Sur la correspondance de Simpson p-adique. II : aspects globaux

Ahmed ABBES and Michel GROS

Institut des Hautes Études Scientifiques
35, route de Chartres
91440 – Bures-sur-Yvette (France)

Janvier 2013

IHES/M/13/02

SUR LA CORRESPONDANCE DE SIMPSON p-ADIQUE.
II : ASPECTS GLOBAUX

AHMED ABBES ET MICHEL GROS

Table des matières

1. Introduction

Nous poursuivons dans cet article la construction et l'étude de la correspondance de Simpson p-adique initiée dans [3], suivant l'approche générale résumée dans [2]. Après avoir fixé les notations et conventions générales au § 2, nous développons dans les sections 3 à 6 quelques préliminaires utiles pour la suite. Nous précisons au § 3 le cadre géométrique dans lequel seront placées nos constructions et établissons un résultat technique important de connexité de certains schémas (3.7). L'intermède § 4 regroupe quelques sorites utilisés à divers endroits du texte sur le complexe de Koszul. La section 5 développe le formalisme des catégories additives à isogénie près. La section 6 est consacrée à l'étude des systèmes projectifs d'un topos annelé, en particulier à la notion de module adique et aux conditions de finitude appropriées à ce cadre.

Soit K un corps de valuation discrète complet de caractéristique 0, à corps résiduel algébriquement clos de caractéristique p et soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. On note $\mathscr{O}_K$ l'anneau de valuation de K, $\mathscr{O}_{\overline{K}}$ la clôture intégrale de $\mathscr{O}_K$ dans $\overline{K}$ et $\mathscr{O}_C$ le séparé complété p-adique de $\mathscr{O}_{\overline{K}}$. On pose $S = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_K)$ et on le munit de la structure logarithmique $\mathscr{M}_S$ définie par son point fermé. On considère dans cet article un schéma logarithmique $(X, \mathscr{M}_X)$ lisse au-dessus de $(S, \mathscr{M}_S)$, vérifiant une condition locale (3.9) correspondant aux hypothèses faites dans la première partie ([3] 6.2). On note X° le sous-schéma ouvert maximal de X où la structure logarithmique $\mathscr{M}_X$ est triviale. Le cadre topologique dans lequel se réalise la correspondance de Simpson p-adique est celui du topos de Faltings $\widetilde{E}$ associé au morphisme canonique $X^\circ \otimes_K \overline{K} \to X$, dont l'étude détaillée a été menée indépendamment dans [4]. Nous l'équipons dans § 7 d'un anneau $\overline{\mathscr{B}}$. Nous introduisons ensuite dans § 8 le topos $\widetilde{E}_s$ fibre spéciale de $\widetilde{E}$ et le topos annelé $(\widetilde{E}_s^{\mathbb{N}^\circ}, \breve{\overline{\mathscr{B}}})$ complété formel p-adique de $(\widetilde{E}, \overline{\mathscr{B}})$, dans lequel auront lieu nos principales constructions.

Comme il a été esquissé dans l'introduction générale [2], la correspondance de Simpson p-adique dépend d'une déformation (logarithmique) lisse de $X \otimes_{\mathscr{O}_K} \mathscr{O}_C$ au-dessus de l'épaississement infinitésimal p-adique universel de $\mathscr{O}_C$ d'ordre ≤ 1, introduit par Fontaine ([3] 9.8). Nous supposons dans la suite de cette introduction qu'il existe une telle déformation que nous fixons. Nous définissons dans la section 9, pour tout nombre rationnel $r \geq 0$, la *$\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-algèbre de Higgs-Tate d'épaisseur r*, notée $\breve{\mathscr{C}}^{(r)}$. Ces algèbres forment un système inductif : pour tous nombres rationnels $r \geq r' \geq 0$, on a un homomorphisme canonique $\breve{\mathscr{C}}^{(r)} \to \breve{\mathscr{C}}^{(r')}$. Ce sont des analogues faisceautiques des algèbres de Higgs-Tate introduites dans la première partie ([3] 12.1). Elles sont naturellement munies de champs de Higgs. La section 10 contient deux résultats d'acyclicité fondamentaux pour la suite. Nous démontrons (10.24) que la limite inductive des complexes de Dolbeault de $\breve{\mathscr{C}}^{(r)}$, pour $r \in \mathbb{Q}_{>0}$, est une résolution de $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$, à isogénie près. D'autre part, notant $\mathfrak{X}$ le schéma formel complété p-adique de $X \otimes_{\mathscr{O}_K} \mathscr{O}_{\overline{K}}$, on dispose d'un morphisme canonique de topos annelés

$$\top \colon (\widetilde{E}_s^{\mathbb{N}^\circ}, \breve{\overline{\mathscr{B}}}) \to (\mathfrak{X}_{\mathrm{zar}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}).$$

Nous démontrons (10.18) que l'homomorphisme canonique

$$\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}] \to \varinjlim_{r \in \mathbb{Q}_{>0}} \top_*(\breve{\mathscr{C}}^{(r)})[\frac{1}{p}]$$

est un isomorphisme, et que pour tout entier $q \geq 1$,

$$\varinjlim_{r \in \mathbb{Q}_{>0}} \mathrm{R}^q \top_*(\breve{\mathscr{C}}^{(r)})[\frac{1}{p}] = 0.$$

La section 11 est consacrée à la construction de la correspondance de Simpson p-adique. Nous introduisons les notions de module de Dolbeault et de fibré de Higgs soluble (11.11) et nous montrons (11.26) qu'elles donnent lieu à deux catégories équivalentes. Nous construisons en fait deux équivalences de catégories explicites et quasi-inverses l'une de l'autre. Nous établissons aussi la compatibilité de cette correspondance au passage à la cohomologie (11.29). Nous étudions dans § 12 la fonctorialité de cette correspondance par localisation étale sur X. On s'attend à ce que la catégorie fibrée des modules de Dolbeault au-dessus du site étale restreint de X soit un champ (12.15). Allant dans ce sens, nous montrons le caractère local pour la topologie de Zariski de X de la propriété Dolbeault (12.16). Nous terminons dans la section 13 en construisant des exemples de modules de Dolbeault. On s'attend en effet à ce que les fibrés de Higgs petits (13.1) soient solubles et correspondent donc à des modules de Dolbeault. Nous démontrons (13.3) que c'est bien le cas si X est affine du type considéré dans la première partie [3]. Nous démontrons aussi (13.4) que c'est le cas en général si les modules de Dolbeault forment un champ.

2. Notations et conventions

Tous les anneaux considérés dans cet article possèdent un élément unité ; les homomorphismes d'anneaux sont toujours supposés transformer l'élément unité en l'élément unité. Nous considérons surtout des anneaux commutatifs, et lorsque nous parlons d'anneau sans préciser, il est sous-entendu qu'il s'agit d'un anneau commutatif ; en particulier, il est sous-entendu, lorsque nous parlons d'un topos annelé (X, A) sans préciser, que A est commutatif.

2.1. Dans cet article, p désigne un nombre premier, K un corps de valuation discrète complet de caractéristique 0, à corps résiduel *algébriquement clos* k de caractéristique p, et $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. On note $\mathscr{O}_K$ l'anneau de valuation de K, $\mathscr{O}_{\overline{K}}$ la clôture intégrale de $\mathscr{O}_K$ dans $\overline{K}$, $\mathfrak{m}_{\overline{K}}$ l'idéal maximal de $\mathscr{O}_{\overline{K}}$, $\overline{k}$ le corps résiduel de $\mathscr{O}_{\overline{K}}$ et v la valuation de $\overline{K}$ normalisée par $v(p)=1$. On désigne par $\mathscr{O}_C$ le séparé complété p-adique de $\mathscr{O}_{\overline{K}}$, par C son corps des fractions et par $\mathfrak{m}_C$ son idéal maximal. Sauf mention explicite du contraire, on considère $\mathscr{O}_C$ comme un anneau adique, muni de la topologie p-adique ([1] 1.8.7) ; c'est un anneau 1-valuatif ([1] 1.9.9).

On choisit un système compatible $(\beta_n)_{n>0}$ de racines n-ièmes de p dans $\mathscr{O}_{\overline{K}}$. Pour tout nombre rationnel $\varepsilon>0$, on pose $p^\varepsilon=(\beta_n)^{\varepsilon n}$, où n est un entier >0 tel que εn soit entier.

On pose $S=\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_K)$, $\overline{S}=\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{\overline{K}})$ et $\check{\overline{S}}=\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_C)$. On note s (resp. η, resp. $\overline{\eta}$) le point fermé de S (resp. générique de S, resp. générique de $\overline{S}$). Pour tout entier $n\geq 1$ et tout S-schéma X, on pose $S_n=\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_K/p^n\mathscr{O}_K)$ et

(2.1.1) $$X_n=X\times_S S_n.$$

On munit S de la structure logarithmique $\mathscr{M}_S$ définie par son point fermé, autrement dit, $\mathscr{M}_S=j_*(\mathscr{O}_\eta^\times)\cap\mathscr{O}_S$, où $j\colon\eta\to S$ est l'injection canonique (cf. [3] 5.10). Si π est une uniformisante de $\mathscr{O}_K$, on désigne par

(2.1.2) $$\iota_\pi\colon\mathbb{N}\to\Gamma(S,\mathscr{M}_S)$$

l'homomorphisme défini par $\iota_\pi(1)=\pi$, qui est une carte pour $(S,\mathscr{M}_S)$ (cf. [3] 5.13). On munit $\overline{S}$ et $\check{\overline{S}}$ des structures logarithmiques $\mathscr{M}_{\overline{S}}$ et $\mathscr{M}_{\check{\overline{S}}}$ images inverses de $\mathscr{M}_S$ (cf. [3] 5.11).

On désigne par $\mathscr{S}=\operatorname{Spf}(\mathscr{O}_C)$ le schéma formel complété p-adique de $\overline{S}$ ou, ce qui revient au même, de $\check{\overline{S}}$.

2.2. Rappelons ([3] 9.3) que Fontaine associe fonctoriellement à toute $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre A l'anneau

(2.2.1) $$\mathscr{R}_A=\varprojlim_{x\mapsto x^p}A/pA,$$

et un homomorphisme θ de l'anneau $\mathrm{W}(\mathscr{R}_A)$ des vecteurs de Witt de $\mathscr{R}_A$ dans le séparé complété p-adique $\widehat{A}$ de A. On pose

(2.2.2) $$\mathscr{A}_2(A)=\mathrm{W}(\mathscr{R}_A)/\ker(\theta)^2$$

et on note encore $\theta\colon\mathscr{A}_2(\mathscr{R}_A)\to\widehat{A}$ l'homomorphisme induit par θ.

2.3. Dans cet article, on se donne une suite $(p_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathscr{O}_{\overline{K}}$ telle que $p_0=p$ et $p_{n+1}^p=p_n$ pour tout $n\geq 0$. On désigne par $\underline{p}$ l'élément de $\mathscr{R}_{\mathscr{O}_{\overline{K}}}$ (2.2.1) induit par la suite $(p_n)_{n\geq 0}$ et on pose

(2.3.1) $$\xi=[\underline{p}]-p\in\mathrm{W}(\mathscr{R}_{\mathscr{O}_{\overline{K}}}),$$

où $[\ ]$ est le représentant multiplicatif. L'homomorphisme $\theta\colon\mathrm{W}(\mathscr{R}_{\mathscr{O}_{\overline{K}}})\to\mathscr{O}_C$ est surjectif et son noyau est engendré par ξ, qui n'est pas un diviseur de zéro dans $\mathrm{W}(\mathscr{R}_{\mathscr{O}_{\overline{K}}})$ ([3] 9.5). On a donc une suite exacte

(2.3.2) $$0\longrightarrow\mathscr{O}_C\xrightarrow{\cdot\xi}\mathscr{A}_2(\mathscr{O}_{\overline{K}})\xrightarrow{\theta}\mathscr{O}_{\overline{K}}\longrightarrow 0,$$

où on a encore noté $\cdot\xi$ le morphisme induit par la multiplication par ξ dans $\mathscr{A}_2(\overline{R})$. L'idéal $\ker(\theta)$ de $\mathscr{A}_2(\mathscr{O}_{\overline{K}})$ est de carré nul. C'est un $\mathscr{O}_C$-module libre de base ξ. Il sera noté $\xi\mathscr{O}_C$. On observera que contrairement à ξ, ce module ne dépend pas du choix de la suite $(p_n)_{n\geq 0}$.

On note $\xi^{-1}\mathscr{O}_C$ le $\mathscr{O}_C$-module dual de $\xi\mathscr{O}_C$. Pour tout $\mathscr{O}_C$-module M, on désigne les $\mathscr{O}_C$-modules $M\otimes_{\mathscr{O}_C}(\xi\mathscr{O}_C)$ et $M\otimes_{\mathscr{O}_C}(\xi^{-1}\mathscr{O}_C)$ simplement par ξM et $\xi^{-1}M$, respectivement. On observera que contrairement à ξ, ces modules ne dépendent pas du choix de la suite $(p_n)_{n\geq 0}$. Il est donc important de ne pas les identifier à M.

On pose

$$\mathscr{A}_2(\overline{S}) = \mathrm{Spec}(\mathscr{A}_2(\mathscr{O}_{\overline{K}})) \tag{2.3.3}$$

que l'on munit de la structure logarithmique $\mathscr{M}_{\mathscr{A}_2(\overline{S})}$ définie dans ([3] 9.8). Le schéma logarithmique $(\mathscr{A}_2(\overline{S}), \mathscr{M}_{\mathscr{A}_2(\overline{S})})$ est alors fin et saturé, et θ induit une immersion fermée exacte

$$i_{\overline{S}} \colon (\check{\overline{S}}, \mathscr{M}_{\check{\overline{S}}}) \to (\mathscr{A}_2(\overline{S}), \mathscr{M}_{\mathscr{A}_2(\overline{S})}). \tag{2.3.4}$$

2.4. Pour toute catégorie abélienne $\mathbf{A}$, on désigne par $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ sa catégorie dérivée et par $\mathbf{D}^-(\mathbf{A})$, $\mathbf{D}^+(\mathbf{A})$ et $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbf{A})$ les sous-catégories pleines de $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ formées des complexes à cohomologie bornée supérieurement, inférieurement et des deux côtés, respectivement. Sauf mention expresse du contraire, les complexes de $\mathbf{A}$ sont à différentielles de degré $+1$, le degré étant écrit en exposant.

2.5. Dans tout cet article, on fixe un univers $\mathbb{U}$ possédant un élément de cardinal infini. On appelle catégorie des $\mathbb{U}$-ensembles et l'on note **Ens**, la catégorie des ensembles qui se trouvent dans $\mathbb{U}$. Sauf mention explicite du contraire, il sera sous-entendu que les schémas envisagés dans cet article sont éléments de l'univers $\mathbb{U}$. On désigne par **Sch** la catégorie des schémas éléments de $\mathbb{U}$.

2.6. Suivant les conventions de ([5] VI), nous utilisons l'adjectif *cohérent* comme synonyme de quasi-compact et quasi-séparé.

2.7. Soit (X, A) un topos annelé. On note $\mathbf{Mod}(A)$ ou $\mathbf{Mod}(A, X)$ la catégorie des A-modules de X. Si M est un A-module, on désigne par $\mathrm{S}_A(M)$ (resp. $\wedge_A(M)$, resp. $\Gamma_A(M)$) l'algèbre symétrique (resp. extérieure, resp. à puissances divisées) de M ([20] I 4.2.2.6) et pour tout entier $n \geq 0$, par $\mathrm{S}^n_A(M)$ (resp. $\wedge^n_A(M)$, resp. $\Gamma^n_A(M)$) sa partie homogène de degré n. On omettra l'anneau A des notations lorsqu'il n'y a aucun risque d'ambiguïté. Les formations de ces algèbres commutent à la localisation au-dessus d'un objet de X.

Définition 2.8 ([6] I 1.3.1)**.** Soit (X, A) un topos annelé. On dit qu'un A-module M de X est *localement projectif de type fini* si les conditions équivalentes suivantes sont satisfaites :
(i) M est de type fini et le foncteur $\mathscr{H}om_A(M, \cdot)$ est exact ;
(ii) M est de type fini et tout épimorphisme de A-modules $N \to M$ admet localement une section ;
(iii) M est localement facteur direct d'un A-module libre de type fini.

Lorsque X a suffisamment de points et que pour tout point x de X, la fibre de A en x est un anneau local, les A-modules localement projectifs de type fini sont les A-modules localement libres de type fini ([6] I 2.15.1).

2.9. Pour tout schéma X, on note $\mathbf{\acute{E}t}_{/X}$ (resp. $X_{\mathrm{\acute{e}t}}$) le site (resp. topos) étale de X. On désigne par $\mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{f}/X}$ le site fini étale de X, c'est-à-dire, la sous-catégorie pleine de $\mathbf{\acute{E}t}_{/X}$ formée des schémas étales finis sur X, munie de la topologie induite par celle de $\mathbf{\acute{E}t}_{/X}$, et par $X_{\mathrm{f\acute{e}t}}$ le topos fini étale de X, c'est-à-dire, le topos des faisceaux de $\mathbb{U}$-ensembles sur $\mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{f}/X}$ (cf. [4] 9.2). L'injection canonique $\mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{f}/X} \to \mathbf{\acute{E}t}_{/X}$ induit un morphisme de topos

$$\rho_X \colon X_{\mathrm{\acute{e}t}} \to X_{\mathrm{f\acute{e}t}}. \tag{2.9.1}$$

On désigne par X_{zar} le topos de Zariski de X et par

$$u \colon X_{\mathrm{\acute{e}t}} \to X_{\mathrm{zar}} \tag{2.9.2}$$

le morphisme canonique ([5] VII 4.2.2). Si F est un $\mathscr{O}_X$-module de X_{zar}, on note encore F le faisceau de $X_{\text{ét}}$ défini pour tout X-schéma étale X' par ([5] VII 2 c))

$$F(X') = \Gamma(X', F \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_{X'}). \tag{2.9.3}$$

Cet abus de notation n'induit aucune confusion. On a un isomorphisme canonique

$$u_*(F) \xrightarrow{\sim} F. \tag{2.9.4}$$

Nous considérons donc u comme un morphisme du topos annelé $(X_{\text{ét}}, \mathscr{O}_X)$ vers le topos annelé $(X_{\text{zar}}, \mathscr{O}_X)$. Nous utilisons pour les modules la notation u^{-1} pour désigner l'image inverse au sens des faisceaux abéliens et nous réservons la notation u^* pour l'image inverse au sens des modules. L'isomorphisme (2.9.4) induit par adjonction un morphisme

$$u^*(F) \to F. \tag{2.9.5}$$

Celui-ci est un isomorphisme si F est un $\mathscr{O}_X$-module de présentation finie. En effet, la question étant locale, on peut se borner au cas où il existe une suite exacte de $\mathscr{O}_X$-modules $\mathscr{O}_X^m \to \mathscr{O}_X^n \to F \to 0$ de X_{zar}. Celle-ci induit une suite exacte de $\mathscr{O}_X$-modules $\mathscr{O}_X^m \to \mathscr{O}_X^n \to F \to 0$ de $X_{\text{ét}}$. L'assertion s'ensuit compte tenu de l'exactitude à droite du foncteur u^*.

2.10. Soient X un schéma connexe, $\overline{x}$ un point géométrique de X. On désigne par

$$\omega_{\overline{x}} \colon \mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{f}/X} \to \mathbf{Ens} \tag{2.10.1}$$

le foncteur fibre en $\overline{x}$, qui à tout revêtement étale Y de X associe l'ensemble des points géométriques de Y au-dessus de $\overline{x}$, par $\pi_1(X, \overline{x})$ le groupe fondamental de X en $\overline{x}$ (c'est-à-dire le groupe des automorphismes du foncteur $\omega_{\overline{x}}$) et par $\mathbf{B}_{\pi_1(X,\overline{x})}$ le topos classifiant du groupe profini $\pi_1(X, \overline{x})$, c'est-à-dire la catégorie des $\mathbb{U}$-ensembles discrets munis d'une action continue à gauche de $\pi_1(X, \overline{x})$ ([5] IV 2.7). Alors $\omega_{\overline{x}}$ induit un foncteur pleinement fidèle

$$\mu^+_{\overline{x}} \colon \mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{f}/X} \to \mathbf{B}_{\pi_1(X,\overline{x})} \tag{2.10.2}$$

d'image essentielle la sous-catégorie pleine de $\mathbf{B}_{\pi_1(X,\overline{x})}$ formée des ensembles finis ([14] V § 4 et § 7). Soit $(X_i)_{i\in I}$ un système projectif sur un ensemble ordonné filtrant I dans $\mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{f}/X}$ qui pro-représente $\omega_{\overline{x}}$, normalisé par le fait que les morphismes de transition $X_i \to X_j$ $(i \geq j)$ sont des épimorphismes et que tout épimorphisme $X_i \to X'$ de $\mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{f}/X}$ est équivalent à un épimorphisme $X_i \to X_j$ $(j \leq i)$ convenable. Un tel pro-objet est essentiellement unique. Il est appelé le *revêtement universel normalisé de X en $\overline{x}$* ou le *pro-objet fondamental normalisé de $\mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{f}/X}$ en $\overline{x}$*. On notera que l'ensemble I est $\mathbb{U}$-petit. Le foncteur

$$\nu_{\overline{x}} \colon X_{\text{fét}} \to \mathbf{B}_{\pi_1(X,\overline{x})}, \quad F \mapsto \varinjlim_{i\in I^\circ} F(X_i) \tag{2.10.3}$$

est une équivalence de catégories qui prolonge le foncteur $\mu^+_{\overline{x}}$ (cf. [4] 9.7). On l'appelle le *foncteur fibre* de $X_{\text{fét}}$ en $\overline{x}$.

