Un pays dont on ne connaîtrait que le nom (Grothendieck et les 'motifs')

Pierre CARTIER

Institut des Hautes Études Scientifiques
35, route de Chartres
91440 – Bures-sur-Yvette (France)

Janvier 2009

IHES/M/09/01

Un pays dont on ne connaîtrait que le nom (Grothendieck et les « motifs »)

Pierre Cartier

À la mémoire de Monique Cartier (1932-2007)

Introduction

Il est inutile de présenter aux mathématiciens Alexander Grothendieck, reconnu pour l'un des plus grands scientifiques du XXème siècle. Aux autres publics, il faut expliquer que le personnage ne se confond pas avec une réputation un peu sulfureuse, celle d'un homme en rupture, commettant ce qu'on peut appeler le suicide de son œuvre, et en tout cas détruisant sciemment son École Scientifique. Ce qui m'intéresse ici, c'est l'interaction entre une œuvre scientifique et une personnalité hors de la norme. Son cas n'est pas unique dans l'histoire de la science : qu'on songe à Ludwig Boltzmann par exemple. Mais il y a des différences essentielles : l'œuvre de Boltzmann fut rejetée par la communauté scientifique de son temps, et ne s'imposa qu'après sa mort ; au contraire, l'œuvre scientifique de Grothendieck, en dépit de sa nouveauté, fut acceptée immédiatement et avec enthousiasme, et développée par des collaborateurs et des continuateurs de premier plan. Le cheminement de Grothendieck me semble différent : une enfance dévastée par le nazisme et ses crimes, un père absent tôt disparu dans la tourmente, une mère qui le tenait dans son orbe et qui lui rendit longtemps très difficile sa relation aux autres femmes, tout cela que compense un investissement sans frein dans l'abstraction mathématique, avant que la psychose tenue à distance par cela même ne le rattrape et ne l'engloutisse dans l'angoisse de la mort - la sienne et celle du monde.

Le cas de Georg Cantor est intermédiaire, et a été bien analysé par Nathalie Charraud. Après une violente opposition à ses idées, le ralliement de mathématiciens de grande influence, tels Dedekind et Hilbert, lui permit d'avoir son apothéose au Congrès International des Mathématiciens [1], de 1900 à Paris. L'École française d'Analyse, de Poincaré à Borel, Baire et Lebesgue, se convertit avec enthousiasme aux idées de Cantor. Le naufrage final de Cantor est peut-être à attribuer au « syndrome Nobel » : je désigne par ce nom un type de dépression qui a saisi certains des récipiendaires du prix Nobel. Incapables de confronter leur personne et ce qui leur reste à vivre - surtout si la distinction est venue assez tôt - à ce personnage statufié par la reconnaissance

[1] Cette terminologie officielle désigne le congrès mondial quadriennal des mathématiques. Noter le glissement entre « mathématiques » et « mathématiciens ».

mondiale, ils craignent d'avoir donné le meilleur d'eux-mêmes et de ne plus pouvoir se hisser à ces hauteurs. Forme d'autodérision aussi.

La typologie de Grothendieck est incroyablement complexe. Son obsession majeure, après Gauss et Riemann, et tant d'autres mathématiciens, tournait autour de la notion d'espace. Mais l'originalité de Grothendieck a été d'approfondir la notion de point géométrique [2]. Toute futile que puisse paraître une telle recherche, c'est un enjeu métaphysique considérable, et les problèmes philosophiques qui s'y rapportent sont loin d'être épuisés. Mais quelles préoccupations intimes, et quelles angoisses recouvre cette obsession du point ? La forme ultime de cette recherche, celle dont Grothendieck est le plus fier, tourne autour de la notion de « motif », vue comme un phare éclairant toutes les incarnations d'un même objet à travers divers habillages ponctuels. Mais c'est là aussi le point d'inachèvement de l'œuvre, un rêve, et non pas vraiment une création mathématique, contrairement à tout ce que je décrirai plus loin de son œuvre mathématique.

C'est donc sur une béance que débouche son œuvre. Mais l'autre originalité de Grothendieck est de l'accepter pleinement. La plupart des scientifiques sont plutôt soucieux d'effacer la trace de leurs pas sur le sable, de taire leurs fantasmes et leurs rêves, de construire leur statue intérieure - selon le mot de François Jacob. Un exemple typique est celui d'André Weil qui nous a laissé un produit fini, de facture classique, en deux mouvements : des *Œuvres Scientifiques*, recentrées par lui-même grâce à un *Commentaire* d'un intérêt palpitant, et une autobiographie, *Souvenirs d'apprentissage*, passionnante, mais soigneusement filtrée, où la pudeur et l'autocensure se masquent sous l'apparence d'un récit sans rides, et même désinvolte.

Grothendieck a joué un jeu différent, proche des *Confessions* de Rousseau. Du fond de la retraite qu'il s'est imposée depuis 1990 - et qu'il serait indécent de chercher à forcer - il nous a envoyé une volumineuse introspection [3] : « Récoltes et Semailles ». Je m'appuierai sur cette confession pour tenter de dégager quelques-unes de ses lignes de force. Il faut cependant ne pas être trop dupe : Grothendieck se montre à nu, du moins tel qu'il s'apparaît à lui-même, mais il y a des marques évidentes d'une paranoïa assez développée ; seule une analyse subtile pourrait révéler les blocages et les censures, partiellement inconscients. Mais l'existence de « Récoltes et Semailles » a suscité une curiosité malsaine dans un certain public, s'apparentant à l'engouement sectaire pour le gourou, le Prince Blanc imaginaire. Pour ma part, je m'en tiendrai à une analyse de l'œuvre, puis de la biographie de l'auteur, aussi rationnelle et honnête que possible, avant de laisser « Récoltes et Semailles » éclairer de l'intérieur cette œuvre exceptionnelle.

[2]A l'occasion du 40e anniversaire de l'IHES, est paru un « Festschrift » sous forme d'un numéro spécial des Publications Mathématiques, assez peu diffusé. Ma contribution, intitulée « La folle journée », est une analyse de la notion de point géométrique, où je fais la part belle aux idées de Grothendieck. Une traduction anglaise est parue au *Bulletin of the American Mathematical Society.*

[3]Grothendieck fut un ami très proche, et nous avons collaboré scientifiquement, mais je ne l'ai pas revu depuis 1990. Il m'a fait parvenir une partie seulement de « Récoltes et Semailles », celle qu'il jugeait que je pouvais comprendre. Pour la partie manquante, je me suis appuyé sur l'exemplaire de la bibliothèque de l'IHES.

Genèse de l'œuvre mathématique

Présenter en quelques pages son œuvre scientifique à un public non spécialisé relève de la gageure. Je prendrai pour ce faire appui sur l'analyse que Jean Dieudonné, longtemps son associé le plus proche, en a faite en introduction au « Festschrift » produit à l'occasion des 60 ans de Grothendieck [4].

Analyse fonctionnelle

L'héritage de la Théorie des Ensembles de Cantor a permis au XXème siècle la création de 1'« Analyse Fonctionnelle ». Il s'agit d'une extension du classique Calcul Différentiel et Intégral (créé par Leibniz et Newton), où l'on considère non pas une fonction particulière (par exemple l'exponentielle, ou une fonction trigonométrique), mais les opérations et transformations que l'on peut faire subir à toutes les fonctions d'un certain type. La création de la « nouvelle » théorie de l'intégration, par Émile Borel et surtout Henri Lebesgue, au début du XXème siècle, relayée par l'invention des espaces normés par Maurice Fréchet, Norbert Wiener et surtout Stefan Banach, a fourni de nouveaux outils de construction et de démonstration aux mathématiciens. C'est une théorie séduisante par sa généralité, sa simplicité, son harmonie, et capable de résoudre de difficiles problèmes avec élégance. Le prix à payer est qu'il s'agit le plus souvent de méthodes non-constructives (théorème de Hahn-Banach, théorème de Baire et ses conséquences) qui permettent d'affirmer l'existence d'un objet mathématique, sans en donner de construction effective. Il n'est pas étonnant qu'un débutant, épris de généralité, ait réagi avec enthousiasme à ce qu'il en avait appris à Montpellier, lors de ses études de licence avec des professeurs assez retardataires. En 1946, la théorie de Lebesgue avait presque 50 ans, mais n'était guère enseignée en France, où elle était encore considérée comme un outil de haute précision, à réserver aux artisans très habiles [5].

A son arrivée dans le monde mathématique parisien, à 20 ans en 1948, il a déjà écrit un long manuscrit où il a reconstruit une version très générale de l'intégrale selon Lebesgue. Placé dans un milieu favorable, à Nancy, où Jean Dieudonné, Jean Delsarte, Roger Godement et Laurent Schwartz (tous appartenant au noyau actif de Bourbaki) s'efforcent de dépasser Banach, il révolutionne le sujet, et d'une certaine manière le tue. Dans sa thèse, écrite en 1953 et publiée en 1955, il crée de toutes pièces une théorie des produits tensoriels pour les espaces de Banach et leurs généralisations, et invente la notion d'« espace nucléaire ». Cette notion, créée pour rendre compte d'un important théorème de Laurent Schwartz sur les opérateurs fonctionnels (le « théorème des noyaux »), sera exploitée par l'École russe autour de Gelfand, et sera une des clés de l'application des techniques de probabilités aux problèmes de Physique Mathématique (mécanique statistique, théorie « constructive » des champs quantiques). Il quittera ce

[4] *The Grothendieck Festschrift*, 3 volumes édités par P. Cartier, L. Illusie, N.M. Katz, G. Laumon, Y. Manin et K.A. Ribet, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1990.

[5] A la même époque, la Mécanique Quantique, autre pilier de la science du XXème siècle, et dont les fondements mathématiques font largement appel à l'Analyse Fonctionnelle, était bannie de l'enseignement universitaire français pour des raisons fort semblables.

sujet, après un article, dense et profond, sur les inégalités métriques, qui alimentera les recherches de toute une École (G. Pisier et ses collaborateurs) pendant 40 ans. Mais, de manière assez caractéristique, il ne se préoccupera guère de la descendance de ses idées, et affichera toujours beaucoup d'indifférence et même d'hostilité à l'égard de la Physique Théorique, coupable d'avoir détruit Hiroshima !

Algèbre homologique

Dès 1955, à l'âge de 27 ans, il commence une seconde carrière mathématique. C'est l'âge d'or des mathématiques françaises, où, dans l'orbite de Bourbaki, et sous l'impulsion surtout d'Henri Cartan, Laurent Schwartz et Jean-Pierre Serre, on s'attaque aux problèmes les plus difficiles de la géométrie, de la théorie des groupes, de la topologie. On dispose des outils nouveaux que représentent la théorie des faisceaux et l'algèbre homologique (inventés par Jean Leray d'une part, Henri Cartan et Samuel Eilenberg de l'autre), admirables de généralité et de souplesse. Les pommes du jardin des Hespérides sont ces fameuses conjectures [6] qu'André Weil énonce en 1954 : en apparence, il s'agit

---

[6] Voici une présentation simplifiée du problème. On considère un nombre premier p et une équation de la forme $y^2 = x^3 - ax - b$, où a, b sont des entiers modulo p. On veut compter le nombre N_p de solutions de cette équation, où x, y sont eux aussi des entiers modulo p. D'après Hasse (1934), on a l'inégalité $|\,N_p - p\,| \leq 2\sqrt{p}$; cette inégalité a trouvé récemment des applications dans la théorie du codage. André Weil, dans un résultat annoncé en 1940, et démontré complètement vers 1948, a considéré le cas d'une équation plus générale, de la forme $f(x, y) = 0$, où f est un polynôme à coefficients entiers modulo p. L'inégalité prend ici la forme $|\,N_p - p\,| \leq 2g\sqrt{p}$, où la nouveauté est l'entier g, le genre (il est égal à 1 dans le cas précédent). Le genre est un invariant algébrique de l'équation $f = 0$, mais dont Riemann a découvert la signification géométrique que voici : l'équation initiale s'écrit aussi comme une congruence $F(x, y) \equiv 0 \bmod p$, où le polynôme F a des coefficients entiers. On considère maintenant l'ensemble des solutions de l'égalité $F(x, y) = 0$, où x, y sont des nombres complexes ; ces solutions forment une « surface de Riemann » et celle-ci s'obtient en ajoutant à une sphère des anses au nombre de g.

