

# Comparaison des théories de Deitmar et de Zhu

Paul LESCOT



Institut des Hautes Études Scientifiques  
35, route de Chartres  
91440 – Bures-sur-Yvette (France)

Décembre 2006

IHES/M/06/63

# COMPARAISON DES THÉORIES DE DEITMAR ET ZHU

PAUL LESCOT

RÉSUMÉ. Nous comparons deux des théories possibles de “ $F_1$ ”.

## 1. INTRODUCTION ET DÉFINITIONS

L’objet de cette note est d’exposer une relation entre deux théories du “corps à un élément”, dues respectivement à Deitmar ([1], [2]) et à Zhu ([4]). La théorie de Deitmar oublie complètement toute structure additive ; nous ferons voir que l’on peut, en un sens précis, la plonger dans celle de Zhu, et recréer ainsi une certaine structure additive (idempotente) sur les “anneaux de fonctions” des objets géométriques considérés. Ce point de vue mène à des descriptions qui nous semblent intuitivement très satisfaisantes (cf. les exemples (3.4) à (3.6)).

Les notations sont entièrement standard ; si  $A$  est un monoïde (noté multiplicativement), nous dénoterons par  $A^*$  l’ensemble de ses éléments inversibles. Si  $E$  est un ensemble,  $\mathcal{P}_f(E)$  dénotera l’ensemble de ses parties finies, et

$$\begin{aligned} j_E &: E \rightarrow \mathcal{P}_f(E) \\ x &\mapsto \{x\} \end{aligned}$$

l’injection canonique.

Nous nous placerons dans le cadre de la théorie de Zhu. L’article de ce dernier ([4]) étant malheureusement resté inédit, nous prendrons comme référence notre propre exposé ([3]).  $\mathcal{Z}$  désignera la catégorie des  $F_1$ -modules et  $\mathcal{Z}_a$  la catégorie des  $F_1$ -algèbres. Par  $\mathcal{D}$  nous entendrons la catégorie des  $F_1$ -anneaux au sens de Deitmar, c’est-à-dire ([1], p.88) la catégorie des monoïdes commutatifs.

Si  $A \in \mathcal{D}$  est un monoïde commutatif et  $B$  un sous-monoïde de  $A$ , nous dirons que  $A$  est *entier* sur  $B$  si, pour chaque  $a \in A$ , il existe un entier  $n \geq 1$  tel que  $a^n \in B$ .

Cette note a été rédigée lors d’un séjour à l’I.H.E.S., pendant l’automne 2006. Je remercie l’I.H.E.S. pour son invitation, son ambiance stimulante et ses excellentes conditions de travail, Christophe Soulé pour de nombreuses discussions, et Christophe Breuil pour ses encouragements.

## 2. UN LEMME

Le Lemme suivant est l’analogie, pour des monoïdes, d’un résultat classique de Dedekind sur les anneaux ; nous l’utiliserons, dans un travail subséquent, pour réinterpréter, dans notre cadre, les notions de *morphisme plat* et d’*extension non-ramifiée* de Deitmar ([2]).

---

*Date:* 18 Décembre 2006.

**Lemme 2.1.** *Soient  $A \in \mathcal{D}$  un monoïde commutatif, et  $B \subseteq A$  un sous-monoïde de  $A$  tel que  $A$  soit entier sur  $B$ .*

*Alors  $A$  est un groupe si et seulement si  $B$  en est un.*

*Démonstration.* Supposons que  $A$  soit un groupe, et soit  $b \in B$ ; alors il existe  $b' \in A$  tel que  $bb' = 1$ . Mais, par hypothèse, on peut trouver un entier  $n \geq 1$  tel que  $b'^n \in B$ , d'où :

$$\begin{aligned} 1 &= 1^n \\ &= (bb')^n \\ &= b^n b'^n \\ &= b(b^{n-1} b'^n). \end{aligned}$$

Soit  $c = b^{n-1} b'^n$ ; alors  $c \in B$  et  $bc = 1$  :  $b$  est donc bien inversible dans  $B$ . Chaque élément de  $B$  y étant inversible,  $B$  est un groupe.

Réciproquement, supposons que  $B$  soit un groupe, et soit  $a \in A$ ; par hypothèse, il existe un entier  $n \geq 1$  tel que  $a^n \in B$ .  $B$  étant un groupe, il existe  $b' \in B$  tel que  $a^n b' = 1$ ; mais alors :

$$\begin{aligned} 1 &= a^n b' \\ &= a(a^{n-1} b'), \end{aligned}$$

et  $a$  est inversible :  $A$  est un groupe. □

### 3. DEUX FONCTEURS

**Théorème 3.1.** *Pour  $A \in \mathcal{D}$ , posons  $\mathcal{F}(A) = \mathcal{P}_f(A)$  (l'ensemble des parties finies de  $A$ ), et définissons sur  $\mathcal{F}(A)$  la multiplication suivante :*

$$B.C =_{def} \{xy \mid x \in B, y \in C\}.$$

*Alors  $\mathcal{F}(A)$ , muni de la structure de  $F_1$ -module associée à sa structure naturelle de treillis (cf. [3], Théorème 1.5) et de la multiplication sus-définie, constitue une  $F_1$ -algèbre. De plus, si  $A_1$  et  $A_2$  sont deux éléments de  $\mathcal{D}$ , et  $\varphi : A_1 \rightarrow A_2$  un morphisme, alors  $\mathcal{F}(\varphi) : \mathcal{F}(A_1) \rightarrow \mathcal{F}(A_2)$  défini par :*

$$\forall B \in \mathcal{F}(A_1) \quad \mathcal{F}(\varphi)(B) = \{\varphi(b) \mid b \in A_1\}$$