2.11. Conservons les hypothèses de 2.10, soit de plus R un anneau de $X_{\text{fét}}$. Posons $R_{\overline{x}} = \nu_{\overline{x}}(R)$ qui est un anneau muni de la topologie discrète et d'une action continue de $\pi_1(X, \overline{x})$ par des homomorphismes d'anneaux. On désigne par $\mathbf{Rep}^{\text{disc}}_{R_{\overline{y}}}(\pi_1(Y, \overline{y}))$ la catégorie des $R_{\overline{y}}$-représentations continues de $\pi_1(Y, \overline{y})$ pour lesquelles la topologie est discrète ([3] 3.1). En restreignant le foncteur $\nu_{\overline{x}}$ aux R-modules, on obtient une équivalence de catégories que l'on note encore

$$\nu_{\overline{x}} \colon \mathbf{Mod}(R) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Rep}^{\text{disc}}_{R_{\overline{x}}}(\pi_1(X, \overline{x})). \tag{2.11.1}$$

Pour qu'un R-module M de $X_{\text{fét}}$ soit de type fini (resp. localement projectif de type fini (2.8)), il faut et il suffit que le $R_{\overline{x}}$-module sous-jacent à $\nu_{\overline{x}}(M)$ soit de type fini (resp. projectif de type fini). En effet, la condition est nécessaire en vertu de ([4] 9.8). Montrons qu'elle est suffisante. Supposons d'abord le $R_{\overline{x}}$-module $\nu_{\overline{x}}(M)$ de type fini. Soient N un $R_{\overline{x}}$-module libre de base $e_1, \dots, e_d$, $u\colon N \to \nu_{\overline{x}}(M)$ un épimorphisme $R_{\overline{x}}$-linéaire. L'assertion recherchée étant locale pour $X_{\text{fét}}$, quitte à remplacer X par un revêtement étale, on peut supposer que $\pi_1(X, \overline{x})$ fixe les éléments $u(e_1), \dots, u(e_d)$ de $\nu_{\overline{x}}(M)$. Munissant N de l'unique $R_{\overline{x}}$-représentation de $\pi_1(X, \overline{x})$ telle que $e_1, \dots, e_d$ soient fixes, l'homomorphisme u est alors $\pi_1(X, \overline{x})$-équivariant. Par suite, M est un R-module de type fini. Supposons de plus le $R_{\overline{x}}$-module $\nu_{\overline{x}}(M)$ projectif de type fini. Soit $v\colon \nu_{\overline{x}}(M) \to N$ un scindage $R_{\overline{x}}$-linéaire de u. Quitte à remplacer de nouveau X par un revêtement étale, on peut supposer que $\pi_1(X, \overline{x})$ fixe les éléments $v(u(e_1)), \dots, v(u(e_d))$ de N. Par suite, v est $\pi_1(X, \overline{x})$-équivariant. On en déduit que M est facteur direct d'un R-module libre de type fini ; d'où l'assertion.

3. Schémas localement irréductibles

3.1. Soit X un schéma dont l'ensemble des composantes irréductibles est localement fini. On rappelle que les conditions suivantes sont équivalentes ([16] 0.2.1.6) :

(i) Les composantes irréductibles de X sont ouvertes.

(ii) Les composantes irréductibles de X sont identiques à ses composantes connexes.

(iii) Les composantes connexes de X sont irréductibles.

(iv) Deux composantes irréductibles distinctes de X ne se rencontrent pas.

Le schéma X est alors la somme des schémas induits sur ses composantes irréductibles. Lorsque ces conditions sont remplies, on dit que X est *localement irréductible*. Cette notion est clairement locale sur X, *i.e.*, si $(X_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de X, pour que X soit localement irréductible, il faut et il suffit que pour tout $i \in I$, il en soit de même pour X_i.

Remarques 3.2. (i) L'ensemble des composantes irréductibles d'un schéma localement noethérien est localement fini ([16] 0.2.2.2).

(ii) Pour qu'un schéma normal soit localement irréductible, il faut et il suffit que l'ensemble de ses composantes irréductibles soit localement fini. En effet, la condition (iv) est clairement vérifiée.

(iii) Un schéma localement irréductible X est étale-localement connexe, *i.e.*, pour tout morphisme étale $X' \to X$, toute composante connexe de X' est un ensemble ouvert dans X' ([4] 9.6.3).

Lemme 3.3. *Soient X un schéma normal et localement irréductible, $f\colon Y \to X$ un morphisme étale. Alors Y est normal et localement irréductible.*

En effet, Y est normal en vertu de ([25] VII prop. 2). Il suffit donc de montrer que l'ensemble de ses composantes irréductibles est localement fini d'après 3.2(ii). La question étant locale sur X et Y, on peut se borner au cas où ils sont affines, de sorte que f est quasi-compact et par suite quasi-fini. L'assertion recherchée résulte alors de ([19] 2.3.6(iii)).

Lemme 3.4. *Soient X un schéma normal, $j\colon U \to X$ une immersion ouverte dense et quasi-compacte. Pour que X soit localement irréductible, il faut et il suffit qu'il en soit de même de U.*

En effet, si X est localement irréductible, il en est de même de U. Inversement, supposons U localement irréductible et montrons qu'il en est de même de X. On peut clairement se borner au cas où X est quasi-compact. Par suite, U est quasi-compact et n'a donc qu'un nombre fini de composantes irréductibles d'après 3.1(i). Il en est alors de même de X puisque X et U ont mêmes points génériques. Comme X est normal, il est localement irréductible en vertu de 3.2(ii).

Lemme 3.5. *Soit A un anneau local hensélien, B une A-algèbre intègre et entière sur A. Alors B est un anneau local hensélien. Si, de plus, A est strictement local, il en est de même de B.*

Considérons B comme une limite inductive filtrante de sous-A-algèbres de type fini $(B_i)_{i\in I}$. Pour tout $i \in I$, B_i étant intègre et fini sur A, il est local et hensélien. Pour tous $(i,j) \in I^2$ tel que $i \leq j$, le morphisme de transition $B_i \to B_j$ étant fini, il est local. Par suite, B est local et hensélien ([25] I § 3 prop. 1). Supposons A strictement local. Comme l'homomorphisme $A \to B$ est local, le corps résiduel de B est une extension algébrique de celui de A. Il est donc séparablement clos. Par suite, B est strictement local.

Lemme 3.6. *Soient X un schéma, $\overline{x}$ un point géométrique de X, X' le localisé strict de X en $\overline{x}$, Y un X-schéma, $Y' = Y \times_X X'$, $f\colon Y' \to Y$ la projection canonique. Alors l'homomorphisme canonique $f^{-1}(\mathscr{O}_Y) \to \mathscr{O}_{Y'}$ est un isomorphisme de $Y'_{\text{ét}}$.*

Considérons X' comme une limite projective cofiltrante de voisinages étales affines $(X_i)_{\in I}$ de $\overline{x}$ dans X (cf. [5] VIII 4.5) et posons $Y_i = Y \times_X X_i$ pour tout $i \in I$. Le schéma Y' est alors la limite projective des schémas $(Y_i)_{\in I}$ ([19] 8.2.5). Soit $\overline{y}$ un point géométrique de Y'. Pour tout $i \in I$, la projection canonique $Y_i \to Y$ induit un isomorphisme entre les localisés stricts de Y_i et Y en les images canoniques de $\overline{y}$. D'autre part, il résulte de ([16] 0.6.1.6) et ([25] I § 3 prop. 1) que le localisé strict de Y' en $\overline{y}$ est la limite projective des localisés stricts des Y_i en les images canoniques de $\overline{y}$. Par conséquent, la projection canonique $Y' \to Y$ induit un isomorphisme entre les localisés stricts de Y' en $\overline{y}$ et Y en $f(\overline{y})$; autrement dit, l'homomorphisme canonique $\mathscr{O}_{Y,f(\overline{y})} \to \mathscr{O}_{Y',\overline{y}}$ est un isomorphisme ; d'où la proposition.

Proposition 3.7. *Soient Y un trait strictement local (i.e., le spectre d'un anneau de valuation discrète hensélien à corps résiduel séparablement clos), y et z ses points fermé et générique respectivement, $\overline{z}$ un point géométrique de Y localisé en z dont le corps résiduel $\kappa(\overline{z})$ est une clôture séparable du corps résiduel $\kappa(z)$ de z, $\overline{Y}$ la fermeture intégrale de Y dans $\overline{z}$, $f\colon X \to Y$ un morphisme plat et localement de type fini, $\overline{x}$ un point géométrique de X au-dessus de y, X' le localisé strict de X en $\overline{x}$. Supposons X normal et $X \times_Y \overline{Y}$ normal et localement irréductible. Alors $X' \times_Y \overline{Y}$ est normal et strictement local.*

On notera d'abord que $X \times_Y z$ étant localement noethérien, il est localement irréductible d'après 3.2(i) et par suite X est localement irréductible en vertu de 3.4. Montrons d'abord que $X' \times_Y \overline{Y}$ est normal et que l'ensemble de ses composantes irréductibles est fini. On peut se borner au cas où X est affine. Considérons X' comme une limite projective cofiltrante de voisinages étales affines $(X_i)_{\in I}$ de $\overline{x}$ dans X (cf. [5] VIII 4.5). Alors $X' \times_Y \overline{Y}$ est canoniquement isomorphe à la limite projective des schémas $(X_i \times_Y \overline{Y})_{i\in I}$ ([19] 8.2.5). Pour tout $i \in I$, les schémas X_i et $X_i \times_Y \overline{Y}$ sont affines, normaux et localement irréductibles d'après 3.3. Chacun est donc une somme finie de schémas affines, intègres et normaux (3.1). Quitte à remplacer X_i par sa composante irréductible contenant l'image de $\overline{x}$, on peut se borner au cas où les X_i sont irréductibles. En particulier, pour tout $(i,j) \in I^2$ tel que $i \leq j$, le morphisme $X_j \to X_i$ est dominant et donc schématiquement dominant ([16] 5.4.3). Il en est alors de même du morphisme $X_j \times_Y \overline{Y} \to X_i \times_Y \overline{Y}$ ([19] 11.10.5). Soit ℓ un nombre premier inversible dans Y. En vertu de ([9] XIII 2.1.4 et [8] 3.2), le $\mathbb{F}_\ell$-espace vectoriel $\mathrm{H}^0(X' \times_Y \overline{z}, \mathbb{F}_\ell)$ est de dimension finie n. D'autre part, pour tout $i \in I$, le morphisme canonique $X' \times_Y \overline{z} \to X_i \times_Y \overline{z}$ est dominant d'après ([19] 8.3.8(i)). Par suite,

$$\dim_{\mathbb{F}_\ell} \mathrm{H}^0(X_i \times_Y \overline{z}, \mathbb{F}_\ell) \leq n. \tag{3.7.1}$$

Comme $X_i \times_Y \overline{Y}$ est plat sur $\overline{Y}$, le nombre de composantes irréductibles de $X_i \times_Y \overline{Y}$ est borné par n. On déduit de ce qui précède que $X' \times_Y \overline{Y}$ est une somme finie de n schémas affines et intègres ([16] 0.6.1.6). Par ailleurs, $X' \times_Y \overline{Y}$ est normal d'après ([16] 0.6.5.12(ii)) ; d'où l'assertion.

D'après ce qui précède, $X' \times_Y \overline{Y}$ est la somme des schémas induits sur ses composantes irréductibles (3.1). Chacun de ces schémas est affine, intègre, normal et entier sur X'. Il est donc strictement local en vertu de 3.5. D'autre part, le corps résiduel de $\Gamma(\overline{Y},\mathscr{O}_{\overline{Y}})$ étant une extension radicielle de celui de $\Gamma(Y,\mathscr{O}_Y)$, la projection canonique $\overline{Y}\times_Y y\to y$ est un homéomorphisme universel. Il en est alors de même de $\overline{x}\times_Y\overline{Y}\to\overline{x}$. Par suite, $X'\times_Y\overline{Y}$ est connexe ; d'où la proposition.

Définition 3.8. Soient $f\colon (X,\mathscr{M}_X)\to(S,\mathscr{M}_S)$ un morphisme de schémas logarithmiques, π une uniformisante de $\mathscr{O}_K$, $(\mathbb{N},\iota_\pi)$ la carte pour $(S,\mathscr{M}_S)$ associée à π (2.1.2), (P,γ) une carte pour $(X,\mathscr{M}_X)$ ([3] 5.13), $\vartheta\colon\mathbb{N}\to P$ un homomorphisme tels que le diagramme

(3.8.1)
$$\begin{tikzcd} (X,\mathscr{M}_X) \arrow[r, "\gamma^*"] \arrow[d, "f"'] & B[P] \arrow[d, "\vartheta^*"] \\ (S,\mathscr{M}_S) \arrow[r, "\iota_\pi^*"] & B[\mathbb{N}] \end{tikzcd}$$

soit commutatif, de sorte que $((P,\gamma),(\mathbb{N},\iota_\pi),\vartheta)$ est une carte pour f (cf. [3] 5.14). On dit que la carte $((P,\gamma),(\mathbb{N},\iota_\pi),\vartheta)$ est *adéquate* si les conditions suivantes sont remplies :

(i) Le monoïde P est torique, *i.e.*, P est fin et saturé et P^{gp} est libre sur $\mathbb{Z}$ ([3] 5.1).

(ii) L'homomorphisme ϑ est saturé ([3] 5.2).

(iii) L'homomorphisme $\vartheta^{\mathrm{gp}}\colon\mathbb{Z}\to P^{\mathrm{gp}}$ est injectif, le sous-groupe de torsion de $\mathrm{coker}(\vartheta^{\mathrm{gp}})$ est d'ordre premier à p et le morphisme de schémas usuels

(3.8.2)
$$X\to S\times_{B[\mathbb{N}]}B[P]$$

déduit de (3.8.1) est étale.

(iv) Posons $\lambda=\vartheta(1)\in P$,

(3.8.3)
$$L = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P^{\mathrm{gp}},\mathbb{Z}),$$

(3.8.4)
$$\mathrm{H}(P) = \mathrm{Hom}(P,\mathbb{N}).$$

On notera que $\mathrm{H}(P)$ est un monoïde fin, saturé et affûté et que l'homomorphisme canonique $\mathrm{H}(P)^{\mathrm{gp}}\to\mathrm{Hom}((P^\sharp)^{\mathrm{gp}},\mathbb{Z})$ est un isomorphisme ([24] 2.2.1). On suppose qu'il existe $h_1,\dots,h_r\in\mathrm{H}(P)$, qui sont $\mathbb{Z}$-linéairement indépendants dans L, tels que

(3.8.5)
$$\ker(\lambda)\cap\mathrm{H}(P)=\{\sum_{i=1}^r a_ih_i|\ (a_1,\dots,a_r)\in\mathbb{N}^r\},$$

où l'on considére λ comme un homomorphisme $L\to\mathbb{Z}$.

Définition 3.9. On dit qu'un morphisme de schémas logarithmiques $f\colon(X,\mathscr{M}_X)\to(S,\mathscr{M}_S)$ est *adéquat* si X est de type fini sur S et si étale-localement sur X, f admet une carte adéquate (3.8). On dit aussi que le schéma logarithmique $(X,\mathscr{M}_X)$ est *adéquat* sur $(S,\mathscr{M}_S)$ ou $(S,\mathscr{M}_S)$-*adéquat*.

La notion de morphisme adéquat de schémas logarithmiques correspond à la notion de morphisme *à singularités toroïdales* de Faltings. Dans sa terminologie, un morphisme de schémas logarithmiques $f\colon(X,\mathscr{M}_X)\to(S,\mathscr{M}_S)$ est qualifié de *petit* si f admet une carte adéquate, si X est affine et connexe et si X_s est non-vide, autrement dit, si les conditions de ([3] 6.2) sont remplies. Nous préférons éviter cette terminologie.

Proposition 3.10. *Soit $f\colon(X,\mathscr{M}_X)\to(S,\mathscr{M}_S)$ un morphisme adéquat de schémas logarithmiques. Alors :*

(i) *Le morphisme f est lisse et saturé* ([3] 5.18).

(ii) *Le schéma usuel $X_\eta=X\times_S\eta$ est lisse sur η et la structure logarithmique $\mathscr{M}_X|X_\eta$ sur X_η est définie par un diviseur à croisements normaux sur X_η.*

(iii) *Le schéma* X *est* S*-plat.*
(iv) *Le schéma* $X \otimes_S \overline{s}$ *est réduit.*
(v) *Les schémas* X *et* $X \times_S \overline{S}$ *sont normaux et localement irréductibles* (3.1).

(i) Cela résulte aussitôt ([22] 3.5) et ([28] chap. II 3.5).

(ii) La question étant locale pour la topologie étale de X, on peut supposer que f admet une carte adéquate. La proposition résulte alors de ([3] 6.3(v)). On notera que les conditions (C_1) et (C_2) de ([3] 6.2) ne jouent aucun rôle dans la preuve de cet énoncé.

(iii) Cela résulte de (i) et ([22] 4.5).

(iv) Cela résulte de (i) et ([28] chap. II 4.2).

(v) Le schéma X est normal en vertu de (i) et ([23] 8.2 et 4.1 ; cf. aussi [27] 1.5.1). On en déduit par passage à la limite inductive que le schéma $X \times_S \overline{S}$ est normal (cf. la preuve de [3] 6.3(iii)). Comme X est noethérien, il est localement irréductible d'après 3.2(ii). Par ailleurs, comme $X \times_S \overline{S}$ est $\overline{S}$-plat, ses points génériques sont les points génériques du schéma $X \times_S \overline{\eta}$, qui est noethérien. Par suite, l'ensemble des points génériques de $X \times_S \overline{S}$ est fini, et $X \times_S \overline{S}$ est localement irréductible en vertu de 3.2(ii).

4. Variation sur le complexe de Koszul

4.1. Dans cette section, (X, A) désigne un topos annelé. Pour tout morphisme de A-modules $u\colon E \to F$, il existe sur l'algèbre bigraduée $\mathrm{S}(E) \otimes_A \Lambda(F)$ (2.7) (anti-commutative pour le second degré ; [20] I 4.3.1.1) une unique A-dérivation

$$d_u\colon \mathrm{S}(E) \otimes_A \Lambda(F) \to \mathrm{S}(E) \otimes_A \Lambda(F) \tag{4.1.1}$$

de bidegré $(-1, 1)$ telle que pour toutes sections locales $x_1, \dots, x_n$ de E ($n \geq 1$) et y de $\wedge(F)$, on ait

$$d_u([x_1 \otimes \cdots \otimes x_n] \otimes y) = \sum_{i=1}^{n} [x_1 \otimes \cdots \otimes x_{i-1} \otimes x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_n] \otimes (u(x_i) \wedge y), \tag{4.1.2}$$

$$d_u(1 \otimes y) = 0. \tag{4.1.3}$$

Elle satisfait de plus $d_u \circ d_u = 0$. Pour tout entier $n \geq 0$, la partie homogène de degré n de $\mathrm{S}(E) \otimes_A \Lambda(F)$ donne un complexe

$$0 \to \mathrm{S}^n(E) \to \mathrm{S}^{n-1}(E) \otimes_A F \to \cdots \to E \otimes_A \wedge^{n-1}(F) \to \wedge^n(F) \to 0. \tag{4.1.4}$$

L'algèbre $\mathrm{S}(E) \otimes_A \Lambda(F)$ munie de la dérivation d_u dépend fonctoriellement de u.

Si A est une $\mathbb{Q}$-algèbre, identifiant $\mathrm{S}(E)$ à l'algèbre à puissances divisées $\Gamma(E)$ de E, d_u s'identifie à la A-dérivation de $\Gamma(E) \otimes_A \Lambda(F)$ définie dans ([20] I 4.3.1.2(b)). Il résulte alors de ([20] I 4.3.1.6) que si u est un isomorphisme de A-modules plats, la suite (4.1.4) est exacte.

4.2. Soit

$$0 \to A \to E \to F \to 0 \tag{4.2.1}$$

une suite exacte de A-modules plats. D'après ([20] I 4.3.1.7), celle-ci induit pour tout entier $n \geq 1$, une suite exacte localement scindée (2.7)

$$0 \to \mathrm{S}^{n-1}(E) \to \mathrm{S}^n(E) \to \mathrm{S}^n(F) \to 0. \tag{4.2.2}$$

On en déduit une suite exacte

$$0 \to \mathrm{S}^{n-1}(F) \to \mathrm{S}^n(E)/\mathrm{S}^{n-2}(E) \to \mathrm{S}^n(F) \to 0. \tag{4.2.3}$$

On définit ainsi un foncteur S^n de la catégorie $\mathbf{Ext}(F,A)$ des extensions de F par A dans la catégorie $\mathbf{Ext}(\mathrm{S}^n(F),\mathrm{S}^{n-1}(F))$ des extensions de $\mathrm{S}^n(F)$ par $\mathrm{S}^{n-1}(F)$. Passant aux groupes des classes d'isomorphismes des objets de ces catégories, on obtient un homomorphisme, que l'on note encore

$$\mathrm{S}^n\colon \mathrm{Ext}^1_A(F,A) \to \mathrm{Ext}^1_A(\mathrm{S}^n(F),\mathrm{S}^{n-1}(F)). \tag{4.2.4}$$

4.3. Soient F un A-module localement projectif de type fini (2.8), n un entier ≥ 1. La suite spectrale qui relie les Ext locaux et globaux ([5] V 6.1) fournit un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^1_A(F,A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(X,\mathscr{H}om_A(F,A)). \tag{4.3.1}$$

De même, comme le A-module $\mathrm{S}^n(F)$ est localement libre de type fini, on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^1_A(\mathrm{S}^n(F),\mathrm{S}^{n-1}(F)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(X,\mathscr{H}om_A(\mathrm{S}^n(F),\mathrm{S}^{n-1}(F))). \tag{4.3.2}$$

Par ailleurs, on désigne par

$$J_n\colon \mathscr{H}om_A(F,A) \to \mathscr{H}om_A(\mathrm{S}^n(F),\mathrm{S}^{n-1}(F)) \tag{4.3.3}$$

le morphisme qui pour tout $U \in \mathrm{Ob}(X)$, associe à tout morphisme $u\colon F|U \to A|U$ la restriction à $\mathrm{S}^n(F)|U$ de la dérivation d_u de $\mathrm{S}(F|U)$ définie dans (4.1.1). Celui-ci induit un accouplement

$$\mathscr{H}om_A(F,A) \otimes_A \mathrm{S}^n(F) \to \mathrm{S}^{n-1}(F). \tag{4.3.4}$$

Proposition 4.4. *Pour tout A-module localement projectif de type fini F et tout entier $n \geq 1$, le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ext}^1_A(F,A) \arrow[r, "\mathrm{S}^n"] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1_A(\mathrm{S}^n(F),\mathrm{S}^{n-1}(F)) \arrow[d] \\ \mathrm{H}^1(X,\mathscr{H}om_A(F,A)) \arrow[r, "J_n"] & \mathrm{H}^1(X,\mathscr{H}om_A(\mathrm{S}^n(F),\mathrm{S}^{n-1}(F))) \end{tikzcd} \tag{4.4.1}$$

où S^n *est le morphisme* (4.2.4)*,* J_n *est le morphisme* (4.3.3) *et les flèches verticales sont les isomorphismes* (4.3.1) *et* (4.3.2)*, est commutatif.*

On rappelle d'abord ([5] V 3.4) que la suite spectrale de Cartan-Leray relative aux recouvrements de l'objet final de X induit un isomorphisme

$$\check{\mathrm{H}}^1(X,\mathscr{H}om_A(F,A)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(X,\mathscr{H}om_A(F,A)), \tag{4.4.2}$$

où la source désigne le groupe de cohomologie de Cech ([5] V (2.4.5.4)). On peut décrire explicitement l'isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^1_A(F,A) \xrightarrow{\sim} \check{\mathrm{H}}^1(X,\mathscr{H}om_A(F,A)) \tag{4.4.3}$$

composé de (4.3.1) et l'inverse de (4.4.2) comme suit. Soit

$$0 \to A \to E \xrightarrow{\nu} F \to 0 \tag{4.4.4}$$

une suite exacte de A-modules. Comme F est localement projectif de type fini, il existe une famille $\mathscr{U} = (U_i)_{i\in I}$ d'objets de X, épimorphique au-dessus de l'objet final, telle que pour tout $i \in I$, il existe une section $(A|U_i)$-linéaire $\varphi_i\colon F|U_i \to E|U_i$ de $\nu|U_i$. Pour tout $(i,j) \in I^2$, posant $U_{i,j} = U_i \times U_j$, la différence $\varphi_{i,j} = \varphi_i|U_{i,j} - \varphi_j|U_{i,j}$ définit un morphisme de $F|U_{i,j}$ dans $A|U_{i,j}$. La collection $(\varphi_{i,j})$ est un 1-cocycle pour le recouvrement $\mathscr{U}$ à coefficients dans $\mathscr{H}om_A(F,A)$ dont la classe dans $\check{\mathrm{H}}^1(X, \mathscr{H}om_A(F, A))$ est l'image canonique de l'extension (4.4.4) (*i.e.*, son image par l'isomorphisme (4.4.3)). Pour tout $i \in I$, on note ψ_i^n le morphisme composé

$$\mathrm{S}^n(F)|U_i \xrightarrow{\mathrm{S}^n(\varphi_i)} \mathrm{S}^n(E)|U_i \longrightarrow (\mathrm{S}^n(E)/\mathrm{S}^{n-2}(E))|U_i\ , \tag{4.4.5}$$

où la seconde flèche est la projection canonique. C'est clairement un scindage au-dessus de U_i de la suite exacte (4.2.3)

$$0 \to \mathrm{S}^{n-1}(F) \to \mathrm{S}^n(E)/\mathrm{S}^{n-2}(E) \to \mathrm{S}^n(F) \to 0 \tag{4.4.6}$$

déduite de (4.4.4). Pour tout $(i, j) \in I^2$, la différence $\psi_{i,j}^n = \psi_i^n|U_{i,j} - \psi_j^n|U_{i,j}$ définit un morphisme de $\mathrm{S}^n(F)|U_{i,j}$ dans $\mathrm{S}^{n-1}(F)|U_{i,j}$. La collection $(\psi_{i,j}^n)$ est un 1-cocycle pour le recouvrement $\mathscr{U}$ à coefficients dans $\mathscr{H}om_A(\mathrm{S}^n(F), \mathrm{S}^{n-1}(F))$ dont la classe dans $\check{\mathrm{H}}^1(X, \mathscr{H}om_A(\mathrm{S}^n(F), \mathrm{S}^{n-1}(F)))$ est l'image canonique de l'extension (4.4.6).