L'inégalité ultime a été démontrée par Weil et Lang en 1954 : si l'on considère un système de m équations polynômiales $f_1 = \cdots = f_m = 0$ à n inconnues $x_1, \ldots, x_n$, le nombre de solutions N_p satisfait à une inégalité $|\,N_p - p^d\,| \leq Cp^{d-1/2}$ (l'entier d est la dimension algébrique, égale en général à $d = n - m$, la constante $C > 0$ est plus difficile à expliciter). Dans le cas précédent, on a $n = 2$, $m = 1$, $d = 1$, $C = 2g$.

Le défi proposé par Weil en 1949 est de donner une formule exacte, et non plus seulement une inégalité. Pour ce faire, il faut compter dans N_p aussi les points à l'infini (au sens de la géométrie projective) de la variété V définie par les équations $f_1 = \cdots = f_m = 0$, d'où un nombre $\overline{N}_p$, de solutions. Par une généralisation de la construction donnée plus haut, et nécessitant de remplacer les congruences modulo p par des égalités entre nombres complexes, on associe à V un espace S de dimension $2d$ localement paramétré par d nombres complexes (rappelons que l'on a $d = 1$, d'où $2d = 2$ pour les surfaces de Riemann). L'espace S possède des invariants géométriques, appelés nombres de Betti, et notés b_0, b_1, ... b_{2d}. Weil propose alors la conjecture

$$\overline{N}_p = S_0 - S_1 + S_2 + \cdots - S_{2d-1} + S_{2d},$$

$$S_i = a_{1,i} + \cdots + a_{b_i,i} \text{ avec } |a_{j,i}| = p^{i/2} \text{ pour } i = 0, 1, \ldots, 2d \text{ et } j = 1, \ldots, b_i.$$

En particulier, on a $b_0 = b_{2d} = 1$ et $S_0 = 1$, $S_{2d} = p^d$. Dans le cas de la dimension $d = 1$, on a $b_0 = 1$, $b_1 = 2g$, $b_2 = 1$ et $\overline{N}_p = 1 - (a_1 + \ldots + a_{2g}) + p$ avec $|a_i| = \sqrt{p}$, d'où immédiatement $|\overline{N}_p - 1 - p| \leq 2g\sqrt{p}$ (mais ici $\overline{N}_p = 1 + N_p$ dans le cas standard). Weil a traité de manière complète un certain nombre d'exemples classiques, en accord avec cette conjecture, et Chevalley a appliqué ces méthodes de décompte à la théorie des groupes finis.

d'un problème de combinatoire (compter les solutions de certaines équations où les inconnues sont prises dans un corps de Galois) d'une généralité décourageante (même si l'on connaît de nombreux cas particuliers significatifs). L'aspect fascinant de ces conjectures est qu'elles présupposent une fusion des deux pôles antinomiques du « discret » et du « continu », du « fini » et de l'« infini » : les méthodes inventées pour les besoins de la Topologie, pour contrôler les permanences dans la déformation continue des objets géométriques, doivent être mises à contribution pour énumérer des configurations en nombre fini. André Weil a aperçu la Terre Promise, mais il ne peut traverser la Mer Rouge à pied sec à l'instar de Moïse, et il ne dispose pas du vaisseau adéquat. Il a lui-même, pour les besoins de ses travaux, reconstruit la géométrie « algébrique » sur des bases purement algébriques, où la notion de « corps » est prédominante. Pour créer la géométrie « arithmétique » [7] dont on a besoin, il faut remplacer la notion algébrique de corps par celle d'anneau commutatif, et surtout inventer l'adaptation de l'algèbre homologique qui apprivoisera la géométrie arithmétique. André Weil lui-même n'est pas ignorant de ces techniques ni de ces problèmes, et ses contributions sont importantes et multiples (adèles, nombre dit de Tamagawa, théorie du corps de classes, déformation des sous-groupes discrets de symétries). Mais André Weil est défiant devant les « grandes machines » et ne se familiarisera jamais avec les faisceaux, l'algèbre homologique ou les catégories, au contraire de Grothendieck, qui va les prendre à bras le corps.

La première incursion de Grothendieck dans ce nouveau domaine est un coup d'éclat, connu sous le sobriquet de « Tôhoku » (car publié dans le Tôhoku Mathematical Journal japonais en 1957, avec le titre modeste « Sur quelques points d'algèbre homologique »). L'algèbre homologique, conçue comme un outil général dégagé de ses cas particuliers, a été inventée par Cartan et Eilenberg (leur traité « Homological Algebra » paraît en 1956). Ce dernier livre est un exposé très précis, mais qui se limite à la théorie des modules sur les anneaux, et les foncteurs « Ext » et « Tor » qui leur sont associés. C'est déjà une vaste synthèse de méthodes et de résultats connus, mais les faisceaux ne rentrent pas dans ce cadre. Les faisceaux, dans l'œuvre de Leray, sont nés en même temps que leur homologie, mais Leray construit celle-ci de manière *ad hoc*, en imitation des méthodes géométriques d'Élie Cartan (le père d'Henri Cartan). A l'automne 1950, Eilenberg, présent pour une année à Paris, entreprend avec Cartan de donner une caractérisation axiomatique de l'homologie des faisceaux, mais la construction conserve son caractère *ad hoc*. Lorsque Serre, en 1953, introduit les faisceaux en géométrie algébrique, le caractère apparemment pathologique de la « topologie de Zariski » le contraint à des constructions très indirectes. Le coup de génie de Grothendieck est de dépasser le problème par le haut, comme il allait le faire à de nombreuses reprises. En analysant les raisons du succès de l'algèbre homologique pour les modules, il dégage la notion

[7] Le géomètre allemand Erich Kähler a publié en 1958 un article (en italien) intitulé « Geometria Arithmetica » (*Annali di Matematica*, t. XLV, 368 pages), et le mot a fait fortune. Il s'agit aussi du domaine appelé *analyse diophantienne*, après le mathématicien grec Diophante. Il s'agit d'une théorie des équations dites indéterminées, du type $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$, qui possèdent une infinité de solutions en nombres réels ou complexes, mais où l'on se restreint à rechercher les solutions en nombres entiers (ou rationnels). L'existence de solutions fait alors question, et les propriétés de divisibilité, celles des nombres premiers, jouent un grand rôle, d'où l'aspect « arithmétique ».

de catégorie abélienne (inventée simultanément par D. Buchsbaum), mais surtout la condition technique qu'il désigne par le sigle AB5*. Cette condition garantit l'existence d'objets « injectifs ». Les faisceaux satisfont à cette condition AB5*, et du coup, la méthode des résolutions injectives, fondamentale pour les modules, s'étend aux faisceaux, sans artifice. Non seulement, elle fonde l'homologie des faisceaux, mais elle permet un développement totalement parallèle pour les modules et les faisceaux, avec importation des Ext et des Tor chez les faisceaux. Tout est redevenu naturel.

Géométrie algébrique et géométrie arithmétique

Après cette période de « rodage » (1955-58), Grothendieck énonce en 1958 son programme de recherches : créer la géométrie arithmétique par une (nouvelle) refondation de la géométrie algébrique, recherche de la généralité maximale, appropriation des nouveaux outils créés pour les besoins de la Topologie, et déjà éprouvés par Cartan, Serre, Eilenberg. Il ose la synthèse qu'aucun des acteurs de l'époque (Serre, Chevalley, Nagata, Lang, moi-même) n'a osée, s'y jetant avec son énergie et son enthousiasme caractéristiques. Les temps sont propices, la science mondiale vit sa plus grande phase de développement dans les années 60, et le désenchantement des années soixante-huitardes n'a pas encore frappé. L'entreprise de Grothendieck fonctionne grâce à des synergies inespérées : la puissance de travail et de synthèse de Dieudonné promu scribe, l'esprit rigoureux, informé et rationaliste de Serre, le savoir-faire des élèves de Zariski en géométrie et en algèbre, la fraîcheur juvénile du grand disciple Pierre Deligne, feront contrepoids à l'esprit aventureux, visionnaire et démesurément ambitieux de Grothendieck. L'institution nouvelle qu'est l'IHES, créée pour lui et autour de lui, mobilise une pléiade de jeunes talents internationaux. Organisée autour de la notion-clé de « schéma » [8], la théorie de Grothendieck annexe successivement toutes les parties de la géométrie, même les plus nouvelles comme celle des « groupes algébriques ». Utilisant une gigantesque machine : topologies de Grothendieck (étale, cristalline,...), descente, catégories dérivées, six opérations, classes caractéristiques, monodromie,... Grothendieck parvient à mi-chemin du but final que sont les conjectures de Weil. En 1974, Deligne y mettra la dernière main, mais entre temps, Grothendieck a tout laissé tomber en 1970, après 12 ans de règne scientifique sans partage sur l'IHES.

Les raisons de cet abandon en rase campagne ? Crûment dit, il est rattrapé par sa psychose, mais dans le contingent : désespoir d'être dépassé par son disciple préféré Deligne, « syndrome Nobel », mise à jour par la « révolution soixante-huitarde » de la contradiction entre le libertaire qu'il croit être et le mandarin universitaire qu'il est aux yeux des autres, sentiment d'échec devant certaines de ses tentatives mathématiques avortées (conjecture de Hodge, conjectures dites standard), épuisement et lassitude après 20 années d'engagement total, jour et nuit, au service de sa muse mathématique ? Un mélange de tout cela.

[8] Glissement épistémologique caractéristique : pour Chevalley, qui invente le nom vers 1955, il s'agit du « schéma » ou « squelette » d'une variété algébrique, qui reste l'objet central. Pour Grothendieck, le « schéma » est le point focal, source de toutes les projections et de toutes les incarnations.

Il reste à dire quelques mots de l'œuvre « posthume ». Après la rupture avec le milieu mathématique, essentiellement consommée lors du Congrès International des Mathématiciens à Nice (septembre 1970), et deux années de *Wanderung*, il va redevenir « professeur de base » dans cette université de moyenne importance (Montpellier) où il avait fait ses études de licence. Il aura encore quelques élèves, dont aucun n'atteint le niveau de son équipe de l'IHES, et dont il s'occupe avec des fortunes diverses. Jusqu'à sa retraite officielle, en 1988 à l'âge de 60 ans, il travaillera par à-coups en mathématique, laissant une œuvre « posthume » non sans importance. Trois écrits majeurs :

- « A la poursuite des champs » (écrit en 1983) est une réflexion de 600 pages sur les catégories multi-dimensionnelles. Là se mêlent la combinatoire, la géométrie et l'algèbre homologique dans un projet grandiose. Après plus de 15 années d'efforts de plusieurs côtés, on vient de proposer trois définitions sans doute équivalentes (ou presque) des catégories multi-dimensionnelles (au sens large [9]). L'enjeu n'est pas seulement pour les mathématiques « pures », car une bonne théorie des assemblages a de nombreuses applications potentielles : informatique théorique, physique statistique...

- « Esquisse d'un programme » est un texte rédigé en 1984 à l'appui d'une demande de poste au CNRS. Grothendieck y esquisse (le mot est propre) la construction d'une tour (ou d'un jeu de Lego) décrivant les déformations de courbes algébriques.