*est un morphisme de  $\mathcal{Z}_a$ , et  $\mathcal{F}$  définit un foncteur covariant de  $\mathcal{D}$  dans  $\mathcal{Z}_a$ .*

*Démonstration.* Que  $\mathcal{F}(A) = \mathcal{P}_f(A)$ , muni de sa structure naturelle de treillis, constitue un  $F_1$ -module, a été établi en [3], Théorème 2.1.

Il est clair que la multiplication définie ci-dessus est associative, commutative, et d'élément neutre  $1_{\mathcal{F}(A)} = \{1_A\}$ ; sa distributivité par rapport à l'addition est également évidente, l'addition dans  $\mathcal{F}(A)$  n'étant autre que la réunion ensembliste. De plus, pour chaque  $B \in \mathcal{F}(A)$ , on a :

$$\begin{aligned}
0_{\mathcal{F}(A)}.B &= \emptyset.B \\
&= \{ab|a \in \emptyset, b \in B\} \\
&= \emptyset \\
&= 0_{\mathcal{F}(A)} ;
\end{aligned}$$

tous les axiomes de [3], Définition 3.1, sont bien satisfaits, et  $\mathcal{F}(A)$  est une  $F_1$ -algèbre. La validité de la définition de  $\mathcal{F}(\varphi)$  et la functorialité de  $\mathcal{F}$  peuvent alors être vérifiées sans problème.  $\square$

*Remarque 3.2.* Si  $A$  est le monoïde libre sur un ensemble fini  $X$  (en d'autres termes,  $A \simeq (\mathbb{N}^X, +)$ ), alors  $\mathcal{F}(A)$  s'identifie à la  $F_1$ -algèbre libre  $F_1[X]$  construite en [3] (cf. le Théorème 3.5 de [3], ainsi que la remarque le précédant).

Soit  $\mathcal{G} : \mathcal{Z}_a \rightarrow \mathcal{D}$  le "foncteur d'oubli" associant à une  $F_1$ -algèbre le monoïde multiplicatif sous-jacent.

**Proposition 3.3.** *Les foncteurs  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont adjoints l'un de l'autre.*

*Démonstration.* Soient  $A \in \mathcal{Z}_a$  et  $B \in \mathcal{D}$ ; il s'agit de faire voir l'existence d'une bijection naturelle :

$$\text{Hom}_{\mathcal{Z}_a}(\mathcal{F}(B), A) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}}(B, \mathcal{G}(A)) .$$

Soit donc  $\varphi : \mathcal{F}(B) \rightarrow A$  un  $\mathcal{Z}_a$ -morphisme; pour chaque  $b \in B$ ,  $\varphi(\{b\})$  est un élément  $\psi(b) \in A$ , et il est clair que  $\psi$  préserve la multiplication et l'élément neutre (car

$$\begin{aligned}
\forall (b, b') \in B^2 \quad \psi(bb') &= \varphi(\{bb'\}) \\
&= \varphi(\{b\}\{b'\}) \\
&= \varphi(\{b\})\varphi(\{b'\}) \\
&= \psi(b)\psi(b')
\end{aligned}$$

et

$$\psi(1_B) = \varphi(\{1_B\}) = \varphi(1_{\mathcal{F}(B)}) = 1_A ,$$

donc  $\psi : B \rightarrow A = \mathcal{G}(A)$  est un morphisme de  $\mathcal{D}$ . Définissant  $\Lambda(\varphi) = \psi$ , il est clair que

$$\Lambda : \text{Hom}_{\mathcal{Z}_a}(\mathcal{F}(B), A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(B, \mathcal{G}(A))$$

est une bijection, dont la bijection inverse est définie par :

$$\forall C \in \mathcal{F}(B) \quad \Lambda^{-1}(\psi)(C) = \bigvee_{x \in C} \psi(x) .$$

$\square$

**Exemple 3.4.** Si  $A = \langle x \rangle$  est le monoïde libre engendré par un élément  $x$ , alors  $\mathcal{F}(A) = F_1[x]$  est l'anneau des fonctions sur la droite affine  $\text{Spec}(C_\infty)$  de Deitmar ([1]).

**Exemple 3.5.** Si  $A = \langle \mu_n (n \geq 1) \rangle$  est le groupe cyclique d'ordre  $n$  ( $A = \langle x \rangle$  avec  $x^n = 1$ ), alors  $\mathcal{F}(A)$  est le quotient de  $F_1[x]$  par la congruence (cf.[3],Définition 3.2) engendrée par la relation  $x^n = 1$  :  $\mathcal{F}(A)$  est de cardinal  $2^n$ , et apparaît comme l'anneau des fonctions sur l'espace  $Spec(\mu_n)$  au sens de Deitmar ([1]).