Pour tout $(i, j) \in I^2$ et toutes sections locales $x_1, \dots, x_n$ de $F|U_{i,j}$,

$$\begin{aligned} \psi_{i,j}^n([x_1 \otimes \cdots \otimes x_n]) &= \psi_i^n([x_1 \otimes \cdots \otimes x_n]) - \psi_j^n([x_1 \otimes \cdots \otimes x_n]) \\ &= [(\varphi_j(x_1) + \varphi_{i,j}(x_1)) \otimes \cdots \otimes (\varphi_j(x_n) + \varphi_{i,j}(x_n))] \\ &\quad -[\varphi_j(x_1) \otimes \cdots \otimes \varphi_j(x_n)] \quad \mathrm{mod}\ (\mathrm{S}^{n-2}(E)) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n} \varphi_{i,j}(x_\alpha)[x_1 \otimes \cdots \otimes x_{\alpha-1} \otimes x_{\alpha+1} \otimes \cdots \otimes x_n] \\ &= J_n(\varphi_{i,j})([x_1 \otimes \cdots \otimes x_n]). \end{aligned} \tag{4.4.7}$$

La proposition s'ensuit.

4.5. Soient

$$0 \to A \to E \to F \to 0 \tag{4.5.1}$$

une suite exacte de A-modules localement projectifs de type fini, n, q un entier ≥ 0. D'après 4.2, la suite exacte (4.5.1) induit une suite exacte

$$0 \to \mathrm{S}^n(F) \to \mathrm{S}^{n+1}(E)/\mathrm{S}^{n-1}(E) \to \mathrm{S}^{n+1}(F) \to 0. \tag{4.5.2}$$

Par ailleurs, l'accouplement (4.3.4) induit un accouplement

$$\mathrm{H}^1(X, \mathscr{H}om_A(F, A)) \otimes_{A(X)} \mathrm{H}^q(X, \mathrm{S}^{n+1}(F)) \to \mathrm{H}^{q+1}(X, \mathrm{S}^n(F)). \tag{4.5.3}$$

Il résulte aussitôt de 4.4 que le morphisme

$$\mathrm{H}^q(X, \mathrm{S}^{n+1}(F)) \to \mathrm{H}^{q+1}(X, \mathrm{S}^n(F)) \tag{4.5.4}$$

bord de la suite exacte longue de cohomologie déduite de la suite exacte courte (4.5.2), est induit par le cup-produit avec la classe de l'extension (4.5.1) par l'accouplement (4.5.3).

Notons

$$\partial \colon \Gamma(X, F) \to \mathrm{H}^1(X, A) \tag{4.5.5}$$

le morphisme bord de la suite exacte longue de cohomologie déduite de la suite exacte courte (4.5.1). Il résulte encore de 4.4 (plus précisément de (4.4.7)) qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{S}^{n+1}(\Gamma(X, F)) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & \Gamma(X, \mathrm{S}^{n+1}(F)) \arrow[d] \\ \mathrm{S}^n(\Gamma(X, F)) \otimes_{A(X)} \mathrm{H}^1(X, A) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(X, \mathrm{S}^n(F)) \end{tikzcd} \tag{4.5.6}$$

où α est la restriction à $\mathrm{S}^n(\Gamma(X,F))$ de la $A(X)$-dérivation d_∂ de $\mathrm{S}(\Gamma(X,F))\otimes_{A(X)}\wedge(\mathrm{H}^1(X,A))$ définie dans (4.1.1) relativement au morphisme ∂, la flèche horizontale supérieure (resp. inférieure) est le morphisme canonique (resp. est induite par le cup-produit) et la flèche verticale de droite est le morphisme (4.5.4) pour $q=0$. Par associativité du cup-produit, on en déduit que le diagramme

(4.5.7)
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{S}^{n+1}(\Gamma(X,F))\otimes_{A(X)}\mathrm{H}^q(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha\otimes\mathrm{id}"'] & \mathrm{H}^q(X,\mathrm{S}^{n+1}(F)) \arrow[dd] \\
\mathrm{S}^n(\Gamma(X,F))\otimes_{A(X)}\mathrm{H}^1(X,A)\otimes_{A(X)}\mathrm{H}^q(X,A) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\cup"'] & \\
\mathrm{S}^n(\Gamma(X,F))\otimes_{A(X)}\mathrm{H}^{q+1}(X,A) \arrow[r] & \mathrm{H}^{q+1}(X,\mathrm{S}^n(F))
\end{tikzcd}$$

où $\cup$ est le cup-produit de la $A(X)$-algèbre $\oplus_{i\geq 0}\mathrm{H}^i(X,A)$, les morphismes horizontaux sont induits par le cup-produit et la flèche verticale de droite est le morphisme (4.5.4), est commutatif.

4.6. Soient $f\colon (X,A)\to(Y,B)$ un morphisme de topos annelés,

(4.6.1)
$$0\to A\to E\to F\to 0$$

une suite exacte de A-modules localement projectifs de type fini. On désigne par

(4.6.2)
$$u\colon f_*(F)\to \mathrm{R}^1f_*(A)$$

le morphisme bord de la suite exacte longue de cohomologie déduite de la suite exacte courte (4.6.1). D'après 4.2, la suite exacte (4.5.1) induit pour tout entier $n\geq 0$, une suite exacte

(4.6.3)
$$0\to\mathrm{S}^n(F)\to\mathrm{S}^{n+1}(E)/\mathrm{S}^{n-1}(E)\to\mathrm{S}^{n+1}(F)\to 0.$$

Proposition 4.7. *Sous les hypothèses de* (4.6)*, pour tous entiers $n,q\geq 0$, on a un diagramme commutatif*

(4.7.1)
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{S}^{n+1}(f_*(F))\otimes_B\mathrm{R}^qf_*(A) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha\otimes\mathrm{id}"'] & \mathrm{R}^qf_*(\mathrm{S}^{n+1}(F)) \arrow[dd, "\partial"] \\
\mathrm{S}^n(f_*(F))\otimes_B\mathrm{R}^1f_*(A)\otimes_B\mathrm{R}^qf_*(A) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\cup"'] & \\
\mathrm{S}^n(f_*(F))\otimes_B\mathrm{R}^{q+1}f_*(A) \arrow[r] & \mathrm{R}^{q+1}f_*(\mathrm{S}^n(F))
\end{tikzcd}$$

où ∂ est le morphisme bord de la suite exacte longue de cohomologie déduite de la suite exacte courte (4.6.1)*, α est la restriction à $\mathrm{S}^{n+1}(f_*(F))$ de la B-dérivation d_u de $\mathrm{S}(f_*(F))\otimes_B\wedge(\mathrm{R}^1f_*(A))$ définie dans* (4.1.1) *relativement au morphisme u* (4.6.2)*, $\cup$ est le cup-produit de B-algèbre $\oplus_{i\geq 0}\mathrm{R}^if_*(A)$ et les morphismes horizontaux sont induits par le cup-produit.*

En effet, $\mathrm{R}^qf_*(\mathrm{S}^{n+1}(F))$ est le faisceau sur X (pour la topologie canonique) associé au préfaisceau qui à tout $V\in\mathrm{Ob}(Y)$ associe $\mathrm{H}^q(f^*(V),\mathrm{S}^{n+1}(F))$, et d est induit par le morphisme

(4.7.2)
$$\mathrm{H}^q(f^*(V),\mathrm{S}^{n+1}(F))\to\mathrm{H}^{q+1}(f^*(V),\mathrm{S}^n(F))$$

bord de la suite exacte longue de cohomologie déduite de la suite exacte courte (4.6.3). La proposition résulte alors de (4.5.7).

5. Catégories additives à isogénies près

Définition 5.1. Soit $\mathbf{C}$ une catégorie additive.
(i) Un morphisme $u\colon M \to N$ de $\mathbf{C}$ est appelé *isogénie* s'il existe un entier $n \neq 0$ et un morphisme $v\colon N \to M$ de $\mathbf{C}$ tels que $v \circ u = n \cdot \mathrm{id}_M$ et $u \circ v = n \cdot \mathrm{id}_N$.
(ii) Un objet M de $\mathbf{C}$ est dit *d'exposant fini* s'il existe un entier $n \neq 0$ tel que $n \cdot \mathrm{id}_M = 0$.

On peut compléter la terminologie et faire les remarques suivantes :

5.1.1. La famille des isogénies de $\mathbf{C}$ permet un calcul de fractions bilatéral ([20] I 1.4.2). On appelle *catégorie des objets de* $\mathbf{C}$ *à isogénie près*, et l'on note $\mathbf{C}_{\mathbb{Q}}$, la catégorie localisée de $\mathbf{C}$ par rapport aux isogénies. On désigne par

$$F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}_{\mathbb{Q}}, \quad M \mapsto M_{\mathbb{Q}} \tag{5.1.2}$$

le foncteur de localisation. On vérifie aisément que pour tous $M, N \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}_{\mathbb{Q}}}(M_{\mathbb{Q}}, N_{\mathbb{Q}}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M, N) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}. \tag{5.1.3}$$

En particulier, la catégorie $\mathbf{C}_{\mathbb{Q}}$ est additive et le foncteur de localisation est additif. Pour qu'un objet M de $\mathbf{C}$ soit d'exposant fini, il faut et il suffit que $M_{\mathbb{Q}}$ soit nul.

5.1.4. Si $\mathbf{C}$ est une catégorie abélienne, la catégorie $\mathbf{C}_{\mathbb{Q}}$ est abélienne et le foncteur de localisation $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}_{\mathbb{Q}}$ est exact. En fait, $\mathbf{C}_{\mathbb{Q}}$ s'identifie canoniquement à la catégorie quotient de $\mathbf{C}$ par la sous-catégorie épaisse $\mathbf{E}$ des objets d'exposant fini. En effet, notons $\mathbf{C}/\mathbf{E}$ la catégorie quotient de $\mathbf{C}$ par $\mathbf{E}$ et $T\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}/\mathbf{E}$ le foncteur canonique ([12] III §1). Pour tout $M \in \mathrm{Ob}(\mathbf{E})$, on a $F(M) = 0$. Par suite, il existe un et un unique foncteur $F'\colon \mathbf{C}/\mathbf{E} \to \mathbf{C}_{\mathbb{Q}}$ tel que $F = F' \circ T$. Par ailleurs, pour tout $M \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ et tout entier $n \neq 0$, $T(n \cdot \mathrm{id}_M)$ est un isomorphisme. Il existe donc un et un unique foncteur $T'\colon \mathbf{C}_{\mathbb{Q}} \to \mathbf{C}/\mathbf{E}$ tel que $T = T' \circ F$. On voit aussitôt que T' et F' sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre.

5.1.5. Tout foncteur additif (resp. exact) entre catégories additives (resp. abéliennes) $\mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ s'étend de manière unique en un foncteur additif (resp. exact) $\mathbf{C}_{\mathbb{Q}} \to \mathbf{C}'_{\mathbb{Q}}$, compatible aux foncteurs de localisation.

5.1.6. Si $\mathbf{C}$ est une catégorie abélienne, le foncteur de localisation $\mathbf{C} \to \mathbf{C}_{\mathbb{Q}}$ transforme les objets injectifs en des objets injectifs ([12] III cor. 1 à prop. 1). En particulier, si $\mathbf{C}$ possède suffisamment d'injectifs, il en est de même de $\mathbf{C}_{\mathbb{Q}}$.

5.2. Soit (X, A) un topos annelé. On désigne par $\mathbf{Mod}(A)$ la catégorie des A-modules de X et par $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(A)$, au lieu de $\mathbf{Mod}(A)_{\mathbb{Q}}$, la catégorie des A-modules de X à isogénies près (5.1.1). Le produit tensoriel des A-modules induit un bifoncteur

$$\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(A) \times \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(A) \to \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(A), \quad (M, N) \mapsto M \otimes_{A_{\mathbb{Q}}} N, \tag{5.2.1}$$

faisant de $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(A)$ une catégorie monoïdale symétrique, ayant $A_{\mathbb{Q}}$ pour objet unité. Les objets de $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(A)$ seront aussi appelés des $A_{\mathbb{Q}}$-*modules*. Cette terminologie se justifie en considérant $A_{\mathbb{Q}}$ comme un monoïde de $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(A)$. Si M et N sont deux $A_{\mathbb{Q}}$-modules, on note $\mathrm{Hom}_{A_{\mathbb{Q}}}(M, N)$ le groupe des morphismes de M dans N dans $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(A)$. Le bifoncteur "faisceau des morphismes" de la catégorie des A-modules de X induit un bifoncteur

$$\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(A) \times \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(A) \to \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(A), \quad (M, N) \mapsto \mathscr{H}om_{A_{\mathbb{Q}}}(M, N). \tag{5.2.2}$$

Les bifoncteurs (5.2.1) et (5.2.2) héritent des mêmes propriétés d'exactitudes que les bifoncteurs sur la catégorie $\mathbf{Mod}(A)$ qui leurs ont donné naissance.

5.3. Pour tout morphisme de topos annelés $f\colon (Y,B)\to(X,A)$, on désigne encore par

$$f^*\colon \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(A) \rightarrow \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(B), \tag{5.3.1}$$

$$f_*\colon \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(B) \rightarrow \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(A), \tag{5.3.2}$$

les foncteurs induits par les foncteurs image inverse et image directe par f, de sorte que le premier est un adjoint à gauche du second. Le premier foncteur est exact et le second foncteur est exact à gauche. On note

$$\mathrm{R}f_*\colon \mathbf{D}^+(\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(B)) \rightarrow \mathbf{D}^+(\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(A)), \tag{5.3.3}$$

$$\mathrm{R}^q f_*\colon \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(B) \rightarrow \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(A), \quad (q\in\mathbb{N}), \tag{5.3.4}$$

les foncteurs dérivés droits de f_* (5.3.2). Ces notations n'induisent aucune confusion avec celles des foncteurs dérivés droits du foncteur $f_*\colon \mathbf{Mod}(B)\to\mathbf{Mod}(A)$, puisque le foncteur de localisation $\mathbf{Mod}(B)\to\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(B)$ est exact et transforme les objets injectifs en des objets injectifs.

Définition 5.4. Soit (X,A) un topos annelé. On dit qu'un $A_{\mathbb{Q}}$-module M est *plat* (ou $A_{\mathbb{Q}}$*-plat*) si le foncteur $N\mapsto M\otimes_{A_{\mathbb{Q}}} N$ de la catégorie $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(A)$ dans elle-même est exact.

On peut faire les remarques suivantes :

5.4.1. Soit M un A-module. Pour que $M_{\mathbb{Q}}$ soit $A_{\mathbb{Q}}$-plat, il faut et il suffit que pour tout morphisme injectif de A-modules $u\colon N\to N'$, le noyau de $u\otimes \mathrm{id}_M$ soit d'exposant fini (5.1.4).

5.4.2. Si M est un A-module plat, alors $M_{\mathbb{Q}}$ est $A_{\mathbb{Q}}$-plat.

5.4.3. Soient B une A-algèbre, M un $A_{\mathbb{Q}}$-module plat. Alors $M\otimes_{A_{\mathbb{Q}}} B_{\mathbb{Q}}$ est $B_{\mathbb{Q}}$-plat.

5.4.4. Soit B une A-algèbre telle que le foncteur

$$\mathbf{Mod}(A)\to\mathbf{Mod}(B), \quad N\mapsto N\otimes_A B$$

soit exact et fidèle. Pour qu'un $A_{\mathbb{Q}}$-module M soit plat, il faut et il suffit que le $B_{\mathbb{Q}}$-module $M\otimes_{A_{\mathbb{Q}}} B_{\mathbb{Q}}$ soit plat.

5.5. Soient (X,A) un topos annelé, U un objet de X. On désigne par $j_U\colon X_{/U}\to X$ le morphisme de localisation de X en U. Pour tout $F\in\mathrm{Ob}(X)$, le faisceau $j_U^*(F)$ sera aussi noté $F|U$. Le topos $X_{/U}$ sera annelé par $A|U$. Le foncteur prolongement par zéro $j_{U!}\colon \mathbf{Mod}(A|U)\to\mathbf{Mod}(A)$ étant exact et fidèle ([5] IV 11.3.1), il induit un foncteur exact et fidèle que l'on note encore

$$j_{U!}\colon \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(A|U)\to\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(A), \quad P\mapsto j_{U!}(P), \tag{5.5.1}$$

et que l'on appelle encore le *prolongement par zéro*. C'est un adjoint à gauche du foncteur (5.3.1)

$$j_U^*\colon \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(A)\to\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(A|U). \tag{5.5.2}$$

Pour tout $A_{\mathbb{Q}}$-module M, le $(A|U)_{\mathbb{Q}}$-module $j_U^*(M)$ sera aussi noté $M|U$. Pour tout A-module N, on a par définition $(N|U)_{\mathbb{Q}} = N_{\mathbb{Q}}|U$.

Lemme 5.6. *Soient (X,A) un topos annelé, U un objet de X. Alors :*
(i) *Pour tout $(A_{\mathbb{Q}}|U)$-module plat P, $j_{U!}(P)$ est $A_{\mathbb{Q}}$-plat.*
(ii) *Pour tout $A_{\mathbb{Q}}$-module plat M, $j_U^*(M)$ est $(A_{\mathbb{Q}}|U)$-plat.*

En effet, il résulte aussitôt de ([5] IV 12.11) que pour tout $A_{\mathbb{Q}}$-module M et tout $(A_{\mathbb{Q}}|U)$-module P, on a un isomorphisme canonique fonctoriel

$$j_{U!}(P \otimes_{(A_{\mathbb{Q}}|U)} j_U^*(M)) \xrightarrow{\sim} j_{U!}(P) \otimes_{A_{\mathbb{Q}}} M. \tag{5.6.1}$$

(i) Cela résulte de (5.6.1) et du fait que les foncteurs j_U^* et $j_{U!}$ sont exacts.

(ii) Il résulte de (5.6.1) et du fait que le foncteur $j_{U!}$ est exact que le foncteur

$$\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(A|U) \to \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(A), \quad P \mapsto j_{U!}(P \otimes_{(A_{\mathbb{Q}}|U)} j_U^*(M)) \tag{5.6.2}$$

est exact. Comme le foncteur $j_{U!}$ est de plus fidèle (5.5), on en déduit que le foncteur $P \mapsto P \otimes_{(A_{\mathbb{Q}}|U)} j_U^*(M)$ sur la catégorie $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(A|U)$ est exact ; d'où la proposition.

Lemme 5.7. *Soient (X, A) un topos annelé, $(U_i)_{1\leq i\leq n}$ un recouvrement fini de l'objet final de X, M, N deux $A_{\mathbb{Q}}$-modules. Pour tous $1 \leq i, j \leq n$, on pose $U_{ij} = U_i \times U_j$. Alors :*

(i) *Le diagramme d'applications d'ensembles*

$$\mathrm{Hom}_{A_{\mathbb{Q}}}(M, N) \to \prod_{1\leq i\leq n} \mathrm{Hom}_{(A_{\mathbb{Q}}|U_i)}(M|U_i, N|U_i) \rightrightarrows \prod_{1\leq i,j\leq n} \mathrm{Hom}_{(A_{\mathbb{Q}}|U_{i,j})}(M|U_{ij}, N|U_{ij}) \tag{5.7.1}$$

est exact.

(ii) *Pour que M soit nul, il faut et il suffit que pour tout $1 \leq i \leq n$, $M|U_i$ soit nul.*

(iii) *Pour que M soit $A_{\mathbb{Q}}$-plat, il faut et il suffit que pour tout $1 \leq i \leq n$, $M|U_i$ soit $(A_{\mathbb{Q}}|U_i)$-plat.*

(i) Soient M°, N° deux A-modules tels que $M = M^\circ_{\mathbb{Q}}$ et $N = N^\circ_{\mathbb{Q}}$, $u, v \colon M^\circ \to N^\circ$ deux morphismes A-linéaires. Supposons que pour tout $1 \leq i \leq n$, on ait $u_{\mathbb{Q}}|U_i = v_{\mathbb{Q}}|U_i$. Il existe alors un entier $m \neq 0$ tel que $m \cdot u|U_i = m \cdot v|U_i$. On en déduit que $m \cdot u = m \cdot v$, d'où l'exactitude à gauche de (5.7.1). Par ailleurs, soient, pour tout $1 \leq i \leq n$, $u_i \colon M^\circ|U_i \to N^\circ|U_i$ un morphisme $(A|U_i)$-linéaire tels que $(u_{i,\mathbb{Q}})_{1\leq i\leq n}$ soit dans le noyau de la double flèche de (5.7.1). Il existe alors un entier $m' \neq 0$ tel que pour tout $1 \leq i, j \leq n$, on ait $m' \cdot u_i|U_{ij} = m' \cdot u_j|U_{ij}$. Par suite, les morphismes $(m' \cdot u_i)_{1\leq i\leq n}$ se recollent en un morphisme A-linéaire $w \colon M^\circ \to N^\circ$. Il est clair que $(u_{i,\mathbb{Q}})_{1\leq i\leq n}$ est l'image canonique de $m'^{-1} w_{\mathbb{Q}}$, d'où l'exactitude au centre de (5.7.1).