- « La longue marche à travers la théorie de Galois », écrit avant le précédent (en 1981), donne des indications partielles sur les constructions réclamées dans l'« Esquisse ».

Ces textes n'ont circulé que sous le manteau, à l'exception de l'« Esquisse » publiée grâce à l'insistance d'un groupe de fidèles. Curieusement, les vrais continuateurs de Grothendieck sont constitués par toute une École Mathématique russe (Manin, Drinfeld, Goncharov, Kontsevitch, pour ne citer que quelques-uns) qui ont eu très peu, si ce n'est aucun contact direct avec Grothendieck, et ont su capter l'héritage de méthodes issues de la Physique Mathématique - un domaine qu'il ignorait et abhorrait.

Éléments d'une biographie

Une famille de proscrits

Il convient de décrire d'abord les origines familiales de Grothendieck, pour une mise en perspective correcte. Il y a trois personnages : le père, la mère et le fils, remarquables chacun à leur manière, et un fantôme - une demi-sœur aînée, par sa mère, qui serait

[9] Il n'est pas très difficile de définir une catégorie multi-dimensionnelle stricte, au moyen d'une cascade de lois de compositions. Pour les catégories au sens large (on dit « lax » en anglais), l'enjeu est le suivant : lorsqu'on veut formuler une identité à un certain niveau, disons $A = B$, il faut créer un nouvel objet au niveau immédiatement supérieur, qui réalise la transformation de A vers B. Il s'agit donc d'une théorie dynamique des relations. Dans son esprit, elle est analogue à la théorie des types de Russell et Whitehead et comporte un volet géométrique ; d'ailleurs, Grothendieck conçoit ses « champs » comme une généralisation de la théorie de l'homotopie (qui étudie les déformations en géométrie). La fusion de la logique et de la géométrie, qui est en germe dans les champs et les topos, est une des directions les plus prometteuses ouvertes par Grothendieck.

récemment décédée aux États-Unis et qu'il n'a pratiquement jamais connue [10].

D'après mes informations, le père s'appelait Shapira - ce qui signe une origine hassidim. Il serait né à Belyje-Berega, aujourd'hui russe, à la limite de la Russie, de la Biélorussie et de l'Ukraine maintenant séparées. A l'époque, c'était une ville juive située en Ukraine, peuplée de juifs hassidim très pieux. En rupture avec ce milieu, Shapira fréquenta les milieux juifs révolutionnaires de Russie, et très jeune, à 17 ans, il participa à la révolution avortée de 1905 contre les tsars. Il paya cette participation de plus de 10 années de prison, et ne fut libéré qu'à l'occasion de la révolution de 1917. Ce fut le début d'une longue errance révolutionnaire, et la première d'une longue série d'incarcérations. J'ai entendu son fils me dire un jour avec une exaltation et une fierté certaines que son père avait fait de la prison politique sous 17 régimes différents. A quoi j'ai répondu, sans qu'il me démente, qu'il devrait figurer dans le Who's Who de la Révolution. Mais c'est un signe des tabous bolcheviks qui subsistent encore de constater que la plupart des histoires du socialisme - même celles qui sont écrites par des trotskistes comme Pierre Broué - ne donnent pratiquement aucun renseignement sur Shapira et ses proches compagnons. Il y a encore là matière à des recherches historiques.

D'après ce que je sais, en 1917, il se retrouve dans les S.R. (socialistes révolutionnaires) de gauche, une des factions qui, à Saint-Petersbourg, se disputent le pouvoir. On sait que Lénine écrasera à la fin toutes les factions autres que les bolcheviks, sans compter les purges internes de ces derniers. Un des meilleurs récits, bien que romancé à l'évidence, est le livre fameux de John Reed : *Dix jours qui ébranlèrent le monde*. Grothendieck m'a toujours affirmé que l'un des acteurs décrits dans ce livre était son père. Après les purges de Lénine, on retrouvera Shapira partout où une révolution d'extrême-gauche éclate en Europe dans les années 20 - et Dieu sait qu'il y en eut. Bien sûr, il est avec Bela Kun à Budapest, avec Rosa Luxemburg à Berlin, avec les Soviets de Munich. Lors de la montée du nazisme en Allemagne, il lutte aux côtés du S.A.P. (parti socialiste de gauche) contre les nazis, et doit quitter l'Allemagne à la prise du pouvoir par Hitler. On le retrouve naturellement dans la guerre d'Espagne, dans les Brigades Internationales, version P.O.U.M. (comme Simone Weil, quel étonnant parallèle !). Après la victoire franquiste en Espagne, il rejoint sa femme Hanka et leur fils Alexander, réfugiés en France.

La fin de son histoire est à la mesure de la honte de notre pays. Quand il arrive en France, c'est un homme brisé, selon le témoignage de son fils. Il se laisse aller sans beaucoup de ressort, et puis, comme tant d'autres réfugiés antifascistes, émigrés d'Allemagne ou d'Espagne, il est interné, début 1939, au camp du Vernet. Il ne s'agit pas là, bien sûr, de camps d'extermination, encore que beaucoup de « retenus » soient morts de malnutrition, ou de manque de soins (à Gurs par exemple) ; mais où est la frontière entre un camp de réfugiés, un camp d'internement et un camp de concentration [11] ? En tout cas, sans avoir retrouvé sa liberté, il sera livré par les autorités de Vichy aux

[10] Est-ce une coïncidence fortuite qu'il y ait aussi un fantôme dans la vie d'Einstein, une fille née avant son premier mariage, et dont la trace s'est perdue, aucun des deux époux n'ayant voulu retrouver leur enfant commun ?

[11] Mon collègue Szpiro m'a confirmé ce point, son père ayant été interné au Vernet pour des raisons analogues. Les témoignages commencent à se manifester, soixante ans plus tard !

nazis, et disparaîtra à Auschwitz. Le dernier témoignage qu'on ait de lui est un portrait à l'huile, hallucinant, dû au pinceau d'un codétenu du Vernet, et que son fils a conservé comme un talisman - on pourrait le prendre pour le portrait du fils tant leur ressemblance est frappante.

Hanka Grothendieck - c'est le nom de sa mère - est une Allemande du Nord. Dans les années 20, elle milite dans divers groupes d'extrême-gauche et s'essaye à l'écriture. Elle a une fille déjà mentionnée, puis rencontre Shapira, et Alexander naît à Berlin [12] en mars 1928. Elle émigre en France au moment de l'arrivée d'Hitler au pouvoir, et survit difficilement dans les cercles d'émigrés allemands - que Simone Weil fréquente beaucoup à l'époque. En septembre 1939, lors de la déclaration de guerre, la situation de ces réfugiés, déjà peu brillante, s'aggrave puisqu'ils sont désormais des « ressortissants ennemis ». En tout cas, Hanka et son fils seront internés à Mende dès 1939, et n'auront un peu de répit qu'après la débâcle de juin 1940.

Alexander - il tient beaucoup à cette orthographe - a été laissé derrière eux par ses parents lorsqu'ils quittent l'Allemagne. Il restera caché dans une ferme du Nord de l'Allemagne, jusqu'à 1938 environ (il a alors 10 ans), élevé par un instituteur du genre Freinet, qui pratique le « retour à la terre ». Cette idéologie « naturelle » (héritage du romantisme) est partagée par les groupes politiques les plus divers en Allemagne, des nazis aux socialistes, et anticipe ce que seront les Verts 50 ans plus tard. Mais la période dont il parlait le plus volontiers, c'est celle de son séjour au Chambon-sur-Lignon, de 1942 à 1944. On sait mieux maintenant ce qu'a été la résistance cévenole. Le Chambon-sur-Lignon, agréable station de vacances fréquentée surtout par des protestants, abrite un Lycée privé, le « Collège Cévenol », qui n'était guère, avant 1939, qu'une « boîte à bachot » pour jeunes gens protestants riches. Pendant la guerre, le Collège Cévenol, dirigé par la poigne énergique du pasteur Trocmé, est le centre d'une résistance spirituelle au nazisme - en liaison avec une résistance militaire ancrée dans la tradition huguenote - et fait un magnifique travail de sauvetage d'enfants juifs. Grothendieck fut pensionnaire au Foyer Suisse, et élève au Collège, et laissa un souvenir suffisamment vif pour que je puisse en recueillir des témoignages directs à la fin des années 1950.

Les années de formation

L'enfance est close - grâce au Collège Cévenol, il obtient son baccalauréat et devient étudiant à Montpellier en 1945. Commence la période de formation scientifique. Je vais donc reprendre de l'intérieur, avec l'aide de « Récoltes et Semailles », la gestation de l'œuvre mathématique que j'ai décrite plus haut de l'extérieur.

C'est à Montpellier, lors de ses études de licence, que se situe son premier épisode franchement mathématique. Il se dit très peu satisfait de l'enseignement qu'on y donnait à l'époque. On lui avait bien expliqué comment on calcule le volume d'une sphère ou d'une pyramide, mais sans jamais lui définir la notion de volume. C'est le

[12] La *Götterdämmerung* de Berlin en 1945 verra la destruction des archives d'état-civil. Grothendieck, de ce fait, aura des difficultés administratives répétées. Jusqu'au début des années 1980, il voyagera avec un passeport « Nansen » des Nations Unies, donné avec parcimonie aux apatrides. Après 1980, persuadé qu'il ne peut plus être appelé dans l'armée française, il consentira à se faire naturaliser français.

signe assuré d'un esprit mathématicien que de vouloir remplacer ce « comment » par un « pourquoi ». Le professeur de Grothendieck lui avait assuré qu'un certain Lebesgue avait résolu tous (!) les problèmes mathématiques, mais que cela serait trop difficile à enseigner. Seul, avec très peu d'indications, Grothendieck reconstitue une version extrêmement générale de l'intégrale de Lebesgue. Il décrit bien dans « Récoltes et Semailles » la genèse de cette première œuvre mathématique, faite dans l'isolement ; il découvre qu'il est mathématicien sans savoir qu'il existe des mathématiciens. Bien sûr, il était entouré de condisciples et de professeurs qui pratiquaient honnêtement et correctement les mathématiques, mais qui ne pouvaient passer pour des mathématiciens : en toute bonne foi, il se croit le seul mathématicien au monde [13].

C'est à son arrivée à Paris en 1948, licence de mathématiques en poche, que commence la période publique de Grothendieck - comme on parle de la période publique de cet autre petit rabbi qu'était Jésus. Son professeur de Montpellier - qui a fait autrefois avec Élie Cartan l'équivalent de l'époque du DEA - le recommande à son ancien maître. Il ignore qu'Élie Cartan est, à trois ans de sa mort, très diminué, et qu'il a un fils, Henri Cartan, devenu un mathématicien aussi célèbre que son père. C'est lui qui domine la scène mathématique parisienne - et donc française.

Le courant ne passe guère entre le grand universitaire protestant qu'est H. Cartan, et le jeune rebelle autodidacte. André Weil conseille d'envoyer Grothendieck à Nancy ; là, Jean Delsarte, un des pères fondateurs de Bourbaki, habile organisateur, a noyauté la Faculté dont il est le Doyen pour en faire la première marche de la conquête de l'Université par Bourbaki. Jean Dieudonné et Laurent Schwartz sauront discipliner Grothendieck juste ce qu'il faut pour qu'il ne s'éparpille pas dans toutes les directions, et surtout réfrène son goût immodéré pour la généralité extrême. Ils sauront lui suggérer des problèmes dans la lignée de son premier travail sur l'intégrale de Lebesgue. C'est trop peu dire que le disciple dépasse ses maîtres ; il pulvérise ce domaine de l'Analyse Fonctionnelle, mais par un travail solitaire où il n'a guère de compagnons ou de continuateurs.

