1$,*

$$H^0(G_{\mathbb{Q}_{p^h}}, \mathbb{C}_p(\chi^{-\sigma^i})) = \mathbb{Q}_{p^h}.z_i$$

où $z_i \in \mathbb{C}_p$ est un élément de valuation $\frac{p^i}{p^h-1}$.

Il en résulte que l'on a une majoration des valuations des éléments y_i (les périodes partielles). Sachant que $\prod_i y_i = \beta$ on en déduit le résultat facilement. $\square$

On renvoie également à l'article [2].

Références

- [1] P. Berthelot, L. Breen, and W. Messing. *Théorie de Dieudonné cristalline. II*, volume 930. Springer-Verlag, Berlin, Lecture Notes in Mathematics, 1982.
- [2] P. Colmez. Périodes des variétés abéliennes à multiplication complexe. *Ann. of Math.*, 138(3) :625–683, 1993.
- [3] G. Faltings. Integral crystalline cohomology over very ramified valuation rings. *J. Amer. Math. Soc.*, 12(1) :117–144, 1999.
- [4] G. Faltings. A relation between two moduli spaces studied by V. G. Drinfeld. In *Algebraic number theory and algebraic geometry*, volume 300 of *Contemp. Math.*, pages 115–129, 2002.
- [5] L. Fargues. Application de Hodge-Tate duale d’un groupe de Lubin-Tate, immeuble de Bruhat-Tits du groupe linéaire et filtrations de ramification. *preprint*.
- [6] L. Fargues. L’isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld : décomposition cellulaire de la tour de Lubin-Tate. *preprint*.
- [7] L. Fargues. L’isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld : démonstration du résultat principal. *preprint*.
- [8] L. Fargues. Périodes cristallines entières des familles de groupes p -divisibles sur des bases générales et applications. *En préparation*.
- [9] J.-M. Fontaine. Formes différentielles et modules de Tate des variétés abéliennes sur les corps locaux. *Invent. Math.*, 65(3) :379–409, 1981/82.
- [10] M. J. Hopkins and B. H. Gross. Equivariant vector bundles on the Lubin-Tate moduli space. In *Topology and representation theory (Evanston, IL, 1992)*, volume 158 of *Contemp. Math.*, pages 23–88. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [11] W. Messing. The crystals associated to Barsotti-Tate groups : with applications to abelian schemes. *Lecture Notes in Mathematics*, 264, 1972.
- [12] M. Rapoport, Th. Zink. *Period spaces for p -divisible groups*. Number 141 in Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.
- [13] M. Raynaud. Schémas en groupes de type $(p, \dots, p)$. *Bull. Soc. Math. France*, 102 :241–280, 1974.
- [14] J.P. Wintenberger. Torseurs pour les motifs et pour les représentations p -adiques potentiellement de type CM. *Math. Ann.*, 288(1) :1–8.