(ii) En effet, M est nul si et seulement si $\mathrm{id}_M = 0$. L'assertion résulte donc de (i).

(iii) En effet, la condition est nécessaire en vertu de 5.6(ii), et elle est suffisante compte tenu de (ii) et ([5] IV 12.11).

5.8. Soient (X, A) un topos annelé, E un A-module. On appelle *A-isogénie de Higgs à coefficients dans E* la donnée d'un quadruplet

$$(M, N, u \colon M \to N, \theta \colon M \to N \otimes_A E) \tag{5.8.1}$$

formé de deux A-modules M et N et de deux morphismes A-linéaires u et θ vérifiant la propriété suivante : il existe un entier $n \neq 0$ et un morphisme A-linéaire $v \colon N \to M$ tels que $v \circ u = n \cdot \mathrm{id}_M$, $u \circ v = n \cdot \mathrm{id}_N$ et que $(M, (v \otimes \mathrm{id}_E) \circ \theta)$ et $(N, \theta \circ v)$ soient des A-modules de Higgs à coefficients dans E ([3] 2.8). On notera que u induit une isogénie de modules de Higgs de $(M, (v \otimes \mathrm{id}_E) \circ \theta)$ dans $(N, \theta \circ v)$ (5.1), d'où la terminologie. Soient (M, N, u, θ), (M', N', u', θ') deux A-isogénies de Higgs à coefficients dans E. Un morphisme de (M, N, u, θ) dans (M', N', u', θ') est la donnée de deux morphismes A-linéaires $\alpha \colon M \to M'$ et $\beta \colon N \to N'$ tels que $\beta \circ u = u' \circ \alpha$ et $(\beta \otimes \mathrm{id}_E) \circ \theta = \theta' \circ \alpha$. On désigne par $\mathbf{IH}(A, E)$ la catégorie des A-isogénies de Higgs à coefficients dans E. C'est une catégorie additive. On note $\mathbf{IH}_{\mathbb{Q}}(A, E)$ la catégorie des objets de $\mathbf{IH}(A, E)$ à isogénie près.

5.9. Soient (X, A) un topos annelé, E un A-module, (M, N, u, θ) une A-isogénie de Higgs à coefficients dans E. Pour tout $i \geq 1$, on désigne par

$$\theta_i \colon M \otimes_A \wedge^i E \to N \otimes_A \wedge^{i+1} E \tag{5.9.1}$$

le morphisme A-linéaire défini pour toutes sections locales m de M et ω de $\wedge^i E$ par $\theta_i(m \otimes \omega) = \theta(m) \wedge \omega$. On note

$$\overline{\theta}_i \colon M_{\mathbb{Q}} \otimes_{A_{\mathbb{Q}}} (\wedge^i E)_{\mathbb{Q}} \to M_{\mathbb{Q}} \otimes_{A_{\mathbb{Q}}} (\wedge^{i+1} E)_{\mathbb{Q}} \tag{5.9.2}$$

le morphisme de $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(A)$ composé de l'image de θ_i et de l'inverse de l'image de $u \otimes \mathrm{id}_{\wedge^{i+1} E}$. Soient $v \colon N \to M$ un morphisme A-linéaire, n un entier non nul tels que $v \circ u = n \cdot \mathrm{id}_M$ et que $(M, (v \otimes \mathrm{id}_E) \circ \theta)$ soit un A-module de Higgs à coefficients dans E. Notons

$$\vartheta_i \colon M \otimes_A \wedge^i E \to M \otimes_A \wedge^{i+1} E \tag{5.9.3}$$

le morphisme A-linéaire induit par $(v \otimes \mathrm{id}_E) \circ \theta$ ([3] (2.8.3)). L'image canonique de ϑ_i dans $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(A)$ est alors égale à $n \cdot \overline{\theta}_i$. On en déduit que $\overline{\theta}_{i+1} \circ \overline{\theta}_i = 0$ (cf. [3] (2.8.2)). On appelle complexe de *Dolbeault* de (M, N, u, θ) et l'on note $\mathbb{K}^\bullet(M, N, u, \theta)$ le complexe de cochaînes de $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(A)$

$$M_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\overline{\theta}_0} M_{\mathbb{Q}} \otimes_{A_{\mathbb{Q}}} E_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\overline{\theta}_1} M_{\mathbb{Q}} \otimes_{A_{\mathbb{Q}}} (\wedge^2 E)_{\mathbb{Q}} \to \dots, \tag{5.9.4}$$

où $M_{\mathbb{Q}}$ est placé en degré 0 et les différentielles sont de degré 1. On obtient ainsi un foncteur de la catégorie $\mathbf{IH}(A, E)$ dans la catégorie des complexes de $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(A)$. Toute isogénie de $\mathbf{IH}(A, E)$ induit un isomorphisme des complexes de Dolbeault associés. Le foncteur “complexe de Dolbeault” induit donc un foncteur de $\mathbf{IH}_{\mathbb{Q}}(A, E)$ dans la catégorie des complexes de $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(A)$.

5.10. Soient (X, A) un topos annelé, B une A-algèbre, $\lambda \in \Gamma(X, A)$. On appelle *λ-isoconnexion relativement à l'extension B/A* (ou simplement *λ-isoconnexion* lorsqu'il n'y a aucun risque de confusion) la donnée d'un quadruplet

$$(M, N, u \colon M \to N, \nabla \colon M \to \Omega^1_{B/A} \otimes_B N) \tag{5.10.1}$$

où M et N sont des B-modules, u est une isogénie de B-modules (5.1) et ∇ est un morphisme A-linéaire tel que pour toutes sections locales x de B et t de M, on ait

$$\nabla(xt) = \lambda d(x) \otimes u(t) + x\nabla(t). \tag{5.10.2}$$

Pour tout morphisme B-linéaire $v \colon N \to M$ pour lequel il existe un entier n tel que $u \circ v = n \cdot \mathrm{id}_N$ et $v \circ u = n \cdot \mathrm{id}_M$, les couples $(M, (\mathrm{id} \otimes v) \circ \nabla)$ et $(N, \nabla \circ v)$ sont des modules à $(n\lambda)$-connexions ([3] 2.10), et u est un morphisme de $(M, (\mathrm{id} \otimes v) \circ \nabla)$ dans $(N, \nabla \circ v)$. On dit que la λ-isoconnexion (M, N, u, ∇) est *intégrable* s'il existe un morphisme B-linéaire $v \colon N \to M$ et un entier $n \neq 0$ tels que $u \circ v = n \cdot \mathrm{id}_N$, $v \circ u = n \cdot \mathrm{id}_M$ et que les $(n\lambda)$-connexions $(\mathrm{id} \otimes v) \circ \nabla$ sur M et $\nabla \circ v$ sur N soient intégrables.

Soient (M, N, u, ∇), (M', N', u', ∇') deux λ-isoconnexions. Un morphisme de (M, N, u, ∇) dans (M', N', u', ∇') est la donnée de deux morphismes B-linéaires $\alpha \colon M \to M'$ et $\beta \colon N \to N'$ tels que $\beta \circ u = u' \circ \alpha$ et $(\mathrm{id} \otimes \beta) \circ \nabla = \nabla' \circ \alpha$.

5.11. Soient $f \colon (X', A') \to (X, A)$ un morphisme de topos annelés, B une A-algèbre, B' une B-algèbre, $\alpha \colon f^*(B) \to B'$ un homomorphisme de A'-algèbres, $\lambda \in \Gamma(X, A)$, (M, N, u, ∇) une λ-isoconnexion relativement à l'extension B/A. Notons λ' l'image canonique de λ dans $\Gamma(X', A')$, $d' \colon B' \to \Omega^1_{B'/A'}$ la A'-dérivation universelle de B' et

$$\gamma \colon f^*(\Omega^1_{B/A}) \to \Omega^1_{B'/A'} \tag{5.11.1}$$

le morphisme α-linéaire canonique. On voit aussitôt que $(f^*(M), f^*(N), f^*(u), f^*(\nabla))$ est une λ'-isoconnexion relativement à l'extension $f^*(B)/A'$, qui est intégrable si (M, N, u, ∇) l'est.

Il existe un unique morphisme A'-linéaire

$$\nabla' \colon B' \otimes_{f^*(B)} f^*(M) \to \Omega^1_{B'/A'} \otimes_{f^*(B)} f^*(N) \tag{5.11.2}$$

tel que pour toutes sections locales x' de B' et t de $f^*(M)$, on ait

$$\nabla'(x' \otimes t) = \lambda' d'(x') \otimes f^*(u)(t) + x'(\gamma \otimes \mathrm{id}_{f^*(N)})(f^*(\nabla)(t)). \tag{5.11.3}$$

Le quadruplet $(B' \otimes_{f^*(B)} f^*(M), B' \otimes_{f^*(B)} f^*(N), \mathrm{id}_{B'} \otimes_{f^*(B)} f^*(u), \nabla')$ est une λ'-isoconnexion relativement à l'extension B'/A', qui est intégrable si (M, N, u, ∇) l'est.

5.12. Soient (X, A) un topos annelé, B une A-algèbre, $\lambda \in \Gamma(X, A)$, (M, N, u, ∇) une λ-isoconnexion intégrable relativement à l'extension B/A. Supposons qu'il existe un A-module E et un B-isomorphisme $\gamma \colon E \otimes_A B \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{B/A}$ tels que pour toute section locale ω de E, on ait $d(\gamma(\omega \otimes 1)) = 0$ (cf. [3] 2.12). Soit (M', N', u', θ') une A-isogénie de Higgs à coefficients dans E. Il existe un unique morphisme A-linéaire

$$\nabla' \colon M \otimes_A M' \to \Omega^1_{B/A} \otimes_B N \otimes_A N' \tag{5.12.1}$$

tel que pour toutes sections locales t de M et t' de M', on ait

$$\nabla'(t \otimes t') = \nabla(t) \otimes_A u'(t') + (\gamma \otimes_B \mathrm{id}_N \otimes_A \mathrm{id}_{N'})(u(t) \otimes_A \theta'(t')). \tag{5.12.2}$$

Le quadruplet $(M \otimes_A M', N \otimes_A N', u \otimes u', \nabla')$ est une λ-isoconnexion intégrable.

5.13. On rappelle que $\mathscr{S}$ désigne le schéma formel $\mathrm{Spf}(\mathscr{O}_C)$ (2.1). Soient $\mathfrak{X}$ un $\mathscr{S}$-schéma formel localement de présentation finie (cf. [1] 2.3.15), $\mathscr{J}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module. Le schéma formel $\mathfrak{X}$ est donc idyllique ([1] 2.6.13). Suivant ([1] 2.10.1), on appelle *clôture rigide* de $\mathscr{F}$ et l'on note $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$, le $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module

$$\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) = \varinjlim_{n \geq 0} \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{J}^n, \mathscr{F}). \tag{5.13.1}$$

Cette notion ne dépend pas de l'idéal $\mathscr{J}$. Par ailleurs, on pose

$$\mathscr{F}[\frac{1}{p}] = \mathscr{F}_{\mathbb{Q}_p} = \mathscr{F} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p. \tag{5.13.2}$$

Comme $p\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ est un idéal de définition de $\mathfrak{X}$, le morphisme canonique $\mathscr{F}_{\mathbb{Q}_p} \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ est un isomorphisme d'après ([1] 2.10.5). On dit que $\mathscr{F}$ est *rig-nul* si le morphisme canonique $\mathscr{F} \to \mathscr{F}_{\mathbb{Q}_p}$ est nul (cf. [1] 2.10.1.4).

Considérons les conditions suivantes :

(i) $\mathscr{F}_{\mathbb{Q}_p} = 0$.

(ii) $\mathscr{F}$ est rig-nul.

(iii) Il existe un entier $n \geq 1$ tel que $p^n \mathscr{F} = 0$.

D'après ([1] 2.10.10), on a alors (iii)$\Rightarrow$(i)$\Leftrightarrow$(ii). De plus, si $\mathfrak{X}$ est quasi-compact et si $\mathscr{F}$ est de type fini, les trois conditions sont équivalentes. On en déduit que si $\mathfrak{X}$ est quasi-compact et si $\mathscr{F}$ est de type fini, pour tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module $\mathscr{G}$, l'homomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]}(\mathscr{F}_{\mathbb{Q}_p}, \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}) \tag{5.13.3}$$

est injectif.

Lemme 5.14. *Soit $\mathfrak{X}$ un $\mathscr{S}$-schéma formel de présentation finie. On note* $\mathbf{Mod}^{\mathrm{coh}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ *(resp.* $\mathbf{Mod}^{\mathrm{coh}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}])$*) la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules (resp. $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-modules) cohérents et* $\mathbf{Mod}^{\mathrm{coh}}_{\mathbb{Q}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ *la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents à isogénie près. Alors le foncteur canonique*

$$\mathbf{Mod}^{\mathrm{coh}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) \to \mathbf{Mod}^{\mathrm{coh}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]), \quad \mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}_{\mathbb{Q}_p}, \tag{5.14.1}$$

induit une équivalence de catégories abéliennes

$$\mathbf{Mod}^{\mathrm{coh}}_{\mathbb{Q}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Mod}^{\mathrm{coh}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]). \tag{5.14.2}$$

On notera d'abord que le foncteur (5.14.1) est bien défini en vertu de ([1] 2.10.24(i)) et qu'il induit un foncteur exact

$$\mathbf{Mod}^{\mathrm{coh}}_{\mathbb{Q}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) \to \mathbf{Mod}^{\mathrm{coh}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]). \tag{5.14.3}$$

Celui-ci est essentiellement surjectif en vertu de ([1] 2.10.24(ii)). Montrons qu'il est pleinement fidèle. Soient $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ deux $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents. L'homomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{F},\mathscr{G}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]}(\mathscr{F}_{\mathbb{Q}_p},\mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}) \tag{5.14.4}$$

est injectif d'après (5.13.3). D'autre part, pour tout morphisme $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-linéaire $v\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$, il existe un entier $n \geq 0$ tel que $v(p^n\mathscr{F})$ soit contenu dans l'image du morphisme canonique $c_{\mathscr{G}}\colon \mathscr{G} \to \mathscr{G}_{\mathbb{Q}_p}$. Comme $\mathscr{G}_{\mathrm{tor}} = \ker(c_{\mathscr{G}})$ est cohérent ([1] 2.10.14), il existe un entier $m \geq 0$ tel que $p^m\mathscr{G}_{\mathrm{tor}} = 0$. On en déduit qu'il existe un morphisme $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-linéaire $w\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ tel que $c_{\mathscr{G}} \circ w = p^{n+m}v$. L'homomorphisme (5.14.4) est donc surjectif ; d'où la proposition.

5.15. Soient $\mathfrak{X}$ un $\mathscr{S}$-schéma formel de présentation finie, $\mathscr{E}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module. On désigne par $\mathbf{MH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}],\mathscr{E}_{\mathbb{Q}_p})$ la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-modules de Higgs à coefficients dans $\mathscr{E}_{\mathbb{Q}_p}$ ([3] 2.8), par $\mathbf{MH}^{\mathrm{coh}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}],\mathscr{E}_{\mathbb{Q}_p})$ la sous-catégorie pleine formée des modules de Higgs dont le $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-module sous-jacent est cohérent, par $\mathbf{IH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}},\mathscr{E})$ la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-isogénies de Higgs à coefficients dans $\mathscr{E}$ (5.8) et par $\mathbf{IH}^{\mathrm{coh}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}},\mathscr{E})$ la sous-catégorie pleine formée des quadruplets $(\mathscr{M},\mathscr{N},u,\theta)$ tels que les $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ soient cohérents. Ce sont des catégories additives. On note $\mathbf{IH}_{\mathbb{Q}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}},\mathscr{E})$ (resp. $\mathbf{IH}^{\mathrm{coh}}_{\mathbb{Q}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}},\mathscr{E})$) la catégorie des objets de $\mathbf{IH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}},\mathscr{E})$ (resp. $\mathbf{IH}^{\mathrm{coh}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}},\mathscr{E})$) à isogénie près (5.1.1). On a un foncteur

$$\mathbf{IH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}},\mathscr{E}) \to \mathbf{MH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}],\mathscr{E}_{\mathbb{Q}_p}), \quad (\mathscr{M},\mathscr{N},u,\theta) \mapsto (\mathscr{M}_{\mathbb{Q}_p}, (u_{\mathbb{Q}_p}^{-1} \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{E}_{\mathbb{Q}_p}}) \circ \theta_{\mathbb{Q}_p}). \tag{5.15.1}$$

Lemme 5.16. *Les hypothèses étant celles de* (5.15)*, soient, de plus, $(\mathscr{M},\mathscr{N},u,\theta)$, $(\mathscr{M}',\mathscr{N}',u',\theta')$ deux objets de $\mathbf{IH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}},\mathscr{E})$ tels que $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ soient des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules de type fini, $(\mathscr{M}_{\mathbb{Q}_p},\widetilde{\theta})$ et $(\mathscr{M}'_{\mathbb{Q}_p},\widetilde{\theta}')$ leurs images respectives par le foncteur* (5.15.1)*. Alors l'homomorphisme canonique*

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbf{IH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}},\mathscr{E})}((\mathscr{M},\mathscr{N},u,\theta),(\mathscr{M}',\mathscr{N}',u',\theta')) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \to \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{MH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}],\mathscr{E}_{\mathbb{Q}_p})}((\mathscr{M}_{\mathbb{Q}_p},\widetilde{\theta}),(\mathscr{M}_{\mathbb{Q}_p},\widetilde{\theta}'))\end{aligned} \tag{5.16.1}$$

est injectif.

En effet, soient $\alpha\colon \mathscr{M} \to \mathscr{M}'$ et $\beta\colon \mathscr{N} \to \mathscr{N}'$ deux morphismes $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-linéaires définissant un morphisme de $(\mathscr{M},\mathscr{N},u,\theta)$ dans $(\mathscr{M}',\mathscr{N}',u',\theta')$ de $\mathbf{IH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}},\mathscr{E})$, dont l'image $\alpha_{\mathbb{Q}_p}$ par l'homomorphisme (5.16.1) est nulle. Comme $(\alpha(\mathscr{M}))_{\mathbb{Q}_p} = 0$ et que $\mathscr{M}$ est de type fini sur $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, il existe un entier $n \geq 0$ tel que $p^n\alpha = 0$ (5.13). De même, comme $\beta_{\mathbb{Q}_p} = 0$, il existe un entier $m \geq 0$ tel que $p^m\beta = 0$. La proposition s'ensuit.

Lemme 5.17. *Les hypothèses étant celles de* (5.15)*, supposons de plus* $\mathscr{E}$ *cohérent. Alors le foncteur*

$$\mathbf{IH}^{\mathrm{coh}}_{\mathbb{Q}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}},\mathscr{E}) \to \mathbf{MH}^{\mathrm{coh}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}],\mathscr{E}_{\mathbb{Q}_p}) \tag{5.17.1}$$

induit par (5.15.1) *est une équivalence de catégories.*

Soient N un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-module cohérent, θ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-champ de Higgs sur N à coefficients dans $\mathscr{E}_{\mathbb{Q}_p}$. D'après ([1] 2.10.24(ii)), il existe un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent $\mathscr{N}$ et un isomorphisme $u\colon \mathscr{N}_{\mathbb{Q}_p} \xrightarrow{\sim} N$. On peut supposer $\mathscr{N}$ sans p-torsion ([1] 2.10.14). D'après la preuve de 5.14, il existe un entier $n \geq 0$ et un morphisme $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-linéaire $\vartheta\colon \mathscr{N} \to \mathscr{N} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{E}$ tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathscr{N} \arrow[r] \arrow[d, "\vartheta"'] & N \arrow[d, "p^n\theta"] \\ \mathscr{N} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{E} \arrow[r] & N \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]} \mathscr{E}_{\mathbb{Q}_p} \end{tikzcd} \tag{5.17.2}$$

où les flèches horizontales sont induites par u, soit commutatif. Quitte à multiplier ϑ par une puissance de p, on peut supposer que $\vartheta \wedge \vartheta = 0$ (5.13.3) (*i.e.*, que ϑ est un champ de Higgs). Comme $\mathscr{N}$ est sans p-torsion, le morphisme ϑ se factorise en deux morphismes $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-linéaires

$$\mathscr{N} \xrightarrow{\nu_n} p^n\mathscr{N} \xrightarrow{\vartheta_n} \mathscr{N} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{E}\ , \tag{5.17.3}$$

où ν_n est l'isomorphisme induit par la multiplication par p^n sur $\mathscr{N}$. Le composé

$$p^n\mathscr{N} \xrightarrow{\vartheta_n} \mathscr{N} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{E} \xrightarrow{\nu_n \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{E}}} (p^n\mathscr{N}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{E} \tag{5.17.4}$$

est alors aussi un champ de Higgs. Notons $\iota_n\colon p^n\mathscr{N} \to \mathscr{N}$ l'injection canonique. On a $\vartheta \circ \iota_n = p^n\vartheta_n$, de sorte que le diagramme

$$\begin{tikzcd} p^n\mathscr{N} \arrow[r, "\iota_n"] \arrow[d, "\vartheta_n"'] & \mathscr{N} \arrow[r] & N \arrow[d, "\theta"] \\ \mathscr{N} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{E} \arrow[rr] & & N \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]} \mathscr{E}_{\mathbb{Q}_p} \end{tikzcd} \tag{5.17.5}$$

est commutatif. Par suite, $(p^n\mathscr{N},\mathscr{N},\iota_n,\vartheta_n)$ est un objet de $\mathbf{IH}^{\mathrm{coh}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}},\mathscr{E})$ dont l'image par le foncteur (5.15.1) est isomorphe à (N,θ). Le foncteur (5.17.1) est donc essentiellement surjectif. On sait d'après 5.16 qu'il est fidèle. Montrons qu'il est plein. Soient $(\mathscr{M},\mathscr{N},u,\theta)$ et $(\mathscr{M}',\mathscr{N}',u',\theta')$ deux objets de $\mathbf{IH}^{\mathrm{coh}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}},\mathscr{E})$, $(\mathscr{M}_{\mathbb{Q}_p},\widetilde{\theta})$ et $(\mathscr{M}'_{\mathbb{Q}_p},\widetilde{\theta}')$ leurs images respectives par le foncteur (5.17.1), $\lambda\colon \mathscr{M}_{\mathbb{Q}_p} \to \mathscr{M}'_{\mathbb{Q}_p}$ un morphisme $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-linéaire tel que $(\lambda \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{E}_{\mathbb{Q}_p}}) \circ \widetilde{\theta} = \widetilde{\theta}' \circ \lambda$. D'après la preuve de 5.14, il existe un entier $n \geq 0$ et un morphisme $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-linéaire $\alpha\colon \mathscr{M} \to \mathscr{M}'$ tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathscr{M} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathscr{M}_{\mathbb{Q}_p} \arrow[d, "p^n\lambda"] \\ \mathscr{M}' \arrow[r] & \mathscr{M}'_{\mathbb{Q}_p} \end{tikzcd} \tag{5.17.6}$$

où les flèches horizontales sont les morphismes canoniques, soit commutatif. D'après ([1] 2.10.22(i) et 2.10.10), il existe un entier $m \geq 0$ tel que p^m annule le noyau et le conoyau de u. Il existe donc un morphisme $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-linéaire $\beta\colon \mathscr{N} \to \mathscr{N}'$ tel que $\beta \circ u = u' \circ (p^{2m}\alpha)$. Notons

$$c\colon \mathscr{N}' \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{E} \to \mathscr{N}'_{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]} \mathscr{E}_{\mathbb{Q}_p}$$

le morphisme canonique. Comme $(\mathscr{N}' \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{E})_{\rm tor} = \ker(c)$ est cohérent ([1] 2.10.14), il existe un entier $q \geq 0$ tel que $p^q \ker(c) = 0$. La relation $(\lambda \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{E}_{\mathbb{Q}_p}}) \circ \widetilde{\theta} = \widetilde{\theta}' \circ \lambda$ implique alors que $((p^q\beta) \otimes \mathrm{id}_{\mathscr{E}}) \circ \theta = \theta' \circ (p^{q+2m}\alpha)$. Le foncteur (5.17.1) est donc plein.