C'est à Nancy qu'il devient adulte - au sens courant. D'une liaison avec sa logeuse lui naît un fils, Serge. Celui-ci a de nombreux frères et sœurs, et quand, quelques années plus tard, Grothendieck voudra s'occuper de lui personnellement, il est prêt à adopter toute la smalah. Il se lance dans une procédure en garde paternelle qui avait peu de chances d'aboutir - et qu'il compromet définitivement en utilisant la possibilité légale d'être son propre défenseur. Ce n'est que le début d'une vie familiale chaotique : il aura en tout cinq enfants de trois mères, et il leur sera aussi peu présent que son père ne l'avait été avec lui.

L'aventure de l'IHES

Ses travaux mathématiques de Nancy avaient établi sa renommée, et il aurait pu

[13] J'ai éprouvé les mêmes sentiments dans ma jeunesse provinciale (à Sedan) : j'avais le goût des mathématiques, mais ne pensait pas qu'on puisse en faire un métier. Après un grand-père sorti des Arts-et-Métiers, et un oncle sorti de Centrale, l'ambition de ma famille était de me voir entrer à Polytechnique ! J'aurais continué la lignée des ingénieurs de la famille, et à cela servaient les mathématiques !

continuer sur sa lancée. Mais il s'est très bien décrit lui-même comme un bâtisseur de maisons qu'il n'a pas vocation à habiter. Il commençait la carrière classique du chercheur, rapidement recruté et promu au CNRS, passant quelques années à l'étranger après sa thèse. Mais lorsqu'il revint de Sao Paulo, il avait clos le chapitre mathématique de l'Analyse Fonctionnelle. Commence alors ce qui sera sa grande période, de 1958 à 1970, qui coïncide avec l'apogée de Bourbaki. L'événement, c'est que Léon Motchane s'est lancé dans cette aventure folle de la création de l'IHES (Institut des Hautes Études Scientifiques de Bures-sur-Yvette). Léon Motchane, qui rêvait d'être mathématicien, avait fait une carrière fructueuse dans les « affaires » ; mais il souhaitait faire une œuvre qui lui survécut. Dieudonné, que nous avons rencontré à Nancy, après quelques années d'exil aux deux Amériques, souhaitait revenir en France. Motchane lui offrit la première chaire de mathématiques du futur institut, et Dieudonné mit à son acceptation la condition de s'associer Grothendieck. Il était à un tournant de sa carrière ; il avait atteint la limite d'âge de 50 ans imposée par Bourbaki à ses collaborateurs, et il avait produit son œuvre la plus originale : les « groupes formels ». Lui, qui était foncièrement un homme d'ordre et de tradition [14], se mit une deuxième fois au service d'une entreprise révolutionnaire : après Bourbaki, les deux aventuriers Motchane et Grothendieck [15].

Dans un extraordinaire partage des tâches, Grothendieck le jeune anime un des plus prestigieux séminaires mathématiques qui aient jamais existé. Il attire autour de lui tous les jeunes talents [16] et se livre passionnément à la découverte mathématique, dans des séances de 10 à 12 heures consécutives (!). Il formule un programme grandiose, qui doit opérer une fusion de l'arithmétique, de la géométrie algébrique et de la topologie. Bâtisseur de cathédrale, selon sa propre allégorie, il distribue le travail à ses équipiers. Chaque jour, il envoie d'interminables et illisibles feuilletons mathématiques à Dieudonné l'ancien ; celui-ci, assis à sa table de travail de 5 à 8 heures chaque matin, transforme ce gribouillis en une imposante collection de volumes, cosignés par Dieudonné et Grothendieck, et publiés dans les « Publications Mathématiques de l'IHES ». Dieudonné abdique toute prétention personnelle, et se met au service de cette œuvre, avec la même abnégation que pour Bourbaki. Dieudonné ne reste que peu d'années à l'IHES, et, à la création de l'Université de Nice, en devient le premier Doyen des Sciences. Il ne cesse pas pour autant sa collaboration avec Grothendieck, et trouvera encore l'énergie d'organiser en 1970 le congrès mondial des mathématiciens à Nice [17].

Mais ce duo est en fait un trio. Jean-Pierre Serre, avec son sens aigu de l'unité des mathématiques, sa culture scientifique large et profonde, sa vivacité de réflexion et

[14] Nous eûmes d'épiques discussions politiques, où il fustigeait ce qu'il appelait mon « communisme », qui n'était qu'un engagement dans le courant des « chrétiens progressistes » : la nuance lui échappait, mais peut-être avait-il raison après tout.

[15] Avec des destins très différents, tous deux étaient des héritiers des juifs révolutionnaires de Saint-Pétersbourg sous le tsar. D'ailleurs, les deux fils de Léon Motchane sont fortement engagés à gauche.

[16] Dans « Récoltes et Semailles », Grothendieck dénombre ses douze disciples. Le personnage central en est Pierre Deligne, qui combine dans ce récit les traits de Jean, « le disciple que Jésus aimait », et de Judas. Poids des symboles !

[17] C'est là que sera consommée la rupture entre Dieudonné et Grothendieck ; l'incompréhension était devenue totale entre un tenant de la science pour la science, responsable du Congrès Mondial, et le militant libertaire qui rêvait d'utiliser ce Congrès comme une tribune pour ses idées.

sa puissance technique, servira constamment de garde-fou. Il est l'intermédiaire obligé entre Weil et Grothendieck, qui ne se parlent plus directement, et contribue beaucoup à la clarification des conjectures de Weil déjà mentionnées. A une époque où la banlieue est tarifée téléphoniquement comme « conversations locales », c'est pendant plusieurs heures par jour que Serre et Grothendieck communiquent par ce truchement entre Paris et Bures. Serre est un parfait rabatteur - j'allais dire : entremetteur - mathématique, et il rabat le gibier pour qu'il tombe dans les filets de Grothendieck : dans des filets aussi solides, on ne se débat pas longtemps.

Le succès est immédiat et fracassant. Dès 1962, Serre déclare que la géométrie algébrique se confond avec la théorie des schémas [18]. Les publications, directes ou indirectes, s'amoncellent en des milliers de pages ; tout nouveau venu dans ce domaine mathématique se doit d'avoir tout lu, et quarante ans plus tard, nous n'avons pas encore à notre disposition l'exposé, assez succinct mais complet, qui s'imposerait. Comme Grothendieck l'a décrit dans ses allégories, un certain savoir-faire risque de se perdre, faute de souffle de vie. Après la retraite mathématique de Grothendieck, Deligne et Illusie feront une œuvre de chartistes en terminant de publier la série des « Séminaires de Géométrie Algébrique », mais Grothendieck ne leur en saura pas gré. Il est exact que ce qui subsiste de l'École de Grothendieck s'est refermé, qu'une certaine générosité s'est envolée, qu'un certain souffle s'est tari - mais on peut en dire autant de Bourbaki [19].

La rupture avec le « grand monde »

Mais la Roche Tarpéienne est proche du Capitole ! La reconnaissance scientifique de Grothendieck atteint son apogée en 1966. Au Congrès mondial des mathématiciens de Moscou, il doit recevoir sa consécration : la médaille Fields [20]. Les autorités soviétiques n'étaient pas très chaudes pour lui attribuer un visa (son père était devenu un « ennemi du peuple » après la révolution de 1917). C'était l'époque de la guerre du Vietnam, et de nombreux mathématiciens - dont Grothendieck et Smale, tous deux médaillés Fields 1966 - s'étaient engagés contre cette guerre. Dans le contexte de guerre froide entre l'URSS et les USA, alors très virulente, certains soviétiques ont peut-être cru pouvoir utiliser les mathématiciens. Mais la petite manifestation organisée par Smale à Moscou leur a bien démontré que les mathématiciens étaient difficiles à manipuler.

Si l'on veut bien permettre au novice en psychanalyse que je suis d'avancer une hypothèse, c'est à Moscou que la faille s'est ouverte pour Grothendieck, ou plutôt que la blessure fondamentale s'est rouverte. Cette blessure, c'est celle du père absent, victime des staliniens et des nazis, le père juif russe ressouvenu dans un pays où l'antisémitisme se réveille dans les années 1960 - s'il a jamais été éteint. Bien sûr, il y a ce que j'ai appelé plus haut le « syndrome Nobel », et sans doute Grothendieck s'est-il dit que sa médaille couronnait un programme inachevé, et soupçonnait-il déjà qu'il n'arriverait pas au bout de ses ambitions scientifiques ?

[18] La création de Grothendieck !

[19] Sort commun des institutions et des civilisations !

[20] Que l'on se plaît à comparer au prix Nobel (inexistant en mathématiques), mais limité à 3 ou 4 récipiendaires tous les 4 ans.

En même temps s'ouvrait la grande fêlure sociale qui conduira au mai 1968 français [21], après le Berkeley fiévreux de 1965. Grothendieck ne s'était guère impliqué politiquement au moment de la guerre d'Algérie [22] ; il voulait peut-être se racheter, et le passé révolutionnaire de ce père si admiré le rattrapait. En tout cas, cette fêlure sociale lui révéla ses contradictions. Certes, lui qui fut un proscrit, interné en France dès 1939, a toujours vécu de façon très modeste, même lorsqu'il fut devenu un des dieux des mathématiques mondiales. Il a toujours eu une attention extrême pour les SDF, ceux que la société largue sur le bord de la route ; sa maison fut toujours une sorte de cour des miracles, ce qui ne facilitait pas sa vie familiale, et il n'avait pas oublié les années difficiles de l'enfance.

Cependant, en 1968, lui qui s'est installé dans l'autoreprésentation du proscrit, de l'anarchiste, découvre qu'il est un pontife de la science mondiale, qu'il a autorité sur les idées et sur les gens. Dans cette période de contestation de toute autorité, même intellectuelle, il vit mal la coexistence de ses deux personnages ; ce sera le début d'une période de flottement, qui durera 4 ou 5 ans. Sa réponse provisoire sera la fondation d'un petit groupuscule, qui s'exprime dans un bulletin intitulé « Survivre », puis « Survivre et vivre ». Ce mouvement a l'allure d'une de ces sectes écolo-catastrophistes qui fleurirent dans les années 1970 : le danger (réel à l'époque) d'une guerre nucléaire se conjugue à l'obsession de la pollution, ou de la surpopulation. Le pacifisme intégral hérité de son père y trouve son compte, et il verse sa renommée de scientifique dans la balance de ses idées militantes. Il croyait sans doute qu'un argumentaire social se fait avec les méthodes de la démonstration mathématique, et ne fit que braquer des auditoires pourtant avertis de sa prééminence de mathématicien, et réceptifs aux idées qu'il colportait. J'ai souvenir de deux incidents assez pénibles, à Nice en septembre 1970, et à Anvers en juillet 1973, où il ruina par sa provocation délibérée les efforts patients de ceux qui luttaient dans son sens, mais avec une vision plus politique.

Suivirent quelques années d'errance : démission de l'IHES en septembre 1970, sous un prétexte assez mineur [23] ; voyages à l'étranger ; nomination temporaire au Collège de France [24] ; enfin, nomination comme professeur à l'Université de Montpellier, celle

[21] Maintenant que les « événements d'Algérie » sont devenus officiellement la « guerre d'Algérie » qu'ils étaient, pourra-t-on trouver un terme adéquat pour les « événements de 68 » ?

[22] Son insistance à ne pas devenir citoyen français lui avait évité, au prix fort, une mobilisation ou une remobilisation pendant la guerre d'Algérie. Je me souviens seulement qu'il m'a demandé, au début des années 60, pourquoi je n'avais pas déserté : je participai à cette maudite guerre, même si ce fut assez court.