**Exemple 3.6.** Si  $A = \langle \tau, \tau^{-1} \rangle \simeq \mathbf{Z}$  est un groupe monogène infini (engendré par  $\tau$ ),  $F_1[A] = F_1[\tau, \tau^{-1}]$  est le  $F_1$ -anneau des fonctions sur la droite projective  $\mathbb{P}^1$  de Deitmar ([1],p.93). On peut aussi le voir comme le quotient du  $F_1$ -anneau  $F_1[x, y]$  par la congruence engendrée par la relation  $xy = 1$ .

**Lemme 3.7.** *Pour tout  $A \in \mathcal{D}_r$ ,*

$$\mathcal{F}(A)^* = j_A(A^*) = \{\{u\} | u \in A^*\} .$$

*Démonstration.* Soit  $B \in \mathcal{F}(A)$  inversible : alors il existe  $C \in \mathcal{F}(A)$  tel que  $BC = 1_{\mathcal{F}(A)} = \{1_A\}$ . Alors on a nécessairement  $B \neq \emptyset$  et  $C \neq \emptyset$ ; soient alors fixés  $b_0 \in B$  et  $c_0 \in C$ . On a  $b_0 c_0 \in BC$ , donc  $b_0 c_0 = 1_A$  :  $b_0$  et  $c_0$  sont inversibles. Pour chaque  $b \in B$ , on a donc  $bc_0 \in BC = \{1_A\}$ , donc  $bc_0 = 1_A$  et  $b = c_0^{-1} = b_0$  :  $B = \{b_0\} = j_A(b_0) \in j_A(A^*)$  d'où  $\mathcal{F}(A)^* \subseteq j_A(A^*)$ . L'inclusion réciproque est évidente.  $\square$

**Corollaire 3.8.** *Soit  $\psi$  un morphisme de  $\mathcal{F}(A)$  dans  $\mathcal{F}(B)$  ; alors*

$$\psi(j_A(A^*)) \subseteq j_B(B^*) .$$

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que  $\psi$  transforme tout élément inversible de  $\mathcal{F}(A)$  en un élément inversible de  $\mathcal{F}(B)$ , et d'appliquer le Lemme 3.7.  $\square$

*Remarque 3.9.* Le foncteur  $\mathcal{F} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{Z}_a$  n'est pas pleinement fidèle : si  $A = \langle x \rangle$  est un monoïde libre à un générateur  $x$ , le morphisme de  $F_1[x] = F_1[A]$  dans lui-même défini par  $x \rightarrow x + 1$  ne provient pas d'un morphisme de monoïdes de  $A$  dans lui-même .

Néanmoins la situation est meilleure si l'on se restreint à la catégorie des groupes (abéliens) :

**Proposition 3.10.** *La restriction de  $\mathcal{F}$  à la catégorie  $Ab$  des groupes abéliens (laquelle est une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{D}$ ) est pleinement fidèle.*

*Démonstration.* Si  $A$  et  $B$  sont des groupes abéliens et  $\psi$  un morphisme de  $\mathcal{F}(A)$  dans  $\mathcal{F}(B)$ , il résulte de la Proposition que  $\psi(j_A(A)) \subseteq j_B(B)$ ; donc, pour chaque  $a \in A$ , il existe  $\phi(a) \in B$  tel que  $\psi(j_A(a)) = j_B(\phi(a))$ . Il est maintenant clair que  $\phi : A \rightarrow B$  est un morphisme, et que  $\psi = \mathcal{F}(\phi)$ . L'application naturelle

$$Hom_{Ab}(A, B) \rightarrow Hom_{\mathcal{Z}_a}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B))$$

est donc surjective, d'où le résultat.  $\square$

## RÉFÉRENCES

1. A.Deitmar *Schemes over  $F_1$* , in *Number Fields and Function Fields - two parallel worlds*, pages 87-100, Birkhäuser, Boston, 2005.
2. A. Deitmar *Some remarks on  $F_1$ -schemes*, preprint ; arXiv :math.NT/0608179 v7 14 Sep 2006
3. P.Lescot *Sur un "corps de caractéristique 1" (d'après Zhu)* Prépublication de l'I.H.E.S. M/06/61, Décembre 2006.
4. Y. Zhu *Combinatorics and characteristic one algebra*, preprint, 2000.

INSSET-UNIVERSITÉ DE PICARDIE, 48 RUE RASPAIL, 02100 SAINT-QUENTIN (FRANCE),  
PAUL.LESCOT@INSSET.U-PICARDIE.FR, FAX 00 33 (0)3 23 62 89 35, LAMFA, FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES  
ET D'INFORMATIQUE, 33, RUE SAINT-LEU, 80039 AMIENS CÉDEX, TÉL. 03 22 82 79 70, FAX 03  
22 82 78 38, PAUL.LESCOT@U-PICARDIE.FR,