6. Systèmes projectifs d'un topos

6.1. Dans cette section, X désigne un $\mathbb{U}$-topos et I une $\mathbb{U}$-petite catégorie (2.5). On considère toujours X comme muni de sa topologie canonique, qui en fait un $\mathbb{U}$-site. On munit $X \times I$ de la topologie totale relative au site fibré constant $X \times I \to I$ de fibre X (cf. [5] VI 7.4.1 et [4] 7.1), qui en fait un $\mathbb{U}$-site. On rappelle ([5] VI 7.4.7) que le topos des faisceaux de $\mathbb{U}$-ensembles sur $X \times I$ est canoniquement équivalent à la catégorie $\mathbf{Hom}(I^\circ, X)$ des foncteurs de I° dans X, que l'on note encore X^{I°. En particulier, X^{I° est un $\mathbb{U}$-topos. Ce dernier fait peut se voir directement ([5] IV 1.2). On renvoie à ([4] 7.4) pour la description des anneaux et des modules de X^{I°.

Pour tout $i \in \mathrm{Ob}(I)$, on note

$$\alpha_{i!}\colon X \to X \times I \tag{6.1.1}$$

le foncteur qui à un objet F de X associe le couple (F, i). Celui-ci étant cocontinu ([5] VI 7.4.2), il définit un morphisme de topos ([5] IV 4.7)

$$\alpha_i\colon X \to X^{I^\circ}. \tag{6.1.2}$$

D'après ([5] VI 7.4.7), pour tous $F \in \mathrm{Ob}(X^{I^\circ})$ et $i \in \mathrm{Ob}(I)$, on a

$$\alpha_i^*(F) = F(i). \tag{6.1.3}$$

On note encore

$$\alpha_{i!}\colon X \to X^{I^\circ} \tag{6.1.4}$$

le composé de $\alpha_{i!}$ (6.1.1) et du foncteur canonique $X \times I \to X^{I^\circ}$. Pour tous $j \in \mathrm{Ob}(I)$ et $F \in \mathrm{Ob}(X)$, on a

$$\alpha_{i!}(F)(j) = F \times (\mathrm{Hom}_I(j, i))_X, \tag{6.1.5}$$

où $(\mathrm{Hom}_I(j, i))_X$ est le faisceau constant sur X de valeur $\mathrm{Hom}_I(j, i)$. D'après ([5] VI 7.4.3(4)), le foncteur $\alpha_{i!}$ (6.1.4) est un adjoint à gauche de α_i^*.

Pour tout morphisme $f\colon i \to j$ de I, on a un morphisme

$$\rho_f\colon \alpha_i \to \alpha_j, \tag{6.1.6}$$

défini au niveau des images inverses, pour tout $F \in \mathrm{Ob}(X^{I^\circ})$, par le morphisme $F(j) \to F(i)$ induit par f ([5] VI (7.4.5.2)). Si f et g sont deux morphismes composables de I, on a $\rho_{gf} = \rho_g \rho_f$.

Remarques 6.2. (i) Soient $U \in \mathrm{Ob}(X)$, $i \in \mathrm{Ob}(I)$. Pour qu'une famille $((U_n, i_n) \to (U, i))_{n \in N}$ soit couvrante pour la topologie totale de $X \times I$, il faut et il suffit qu'elle soit raffinée par une famille $((V_m, i) \to (U, i))_{m \in M}$, où $(V_m \to U)_{m \in M}$ est une famille couvrante de X ([5] VI 7.4.2(1)).

(ii) Il résulte de (i) que pour qu'un crible $\mathscr{R}$ de X^{I° soit épimorphique strict universel, i.e. couvre l'objet final de X^{I° pour la topologie canonique, il faut et il suffit que pour tout $i \in \mathrm{Ob}(I)$, il existe un raffinement $(U_{i,n})_{n \in N_i}$ de l'objet final de X tel que pour tout $n \in N_i$, $\alpha_{i!}(U_{i,n})$ soit un objet de $\mathscr{R}$ (6.1.4).

(iii) Supposons que les produits fibrés soient représentables dans I. La topologie totale sur $X \times I$ coïncide alors avec la topologie co-évanescente relative au site fibré constant $X \times I \to I$ de fibre

X, lorsque l'on munit I de la topologie chaotique ([4] 5.4). Autrement dit, la topologie totale sur $X \times I$ est engendrée par la *prétopologie* formée des recouvrements verticaux ([4] 5.3 et 5.7).

Remarques 6.3. (i) Les $\mathbb{U}$-limites inductives (resp. les limites projectives finies) dans X^{I° se calculent terme à terme, autrement dit, pour tout foncteur $\varphi\colon N \to X^{I^\circ}$ tel que la catégorie N soit $\mathbb{U}$-petite (resp. finie), si F est un objet de X^{I° qui représente la limite inductive (resp. projective) de φ, alors pour tout $i \in \mathrm{Ob}(I)$, la limite inductive (resp. projective) de $\alpha_i^* \circ \varphi$ est représentable par $\alpha_i^*(F)$.

(ii) Soit ι un objet final de I. D'après (6.1.5), pour tout $j \in \mathrm{Ob}(I)$, $\alpha_j^*\alpha_{\iota!}$ est le foncteur identique de X. Donc en vertu de (i), $\alpha_{\iota!}$ est exact à gauche, et le couple $(\alpha_{\iota!}, \alpha_\iota^*)$ forme un morphisme de topos

$$\beta_\iota\colon X^{I^\circ} \to X. \tag{6.3.1}$$

Le morphisme $\beta_\iota\alpha_\iota\colon X \to X$ est isomorphe au morphisme identique (cf. [5] VI 7.4.12).

(iii) Soit i un objet de I qui n'est pas final. Il existe alors $j \in \mathrm{Ob}(I)$ tel que $\mathrm{Hom}_I(j,i)$ ne soit pas un singleton. En particulier, $\alpha_j^*\alpha_{i!}$ ne transforme pas l'objet final en l'objet final (6.1.5). Par suite, $\alpha_{i!}$ n'est pas exact à gauche, et le couple $(\alpha_{i!}, \alpha_i^*)$ ne forme pas un morphisme de topos, contrairement à ce qui a été affirmé dans ([10] ligne 20 page 59). Toutefois, l'isomorphisme (4.4) et la suite spectrale (4.5) de *loc. cit.* sont corrects en vertu de ([4] 7.7 et 7.8).

6.4. Le foncteur

$$\lambda^*\colon X \to X^{I^\circ} \tag{6.4.1}$$

qui à un objet F de X associe le foncteur constant $I^\circ \to X$ de valeur F, est exact à gauche en vertu de 6.3(i). Il admet pour adjoint à droite le foncteur

$$\lambda_*\colon X^{I^\circ} \to X \tag{6.4.2}$$

qui a un foncteur $I^\circ \to X$ associe sa limite projective ([5] II 4.1(3)). Le couple (λ^*, λ_*) définit donc un morphisme de topos

$$\lambda\colon X^{I^\circ} \to X. \tag{6.4.3}$$

6.5. Tout morphisme de $\mathbb{U}$-topos $f\colon X \to Y$ induit un morphisme cartésien de topos fibrés constants au-dessus de I

$$f \times \mathrm{id}_I\colon X \times I \to Y \times I. \tag{6.5.1}$$

D'après ([5] VI 7.4.10), celui-ci induit un morphisme de topos

$$f^{I^\circ}\colon X^{I^\circ} \to Y^{I^\circ} \tag{6.5.2}$$

tel que pour tout $F \in X^{I^\circ}$, on ait ([5] VI (7.4.9.2))

$$(f^{I^\circ})_*(F) = f_* \circ F. \tag{6.5.3}$$

On voit aussitôt que pour tout $G \in Y^{I^\circ}$, on a

$$(f^{I^\circ})^*(G) = f^* \circ G. \tag{6.5.4}$$

Notons $\mathrm{R}^q(f^{I^\circ})_*$ ($q \in \mathbb{N}$) les foncteurs dérivés droits du foncteur $(f^{I^\circ})_*$ pour les groupes abéliens. D'après ([4] 7.7), pour tout groupe abélien F de X^{I° et tout $i \in \mathrm{Ob}(I)$, on a un isomorphisme canonique fonctoriel

$$\mathrm{R}^q(f^{I^\circ})_*(F)(i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}^q f_*(F(i)). \tag{6.5.5}$$

Proposition 6.6. *Supposons que les produits fibrés soient représentables dans I ; soient, de plus, U un objet de X, $j_{U!}\colon X_{/U} \to X$ le foncteur canonique, $j_U\colon X_{/U} \to X$ le morphisme de localisation de X en U, $j_{\lambda^*(U)}\colon (X^{I^\circ})_{/\lambda^*(U)} \to X^{I^\circ}$ le morphisme de localisation de X^{I° en $\lambda^*(U)$. Alors :*

(i) *La topologie totale sur $X_{/U} \times I$ est induite par la topologie totale sur $X \times I$ via le foncteur $j_{U!} \times \mathrm{id}_I$.*

(ii) *Il existe une équivalence canonique de topos*

$$h\colon (X_{/U})^{I^\circ} \xrightarrow{\sim} (X^{I^\circ})_{/\lambda^*(U)}, \tag{6.6.1}$$

telle que $(j_U)^{I^\circ} = j_{\lambda^*(U)} \circ h$ (6.5.2). En particulier, pour tout $F \in \mathrm{Ob}(X^{I^\circ})$, $F \times \lambda^*(U)$ s'identifie au foncteur $I^\circ \to X_{/U}, i \mapsto F(i) \times U$.

On notera d'abord que la topologie canonique de $X_{/U}$ est induite par la topologie canonique de X via le foncteur $j_{U!}$, et que le foncteur "extension par le vide" s'identifie dans ce cas au foncteur $j_{U!}$ ([5] IV 1.2, III 3.5 et 5.4), d'où la notation.

(i) La topologie totale sur $X \times I$ est engendrée par la prétopologie formée des recouvrements verticaux d'après 6.2(iii) ; et de même pour $X_{/U} \times I$. La proposition résulte donc de ([5] III 3.3 et II 1.4).

(ii) Pour tous $V \in \mathrm{Ob}(X)$ et $i \in \mathrm{Ob}(I)$, on a un isomorphisme canonique (6.1.3)

$$\lambda^*(U)(V \times i) = \mathrm{Hom}_{X^{I^\circ}}(\alpha_{i!}(V), \lambda^*(U)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_X(V, \alpha_i^*(\lambda^*(U))) = U(V). \tag{6.6.2}$$

Par suite, le foncteur $j_{U!} \times \mathrm{id}_I\colon X_{/U} \times I \to X \times I$ se factorise canoniquement en

$$X_{/U} \times I \xrightarrow[\sim]{e} (X \times I)_{/\lambda^*(U)} \xrightarrow{j'_{\lambda^*(U)}} X \times I\ , \tag{6.6.3}$$

où e est une équivalence de catégories et $j'_{\lambda^*(U)}$ est le foncteur canonique. D'après (i) et ([5] III 5.4), e induit une équivalence de topos

$$h\colon (X_{/U})^{I^\circ} \xrightarrow{\sim} (X^{I^\circ})_{/\lambda^*(U)}. \tag{6.6.4}$$

Pour tout $F \in \mathrm{Ob}(X^{I^\circ})$, on a $j^*_{\lambda^*(U)}(F) = F \circ j'_{\lambda^*(U)}$ d'après ([5] III 2.3 et 5.2(2)). Donc $h^*(j^*_{\lambda^*(U)}(F)) = F \circ (j_{U!} \times \mathrm{id}_I)$. Comme $F \circ (j_{U!} \times \mathrm{id}_I) = ((j_U)^{I^\circ})^*(F)$ (6.5.4), on en déduit que $(j_U)^{I^\circ} = j_{\lambda^*(U)} \circ h$.

6.7. Soit J un ensemble ordonné $\mathbb{U}$-petit. On note encore J la catégorie définie par J, c'est-à-dire la catégorie ayant pour objets les éléments de J, avec au plus une flèche de source et de but donnés, et pour tous $i, j \in J$, l'ensemble $\mathrm{Hom}_J(i,j)$ est non-vide si et seulement si $i \leq j$. Il est souvent commode d'utiliser pour les objets $F\colon J^\circ \to X$ de X^{J° la notation indicielle $(F_j)_{j\in J}$ ou même (F_j), où $F_j = F(j)$ pour tout $j \in J$. On dit qu'un objet (F_j) de X^{J° est *strict* si pour tous éléments $i \geq j$ de J, le morphisme de transition $F_i \to F_j$ est un épimorphisme.

Nous nous limitons dans cet article aux cas où J est soit l'ensemble ordonné des entiers naturels $\mathbb{N}$, soit l'un des sous-ensembles ordonnés $[n] = \{0, 1, \ldots, n\}$. On observera que dans chacun de ces cas, les produits fibrés sont représentables dans J.

Lemme 6.8. *Soient n un entier ≥ 0, $\iota_n\colon X \times [n] \to X \times \mathbb{N}$ le foncteur d'injection canonique. Alors :*

(i) *La topologie totale sur $X \times [n]$ est induite par la topologie totale sur $X \times \mathbb{N}$ via le foncteur ι_n.*

(ii) *Le foncteur ι_n est continu et cocontinu pour les topologies totales. Notons*

$$\varphi_n\colon X^{[n]^\circ} \to X^{\mathbb{N}^\circ} \tag{6.8.1}$$

le morphisme associé de topos. Pour tout $F = (F_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Ob}(X^{\mathbb{N}^\circ})$, *on a*

$$\varphi_n^*(F) = (F_i)_{i\in[n]}. \tag{6.8.2}$$

(iii) *Le foncteur* $\varphi_n^* \colon : X^{\mathbb{N}^\circ} \to X^{[n]^\circ}$ *admet pour adjoint à gauche le foncteur*

$$\varphi_{n!} \colon X^{[n]^\circ} \to X^{\mathbb{N}^\circ}, \tag{6.8.3}$$

défini pour tout $F = (F_i)_{i\in[n]} \in \mathrm{Ob}(X^{[n]^\circ})$ *par*

$$\varphi_{n!}(F) = (F_i)_{i\in\mathbb{N}}, \tag{6.8.4}$$

où pour tout $i \geq n+1$, $F_i = \emptyset$ *est l'objet initial de* X.

(i) La topologie totale sur $X \times \mathbb{N}$ est engendrée par la prétopologie formée des recouvrements verticaux d'après 6.2(iii) ; et de même pour $X \times [n]$. La proposition résulte donc de ([5] III 3.3 et II 1.4).

(ii) Notons $\widehat{X}$ (resp. $(X \times \mathbb{N})^\wedge$, resp. $(X \times [n])^\wedge$) la catégorie des préfaisceaux de $\mathbb{U}$-ensembles sur X (resp. $X \times \mathbb{N}$, resp. $X \times [n]$). On a alors une équivalence de catégories (6.1.1)

$$(X \times \mathbb{N})^\wedge \xrightarrow{\sim} \widehat{X}^{\mathbb{N}^\circ} = \mathbf{Hom}(\mathbb{N}^\circ, \widehat{X}), \quad F \mapsto (F \circ \alpha_{i!})_{i\in\mathbb{N}}; \tag{6.8.5}$$

et de même pour $(X \times [n])^\wedge$. Le foncteur ι_n induit par composition le foncteur

$$\widehat{\iota}_n^* \colon \widehat{X}^{\mathbb{N}^\circ} \to \widehat{X}^{[n]^\circ}, \quad (F_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto (F_i)_{i\in[n]}. \tag{6.8.6}$$

Celui-ci admet pour adjoint à droite le foncteur

$$\widehat{\iota}_{n*} \colon \widehat{X}^{[n]^\circ} \to \widehat{X}^{\mathbb{N}^\circ}, \quad (F_i)_{i\in[n]} \mapsto (F_i)_{i\in\mathbb{N}}, \tag{6.8.7}$$

où pour tout $i \geq n+1$, $F_i = F_n$ et le morphisme $F_i \to F_{i-1}$ est l'identité de F_n. Le foncteur $\widehat{\iota}_n^*$ admet pour adjoint à gauche le foncteur

$$\widehat{\iota}_{n!} \colon \widehat{X}^{[n]^\circ} \to \widehat{X}^{\mathbb{N}^\circ}, \quad (F_i)_{i\in[n]} \mapsto (F_i)_{i\in\mathbb{N}}, \tag{6.8.8}$$

où pour tout $i \geq n+1$, $F_i = \emptyset$ est l'objet initial de $\widehat{X}$. Il est clair que $\widehat{\iota}_n^*$ transforme les faisceaux sur $X \times \mathbb{N}$ en des faisceaux sur $X \times [n]$ et que $\widehat{\iota}_{n*}$ transforme les faisceaux sur $X \times [n]$ en des faisceaux sur $X \times \mathbb{N}$. Par suite, i_n est continu et cocontinu. La continuité résulte aussi de (i). La formule (6.8.2) est une conséquence de (6.8.6) et ([5] III 2.3).

(iii) Cela résulte de (6.8.8) et ([5] III 1.3).

Lemme 6.9. *Soient* U *un objet de* X, $j_U \colon X_{/U} \to X$ *le morphisme de localisation de* X *en* U, $n \in \mathbb{N}$, $j_{(U,n)} \colon (X^{\mathbb{N}^\circ})_{/\alpha_{n!}(U)} \to X^{\mathbb{N}^\circ}$ *le morphisme de localisation de* $X^{\mathbb{N}^\circ}$ *en* $\alpha_{n!}(U)$ (6.1.4). *On a alors une équivalence canonique de topos*

$$h \colon (X_{/U})^{[n]^\circ} \xrightarrow{\sim} (X^{\mathbb{N}^\circ})_{/\alpha_{n!}(U)}, \tag{6.9.1}$$

telle que $j_{(U,n)} \circ h$ *soit le composé*

$$(X_{/U})^{[n]^\circ} \xrightarrow{\varphi_n} (X_{/U})^{\mathbb{N}^\circ} \xrightarrow{(j_U)^{\mathbb{N}^\circ}} X^{\mathbb{N}^\circ}, \tag{6.9.2}$$

où la première flèche est le morphisme (6.8.1) *et la seconde flèche est le morphisme* (6.5.2).

Notons $u \colon \alpha_{n!}(U) \to \lambda^*(U)$ l'adjoint de l'isomorphisme canonique $U \xrightarrow{\sim} \alpha_n^*(\lambda^*(U))$ et $\widetilde{\alpha}_{n!}(U)$ l'image de (U, n) par le foncteur canonique $X_{/U} \times \mathbb{N} \to (X_{/U})^{\mathbb{N}^\circ}$ (6.1.4). D'après 6.6(ii), on a une équivalence canonique de topos

$$g \colon (X_{/U})^{\mathbb{N}^\circ} \xrightarrow{\sim} (X^{\mathbb{N}^\circ})_{/\lambda^*(U)}. \tag{6.9.3}$$

Compte tenu de (6.6.3) et ([5] III 5.4), on a $g(\widetilde{\alpha}_{n!}(U)) = u$. On peut donc se borner au cas où U est l'objet final e_X de X en vertu de 6.6(ii) et ([5] IV 5.6).

Le foncteur d'injection canonique $\iota_n\colon X \times [n] \to X \times \mathbb{N}$ se factorise canoniquement en

(6.9.4) $$X \times [n] \xrightarrow[\sim]{\nu} (X \times \mathbb{N})_{/(e_X,n)} \xrightarrow{j'_n} X \times \mathbb{N} ,$$

où ν est une équivalence de catégories et j'_n est le foncteur canonique. D'après 6.8(i) et ([5] III 5.4), ν induit une équivalence de topos

(6.9.5) $$h\colon X^{[n]^\circ} \xrightarrow{\sim} (X^{\mathbb{N}^\circ})_{/\alpha_{n!}(e_X)}.$$

Pour tout $F = (F_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Ob}(X^{\mathbb{N}^\circ})$, on a $j^*_{(e_X,n)}(F) = F \circ j'_n$ ([5] III 2.3 et 5.2(2)). Donc $h^*(j^*_{(e_X,n)}(F)) = F\circ\iota_n$. Comme $F\circ\iota_n = (F_i)_{i\in[n]} = \varphi^*_n(F)$ (6.8.2), on en déduit que $j_{(e_X,n)}\circ h = \varphi_n$.