[23] La découverte d'une subvention modeste à l'IHES accordée, sur la recommandation de Michel Debré, par la D.R.E.T. (organisme de financement de la recherche militaire). Le financement de l'IHES fut longtemps assez opaque, mais les crédits militaires n'y jouèrent qu'un rôle très accessoire. Il n'est cependant pas absurde d'imaginer qu'il y ait eu un plan mondial pour la remobilisation éventuelle des scientifiques dans une nouvelle guerre totale (contre l'URSS cette fois) et que l'IHES ait fait partie de ce réseau. Seul Léon Motchane aurait pu répondre.

[24] Il y fut professeur associé étranger de 1970 à 1972. Au moment où il aurait pu être titularisé, il expliqua clairement qu'il utiliserait sa chaire comme véhicule de ses idées écololibertaires. Suivit une curieuse compétition à trois (Grothendieck, Tits et moi-même), peu conforme aux habitudes du Collège de France, qui se termina par la nomination de Tits sur une chaire de Théorie des Groupes.

de sa jeunesse pour laquelle il n'avait eu qu'une estime modérée.

L'exil intérieur

De ses nouvelles années de Montpellier émerge un événement marquant, son procès. Comme je l'ai déjà dit, Grothendieck a toujours été accueillant à tous les marginaux. Dans les années 1970, la Lozère et le Larzac furent la Terre Promise de nombreux groupes hippies, et vue de l'extérieur, la maison de Grothendieck était l'un de ces phalanstères, et lui le gourou. A la suite de quelques incidents, réels ou grossis, la police locale était sur les dents, et fit un jour une descente chez Grothendieck. Le seul « délit » qu'on put relever contre lui était la présence d'un moine bouddhiste japonais, ancien étudiant en mathématiques au Tata Institute de Bombay, personnage fort inoffensif, mais dont le titre de séjour en France était expiré depuis trois semaines. C'est le genre de problème qu'un universitaire doit savoir comment régler, par une intervention au bon endroit, mais la philosophie de Grothendieck lui interdisait une telle démarche. Le résultat, inattendu, fut une convocation devant le Tribunal Correctionnel de Montpellier, six mois plus tard, le moine japonais déjà reparti aux antipodes. S'agissait-il d'un test préliminaire aux lois Pasqua, ou les autorités locales ont-elles confondu Grothendieck avec un petit hippie quelconque ? Ce qui devait n'être qu'un procès bâclé en dix minutes devint un événement majeur. Grothendieck, par une apparition au Séminaire Bourbaki, réussit à alerter quelques mathématiciens : Laurent Schwartz, Alain Lascoux et moi-même. Agitation dans le Landerneau intellectuel, mobilisation des réseaux, mise en jeu de la Ligue des Droits de l'Homme. Le jour du procès, le juge avait reçu 200 lettres de soutien à son justiciable, et d'un avion spécialement affrété débarquèrent toges de Doyen (Dieudonné en tête), soutanes mondaines de gauche, ténors du barreau. Grothendieck - dont c'était la deuxième apparition devant un prétoire - avait tenu à être de nouveau son propre avocat. Il fit une magnifique plaidoirie - dont j'ai quelque part gardé copie. Citant Socrate - naturellement - il conclut par l'exorde suivant : « Je suis poursuivi au nom d'une ordonnance de 1942 contre les étrangers. J'ai été interné pendant la guerre au nom de cette ordonnance, et mon père en est mort à Auschwitz. Je n'ai donc pas peur de la prison. Si vous appliquez la loi, je suis passible de deux ans de prison ferme ; je suis juridiquement coupable et je réclame donc ma peine. Bien entendu, sur un plan fondamental, je plaide non-coupable. C'est au juge de choisir : ou la lettre de la loi et donc la prison, ou les valeurs universelles et donc la relaxe ». Vint ensuite une « mise en forme juridique de l'argumentaire » par Maître Henri Leclerc, qui fut plus tard président de la Ligue des Droits de l'Homme. C'était là le résultat d'un compromis laborieusement négocié avec Grothendieck, qui préférait perdre un procès plutôt que de transiger avec les formes. Hélas, comme Grothendieck l'avait prédit, le juge fut lâche et ordonna six mois de prison avec sursis. La peine fut confirmée en appel, mais l'émotion médiatique ne fut plus au rendez-vous.

Comme je l'ai déjà dit, il a pris sa retraite en 1988, et vit depuis un exil intérieur dans un petit village de l'Ariège. Auparavant, il vivait près de la Fontaine de Vaucluse, dans une petite vigne cultivée par ses soins, au voisinage de sa fille aînée Johanna et de ses petits-enfants. Mais il semble maintenant avoir rompu tout lien familial. Il n'est pas indifférent que l'endroit où il vit soit si proche du camp du Vernet, tristement célèbre et associé à son enfance. Il n'a ni téléphone, ni adresse postale, et seuls quelques privilégiés connaissent l'endroit exact de sa retraite - sous promesse de ne pas le divulguer. Il vit seul, perçu par son voisinage comme un « professeur de mathématiques en retraite un peu fada ». Il a traduit sa spiritualité dans la tradition bouddhiste, et de ses ancêtres juifs orthodoxes a gardé le goût des interdits alimentaires. Il pratique la forme la plus extrême du végétarisme, et semble y avoir compromis sa santé. Le parallèle avec Simone Weil s'impose doublement, par son souci d'être l'égal des plus pauvres, et par une sorte d'anorexie mentale ; il est à craindre qu'il ait la même fin qu'elle, une forme de suicide par refus de s'alimenter.

Autopsie d'une œuvre

La rédaction du corpus géométrique

L'œuvre mathématique de Grothendieck en géométrie algébrique fait plus de 10.000 pages, publiées en deux séries. La première est intitulée « Éléments de Géométrie Algébrique » (avec le sigle EGA) en référence aux « Éléments » d'Euclide (et de Bourbaki) ; elle est entièrement de la plume de Dieudonné, et reste inachevée puisque 4 parties seulement ont été rédigées sur les 13 annoncées initialement. La deuxième série est intitulée « Séminaire de Géométrie Algébrique » (sigle SGA) en 7 parties. La composition en est plus mouvementée. Au départ, il y a ces Séminaires du Bois-Marie (du nom du domaine où est installé l'IHES) qu'il dirigea effectivement de 1960 à 1969. Les deux premiers furent rédigés par Grothendieck, ou sous son contrôle, et il veilla à leur publication ; le troisième séminaire fut rédigé essentiellement par Pierre Gabriel, et Michel Demazure (qui en a extrait sa thèse). Après, les choses sont plus complexes. Quand Grothendieck délaisse la scène mathématique en 1970, il laisse derrière lui un chantier inachevé, et un chantier en piteux état. Il y avait là des manuscrits (au sens propre) de Grothendieck, difficiles à déchiffrer, des exposés de séminaire déjà miméographiés, et des notes prêtes pour la publication. Il fallait en faire la synthèse, boucher les lacunes (importantes), ajouter un énorme travail de rédaction ; toutes tâches peu gratifiantes, dont il ne fallait attendre aucune récompense. Tout ceci fut accompli avec une grande fidélité, et une grande piété filiale, par Luc Illusie et Pierre Deligne. La pièce maîtresse, en vue de la démonstration des conjectures de Weil, est intitulée SGA 4, consacrée aux idées les plus nouvelles (en particulier les topos ; j'y reviens plus loin). En fait, lorsque Deligne annonce en 1974 sa démonstration complète des conjectures de Weil, les experts considèrent que les fondements sont insuffisants, et Deligne publie (en même temps que le chaînon manquant, SGA 5, des séminaires de Grothendieck) un volume supplémentaire, dû essentiellement à lui-même, sous le sigle curieux SGA 4 1/2. Grothendieck prend très mal cette nouvelle publication, et en profite pour dénigrer toute l'entreprise : naturellement, ce n'est pas ce que lui, Grothendieck, avait en tête, ses plans ont été tronqués, on l'a trahi... Il décrit ceci avec une image très forte :

l'équipe de bâtisseurs, qui, le Maître mort, se disperse, chacun emportant ses croquis et ses outils ; belle image, à ceci près que le Maître a abandonné ses équipiers, en se suicidant délibérément. C'est cette œuvre « assassinée » dont j'entreprends maintenant l'autopsie. Ayant le goût des symboles, Grothendieck se reconnaît douze disciples ; pour arriver à ce chiffre, il triche un peu car il n'existe pas de définition mathématique d'un disciple, et il oublie le disciple « posthume » (Z. Mebkhout) qu'il accueillera, puis rejettera, lors d'une polémique peu glorieuse. Dans « Récoltes et Semailles », il groupe son œuvre en douze thèmes ; je ne donnerai pas leur énumération complète, mais je vais en commenter quelques-uns.

Le premier thème mentionné est celui de sa thèse : l'Analyse Fonctionnelle. Il dit lui-même que, rétrospectivement, il s'agit plutôt d'un exercice d'école, d'un échauffement intellectuel. Sans doute, la perspective que Grothendieck donnait à l'Analyse Fonctionnelle n'est-elle plus d'actualité ; les grands problèmes internes à la théorie ont été résolus, le plus souvent par Grothendieck, et ce sujet est devenu une discipline de service, ses méthodes irriguant l'analyse de Fourier (ou la forme plus récente des ondelettes), ou les équations aux dérivées partielles. Grothendieck était entraîné dans le courant de la topologie « qualitative » de l'époque (qui convenait fort bien à son tempérament), et l'on apprécie plus aujourd'hui les méthodes « quantitatives » [25].

Les grands problèmes

Mais, bien sûr, tous les autres thèmes concernent ce qui fut sa grande entreprise : la géométrie algébrique. Une des sources du développement mathématique est constituée par les grands problèmes, grandes énigmes dont la formulation relativement simple ne donne aucune prise à l'attaque. Ce qu'on appelait improprement le dernier théorème de Fermat était une conjecture d'une simplicité biblique, exprimée en symboles par : « la relation $a^n + b^n = c^n$ est impossible à réaliser avec des entiers a, b, c, n, sauf éventuellement avec $n = 2$ ». Elle a été résolue récemment (A. Wiles et R. Taylor), au prix de la construction d'un édifice considérable et complexe, s'appuyant largement sur les méthodes de Weil et de Grothendieck. Le problème mathématique actuellement le plus prestigieux, et le plus déroutant, est l'hypothèse de Riemann. Ces deux problèmes, Fermat et Riemann, sont d'une certaine manière futiles ; le problème de Fermat concerne une équation très particulière, et celui de Riemann peut s'interpréter en terme de régularités très subtiles dans la répartition apparemment aléatoire des nombres premiers. En soi-même, un contre-exemple à l'hypothèse de Riemann, dans l'état actuel des connaissances, aurait des conséquences « pratiques » très réduites, et ne serait pas une catastrophe.

[25] Son dernier mémoire, paru au Bulletin de la Société Mathématique de São Paulo en 1956, apparaît d'abord comme une étude des foncteurs entre espaces de Banach (prémonition de son investissement ultérieur dans les catégories), bien que le terme de « foncteur » n'apparaisse pas. Le résultat central est formulé comme l'équivalence de deux de ces foncteurs. Dans un exposé au Séminaire Bourbaki, je reformulai son résultat comme une inégalité portant sur les matrices (avec la « constante de Grothendieck »), résultat « quantitatif » qui fut le point de départ de travaux ultérieurs (G. Pisier). Mais Grothendieck n'accepta pas ma reformulation et se prétendit trahi.

Ce qui nous importe ici, c'est une certaine perception des problèmes. Devant l'impossibilité de prouver l'hypothèse de Riemann, on a fait de la fuite en avant. Hasse (à la suite d'Artin et de Schmidt) a formulé et résolu, vers 1930, un problème analogue à l'hypothèse de Riemann, en le traduisant sous la forme d'une inégalité (voir la note 6). L'étape suivante occupera Weil de 1940 à 1948. Dans tous ces cas, par analogie avec la fonction zêta de Riemann, liée aux nombres premiers [26], on associe des fonctions zêta aux objets géométriques et arithmétiques les plus variés ; puis, en route pour prouver la propriété analogue à celle de Riemann, ce qu'on a fait avec beaucoup de succès ! Toutes ces fonctions zêta ont beaucoup contribué à structurer le champ de l'arithmétique, et c'est bien guidé par cette préoccupation que Weil formule ses conjectures en 1949. Weil est un esprit classique, attaché à la clarté et la précision, et ses conjectures ont ces caractéristiques. Mais pour Grothendieck, les conjectures de Weil ne sont pas tant intéressantes en elles-mêmes que comme test de la solidité de ses conceptions générales. Grothendieck distingue les mathématiciens bâtisseurs, et les explorateurs, mais se voit les deux à la fois (André Weil était certainement moins un bâtisseur que lui, et abhorrait les « grosses machines », même s'il en a construit quelques-unes).

La méthode favorite de Grothendieck s'apparente à celle de Josué à la conquête de Jericho. Il faut emporter la place, mais en construisant un système de sapes autour du problème ; à un moment donné, sans qu'on ait vraiment à livrer bataille, tout tombe. C'est aussi la méthode des Romains, lors de la dernière révolte juive, où Massada fut conquise au prix de formidables travaux de terrassement. Grothendieck, lui, est persuadé que si l'on arrive à une vision unificatrice suffisante des mathématiques, à pénétrer suffisamment en profondeur l'essence mathématique et la stratégie des concepts, les problèmes particuliers ne sont plus qu'un test et l'on n'a plus besoin de les résoudre en eux-mêmes.

Cette stratégie a assez bien réussi à Grothendieck, même si ses rêves l'entraînaient trop loin et qu'il ait fallu l'influence correctrice de Dieudonné et de Serre. Mais, j'ai déjà dit que Grothendieck n'accomplit que les trois quarts du chemin, et laissa la conclusion à Deligne. La méthode de Deligne est totalement orthogonale à celle de Grothendieck : il connaît à fond tous les ressorts de la méthode de son maître, tous les concepts, toutes les variantes. Sa démonstration de 1974 est une attaque de front et une merveille de précision, où les étapes s'enchaînent les unes aux autres dans un ordre naturel, sans surprises. Les auditeurs de ses exposés eurent l'impression, jour après jour, qu'il n'y avait aucune nouveauté - alors que chaque exposé de Grothendieck vous introduisait dans un monde nouveau de concepts, toujours plus généraux - mais le dernier jour, tout était en place, et la victoire acquise. Deligne abattait les obstacles l'un après l'autre, mais chacun était d'un style familier. Je pense que cette opposition de méthode - ou plutôt de tempérament - est la vraie raison du conflit personnel qui s'est développé entre eux. Je pense aussi que le fait que « Jean, le disciple préféré, ait écrit seul le dernier

[26] Qu'on se rappelle une de ses définitions,

$$\zeta(s) = \prod (1 - p^{-s})^{-1}$$

où le produit est étendu à tous les nombres premiers $p = 2, 3, 5, 7, 11, \ldots$.

Évangile » explique en partie la retraite farouche où s'est enfermé Grothendieck.

La méthode

Nous arrivons au cœur de la méthode mathématique de Grothendieck, de sa vision unificatrice. Des douze grandes idées, dont il se fait à juste titre gloire, il en retient trois qu'il met au-dessus du reste, et qu'il énonce sous forme de la progression :

$$\text{SCHÉMA} \longrightarrow \text{TOPOS} \longrightarrow \text{MOTIF}$$

dans un sens de plus en plus englobant. Toute sa stratégie scientifique est organisée sur une progression de concepts de plus en plus généraux. L'image qui me vient à l'esprit est celle de ce temple bouddhiste que je visitai vers 1980 au Vietnam. Selon la tradition, l'autel était une série de gradins, surmonté d'une figure couchée du Bouddha - là aussi la tradition - un Bouddha avec une face énorme, mais dont les traits étaient ceux d'un sage que la tradition locale décrivait comme le Montaigne vietnamien du XIème siècle, si vous voulez. Quand on suit l'œuvre de Grothendieck dans son développement, on a ainsi l'impression d'aller de degré en degré vers la perfection. La face du Bouddha est en haut, face humaine et non symbolique, vrai portrait et non représentation traditionnelle.

Avant de détailler le sens de la trilogie énoncée ci-dessus, il faut parler des qualités de styliste de Grothendieck. C'est un maître de la dénomination, et il en use comme d'une de ses stratégies intellectuelles majeures. Il a un talent particulier pour nommer les choses avant de se les approprier et de les conquérir, et beaucoup de ses choix terminologiques sont très remarquables. Mais là aussi, son expérience est singulière. Sa « Muttersprache » est l'allemand, et il n'a jamais communiqué qu'en allemand avec sa mère, dans les nombreuses années de symbiose étroite avec elle, jusqu'à sa mort. Quand je l'ai connu vers 1953, je sentais en parlant avec lui qu'il pensait en allemand - et mon sens de lorrain ne me trompait pas là-dessus.

II a un sens esthétique remarquable. Pourtant, je n'ai jamais compris son attirance évidente pour les femmes laides. Je n'arrive pas non plus à comprendre pourquoi il a toujours vécu dans des logements horribles ; il travaille la nuit, en général dans une pièce immonde, avec le crépi qui tombe, et en tournant le dos à la fenêtre (à la recherche de quelle humiliation ?). Et pourtant, quand il cherche des images mentales pour expliquer ses idées scientifiques, il y a la « belle demeure parfaite », le « beau château dont on a hérité », toutes allégories de la belle maison. Lui-même se décrit en bâtisseur. Toutes ces images, il les utilise avec un bonheur remarquable. S'il a longtemps pensé en allemand, il a depuis longtemps acquis le sens du français, et son bilinguisme lui permet de jouer des germanismes à bon escient. En français, il utilise un registre de langue fantastique, allant du plus familier au plus élaboré, avec un sens des mots absolument extraordinaire.

Sa stratégie est donc de nommer. De là vient mon titre : « Un pays dont on ne connaîtrait que le nom », car c'est bien là sa manière de procéder. Les « motifs » représentaient pour lui l'étape ultime, celle qu'il n'a pas atteinte ; par contre, les deux étapes intermédiaires (schémas et topos) ont été franchies.

La trilogie

Les schémas

Il n'est pas question de donner ici une introduction technique à la notion de *schéma*. Le terme lui-même est dû à Chevalley, avec une acception plus restrictive que celle de Grothendieck (voir note 8). André Weil, dans ses *Foundations of Algebraic Geometry*, avait étendu à la géométrie algébrique abstraite (c'est-à-dire sur un corps quelconque, non nécessairement celui des nombres réels ou complexes) la méthode de recollement par cartes locales que son maître Élie Cartan avait utilisée en géométrie différentielle (après Gauss et Darboux). Mais la méthode de Weil n'était guère intrinsèque, et Chevalley s'était demandé ce qui était invariant dans une variété au sens de Weil - interrogation bien caractéristique de Chevalley. La réponse, inspirée des travaux antérieurs de Zariski, était simple et élégante : le schéma de la variété algébrique est la collection des anneaux locaux des sous-variétés, à l'intérieur du corps des fonctions rationnelles. Pas de topologie explicite, à l'opposé de Serre qui à peu près au même moment introduit ses variétés algébriques au moyen de la topologie de Zariski et des faisceaux. Chacune des deux approches avait ses avantages, mais aussi ses limitations : - corps de base algébriquement clos chez Serre ; - variétés irréductibles chez Chevalley. Dans les deux cas, les deux problèmes fondamentaux du produit des variétés, et du changement du corps de base, ne s'abordaient que de manière indirecte. Pour les extensions futures à l'arithmétique, le point de vue de Chevalley était le mieux adapté, comme le remarqua bientôt Nagata.

Galois a sans doute été le premier à percevoir la polarité entre équations et solutions. On doit distinguer le domaine où les coefficients des équations algébriques sont choisis (celui des constantes) du domaine où chercher les solutions des équations. Weil garde cette distinction du « corps de définition » d'une variété et du « domaine universel », mais il n'est pas vraiment explicite sur le fait que le corps de définition ait un sens intrinsèque, obsédé qu'il est de son idée de spécialisation. Pour Serre, il n'y a qu'un seul domaine (nécessairement, un corps algébriquement clos), ce qui est satisfaisant pour les problèmes « géométriques », mais élude beaucoup de questions intéressantes. Chez Chevalley (à la suite de Zariski), l'objet central est le corps des fonctions rationnelles, avec son corps de définition apparaissant comme corps des constantes, et le domaine universel est pratiquement éliminé.

Grothendieck fera la synthèse en s'appuyant essentiellement sur la présentation conceptuelle de Zariski-Chevalley-Nagata. Les schémas sont donc une manière de coder les systèmes d'équations, et les transformations qu'on peut leur faire subir ; la théorie des idéaux, développée au début du XXème siècle par Macaulay et Krull, avait déjà les mêmes ambitions, et nous lui sommes redevables d'une foule de résultats techniques.

La manière dont Grothendieck présente la problématique de Galois est la suivante. Un schéma est un objet « absolu », disons X, et le choix d'un domaine de constantes (ou corps de définition) correspond au choix d'un autre schéma S et d'un morphisme [27] π_X de X dans S. Dans la théorie des schémas, un anneau commutatif s'identifie à un schéma, son spectre [28], mais à un homomorphisme de l'anneau A vers l'anneau B correspond, en sens inverse, un morphisme du spectre de B vers celui de A. De plus, le spectre d'un corps a un seul point sous-jacent (mais il y a beaucoup de points différents en ce sens) ; par conséquent, la donnée du corps de définition comme inclus dans le domaine universel correspond à la donnée d'un morphisme de schéma π_T de T dans S. Une solution du « système d'équations » X, avec le « domaine de constantes » S, à valeurs dans le « domaine universel » T, correspond à un morphisme ϕ de T dans X tel que π_T soit le composé de ϕ et de π_X, soit en symboles :

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\pi_X"] \\ T \arrow[ur, "\phi"] \arrow[r, "\pi_T"'] & S \end{tikzcd}$$

Admirable simplicité, et point de vue d'une grande fécondité, mais changement complet de paradigme ! Le point de vue central des mathématiques « modernes » est fondé sur la primauté des ensembles. Une fois acceptée l'existence des ensembles (simples « classes » ou « collections »), et des constructions que l'on peut effectuer sur eux (dont la plus importante est de pouvoir considérer les sous-ensembles d'un ensemble donné comme éléments d'un nouvel ensemble), tout objet mathématique est, en droit, un ensemble, et coïncide avec l'ensemble de ses points [29]. Les transformations sont des transformations ponctuelles, en principe [30]. Dans les diverses formes de la géométrie (différentielle, métrique, affine, algébrique), l'objet central est la variété [31] vue comme ensemble de points. Dès le XIXème siècle, on s'est habitué à distinguer les points réels des points complexes des courbes ou des surfaces définies par des équations polynomiales. Bien plus, dans l'étude des équations diophantiennes, on considère un système d'équations $f_1 = \cdots = f_m = 0$ en les inconnues $x_1, \ldots, x_n$, avec des polynômes $f_1, \ldots, f_m$ à coefficients entiers. La pratique de ces équations a conduit à distinguer les solutions réelles ou complexes, mais aussi entières ou rationnelles ; il faut aussi considérer, ce qui est moins orthodoxe, les solutions dans un corps de Galois (par exemple, les entiers modulo p, où p est un nombre premier), ou même, après Kummer et Hensel, dans un corps p-adique. Il était donc devenu d'usage courant de considérer des solutions d'équations

[27] D'emblée, on s'appuie sur la philosophie des catégories : on définit la catégorie des schémas, avec ses objets (les schémas) et ses transformations (les morphismes) ; un morphisme f relie deux schémas X et Y, ce qui se symbolise par $f : X \to Y$.