Proposition 6.10 ([4] 7.9)**.** *Soient n un entier ≥ 0, $A = (A_i)_{i\in[n]}$ un anneau de $X^{[n]^\circ}$, $M = (M_i)_{i\in[n]}$ un A-module de $X^{[n]^\circ}$. Pour tout entier $q \geq 0$, on a alors un isomorphisme canonique*

(6.10.1) $$\mathrm{H}^q(X^{[n]^\circ}, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(X, M_n).$$

Proposition 6.11 ([4] 7.10)**.** *Soient $A = (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un anneau de $X^{\mathbb{N}^\circ}$, U un objet de X, $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un A-module de $X^{\mathbb{N}^\circ}$. Pour tout entier $q \geq 0$, on a alors une suite exacte canonique et fonctorielle*

(6.11.1) $$0 \to \mathrm{R}^1 \varprojlim_{n\in\mathbb{N}^\circ} \mathrm{H}^{q-1}(U, M_n) \to \mathrm{H}^q(\lambda^*(U), M) \to \varprojlim_{n\in\mathbb{N}^\circ} \mathrm{H}^q(U, M_n) \to 0,$$

où l'on a posé $\mathrm{H}^{-1}(U, M_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En effet, on peut se borner au cas où U est l'objet final de X (6.6), auquel cas la proposition est un cas particulier de ([4] 7.10).

6.12. Soient $A = (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un anneau de $X^{\mathbb{N}^\circ}$, $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $N = (N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux A-modules de $X^{\mathbb{N}^\circ}$. On a alors un isomorphisme canonique bifonctoriel

(6.12.1) $$M \otimes_A N \xrightarrow{\sim} (M_n \otimes_{A_n} N_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a un isomorphisme canonique ([5] IV 13.4)

(6.12.2) $$\alpha^*_n(M \otimes_A N) \xrightarrow{\sim} \alpha^*_n(M) \otimes_{\alpha^*_n(A)} \alpha^*_n(N).$$

De même, pour tout entier $q \geq 0$, on a des isomorphismes canoniques fonctoriels (2.7)

(6.12.3) $$\mathrm{S}^q_A(M) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{S}^q_{A_n}(M_n))_{n\in\mathbb{N}},$$

(6.12.4) $$\wedge^q_A(M) \xrightarrow{\sim} (\wedge^q_{A_n}(M_n))_{n\in\mathbb{N}}.$$

Lemme 6.13. *Soient $A = (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un anneau de $X^{\mathbb{N}^\circ}$, $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un A-module de $X^{\mathbb{N}^\circ}$. Pour que M soit A-plat, il faut et il suffit que pour tout entier $n \geq 0$, M_n soit A_n-plat.*

En effet, la condition est nécessaire en vertu de (6.1.3) et ([5] V 1.7.1), et elle est suffisante d'après 6.3(i) et (6.12.1).

Proposition 6.14. *Soient $A = (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un anneau de $X^{\mathbb{N}^\circ}$, $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un A-module strict de $X^{\mathbb{N}^\circ}$* (6.7)*. Pour que M soit de type fini sur A, il faut et il suffit que pour tout entier $n \geq 0$, M_n soit de type fini sur A_n.*

Il n'y a évidemment que la suffisance de la condition à montrer (6.1.3). Supposons que pour tout entier $n \geq 0$, le A_n-module M_n soit type fini. Soient n un entier ≥ 0, $U \in \mathrm{Ob}(X)$ tels que $M_n|U$ soit engendré sur $A_n|U$ par un nombre fini de sections $s_1, \ldots, s_\ell \in \Gamma(U, M_n)$. Comme M est strict, pour tout entier $0 \leq i \leq n$, $M_i|U$ est engendré sur $A_i|U$ par les images canoniques des sections $s_1, \ldots, s_\ell$ dans $\Gamma(U, M_i)$. En vertu de 6.9, on a une équivalence canonique de catégories

$$h\colon (X_{/U})^{[n]^\circ} \xrightarrow{\sim} (X^{\mathbb{N}^\circ})_{/\alpha_{n!}(U)}, \tag{6.14.1}$$

telle que $h^*(A|\alpha_{n!}(U))$ soit isomorphe à l'anneau $(A_i|U)_{i\in[n]}$ de $(X_{/U})^{[n]^\circ}$ et que $h^*(M|\alpha_{n!}(U))$ soit isomorphe au module $(M_i|U)_{i\in[n]}$ de $(X_{/U})^{[n]^\circ}$. D'après 6.10, on a un isomorphisme canonique

$$\Gamma((X_{/U})^{[n]^\circ}, (M_i|U)_{i\in[n]}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(U, M_n). \tag{6.14.2}$$

Compte tenu de 6.3(i), le module $(M_i|U)_{i\in[n]}$ est alors engendré sur $(A_i|U)_{i\in[n]}$ par les sections $s_1, \ldots, s_\ell \in \Gamma(U, M_n)$.

Pour tout entier $m \geq 0$, soit $(U_{m,j})_{j\in J_m}$ un raffinement de l'objet final de X tel que pour tout $j \in J_m$, $M_m|U_{m,j}$ soit engendré sur $A_m|U_{m,j}$ par un nombre fini de sections de $\Gamma(U_{m,j}, M_m)$. D'après ce qui précède, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $j \in J_m$, le module $M|\alpha_{m!}(U_{m,j})$ est engendré sur $A|\alpha_{m!}(U_{m,j})$ par un nombre fini de sections de $\Gamma(U_{m,j}, M_m)$. D'autre part, la famille $(\alpha_{m!}(U_{m,j}))_{m\in\mathbb{N}, j\in J_m}$ est un raffinement de l'objet final de $X^{\mathbb{N}^\circ}$ en vertu de 6.2(ii). Par suite, M est de type fini sur A.

Définition 6.15. Soient n un entier ≥ 0, $A = (A_i)_{i\in[n]}$ un anneau de $X^{[n]^\circ}$. On dit qu'un A-module $(M_i)_{i\in[n]}$ de $X^{[n]^\circ}$ est *adique* si pour tous entiers i et j tels que $0 \leq i \leq j \leq n$, le morphisme $M_j \otimes_{A_j} A_i \to M_i$ déduit du morphisme de transition $M_j \to M_i$ est un isomorphisme (cf. [4] 7.11).

Définition 6.16. Soit $A = (A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un anneau de $X^{\mathbb{N}^\circ}$. On dit qu'un A-module $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $X^{\mathbb{N}^\circ}$ est *adique* si pour tous entiers i et j tels que $0 \leq i \leq j$, le morphisme $M_j \otimes_{A_j} A_i \to M_i$ déduit du morphisme de transition $M_j \to M_i$ est un isomorphisme (cf. [4] 7.11).

Lemme 6.17. *Supposons que X ait suffisamment de points. Soient de plus, R un anneau de X, J un idéal de R. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $R_n = R/J^{n+1}$. On note $\breve{R}$ l'anneau $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $X^{\mathbb{N}^\circ}$. Alors pour qu'un $\breve{R}$-module adique $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $X^{\mathbb{N}^\circ}$ soit de type fini, il faut et il suffit que le R_0-module M_0 soit de type fini.*

Il n'y a évidemment que la suffisance de la condition à montrer. Supposons le R_0-module M_0 de type fini. Soient $\varphi\colon X \to \mathbf{Ens}$ un foncteur fibre, n un entier ≥ 1. Comme on a $\varphi(R_n) = \varphi(R)/(\varphi(J))^{n+1}$ et $\varphi(M_0) = \varphi(M_n)/(\varphi(J)\varphi(M_n))$, $\varphi(M_n)$ est de type fini sur $\varphi(R_n)$ d'après ([1] 1.8.5). Par suite, M_n est de type fini sur R_n, d'où la proposition en vertu de 6.14.

6.18. Soient $f\colon Y \to X$ un morphisme de $\mathbb{U}$-topos, $A = (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un anneau de $X^{\mathbb{N}^\circ}$, $B = (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un anneau de $Y^{\mathbb{N}^\circ}$, $u\colon A \to (f^{\mathbb{N}^\circ})_*(B)$ un homomorphisme d'anneaux. On considère $f^{\mathbb{N}^\circ}\colon Y^{\mathbb{N}^\circ} \to X^{\mathbb{N}^\circ}$ comme un morphisme de topos annelés respectivement, par A et B. Nous utilisons pour les modules la notation $(f^{\mathbb{N}^\circ})^{-1}$ pour désigner l'image inverse au sens des faisceaux abéliens et nous réservons la notation $(f^{\mathbb{N}^\circ})^*$ pour l'image inverse au sens des modules. La donnée de u est équivalente à la donnée pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'un homomorphisme d'anneaux $u_n\colon A_n \to f_*(B_n)$ telle que ces homomorphismes soient compatibles aux morphismes de transition de A et B (6.5.3). L'homomorphisme $(f^{\mathbb{N}^\circ})^{-1}(A) \to B$ adjoint de u correspond au système d'homomorphismes $f^*(A_n) \to B_n$ adjoints des u_n ($n \in \mathbb{N}$) (6.5.4). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par

$$f_n\colon (Y, B_n) \to (X, A_n) \tag{6.18.1}$$

le morphisme de topos annelés défini par f et u_n. D'après (6.5.4) et (6.12.1), pour tout A-module $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $X^{\mathbb{N}^\circ}$, on a un isomorphisme canonique fonctoriel

$$(f^{\mathbb{N}^\circ})^*(M) \xrightarrow{\sim} (f_n^*(M_n)). \tag{6.18.2}$$

Par suite, si M est adique, il en est de même de $(f^{\mathbb{N}^\circ})^*(M)$.

Lemme 6.19. *Soient n un entier ≥ 0, $A = (A_i)_{i\in[n]}$ un anneau de $X^{[n]^\circ}$, $(M_i)_{i\in[n]}$ un A-module de $X^{[n]^\circ}$. Pour que le A-module M soit localement projectif de type fini* (2.8)*, il faut et il suffit que M soit adique et que le A_n-module M_n soit localement projectif de type fini.*

Supposons d'abord M localement projectif de type fini sur A. Le A_n-module M_n est alors localement projectif de type fini (6.1.3). Montrons que M est adique. D'après 6.2(ii), il existe un raffinement $(U_j)_{j\in J}$ de l'objet final de X tel que pour tout $j \in J$, $M|\alpha_{n!}(U_j)$ soit un facteur direct d'un $A|\alpha_{n!}(U_j)$-module libre de type fini. On a $\lambda^*(U_j) = \alpha_{n!}(U_j)$ (6.1.5). Compte tenu de 6.6(ii), on peut alors se borner au cas où M est un facteur direct d'un A-module libre de type fini. Il existe donc un entier $d \geq 1$, un A-module $N = (N_i)_{i\in[n]}$ et un isomorphisme A-linéaire $A^d \xrightarrow{\sim} M \oplus N$. On en déduit que pour tous entiers i et j tels que $0 \leq i \leq j \leq n$, les morphismes canoniques $M_j \otimes_{A_j} A_i \to M_i$ et $N_j \otimes_{A_j} A_i \to N_i$ sont des isomorphismes ; autrement dit, M et N sont adiques.

Supposons ensuite que M soit adique et que le A_n-module M_n soit localement projectif de type fini. Montrons que le A-module M est localement projectif de type fini. Compte tenu de 6.6(ii), on peut se borner au cas où M_n est un facteur direct d'un A_n-module libre de type fini. Il existe donc un entier $d \geq 1$, un A_n-module N_n et un isomorphisme A_n-linéaire $A_n^d \xrightarrow{\sim} M_n \oplus N_n$. Celui-ci induit un isomorphisme A-linéaire

$$A^d \xrightarrow{\sim} M \oplus (N_n \otimes_{A_n} A_i)_{i\in[n]}. \tag{6.19.1}$$

Proposition 6.20. *Soient $A = (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un anneau de $X^{\mathbb{N}^\circ}$, $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un A-module de $X^{\mathbb{N}^\circ}$. Pour que le A-module M soit localement projectif de type fini* (2.8)*, il faut et il suffit que M soit adique et que pour tout entier $n \geq 0$, le A_n-module M_n soit localement projectif de type fini.*

Supposons d'abord M localement projectif de type fini sur A. Pour tout entier $n \geq 0$, le $(A_i)_{i\in[n]}$-module $(M_i)_{i\in[n]}$ est localement projectif de type fini d'après 6.8(ii). On en déduit que M est adique et que pour tout entier $n \geq 0$, le A_n-module M_n est localement projectif de type fini en vertu de 6.19. Supposons ensuite que M soit adique et que pour tout entier $n \geq 0$, le A_n-module M_n soit localement projectif de type fini. Soient n un entier ≥ 0, $U \in \mathrm{Ob}(X)$. D'après 6.9, on a une équivalence canonique de catégories

$$h\colon (X_{/U})^{[n]^\circ} \xrightarrow{\sim} (X^{\mathbb{N}^\circ})_{/\alpha_{n!}(U)}, \tag{6.20.1}$$

telle que $h^*(A|\alpha_{n!}(U))$ soit isomorphe à l'anneau $(A_i|U)_{i\in[n]}$ de $(X_{/U})^{[n]^\circ}$ et que $h^*(M|\alpha_{n!}(U))$ soit isomorphe au module $(M_i|U)_{i\in[n]}$ de $(X_{/U})^{[n]^\circ}$. Par suite, le $A|\alpha_{n!}(U)$-module $M|\alpha_{n!}(U)$ est localement projectif de type fini en vertu de 6.19. On en déduit, compte tenu de 6.2(ii), que le A-module M est localement projectif de type fini.

6.21. Soient Y un schéma connexe, $\overline{y}$ un point géométrique de Y, $Y_{\text{fét}}$ le topos fini étale de Y (2.9), $\mathbf{B}_{\pi_1(Y,\overline{y})}$ le topos classifiant du groupe profini $\pi_1(Y,\overline{y})$,

$$\nu_{\overline{y}}\colon Y_{\text{fét}} \to \mathbf{B}_{\pi_1(Y,\overline{y})} \tag{6.21.1}$$

le foncteur fibre de $Y_{\text{fét}}$ en $\overline{y}$ (2.10). Soit R un anneau de $Y_{\text{fét}}$. Posons $R_{\overline{y}} = \nu_{\overline{y}}(R)$, qui est un anneau muni de la topologie discrète et d'une action continue de $\pi_1(Y,\overline{y})$ par des homomorphismes d'anneaux. On désigne par $\widehat{R}_{\overline{y}}$ le séparé complété p-adique de $R_{\overline{y}}$ que l'on munit de la topologie p-adique et de l'action de $\pi_1(Y,\overline{y})$ induite par celle sur $R_{\overline{y}}$. D'après ([7] III § 2.11 prop. 14 et cor. 1 ; cf. aussi [1] 1.8.7), pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\widehat{R}_{\overline{y}}/p^n\widehat{R}_{\overline{y}} \simeq R_{\overline{y}}/p^nR_{\overline{y}}. \tag{6.21.2}$$

L'action de $\pi_1(Y,\overline{y})$ sur $\widehat{R}_{\overline{y}}$ est donc continue.

Pour tout anneau topologique A muni d'une action continue de $\pi_1(Y,\overline{y})$ par des homomorphismes d'anneaux, on désigne par $\mathbf{Rep}_A^{\rm cont}(\pi_1(Y,\overline{y}))$ la catégorie des A-représentations continues de $\pi_1(Y,\overline{y})$ ([3] 3.1). Considérons les catégories suivantes :

(a) $\mathbf{Rep}_{R_{\overline{y}}}^{\rm disc}(\pi_1(Y,\overline{y}))$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{R_{\overline{y}}}^{\rm cont}(\pi_1(Y,\overline{y}))$ formée des $R_{\overline{y}}$-représentations continues de $\pi_1(Y,\overline{y})$ pour lesquelles la topologie est discrète.

(b) p-$\mathbf{ad}(\mathbf{Rep}_{R_{\overline{y}}}^{\rm disc}(\pi_1(Y,\overline{y})))$ la catégorie des systèmes projectifs p-adiques de $\mathbf{Rep}_{R_{\overline{y}}}^{\rm disc}(\pi_1(Y,\overline{y}))$: un système projectif $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbf{Rep}_{R_{\overline{y}}}^{\rm disc}(\pi_1(Y,\overline{y}))$ est *p-adique* si pour tout entier $n \geq 0$, $p^{n+1}M_n = 0$ et pour tous entiers $m \geq n \geq 0$, le morphisme $M_m/p^{n+1}M_m \to M_n$ induit par le morphisme de transition $M_m \to M_n$ est un isomorphisme ([15] V 3.1.1).

(c) p-$\mathbf{ad}_{\rm tf}(\mathbf{Rep}_{R_{\overline{y}}}^{\rm disc}(\pi_1(Y,\overline{y})))$ la sous-catégorie pleine de p-$\mathbf{ad}(\mathbf{Rep}_{R_{\overline{y}}}^{\rm disc}(\pi_1(Y,\overline{y})))$ formée des systèmes projectifs p-adiques de type fini : on dit qu'un système projectif p-adique $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbf{Rep}_{R_{\overline{y}}}^{\rm disc}(\pi_1(Y,\overline{y}))$ est *de type fini* si pour tout entier $n \geq 0$, M_n est un $R_{\overline{y}}$-module de type fini, ou ce qui revient au même, si M_0 est un $R_{\overline{y}}$-module de type fini ([1] 1.8.5).

(d) $\mathbf{Rep}_{\widehat{R}_{\overline{y}}}^{p\text{-atf}}(\pi_1(Y,\overline{y}))$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{\widehat{R}_{\overline{y}}}^{\rm cont}(\pi_1(Y,\overline{y}))$ formée des $\widehat{R}_{\overline{y}}$-représentations p-adiques de type fini de $\pi_1(Y,\overline{y})$: une $\widehat{R}_{\overline{y}}$-représentation de $\pi_1(Y,\overline{y})$ est *p-adique de type fini* si elle est continue pour la topologie p-adique et si le $\widehat{R}_{\overline{y}}$-module sous-jacent est séparé de type fini. On notera que tout $\widehat{R}_{\overline{y}}$-module de type fini est complet pour la topologie p-adique ([7] chap. III § 2.11 cor. 1 de prop. 16).

La limite projective définit un foncteur

$$p\text{-}\mathbf{ad}(\mathbf{Rep}_{R_{\overline{y}}}^{\rm disc}(\pi_1(Y,\overline{y}))) \to \mathbf{Rep}_{\widehat{R}_{\overline{y}}}^{\rm cont}(\pi_1(Y,\overline{y})), \tag{6.21.3}$$

qui induit une équivalence de catégories

$$p\text{-}\mathbf{ad}_{\rm tf}(\mathbf{Rep}_{R_{\overline{y}}}^{\rm disc}(\pi_1(Y,\overline{y}))) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Rep}_{\widehat{R}_{\overline{y}}}^{p\text{-atf}}(\pi_1(Y,\overline{y})). \tag{6.21.4}$$

En effet, pour tout objet (M_n) de p-$\mathbf{ad}_{\rm tf}(\mathbf{Rep}_{R_{\overline{y}}}^{\rm disc}(\pi_1(Y,\overline{y})))$, le $\widehat{R}_{\overline{y}}$-module

$$\widehat{M} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} M_n$$

est de type fini et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\widehat{M}/p^{n+1}\widehat{M} \simeq M_n$ d'après ([7] III § 2.11 prop. 14 et cor. 1).

En restreignant le foncteur $\nu_{\overline{y}}$ (6.21.1) aux R-modules, on obtient une équivalence de catégories que l'on note encore

$$\nu_{\overline{y}} \colon \mathbf{Mod}(R) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Rep}_{R_{\overline{y}}}^{\rm disc}(\pi_1(Y,\overline{y})). \tag{6.21.5}$$

On note $\breve{R}$ l'anneau $(R/p^{n+1}R)_{n\in\mathbb{N}}$ de $Y_{\rm f\acute{e}t}^{\mathbb{N}^\circ}$ et $\mathbf{Mod}^{\rm ad}(\breve{R})$ (resp. $\mathbf{Mod}^{\rm atf}(\breve{R})$) la catégorie des $\breve{R}$-modules adiques (resp. adiques de type fini) de $Y_{\rm f\acute{e}t}^{\mathbb{N}^\circ}$. Pour qu'un $\breve{R}$-module $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $Y_{\rm f\acute{e}t}^{\mathbb{N}^\circ}$ soit adique (resp. adique de type fini), il faut et il suffit que le système projectif $(\nu_{\overline{y}}(M_n))$ de $\mathbf{Rep}_{R_{\overline{y}}}^{\rm disc}(\pi_1(Y,\overline{y}))$ soit p-adique (resp. p-adique de type fini en vertu de 6.14). Les foncteurs (6.21.5) et (6.21.3) induisent donc un foncteur

$$\mathbf{Mod}^{\mathrm{ad}}(\breve{R}) \to \mathbf{Rep}^{\mathrm{cont}}_{\widehat{R}_{\overline{y}}}(\pi_1(Y,\overline{y})) \tag{6.21.6}$$

et une équivalence de catégories

$$\mathbf{Mod}^{\mathrm{atf}}(\breve{R}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Rep}^{p\text{-atf}}_{\widehat{R}_{\overline{y}}}(\pi_1(Y,\overline{y})). \tag{6.21.7}$$

7. Topos annelé de Faltings

7.1. Dans cette section, on se donne un diagramme commutatif de morphismes de schémas

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "h"'] & \overline{X} \arrow[d, "\hbar"] \\ & X \end{tikzcd} \tag{7.1.1}$$

tel que $\overline{X}$ soit normal et localement irréductible (3.1) et que j soit une immersion ouverte quasi-compacte. On notera que $\overline{X}$ et par suite Y sont étale-localement connexes d'après 3.2(iii). Pour tout X-schéma U, on pose

$$\overline{U} = U \times_X \overline{X} \quad \text{et} \quad U_Y = U \times_X Y. \tag{7.1.2}$$

On désigne par

$$\pi \colon E \to \mathbf{\acute{E}t}_{/X} \tag{7.1.3}$$

le $\mathbb{U}$-site fibré de Faltings associé au morphisme h (2.9) ([4] 10.1). On rappelle que les objets de E sont les morphismes de schémas $V \to U$ au-dessus de h tels que le morphisme $U \to X$ soit étale et que le morphisme $V \to U_Y$ soit étale fini. Soient $(V' \to U')$, $(V \to U)$ deux objets de E. Un morphisme de $(V' \to U')$ dans $(V \to U)$ est la donnée d'un X-morphisme $U' \to U$ et d'un Y-morphisme $V' \to V$ tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[r] \arrow[d] & U' \arrow[d] \\ V \arrow[r] & U \end{tikzcd} \tag{7.1.4}$$

soit commutatif. Le foncteur π est alors défini pour tout $(V \to U) \in \mathrm{Ob}(E)$, par

$$\pi(V \to U) = U. \tag{7.1.5}$$

Pour tout $U \in \mathrm{Ob}(\mathbf{\acute{E}t}_{/X})$, la fibre de E au-dessus de U s'identifie canoniquement au site fini étale de U_Y (2.9). On note

$$\alpha_{U!} \colon \mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{f}/U_Y} \to E, \quad V \mapsto (V \to U) \tag{7.1.6}$$

le foncteur canonique ([4] (5.1.2)).