[28] C'était l'idée fondamentale de Gelfand d'associer une algèbre normée commutative et un espace. Grothendieck se souvient là de son premier investissement en Analyse Fonctionnelle, où la théorie de Gelfand était devenue centrale après 1945. Le terme de « spectre » provient directement de Gelfand.

[29] Cet ensemble doit être « structuré », ce qui se fait en utilisant une version ensembliste de la théorie des types de Russell et Whitehead.

[30] Mais la possibilité de considérer, disons, les droites (ou les cercles) dans l'espace comme points d'un nouvel espace, permet d'incorporer à la géométrie des transformations de points en droites (ou en cercles).

[31] Au sens étymologique : « domaine de variation ».

prises, de manière simultanée et concurrente, un peu partout. Pour Grothendieck, *le schéma est le mécanisme interne, la matrice*[32]*, qui engendre les points de l'espace* : le diagramme ci-dessus s'exprime en disant que ϕ est un T-point du S-schéma X, et ceci quel que soit le S-schéma T.

Dans un article récent (voir la note 2), j'ai étudié, de manière très mathématique, le problème du point géométrique, et je ne vais pas répéter ici cette analyse. Disons seulement que l'analyse purement mathématique, par Gelfand, puis par Grothendieck, de la notion de point s'est rencontrée avec une réflexion fondamentale en Physique Mathématique, du statut du point en Physique Quantique. L'expression la plus systématique de cette dernière réflexion est la « Géométrie non-commutative » de Connes. La synthèse est loin d'être achevée. La parenté de plus en plus manifeste entre le groupe de Grothendieck-Teichmüller[33] d'une part, et le groupe de renormalisation de la Théorie Quantique des Champs[34] n'est sans doute que la première manifestation d'un groupe de symétrie des constantes fondamentales de la physique, une espèce de groupe de Galois cosmique ! Grothendieck n'avait pas prévu cette évolution, et ne la souhaitait sans doute pas, à cause de ses préjugés contre la physique (dus pour une bonne part à son refus véhément du complexe militaro-industriel). Il se peut que le rapprochement aurait pu se faire plus tôt si les contraintes du système soviétique n'avaient pas freiné la diffusion des idées scientifiques au travers du rideau de fer.

Quelque part dans « Récoltes et Semailles », Grothendieck se compare à Einstein pour sa contribution au problème de l'espace. Il a raison, et sa contribution a la même ampleur que celle d'Einstein[35]. Einstein et Grothendieck ont tous deux approfondi une vision de l'espace, où celui-ci n'est pas un réceptacle vide pour les phénomènes, une scène de théâtre neutre, mais l'acteur principal de la vie du monde et de l'histoire de l'Univers. Ce lointain descendant de la théorie des tourbillons de Descartes est le moteur principal de notre compréhension du monde physique après le XXème siècle !

Les topos

Examinons maintenant les *topos*[36]. Nous avons vu que la géométrie des schémas est une géométrie avec une pléthore de points, du moins avec la notion très généralisée de point liée au diagramme de la page précédente. Les topos réalisent au contraire une géométrie sans points. L'idée d'une géométrie sans point n'est pas nouvelle ; à vrai dire, c'est la plus ancienne. Dans le point de vue euclidien, on considère des figures géométriques, dont certaines sont des points, mais il y a aussi des droites, des plans, des cercles... et ce n'est qu'à l'époque moderne, après le succès de la théorie des

[32] Je prends ici le mot « matrice » en son sens commun, non pas dans son sens mathématique habituel de tableau de nombres.

[33] Ainsi baptisé par Drinfeld, qui est l'un des mathématiciens qui ont pénétré le plus en profondeur l'« Esquisse d'un programme » déjà citée de Grothendieck.

[34] Surtout dans la reformulation récente de Kreimer et Connes.

[35] N'oublions pas non plus l'investissement profond d'Einstein dans la bataille contre le militarisme, sur une ligne politique bien voisine de celle de Grothendieck !

[36] Certains puristes voudraient que le pluriel soit « topoi », conformément au grec classique. Je suivrai Grothendieck en écrivant « un topos » et « des topos ».

ensembles, qu'on a pris l'habitude de considérer toute composante d'une figure géométrique comme un ensemble de points. Pour le moderne, une droite est l'ensemble de ses points, ce n'est pas un objet primitif, mais dérivé. Pourtant, rien n'empêche de proposer un cadre axiomatique de la géométrie où sont mis sur le même pied points, droites, plans... On connaît ainsi des axiomatiques de la géométrie projective (Birkhoff) où la notion primitive est celle de « plat » (généralisation des droites, plans...) et où la relation fondamentale est celle d'incidence : le point est sur la droite, la droite est dans le plan... Mathématiquement, on considère une classe d'ensembles (partiellement) ordonnés appelés lattices [37], et une géométrie correspond à l'un de ces lattices.

Dans la géométrie d'un espace topologique, et particulièrement dans l'utilisation des faisceaux, le lattice des parties ouvertes occupe le devant de la scène, et les points sont relativement secondaires. On pourrait donc remplacer un espace topologique par le lattice de ses ouverts, sans grand dommage, et cette idée a été proposée à plusieurs reprises. Mais l'originalité de Grothendieck a été de reprendre l'idée de Riemann que les fonctions holomorphes multivaluées vivent en réalité, non pas sur les ouverts du plan complexe, mais sur des surfaces de Riemann étalées. Les surfaces de Riemann étalées se projettent les unes sur les autres et forment donc les objets d'une catégorie. Or un lattice est un cas particulier de catégorie, celui dans lequel il y a au plus une transformation entre deux objets donnés. Grothendieck propose donc de remplacer le lattice des ouverts par la catégorie des ouverts étalés. Adaptée à la géométrie algébrique, cette idée résout une difficulté fondamentale, liée à l'absence d'un théorème des fonctions implicites pour les fonctions algébriques. C'est ainsi qu'il introduit le site étale associé à un schéma. Les faisceaux peuvent être considérés comme des foncteurs particuliers sur le lattice des ouverts (vu lui-même comme catégorie) et se généralisent donc en des faisceaux étales, qui sont des foncteurs particuliers sur le site étale.

Grothendieck jouera de nombreuses variations sur ce thème, avec un grand succès, dans divers problèmes de constructions géométriques (problème des « modules pour les courbes algébriques », par exemple). Le plus grand succès sera la possibilité de définir la théorie homologique qui lui est nécessaire pour attaquer les conjectures de Weil : la *cohomologie étale l-adique des schémas*, tel est son nom.

Mais il y a encore une étape à franchir dans l'abstraction. Reprenons la progression

$$\text{SCHÉMA} \longrightarrow \text{SITE ÉTALE} \longrightarrow \text{FAISCEAUX ÉTALES.}$$

Grothendieck réalise qu'on peut se placer directement à la dernière étape, et que toutes les propriétés géométriques d'un schéma sont codées dans la catégorie des faisceaux étales. Cette catégorie appartient à une espèce particulière de catégories qu'il baptise « topos ».

Voici alors le dernier acte de la pièce. Il est typique de la folle générosité des idées de Grothendieck, et aussi de la légèreté avec laquelle il abandonnait ses enfants (mathématiques !). Notre héros avait remarqué que les faisceaux sur un espace donné formaient

[37] Les hypothèses à faire sont l'existence d'un plus petit et d'un plus grand élément (le vide et le contenant universel), et celle de l'intersection et du joint de deux plats. Dans les vingt dernières années, ce point de vue a été développé de nouveau sous le nom de « matroïde » ou « géométrie combinatoire » (principalement par Rota et Crapo).

une catégorie qui avait, en gros, toutes les propriétés de « la » catégorie des ensembles. Or, après les résultats d'indécidabilité de Gödel et de Cohen en théorie des ensembles, il y a non pas une catégorie des ensembles, mais divers modèles non équivalents de la théorie des ensembles (au sens logique de « modèle »). Il était donc naturel d'explorer les relations entre topos et modèles de la théorie des ensembles. Grothendieck était aussi ignorant, et peut-être aussi méprisant, de la Logique que son Maître Bourbaki, tout autant que de la Physique Mathématique. Il appartint à d'autres (surtout Bénabou, Lawvere et Tierney) de résoudre l'énigme : les topos sont exactement les modèles de la théorie des ensembles, mais dans une logique particulière, qu'on appelle « intuitionniste », et où le principe du Tiers-exclus n'est pas valable. Il est très remarquable que cette logique ait été inventée par un fameux topologue, Brouwer, et qu'avec un peu de recul, elle s'impose naturellement en vertu du fait que l'intérieur de l'adhérence d'un ensemble ouvert ne lui est pas égal [38].

Mais l'invention des topos donne une liberté inouïe au jeu mathématique, et permet de briser le carcan de « la » théorie des ensembles. Rejouer une pièce mathématique bien connue dans le décor nouveau d'un topos un peu exotique peut amener des surprises, et faire découvrir des accents nouveaux dans des vers ressassés ; parfois, cette nouvelle représentation révèle des trésors mathématiques. D'un point de vue plus général, un topos porte en lui sa propre logique [39], et définit donc une espèce de logique modale, ou plutôt une logique du « hic » et du « nunc », une logique spatio-temporelle où la valeur de vérité d'une assertion peut dépendre du lieu et du temps [40].

D'un point de vue plus technique, Peter Freyd a appliqué avec succès les méthodes de topos pour simplifier la méthode du « forcing » de Cohen, et sa démonstration d'indécidabilité de l'hypothèse du continu. Il serait aussi souhaitable de conjuguer la méthode des topos avec les résultats récents de théorie des modèles concernant la conjecture de Mordell-Lang [41].

On comprend mieux maintenant pourquoi Grothendieck considérait la notion de topos comme centrale, alors que le concept plus général de catégorie n'était pour lui qu'un outil.

Les motifs

Il nous reste à donner quelques indications sur les *motifs.* L'image que Grothendieck donne lui-même, c'est celle d'une côte rocheuse, de nuit, éclairée par un phare. Le phare est tournant, et il éclaire alternativement une portion de la côte ou une autre.

[38]Version topologique du fait que la double négation d'une propriété ne lui est pas nécessairement égale (en logique intuitionniste) : violation du Tiers-exclus.

[39]En termes techniques, dans tout topos, l'ensemble des sous-objets de l'objet final est un lattice de Heyting, version intuitionniste d'une algèbre des propositions (les lattices de Boole sont la version logique « classique »)

[40]A ma suggestion, la juriste Mireille Delmas-Marty et le mathématicien Jean Bénabou s'étaient rencontrés pour examiner la possibilité de fonder sur les topos la base théorique d'un droit fédéral (du type européen). Je ne crois pas que ces efforts aient vraiment abouti, mais l'idée est à reprendre.

[41]Voir là-dessus un exposé récent d'Élisabeth Bouscaren au Séminaire Bourbaki (mars 2000, exposé 870).

De manière analogue, les diverses théories cohomologiques connues, dont les multiples qu'il a lui-même inventées, sont ce qu'on voit et il nous faut remonter à la source, construire le phare qui unifiera la représentation du paysage. D'une certaine manière, la stratégie scientifique est inverse de celle qui était à l'œuvre dans les schémas. Dans la représentation donnée ci-dessus, le S-schéma X était donné, et, de là, on pouvait réaliser ses diverses incarnations : pour chaque S-schéma T, on peut construire l'ensemble des T-points de X. Ici, le lieu central est inconnu, seules certaines de ses incarnations sont accessibles : image théologique ?

Grothendieck lui-même n'a rien publié sur ce sujet et s'est contenté de quelques remarques. Je pense que Manin est le premier à avoir donné une contribution au sujet, puis ce fut un long silence. Dans ces dernières années, il y a eu un regain d'activité et d'actualité, et le programme s'est précisé. La contribution la plus ambitieuse est celle de Voevodsky : il construit une catégorie d'objets, appelés motifs, qui est le lieu des invariants géométriques, et chaque schéma définit un motif particulier. Mais, dans une telle catégorie, on peut faire migrer des « morceaux d'objets », et l'image du patrimoine génétique migrant à travers les êtres vivants me semble pertinente. Que ceci soit possible résulte de la définition des « poids » donnée par Deligne, et qui était la pièce maîtresse de sa démonstration des conjectures de Weil.

L'outil créé par Voevodsky répond sans doute aux attentes de Grothendieck, mais il risque d'être d'un emploi difficile. Les bons outils se doivent d'être simples d'emploi. Aussi, les quelques progrès qui ont été faits l'ont été en restreignant les ambitions ; ils ont nom « structures de Hodge mixtes », « motifs de Tate mixtes », et chacun de ces objets est l'expression d'un groupe fondamental de symétries, tel le groupe de Grothendieck-Teichmüller déjà mentionné. En fait, même dans ce champ restreint, il y a déjà une tâche immense, et des trésors inestimables à déterrer. Grothendieck s'est plaint du côté trop économe, trop raisonnable, de tout ceci, et accable les tâcherons de sa hauteur de visionnaire. Mais il me semble qu'en présence de visionnaires mathématiques comme Grothendieck - ou bien Langlands - qui ont formulé des programmes d'une ambition folle, mais aussi parfois imprécis, la bonne stratégie scientifique consiste à isoler un morceau assez précis et restreint pour que l'on puisse avancer, et assez vaste pour qu'on ramasse quelque chose d'intéressant. Philosophie de tâcheron ?

Anatomie d'un auteur ; le retour de la religion

Je ne me hasarderai pas à un diagnostic de notre patient, faute de compétence, et je ferai seulement quelques commentaires guidés par la sympathie. Ce qui frappe d'abord chez Grothendieck, c'est l'expression de la souffrance : souffrance d'avoir laissé une œuvre inachevée, sentiment d'avoir été trahi par ses collaborateurs et successeurs. Dans un moment de vraie lucidité, il a dit à peu près ceci : « J'étais le seul à avoir le souffle, et ce que j'ai transmis autour de moi, ce n'était pas le souffle, mais la tâche. J'ai eu des tâcherons autour de moi, mais aucun d'entre eux n'a eu vraiment le souffle ! ». Commentaire vrai et profond, mais qui ne répond pas à la question de savoir pourquoi il a délibérément clos la bouche d'où émanait ce souffle ! D'après ce qu'on sait de sa vie actuelle, il est sujet à des crises de dépression cyclique. II me semble que ses capacités de création scientifique étaient la meilleure antidote à cette dépression, et que l'immersion dans un milieu scientifique vivant (Bourbaki et l'IHES) favorisait cette création en lui donnant une dimension collective ; a contrario, dans le relatif désert scientifique de Montpellier, et encore plus dans sa farouche retraite, l'isolement, le manque de personnalités à sa hauteur à qui s'opposer ou se comparer, ne le protègent plus contre ces irruptions de la souffrance.

Pour rester sur un terrain plus sûr, je voudrais parler de la dimension religieuse de sa vie. Qu'elle soit permanente et profonde, c'est ce qui ressort de ses dires. II a eu des moments d'hallucination visuelle et auditive : il décrit ces apparitions divines et parle de cantiques qu'il chante avec ses deux voix simultanées, la sienne et celle de Dieu. C'est à la suite d'une série de ces hallucinations - ou apparitions - qu'il lança un message eschatologique qui ne suscita aucune réponse !

Quels sont ses antécédents ? J'ai signalé que son père était né dans une communauté hassidim d'Ukraine, là où des « fous de Dieu » étaient ces ermites qui se faisaient emmurer vivants dans des tours munies d'un seul guichet par lequel ils recevaient l'aumône des fidèles. Mais Grothendieck ne s'est jamais rattaché au judaïsme, dans aucune de ses variantes établies. Il dit s'inscrire dans une tradition bouddhiste ; j'ignore qui l'a introduit à ce système de pensée, mais j'ai déjà mentionné ce visiteur qui provoqua sans le vouloir le procès. A la fin des années 60, Grothendieck visita le Vietnam en butte aux bombardements américains, et il eut une longue liaison, en France, avec une élève vietnamienne (officiellement, bonne communiste, mais...). Une de ses obsessions fondamentales est liée à la nourriture, et il pratique une forme extrême de végétarisme. Là, les deux traditions, juive et bouddhiste, se rejoignent aisément.

Sa propre Trinité se compose de Dieu-le-Père, de la déesse-mère, et du diable. Il nomme le premier :« le bon Dieu » ; je ne comprends pas bien pourquoi il a choisi cette dénomination tirée d'une piété populaire un peu désuète, mais il semble évident que ce n'est pas le Bouddha, plutôt l'image du père absent (d'ailleurs, dans l'orthodoxie bouddhiste, Bouddha n'est pas Dieu !). Le personnage central est la déesse-mère, qu'il décrit quelque part comme une femme très séduisante qu'il prénomme Flora. La déesse-mère est présente dans beaucoup de religions (y compris dans un christianisme officiellement monothéiste), mais un phénomène assez récent est le développement, au Japon et au Vietnam, du culte de Kannon (ou Kan-Eum, ou Dame de Miséricorde [42]). Le lien de cette dévotion de Grothendieck avec la figure de sa mère est évident. Il a vécu en symbiose étroite avec elle, qui était très affaiblie après l'épreuve des camps de détention nazis et français, pendant les vingt ans qui séparent son arrivée à lui en France en 1938, de sa mort, à elle, en 1957 ; il porte son nom [43], il lui a dédié sa thèse, partageait la

[42]Lors d'un voyage au Vietnam, j'ai pu constater de curieux phénomènes de mimétisme entre la Vierge Marie des catholiques (encore nombreux) et la Kannon des bouddhistes, quand il n'y avait pas aussi récupération par le régime communiste (dans une stèle votive installée à l'endroit du dernier raz-de-marée de Hué). Après tout, les mêmes sculpteurs travaillent pour les divers commanditaires. Incroyable floraison de sanctuaires neufs dédiés à Kannon !

[43]Ce n'est pas sans mal que j'ai appris le nom de son père, qu'il ne mentionnait jamais. Merci à mes amis russes, après la perestroika, de m'avoir aidé dans cette recherche.

langue allemande avec elle. D'après son témoignage, sa folle passion pour les femmes a attendu la mort de sa mère pour se déployer, de la fin des années 50 à la fin des années 80.

Le symptôme le plus inquiétant est son obsession du diable. D'après ses derniers visiteurs, lui qui n'avait pas théologisé sa religion, s'est lancé dans la rédaction d'une somme sur l'action du diable dans le monde (il a toujours été un obsessionnel de l'écriture !). Son catastrophisme n'est pas nouveau, et il était en phase avec les terreurs des années 70 (guerre nucléaire globale et pollution). Plus récemment, il y eut cet incident déjà mentionné : à l'instar de Paco Rabanne, il avait reçu révélation de la date de la fin du monde, et il précisait bien qu'il s'agissait de la fin du « tout », pas seulement de notre petite terre. Par charité, il la communiqua à 200 ou 300 personnes, tirées de sa liste de correspondants scientifiques, et les exhorta à la repentance avant l'explosion finale : il y aurait peu d'élus. Ce courrier qui n'avait suscité aucune réponse fut suivi d'une rétractation dépitée, après la date fatale.

Je décrirai simplement deux épisodes, pour montrer à quel point il s'est éloigné d'un point de vue rationnel et scientifique. Vers 1990, lors d'une visite à Montpellier, il me communiqua le travail de deux de ses étudiants, une pénible énumération, avec crayons de couleur, de configurations de droites (le problème était sérieux). Quand j'ai fait remarquer qu'une recherche à l'ordinateur serait plus rapide et plus sûre, il a constaté avec tristesse que cette suggestion me désignait comme un suppôt du diable (dans sa version militaro-industrielle !). Plus récemment, il s'est lancé dans de longues réflexions pour comprendre comment les 300 000 km/s que l'harmonie divine réclamait pour la vitesse de la lumière étaient devenus 298 779 km/s par la volonté corruptrice du diable. Lui dont l'œuvre mathématique a tourné en grande partie autour de la notion d'invariance, et de la naturalité des concepts, refusait de voir le caractère conventionnel du système métrique [44]. Il ne s'agit pas d'une bévue, ou d'une ignorance scientifique ; c'est simplement l'autre face de sa logique personnelle, cette même logique en équilibre instable qui nous a valu cette œuvre prodigieuse.

En lieu de conclusion

La mathématique se veut la plus objective des sciences. A tout le moins, son intersubjectivité réclame-t-elle que l'expérience mathématique se détache au maximum de l'affect du mathématicien pour pouvoir être communiquée sans distorsion et prendre son caractère collectif. Le sujet mathématique, conçu comme le mathématicien sujet, présent derrière la création, est sommé de disparaître, et cette disparition est assez effective en pratique.

Dans cette problématique, Grothendieck représente un cas d'espèce extraordinaire. Lui, dont le père fut au centre de tous les combats sociaux d'un demi-siècle, vécut en

[44] Les créateurs du système métrique insistaient sur le caractère rationnel et naturel de leur système. Il fallut du temps pour réaliser le degré de convention, d'où les efforts permanents d'asseoir notre S.I. (= système international d'unités) sur une base plus naturelle. Mais le « dix » du système décimal est lui-même bien conventionnel !

dehors du monde, bien au-delà de ce que la tradition accorde au mathématicien distrait. Même dans son milieu mathématique, il n'est pas vraiment de la famille, et poursuit un monologue, ou plutôt un dialogue avec la mathématique ... et Dieu, ce qu'il ne sépare pas. Son œuvre est unique en ce qu'elle ne gomme pas ses fantasmes et ses obsessions, mais vit avec eux, vit d'eux ; en même temps qu'une œuvre strictement mathématique, il nous livre, en une analyse au sens freudien, ce qu'il croit en être le sens.

Sa vie est traversée et brûlée par le feu de l'esprit, comme celle de Simone Weil, à qui l'unissent d'étranges parentés. Il est à la recherche d'un pays et d'un nom. S'agit-il de la Terre promise, cette terre de Judée où le miel coule à flots, entrevue au-delà du Mont Sinaï, l'accomplissement de la promesse, la révélation de toute vérité ? Je crois plutôt que ce pays mythique est la patrie de son père, cette Ukraine juive que les malheurs de l'Europe de l'Est ont placée en l'endroit le plus inaccessible de l'Empire Soviétique - pourtant l'un des plus fermés. Le nom est celui du père !

Remerciements

Comme à l'accoutumée, ils vont d'abord à mon épouse Monique et à ma fille Marion, pour leur aide dans la transcription de l'enregistrement de la conférence de Cerisy, la frappe et la relecture critique. Ils vont aussi à Nathalie Charraud, mon associée dans cette intrusion en terre étrangère, pour sa ténacité à faire paraître les comptes-rendus de notre Colloque. Enfin, un grand merci à toute l'équipe de Cerisy-la-Salle, pour la qualité de leur accueil, qui a beaucoup contribué au succès de la rencontre.

Ajouté en 2009

Michel Demazure a beaucoup insisté pour donner une nouvelle vie à ce texte écrit vers 2000. Pour répondre aux nouvelles normes d'édition, il a entrepris la saisie en LaTex. Je lui en sais infiniment gré !