On désigne par

$$\mathfrak{F} \to \mathbf{\acute{E}t}_{/X} \tag{7.1.7}$$

le $\mathbb{U}$-topos fibré associé à π. La catégorie fibre de $\mathfrak{F}$ au-dessus de tout $U \in \mathrm{Ob}(\mathbf{\acute{E}t}_{/X})$ est canoniquement équivalente au topos fini étale $(U_Y)_{\mathrm{f\acute{e}t}}$ de U_Y (2.9) et le foncteur image inverse pour tout morphisme $f \colon U' \to U$ de $\mathbf{\acute{E}t}_{/X}$ s'identifie au foncteur $(f_Y)^*_{\mathrm{f\acute{e}t}} \colon (U_Y)_{\mathrm{f\acute{e}t}} \to (U'_Y)_{\mathrm{f\acute{e}t}}$ image inverse par le morphisme de topos $(f_Y)_{\mathrm{f\acute{e}t}} \colon (U'_Y)_{\mathrm{f\acute{e}t}} \to (U_Y)_{\mathrm{f\acute{e}t}}$ ([4] 9.3). On désigne par

$$\mathfrak{F}^{\vee} \to (\mathbf{\acute{E}t}_{/X})^{\circ} \tag{7.1.8}$$

la catégorie fibrée obtenue en associant à tout $U \in \mathrm{Ob}(\mathbf{\acute{E}t}_{/X})$ la catégorie $(U_Y)_{\text{fét}}$, et à tout morphisme $f\colon U' \to U$ de $\mathbf{\acute{E}t}_{/X}$ le foncteur $(f_Y)_{\text{fét}*}\colon (U'_Y)_{\text{fét}} \to (U_Y)_{\text{fét}}$ image directe par le morphisme de topos $(f_Y)_{\text{fét}}$. On désigne par

$$\mathscr{P}^\vee \to (\mathbf{\acute{E}t}_{/X})^\circ \tag{7.1.9}$$

la catégorie fibrée obtenue en associant à tout $U \in \mathrm{Ob}(\mathbf{\acute{E}t}_{/X})$ la catégorie $(\mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{f}/U_Y})^\wedge$ des préfaisceaux de $\mathbb{U}$-ensembles sur $\mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{f}/U_Y}$, et à tout morphisme $f\colon U' \to U$ de $\mathbf{\acute{E}t}_{/X}$ le foncteur

$$(f_Y)_{\text{fét}*}\colon (\mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{f}/U'_Y})^\wedge \to (\mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{f}/U_Y})^\wedge \tag{7.1.10}$$

obtenu en composant avec le foncteur image inverse $f_Y^+\colon \mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{f}/U_Y} \to \mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{f}/U'_Y}$.

7.2. On désigne par $\widehat{E}$ la catégorie des préfaisceaux de $\mathbb{U}$-ensembles sur E. On a alors une équivalence de catégories ([4] 5.2)

$$\begin{array}{rcl} \widehat{E} & \to & \mathbf{Hom}_{(\mathbf{\acute{E}t}_{/X})^\circ}((\mathbf{\acute{E}t}_{/X})^\circ, \mathscr{P}^\vee) \\ F & \mapsto & \{U \mapsto F \circ \alpha_{U!}\}. \end{array} \tag{7.2.1}$$

On identifiera dans la suite F à la section $\{U \mapsto F \circ \alpha_{U!}\}$ qui lui est associée par cette équivalence.

On munit E de la topologie co-évanescente définie par π ([4] 5.3) et on note $\widetilde{E}$ le topos des faisceaux de $\mathbb{U}$-ensembles sur E. Les site et topos ainsi définis sont appelés *site et topos de Faltings* associés à h ([4] 10.1). Si F est un préfaisceau sur E, on note F^a le faisceau associé. D'après ([4] 5.9), le foncteur (7.2.1) induit un foncteur pleinement fidèle

$$\widetilde{E} \to \mathbf{Hom}_{(\mathbf{\acute{E}t}_{/X})^\circ}((\mathbf{\acute{E}t}_{/X})^\circ, \mathfrak{F}^\vee) \tag{7.2.2}$$

d'image essentielle les sections $\{U \mapsto F_U\}$ vérifiant une condition de recollement.

7.3. Le foncteur $\alpha_{X!}\colon \mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{f}/Y} \to E$ est continu et exact à gauche ([4] 5.30). Il définit donc un morphisme de topos ([4] (10.6.3))

$$\beta\colon \widetilde{E} \to Y_{\text{fét}}. \tag{7.3.1}$$

Le foncteur

$$\sigma^+\colon \mathbf{\acute{E}t}_{/X} \to E, \quad U \mapsto (U_Y \to U) \tag{7.3.2}$$

est continu et exact à gauche ([4] 5.30). Il définit donc un morphisme de topos ([4] (10.6.4))

$$\sigma\colon \widetilde{E} \to X_{\text{ét}}. \tag{7.3.3}$$

Par ailleurs, le foncteur

$$\Psi^+\colon E \to \mathbf{\acute{E}t}_{/Y}, \quad (V \to U) \mapsto V \tag{7.3.4}$$

est continu et exact à gauche ([4] 10.7). Il définit donc un morphisme de topos

$$\Psi\colon Y_{\text{ét}} \to \widetilde{E}. \tag{7.3.5}$$

On a des morphismes canoniques ([4] (10.8.3) et (10.8.4))

$$\sigma^* \to \Psi_* h_{\text{ét}}^*, \tag{7.3.6}$$

$$\beta^* \to \Psi_* \rho_Y^*, \tag{7.3.7}$$

où $\rho_Y\colon Y_{\text{ét}} \to Y_{\text{fét}}$ est le morphisme canonique (2.9.1). Si X est quasi-séparé et si Y est cohérent, (7.3.7) est un isomorphisme en vertu de ([4] 10.9(iii)).

Remarque 7.4. Il résulte aussitôt de ([4] 5.8) que $\{U \mapsto U_Y\}$ est un faisceau sur E. C'est donc un objet final de $\widetilde{E}$ et on a des isomorphismes canoniques

$$\sigma^*(X) \xrightarrow{\sim} \{U \mapsto U_Y\} \xleftarrow{\sim} \beta^*(Y). \tag{7.4.1}$$

7.5. Considérons un diagramme commutatif

$$\begin{CD} Y' @>{h'}>> X' \\ @VVV @VVV \\ Y @>{h}>> X \end{CD} \tag{7.5.1}$$

et notons E' le topos de Faltings associé au morphisme h' et $\widetilde{E}'$ le topos des faisceaux de $\mathbb{U}$-ensembles sur E' ([4] 10.1). On a alors un foncteur continu et exact à gauche ([4] 10.12)

$$\Phi^+ \colon E \to E', \quad (V \to U) \mapsto (V \times_Y Y' \to U \times_X X'). \tag{7.5.2}$$

Il définit un morphisme de topos

$$\Phi \colon \widetilde{E}' \to \widetilde{E}. \tag{7.5.3}$$

7.6. On désigne par D le site co-évanescent associé au foncteur $h^+ \colon \mathbf{\acute{E}t}_{/X} \to \mathbf{\acute{E}t}_{/Y}$ induit par h ([4] 4.1). Le topos des faisceaux de $\mathbb{U}$-ensembles sur D est le topos co-évanescent $X_{\text{ét}} \overleftarrow{\times}_{X_{\text{ét}}} Y_{\text{ét}}$ associé au morphisme $h_{\text{ét}} \colon Y_{\text{ét}} \to X_{\text{ét}}$ induit par h ([4] 3.12 et 4.10). Tout objet de E est naturellement un objet de D. On définit ainsi un foncteur pleinement fidèle et exact à gauche

$$\rho^+ \colon E \to D. \tag{7.6.1}$$

Celui-ci est continu et exact à gauche ([4] 10.15). Il définit donc un morphisme de topos

$$\rho \colon X_{\text{ét}} \overleftarrow{\times}_{X_{\text{ét}}} Y_{\text{ét}} \to \widetilde{E}. \tag{7.6.2}$$

Si X et Y sont cohérents, la famille des points de $\widetilde{E}$ images par ρ des points de $X_{\text{ét}} \overleftarrow{\times}_{X_{\text{ét}}} Y_{\text{ét}}$ est conservative en vertu de ([4] 10.18). On rappelle ([4] 10.20) que la donnée d'un point de $X_{\text{ét}} \overleftarrow{\times}_{X_{\text{ét}}} Y_{\text{ét}}$ est équivalente à la donnée d'une paire de points géométriques $\overline{x}$ de X et $\overline{y}$ de Y et d'une flèche de spécialisation u de $h(\overline{y})$ vers $\overline{x}$, c'est-à-dire, d'un X-morphisme $u \colon \overline{y} \to X_{(\overline{x})}$, où $X_{(\overline{x})}$ désigne le localisé strict de X en $\overline{x}$. Un tel point sera noté $(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x})$ ou encore $(u \colon \overline{y} \rightsquigarrow \overline{x})$. On désigne par $\rho(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x})$ son image par ρ, qui est donc un point de $\widetilde{E}$.

7.7. Supposons X strictement local, de point fermé x. On désigne par E_{scoh} la sous-catégorie pleine de E formée des objets $(V \to U)$ tels que le morphisme $U \to X$ soit séparé et cohérent, que l'on munit de la topologie induite par celle de E. Le foncteur d'injection canonique $E_{\text{scoh}} \to E$ induit alors par restriction une équivalence de catégories entre $\widetilde{E}$ et le topos des faisceaux de $\mathbb{U}$-ensembles sur E_{scoh} ([4] 10.4).

Pour tout morphisme étale, séparé et cohérent $U \to X$, on désigne par U^{f} la somme disjointe des localisés stricts de U en les points de U_x ; c'est un sous-schéma ouvert et fermé de U, qui est fini sur X ([19] 18.5.11). D'après ([4] 10.23), le foncteur

$$\theta^+ \colon E_{\text{scoh}} \to \mathbf{\acute{E}t}_{\text{f}/Y}, \quad (V \to U) \mapsto V \times_U U^{\text{f}} \tag{7.7.1}$$

est continu et exact à gauche. Il définit donc un morphisme de topos

$$\theta \colon Y_{\text{fét}} \to \widetilde{E}. \tag{7.7.2}$$

On a un isomorphisme canonique ([4] (10.24.3))

$$\beta\theta \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{Y_{\mathrm{f\acute{e}t}}}. \tag{7.7.3}$$

On en déduit un morphisme de changement de base ([4] (10.24.4))

$$\beta_* \to \theta^*. \tag{7.7.4}$$

Celui-ci est un isomorphisme en vertu de ([4] 10.27) ; en particulier, le foncteur β_* est exact.

7.8. Soient $\overline{x}$ un point géométrique de X, X' le localisé strict de X en $\overline{x}$, $Y' = Y \times_X X'$, $h' \colon Y' \to X'$ la projection canonique. On désigne par E' le site de Faltings associé au morphisme h', par $\widetilde{E}'$ le topos des faisceaux de $\mathbb{U}$-ensembles sur E', par

$$\beta' \colon \widetilde{E}' \to Y'_{\mathrm{f\acute{e}t}} \tag{7.8.1}$$

le morphisme canonique (7.3.1), par

$$\Phi \colon \widetilde{E}' \to \widetilde{E} \tag{7.8.2}$$

le morphisme de fonctorialité (7.5.3) et par

$$\theta \colon Y'_{\mathrm{f\acute{e}t}} \to \widetilde{E}' \tag{7.8.3}$$

le morphisme (7.7.2). On note

$$\varphi_{\overline{x}} \colon \widetilde{E} \to Y'_{\mathrm{f\acute{e}t}} \tag{7.8.4}$$

le foncteur composé $\theta^* \circ \Phi^*$.

Si X et Y sont cohérents, la famille des foncteurs $\varphi_{\overline{x}}$, lorsque $\overline{x}$ décrit l'ensemble des points géométriques de X, est conservative en vertu de ([4] 10.38).

On désigne par $\mathfrak{E}_{\overline{x}}$ la catégorie des X-schémas étales $\overline{x}$-pointés ([5] VIII 3.9), ou ce qui revient au même, la catégorie des voisinages du point de $X_{\mathrm{\acute{e}t}}$ associé à $\overline{x}$ dans le site $\mathbf{\acute{E}t}_{/X}$ ([5] IV 6.8.2). Pour tout $U \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{E}_{\overline{x}})$, on désigne par

$$t_U \colon Y' \to U_Y \tag{7.8.5}$$

le morphisme canonique. D'après ([4] 10.35), si h est cohérent et si l'ensemble des composantes connexes de Y' est localement fini, alors pour tout faisceau $F = \{U \mapsto F_U\}$ de $\widetilde{E}$, on a un isomorphisme canonique fonctoriel

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ U \in \mathfrak{E}^{\circ}_{\overline{x}}}} (t_U)^*_{\mathrm{f\acute{e}t}}(F_U) \xrightarrow{\sim} \varphi_{\overline{x}}(F). \tag{7.8.6}$$

7.9. On désigne par $\mathscr{B}$ le préfaisceau sur E défini pour tout $(V \to U) \in \mathrm{Ob}(E)$, par

$$\mathscr{B}((V \to U)) = \Gamma(\overline{U}, \mathscr{O}_{\overline{U}}) \tag{7.9.1}$$

et par $\mathscr{B}^a$ le faisceau associé. D'après ([4] 5.32(ii)) et avec les conventions de notation de 2.9, on a un isomorphisme canonique

$$\sigma^*(\hbar_*(\mathscr{O}_{\overline{X}})) \xrightarrow{\sim} \mathscr{B}^a. \tag{7.9.2}$$

7.10. Pour tout $(V \to U) \in \mathrm{Ob}(E)$, on note $\overline{U}^V$ la fermeture intégrale de $\overline{U} = U \times_X \overline{X}$ dans V. Pour tout morphisme $(V' \to U') \to (V \to U)$ de E, on a un morphisme canonique $\overline{U}'^{V'} \to \overline{U}^V$ qui s'insère dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[r] \arrow[d] & \overline{U}'^{V'} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{U}' \arrow[r] \arrow[d] & U' \arrow[d] \\ V \arrow[r] & \overline{U}^V \arrow[r] & \overline{U} \arrow[r] & U \end{tikzcd} \tag{7.10.1}$$

On désigne par $\overline{\mathscr{B}}$ le préfaisceau sur E défini pour tout $(V \to U) \in \mathrm{Ob}(E)$, par

$$\overline{\mathscr{B}}((V \to U)) = \Gamma(\overline{U}^V, \mathscr{O}_{\overline{U}^V}). \tag{7.10.2}$$

Pour tout $U \in \mathrm{Ob}(\mathbf{\acute{E}t}_{/X})$, on pose (7.1.6)

$$\overline{\mathscr{B}}_U = \overline{\mathscr{B}} \circ \alpha_{U!}. \tag{7.10.3}$$

Remarques 7.11. Soit $(V \to U)$ un objet de E. Alors :

(i) Comme V est entier sur U_Y, le morphisme canonique $V \to U_Y \times_{\overline{U}} \overline{U}^V$ est un isomorphisme. En particulier, le morphisme canonique $V \to \overline{U}^V$ est une immersion ouverte schématiquement dominante.

(ii) Le schéma $\overline{U}^V$ est normal et localement irréductible (3.1). En effet, $\overline{U}$ et V sont normaux et localement irréductibles d'après 3.3. Soit U_0 un ouvert de $\overline{U}$ n'ayant qu'un nombre fini de composantes irréductibles. Alors $U_0 \times_{\overline{U}} \overline{U}^V$ est la somme finie des fermetures intégrales de U_0 dans les points génériques de V qui sont au-dessus de U_0, dont chacune est un schéma intègre et normal en vertu de ([17] 6.3.7).

(iii) Pour tout U-schéma étale U', posant $V' = V \times_U U'$, le morphisme canonique (7.10.1)

$$\overline{U}'^{V'} \to \overline{U}^V \times_U U' \tag{7.11.1}$$

est un isomorphisme. En effet, $\overline{U}^V \times_U U'$ est normal et localement irréductible d'après (ii) et 3.3, et le morphisme canonique $V' \to \overline{U}^V \times_U U'$ est une immersion ouverte schématiquement dominante en vertu de (i) et ([19] 11.10.5). L'assertion s'ensuit car $\overline{U}'^{V'}$ s'identifie à la fermeture intégrale de $\overline{U}^V \times_U U'$ dans V'.

Lemme 7.12. *Soient $(V \to U)$ un objet de E, $f\colon W \to V$ un torseur pour la topologie étale de V sous un groupe constant fini G. On désigne par $\overline{f}\colon \overline{U}^W \to \overline{U}^V$ le morphisme induit par f. Alors l'action naturelle de G sur $\overline{U}^W$ est admissible* ([14] V Déf. 1.7) *et $(\overline{U}^V, \overline{f})$ est un schéma quotient de $\overline{U}^W$ par G, autrement dit, le morphisme canonique*

$$\mathscr{O}_{\overline{U}^V} \to \overline{f}_*(\mathscr{O}_{\overline{U}^W})^G \tag{7.12.1}$$

est un isomorphisme. En particulier, le morphisme canonique

$$\Gamma(\overline{U}^V, \mathscr{O}_{\overline{U}^V}) \to \Gamma(\overline{U}^W, \mathscr{O}_{\overline{U}^W})^G \tag{7.12.2}$$

est un isomorphisme.

En effet, l'action de G sur $\overline{U}^W$ est admissible en vertu de ([14] V Cor. 1.8). Notons Z le quotient de $\overline{U}^W$ par G. D'après 7.11(i) et ([14] Prop. 1.9), f induit un isomorphisme $V \xrightarrow{\sim} U_Y \times_{\overline{U}} Z$, et le morphisme $V \to Z$ est une immersion ouverte schématiquement dominante. Comme Z est entier sur $\overline{U}$, on en déduit que le morphisme $Z \to \overline{U}^V$ induit par $\overline{f}$ est un isomorphisme, d'où l'isomorphisme (7.12.1). L'isomorphisme (7.12.2) s'en déduit puisque le foncteur $\Gamma(\overline{U}^V, -)$ sur le topos de Zariski de $\overline{U}^V$ est exact à gauche.

7.13. Soient U un objet de $\mathbf{\acute{E}t}_{/X}$, $\overline{y}$ un point géométrique de U_Y. Le schéma $\overline{U}$ étant localement irréductible (3.3), il est la somme des schémas induits sur ses composantes irréductibles. On note $\overline{U}'$ la composante irréductible de $\overline{U}$ (ou ce qui revient au même, sa composante connexe) contenant $\overline{y}$. De même, U_Y est la somme des schémas induits sur ses composantes irréductibles. On pose $V = \overline{U}' \times_{\overline{X}} Y$ qui est la composante irréductible de U_Y contenant $\overline{y}$. On désigne par $\mathbf{B}_{\pi_1(V,\overline{y})}$ le topos classifiant du groupe profini $\pi_1(V, \overline{y})$, par $(V_i)_{i\in I}$ le revêtement universel normalisé de V en $\overline{y}$ (cf. 2.10) et par

$$\nu_{\overline{y}} \colon V_{\text{fét}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{B}_{\pi_1(V,\overline{y})}, \quad F \mapsto \varinjlim_{i\in I^\circ} F(V_i) \tag{7.13.1}$$

le foncteur fibre de $V_{\text{fét}}$ en $\overline{y}$ (2.10.3). Pour chaque $i \in \mathrm{Ob}(I)$, $(V_i \to U)$ est naturellement un objet de E. On peut donc considérer le système projectif filtrant des schémas $(\overline{U}^{V_i})_{i\in I}$. On pose

$$\overline{R}^{\overline{y}}_U = \varinjlim_{i\in I^\circ} \Gamma(\overline{U}^{V_i}, \mathscr{O}_{\overline{U}^{V_i}}), \tag{7.13.2}$$

qui est une représentation discrète continue de $\pi_1(V, \overline{y})$ en vertu de 7.12, autrement dit, c'est un objet de $\mathbf{B}_{\pi_1(V,\overline{y})}$.

Remarque 7.14. Conservons les hypothèses de (7.13) et notons $\overline{U}^{\overline{y}}$ la limite projective dans la catégorie des $\overline{U}$-schémas du système projectif filtrant $(\overline{U}^{V_i})_{i\in I}$, qui existe en vertu de ([19] 8.2.3). D'après ([5] VI 5.3), si $\overline{U}$ est cohérent, on a un isomorphisme canonique

$$\Gamma(\overline{U}^{\overline{y}}, \mathscr{O}_{\overline{U}^{\overline{y}}}) \xrightarrow{\sim} \overline{R}^{\overline{y}}_U. \tag{7.14.1}$$

Lemme 7.15. *Sous les hypothèses de* (7.13), $\overline{\mathscr{B}}_U$ (7.10.3) *est un faisceau pour la topologie étale de* $\mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{f}/U_Y}$, *et on a un isomorphisme canonique*

$$\nu_{\overline{y}}(\overline{\mathscr{B}}_U|V) \xrightarrow{\sim} \overline{R}^{\overline{y}}_U. \tag{7.15.1}$$

Il suffit de montrer que la restriction du préfaisceau $\overline{\mathscr{B}}_U$ au site $\mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{f}/V}$ est un faisceau. L'isomorphisme (7.15.1) résultera alors aussitôt des définitions. Notons

$$\mu^+_{\overline{y}} \colon \mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{f}/V} \to \mathbf{B}_{\pi_1(V,\overline{y})} \tag{7.15.2}$$

le foncteur fibre en $\overline{y}$ (2.10.2). Pour tout $W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{f}/V})$, on a un isomorphisme fonctoriel

$$\mu^+_{\overline{y}}(W) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{i\in I^\circ} \mathrm{Hom}_V(V_i, W). \tag{7.15.3}$$

On en déduit un morphisme fonctoriel en W

$$\Gamma(\overline{U}^W, \mathscr{O}_{\overline{U}^W}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}_{\pi_1(V,\overline{y})}}(\mu^+_{\overline{y}}(W), \overline{R}^{\overline{y}}_U). \tag{7.15.4}$$

Celui-ci est un isomorphisme en vertu de 7.12, d'où l'assertion recherchée.

Proposition 7.16. *Le préfaisceau* $\overline{\mathscr{B}}$ *sur* E *est un faisceau pour la topologie co-évanescente.*

Soient $(V \to U) \in \mathrm{Ob}(E)$, $(U_i \to U)_{i\in I}$ un recouvrement de $\mathbf{\acute{E}t}_{/X}$. Pour tout $(i,j) \in I^2$, posons $V_i = V \times_U U_i$, $U_{ij} = U_i \times_U U_j$ et $V_{ij} = U_{ij} \times_U V$. On a $\overline{U}_i^{V_i} \simeq \overline{U}^V \times_U U_i$ et $\overline{U}_{ij}^{V_{ij}} \simeq \overline{U}^V \times_U U_{ij}$ d'après 7.11(iii). Considérant $\mathscr{O}_{\overline{U}^V}$ comme un faisceau du topos étale de $\overline{U}^V$, le recouvrement étale $(\overline{U}_i^{V_i} \to \overline{U}^V)_{i\in I}$ induit alors une suite exacte d'applications d'ensembles

$$\overline{\mathscr{B}}((V \to U)) \to \prod_{i\in I} \overline{\mathscr{B}}((V_i \to U_i)) \rightrightarrows \prod_{(i,j)\in I^2} \overline{\mathscr{B}}((V_{ij} \to U_{ij})). \tag{7.16.1}$$

La proposition s'ensuit compte tenu de 7.15 et ([4] 5.8).

7.17. On dira dans la suite que $\overline{\mathscr{B}}$ est l'anneau de $\widetilde{E}$ associé à $\overline{X}$. D'après 7.9, l'homomorphisme canonique $\mathscr{B} \to \overline{\mathscr{B}}$ induit un homomorphisme $\sigma^*(\hbar_*(\mathscr{O}_{\overline{X}})) \to \overline{\mathscr{B}}$ (cf. 2.9). Sauf mention explicite du contraire, on considère $\sigma\colon \widetilde{E} \to X_{\text{ét}}$ (7.3.3) comme un morphisme de topos annelés, respectivement par $\overline{\mathscr{B}}$ et $\hbar_*(\mathscr{O}_{\overline{X}})$. Nous utilisons pour les modules la notation σ^{-1} pour désigner l'image inverse au sens des faisceaux abéliens et nous réservons la notation σ^* pour l'image inverse au sens des modules.

Remarque 7.18. Le préfaisceau $\overline{\mathscr{B}}$ n'est pas en général un faisceau pour la topologie de E définie originellement par Faltings dans ([11] page 214). En effet, supposons que $\hbar$ soit entier, que j ne soit pas fermée et qu'il existe une immersion ouverte affine $Z \to X$ telle que $Y = Z \times_X \overline{X}$, $j\colon Y \to \overline{X}$ étant la projection canonique. Considérons deux schémas affines U et U' de $\mathbf{\acute{E}t}_{/X}$ et un morphisme surjectif $U' \to U$ tel que $U'_Y \to U_Y$ soit fini et que $\overline{U}' \to \overline{U}$ ne soit pas entier. On pourrait par exemple prendre pour U un sous-schéma ouvert affine de X tel que l'immersion ouverte $j_U\colon U_Y \to \overline{U}$ ne soit pas fermée et pour U' la somme de U et U_Z. Posons $V = U'_Y$. Il est clair que $(V \to U)$ est un objet de E et que $(V \to U') \to (V \to U)$ est un recouvrement pour la topologie de E définie par Faltings dans ([11] page 214). Mais la suite

$$\overline{\mathscr{B}}((V \to U)) \to \overline{\mathscr{B}}((V \to U')) \rightrightarrows \overline{\mathscr{B}}((V \to U' \times_U U')) \tag{7.18.1}$$

n'est cependant pas exacte. En effet, supposons qu'elle le soit. Le diagramme

$$V \to U' \xrightarrow{\Delta} U' \times_U U' \rightrightarrows U', \tag{7.18.2}$$

où Δ est le morphisme diagonal et la double flèche représente les deux projections canoniques, est commutatif. Par suite, la double flèche de (7.18.1) est faite de deux copies du même morphisme. Donc l'application canonique

$$\overline{\mathscr{B}}((V \to U)) \to \overline{\mathscr{B}}((V \to U')) \tag{7.18.3}$$

est un isomorphisme. Comme $\Gamma(\overline{U}', \mathscr{O}_{\overline{U}'}) \subset \overline{\mathscr{B}}((V \to U'))$, on en déduit que $\Gamma(\overline{U}', \mathscr{O}_{\overline{U}'})$ est entier sur $\Gamma(\overline{U}, \mathscr{O}_{\overline{U}})$, et par suite que $\overline{U}' \to \overline{U}$ est entier puisque $\overline{U}$ et $\overline{U}'$ sont affines, ce qui contredit les hypothèses.

Proposition 7.19. *Supposons X et $\overline{X}$ strictement locaux et soit de plus $\overline{y}$ un point géométrique de Y. Notons x le point fermé de X et $(\overline{y} \rightsquigarrow x)$ le point de $X_{\text{ét}} \overleftarrow{\times}_{X_{\text{ét}}} Y_{\text{ét}}$ défini par l'unique flèche de spécialisation de $h(\overline{y})$ dans x (7.6). Alors :*

(i) *La fibre $\overline{\mathscr{B}}_{\rho(\overline{y}\rightsquigarrow x)}$ de $\overline{\mathscr{B}}$ en le point $\rho(\overline{y} \rightsquigarrow x)$ de $\widetilde{E}$ (7.6.2) est un anneau normal et strictement local.*

(ii) *On a un isomorphisme canonique*

$$(\hbar_*(\mathscr{O}_{\overline{X}}))_x \xrightarrow{\sim} \Gamma(\overline{X}, \mathscr{O}_{\overline{X}}). \tag{7.19.1}$$

(iii) *L'homomorphisme*

$$(\hbar * (\mathscr{O}_{\overline{X}}))_x \to \overline{\mathscr{B}}_{\rho(\overline{y} \rightsquigarrow x)} \tag{7.19.2}$$

induit par l'homomorphisme canonique $\sigma^{-1}(\hbar_*(\mathscr{O}_{\overline{X}})) \to \overline{\mathscr{B}}$ (7.17) *est local.*

(i) On notera d'abord que Y est intègre. Soit $(V_i)_{i\in I}$ le revêtement universel normalisé de Y au point $\overline{y}$ (2.10). Il résulte de ([4] (10.36.1)) qu'on a un isomorphisme canonique

$$\varinjlim_{i\in I^\circ} \overline{\mathscr{B}}((V_i \to X)) \xrightarrow{\sim} \overline{\mathscr{B}}_{\rho(\overline{y} \rightsquigarrow x)}. \tag{7.19.3}$$

Pour chaque $i \in \mathrm{Ob}(I)$, le schéma $\overline{X}^{V_i}$ est normal, intègre et entier sur $\overline{X}$ (7.11). Il est donc strictement local en vertu de 3.5. Par ailleurs, pour tout morphisme $j \to i$ de I, le morphisme de transition $\overline{X}^{V_j} \to \overline{X}^{V_i}$ est entier et dominant. En particulier, l'homomorphisme de transition $\overline{\mathscr{B}}((V_i \to X)) \to \overline{\mathscr{B}}((V_j \to X))$ est local. On en déduit que l'anneau $\overline{\mathscr{B}}_{\rho(\overline{y} \rightsquigarrow x)}$ est local, normal et hensélien ([16] 0.6.5.12(ii) et [25] I § 3 prop. 1). Comme l'homomorphisme $\Gamma(\overline{X}, \mathscr{O}_{\overline{X}}) \to \overline{\mathscr{B}}_{\rho(\overline{y} \rightsquigarrow x)}$ est entier et donc local, le corps résiduel de $\overline{\mathscr{B}}_{\rho(\overline{y} \rightsquigarrow x)}$ est une extension algébrique de celui de $\Gamma(\overline{X}, \mathscr{O}_{\overline{X}})$. Il est donc séparablement clos.

(ii) Cela résulte aussitôt du fait que X est strictement local.

(iii) Rappelons d'abord qu'on a un isomorphisme canonique ([4] (10.20.1))

$$(\sigma^{-1}(\hbar_*(\mathscr{O}_{\overline{X}})))_{\rho(\overline{y} \rightsquigarrow x)} \xrightarrow{\sim} \hbar_*(\mathscr{O}_{\overline{X}})_x. \tag{7.19.4}$$

La proposition résulte alors du fait que l'homomorphisme

$$\Gamma(\overline{X}, \mathscr{O}_{\overline{X}}) \to \overline{\mathscr{B}}_{\rho(\overline{y} \rightsquigarrow x)} \tag{7.19.5}$$

induit par l'homomorphisme canonique $\sigma^{-1}(\hbar_*(\mathscr{O}_{\overline{X}})) \to \overline{\mathscr{B}}$ est entier d'après (7.19.3) et donc local.

7.20. Considérons un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "g'"'] & \overline{X}' \arrow[r, "\hbar'"] \arrow[d, "\overline{g}"] & X' \arrow[d, "g"] \\ Y \arrow[r, "j"] & \overline{X} \arrow[r, "\hbar"] & X \end{tikzcd} \tag{7.20.1}$$

et posons $h' = \hbar' \circ j'$. Supposons que $\overline{X}'$ soit normal et localement irréductible et que j' soit une immersion ouverte quasi-compacte. On désigne par E' (resp. $\widetilde{E}'$) le site (resp. topos) de Faltings associé au morphisme h' (7.2), par $\overline{\mathscr{B}}'$ l'anneau de $\widetilde{E}'$ associé à $\overline{X}'$ (7.17) et par

$$\Phi \colon \widetilde{E}' \to \widetilde{E} \tag{7.20.2}$$

le morphisme de fonctorialité (7.5.3). Pour tout $(V' \to U') \in \mathrm{Ob}(E')$, on pose $\overline{U}' = U' \times_{X'} \overline{X}'$ et on note $\overline{U}'^{V'}$ la fermeture intégrale de $\overline{U}'$ dans V', de sorte que

$$\overline{\mathscr{B}}'((V' \to U')) = \Gamma(\overline{U}'^{V'}, \mathscr{O}_{\overline{U}'^{V'}}). \tag{7.20.3}$$

Pour tout $(V \to U) \in \mathrm{Ob}(E)$, posons $V' = V \times_Y Y'$ et $U' = U \times_X X'$, de sorte $(V' \to U')$ est un objet de E' et que l'on a un diagramme commutatif

(7.20.4)
$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & V' \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & \overline{U}' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \overline{X}' \arrow[d] \\ Y & V \arrow[l] \arrow[r] & \overline{U} \arrow[r] & \overline{X} \end{tikzcd}$$

On en déduit un morphisme

(7.20.5)
$$\overline{U}'^{V'} \to \overline{U}^{V},$$

et par suite un homomorphisme d'anneaux de $\widetilde{E}$

(7.20.6)
$$\overline{\mathscr{B}} \to \Phi_*(\overline{\mathscr{B}}').$$

Nous considérons dans la suite Φ comme un morphisme de topos annelés (respectivement par $\overline{\mathscr{B}}'$ et $\overline{\mathscr{B}}$). Nous utilisons pour les modules la notation Φ^{-1} pour désigner l'image inverse au sens des faisceaux abéliens et nous réservons la notation Φ^* pour l'image inverse au sens des modules.

Lemme 7.21. *Les hypothèses étant celles de* (7.20)*, supposons de plus que g soit étale et que les deux carrés du diagramme* (7.20.1) *soient cartésiens, de sorte que $(Y' \to X')$ est un objet de E. Alors :*

(i) *Le morphisme*

(7.21.1)
$$\Phi^{-1}(\overline{\mathscr{B}}) \to \overline{\mathscr{B}}'$$

adjoint du morphisme (7.20.6) *est un isomorphisme.*

(ii) *Le morphisme de topos annelés $\Phi\colon (\widetilde{E}', \overline{\mathscr{B}}') \to (\widetilde{E}, \overline{\mathscr{B}})$ s'identifie au morphisme de localisation de $(\widetilde{E}, \overline{\mathscr{B}})$ en $\sigma^*(X')$.*

En effet, le morphisme de topos $\Phi\colon \widetilde{E}' \to \widetilde{E}$ s'identifie au morphisme de localisation de $\widetilde{E}$ en $\sigma^*(X') = (Y' \to X')^a$ en vertu de ([4] 10.14). Il suffit donc de montrer la première proposition. Le foncteur $\Phi^*\colon \widetilde{E} \to \widetilde{E}'$ s'identifie au foncteur de restriction par le foncteur canonique $E' \to E$. Pour tout $(V \to U) \in \mathrm{Ob}(E')$, on a un isomorphisme canonique

(7.21.2)
$$U \times_{X'} \overline{X}' \xrightarrow{\sim} U \times_X \overline{X} = \overline{U}.$$

On en déduit un isomorphisme (fonctoriel en $(V \to U)$)

(7.21.3)
$$\Phi^{-1}(\overline{\mathscr{B}})((V \to U)) \xrightarrow{\sim} \overline{\mathscr{B}}'((V \to U)).$$

Il reste à montrer que celui-ci est adjoint du morphisme (7.20.6). Posons $U' = U \times_X X'$ et $V' = V \times_Y Y'$. Les morphismes structuraux $U \to X'$ et $V \to Y'$ induisent des sections $U \to U'$ et $V \to V'$ des projections canoniques $U' \to U$ et $V' \to V$. On en déduit un diagramme commutatif

(7.21.4)
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd, bend right, "\mathrm{id}_V"'] & \overline{U} \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "\mathrm{id}_{\overline{U}}"] \\ V' \arrow[r] \arrow[d] & \overline{U}' \arrow[d] \\ V \arrow[r] & \overline{U} \end{tikzcd}$$

et par suite des morphismes $\overline{U}^V \to \overline{U}'^{V'} \to \overline{U}^V$ dont le composé est l'identité de $\overline{U}^V$. Le composé

$$\Phi^{-1}(\overline{\mathscr{B}})((V \to U)) \to \Phi^{-1}(\Phi_*(\overline{\mathscr{B}}'))((V \to U)) = \overline{\mathscr{B}}'((V' \to U')) \to \overline{\mathscr{B}}'((V \to U)) \tag{7.21.5}$$

où la première flèche est induite par (7.20.6) et la dernière flèche est le morphisme d'adjonction, est donc l'isomorphisme (7.21.3) ; d'où la première proposition.

Lemme 7.22. *Les hypothèses étant celles de* (7.20)*, supposons de plus que X' soit le localisé strict de X en un point géométrique $\overline{x}$ et que les deux carrés du diagramme* (7.20.1) *soient cartésiens. Soient $(V \to U)$ un objet de E, $U' = U \times_X X'$, $V' = V \times_Y Y'$. Alors le morphisme canonique $\overline{U}'^{V'} \to \overline{U}^V \times_X X'$* (7.20.5) *est un isomorphisme.*

En effet, on a un diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[r] \arrow[d] & \overline{U}' \arrow[r] \arrow[d] & U' \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[d] \\ V \arrow[r] & \overline{U} \arrow[r] & U \arrow[r] & X \end{tikzcd} \tag{7.22.1}$$

On peut donc identifier $\overline{U}'^{V'}$ à la fermeture intégrale de $\overline{U}^V \times_X X'$ dans V'. Il suffit alors de montrer que le morphisme canonique $V' \to \overline{U}^V \times_X X'$ est une immersion ouverte quasi-compacte et schématiquement dominante et que $\overline{U}^V \times_X X'$ est normal et localement irréductible. La première assertion résulte de 7.11(i) et ([19] 11.10.5). La seconde assertion étant locale, pour la prouver, on peut se borner au cas où X est affine. Considérons X' comme une limite projective cofiltrante de voisinages étales affines $(X_i)_{\in I}$ de $\overline{x}$ dans X (cf. [5] VIII 4.5). Alors $\overline{U}^V \times_X X'$ est canoniquement isomorphe à la limite projective des schémas $(\overline{U}^V \times_X X_i)_{i \in I}$ ([19] 8.2.5). Comme chaque $\overline{U}^V \times_X X_i$ est normal d'après 7.11(ii) et ([25] VII prop. 2), $\overline{U}^V \times_X X'$ est normal d'après ([16] 0.6.5.12(ii)). D'autre part, comme $\overline{X}'$ est normal et localement irréductible par hypothèse, il en est de même de V' d'après 3.3. On en déduit que $\overline{U}^V \times_X X'$ est localement irréductible en vertu de 3.4 ; d'où la proposition.

Proposition 7.23. *Les hypothèses étant celles de* (7.20)*, supposons de plus que $\hbar$ soit cohérent, que X' soit le localisé strict de X en un point géométrique $\overline{x}$ et que les deux carrés du diagramme* (7.20.1) *soient cartésiens. Alors le morphisme*

$$\Phi^{-1}(\overline{\mathscr{B}}) \to \overline{\mathscr{B}}' \tag{7.23.1}$$

adjoint du morphisme (7.20.6) *est un isomorphisme.*

Choisissons un voisinage ouvert affine X_0 de l'image de $\overline{x}$ dans X et notons I la catégorie des X_0-schémas étales $\overline{x}$-pointés qui sont affines au-dessus de X_0 (cf. [5] VIII 3.9 et 4.5). On désigne par

$$\mathscr{E} \to I \tag{7.23.2}$$

le $\mathbb{U}$-site fibré défini dans ([4] (11.2.2)) : la catégorie fibre de $\mathscr{E}$ au-dessus d'un objet U de I est le site de Faltings associé à la projection canonique $h_U \colon U_Y \to U$, et le foncteur image inverse associé à un morphisme $f \colon U' \to U$ de I est le foncteur $\Phi_f^+ \colon \mathscr{E}_U \to \mathscr{E}_{U'}$ défini dans (7.5.2). On note

$$\mathscr{F} \to I \tag{7.23.3}$$

le $\mathbb{U}$-topos fibré associé à $\mathscr{E}/I$. La catégorie fibre de $\mathscr{F}$ au-dessus d'un objet U de I est le topos $\widetilde{\mathscr{E}}_U$ des faisceaux de $\mathbb{U}$-ensembles sur le site co-évanescent $\mathscr{E}_U$, et le foncteur image inverse relatif à un morphisme $f\colon U'\to U$ de I est le foncteur image inverse par le morphisme de topos $\Phi_f\colon \widetilde{\mathscr{E}}_{U'}\to\widetilde{\mathscr{E}}_U$ défini dans (7.5.3). On note

$$\mathscr{F}^\vee \to I^\circ \tag{7.23.4}$$

la catégorie fibrée obtenue en associant à tout objet U de I la catégorie $\mathscr{F}_U=\widetilde{\mathscr{E}}_U$ et à tout morphisme $f\colon U'\to U$ de I le foncteur image directe par le morphisme de topos Φ_f. On rappelle ([4] 10.14) que pour tout $U\in \mathrm{Ob}(I)$, $\widetilde{\mathscr{E}}_U$ est canoniquement équivalent au topos $\widetilde{E}_{/(U_Y\to U)^a}$, où $(U_Y\to U)^a$ désigne le faisceau associé à $(U_Y\to U)$.

En vertu de ([4] 11.3), le topos $\widetilde{E}'$ est canoniquement équivalent à la limite projective du topos fibré $\mathscr{F}/I$. Munissons $\mathscr{E}$ de la topologie totale ([5] VI 7.4.1) et notons $\mathbf{Top}(\mathscr{E})$ le topos des faisceaux de $\mathbb{U}$-ensembles sur $\mathscr{E}$. On a alors un morphisme canonique ([4] (11.4.2))

$$\varpi\colon \widetilde{E}'\to \mathbf{Top}(\mathscr{E}) \tag{7.23.5}$$

et un diagramme commutatif canonique de foncteurs ([4] (11.4.3))

$$\begin{tikzcd} \widetilde{E}' \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\varpi_*"'] & \mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}/I^\circ}(I^\circ,\mathscr{F}^\vee) \arrow[d, hook] \\ \mathbf{Top}(\mathscr{E}) \arrow[r, "\sim"] & \mathbf{Hom}_{I^\circ}(I^\circ,\mathscr{F}^\vee) \end{tikzcd} \tag{7.23.6}$$

où les flèches horizontales sont des équivalences de catégories et la flèche verticale de droite est l'injection canonique (cf. [5] VI 8.2.9).

Pour tout objet U de I, on note $\mathscr{B}_{/U}$ l'anneau de $\widetilde{\mathscr{E}}_U$ associé à $\overline{U}$ (7.17). Pour tout morphisme $f\colon U'\to U$ de I, on a un homomorphisme canonique $\overline{\mathscr{B}}_{/U}\to\Phi_{f*}(\overline{\mathscr{B}}_{/U'})$ (7.20.6). Ces homomorphismes vérifient une relation de compatibilité pour la composition des morphismes de I du type ([1] (1.1.2.2)). Ils définissent donc un anneau de $\mathbf{Top}(\mathscr{E})$ que l'on note $\{U\mapsto\overline{\mathscr{B}}_{/U}\}$ (à ne pas confondre avec l'anneau $\overline{\mathscr{B}}=\{U\mapsto\overline{\mathscr{B}}_U\}$ de $\widetilde{E}$ (7.10.3)). Pour tout $U\in\mathrm{Ob}(I)$, on a un morphisme canonique $g_U\colon X'\to U$ qui induit un morphisme de topos annelés (7.20.6)

$$\Phi_U\colon(\widetilde{E}',\overline{\mathscr{B}}')\to(\widetilde{\mathscr{E}}_U,\overline{\mathscr{B}}_{/U}). \tag{7.23.7}$$

La collection des homomorphismes $\overline{\mathscr{B}}_{/U}\to\Phi_{U*}(\overline{\mathscr{B}}')$ définit un homomorphisme d'anneaux de $\mathbf{Top}(\mathscr{E})$

$$\{U\mapsto\overline{\mathscr{B}}_{/U}\}\to\varpi_*(\overline{\mathscr{B}}'). \tag{7.23.8}$$

Montrons que l'homomorphisme adjoint

$$\varpi^*(\{U\mapsto\overline{\mathscr{B}}_{/U}\})\to\overline{\mathscr{B}}' \tag{7.23.9}$$

est un isomorphisme. Comme le foncteur ϖ_* est pleinement fidèle (7.23.6), il suffit de montrer que l'homomorphisme induit

$$\varpi_*(\varpi^*(\{U\mapsto\overline{\mathscr{B}}_{/U}\}))\to\varpi_*(\overline{\mathscr{B}}') \tag{7.23.10}$$

est un isomorphisme. Compte tenu de ([5] VI 8.5.3), cela revient à montrer que pour tout $U\in$ $\mathrm{Ob}(I)$, l'homomorphisme canonique de $\widetilde{\mathscr{E}}_U$

$$\varinjlim_{f\colon U'\to U}\Phi_{f*}(\overline{\mathscr{B}}_{/U'})\to\Phi_{U*}(\overline{\mathscr{B}}'), \tag{7.23.11}$$

où la limite est prise sur les morphismes $f\colon U'\to U$ de I, est un isomorphisme.

Soit $(V_1 \to U_1)$ un objet de $E_{/(U_Y \to U)}$ tel que le morphisme $U_1 \to U$ soit cohérent. Le morphisme canonique

$$\overline{U}_1^{V_1} \times_U X' \to \lim_{\substack{\longleftarrow \\ U' \in \mathrm{Ob}(I_{/U})}} \overline{U}_1^{V_1} \times_U U' \tag{7.23.12}$$

est un isomorphisme d'après ([19] 8.2.5). Comme $\hbar$ est cohérent, le schéma $\overline{U}_1^{V_1}$ est cohérent. On en déduit par ([5] VI 5.2), 7.11(iii) et 7.22 que l'homomorphisme canonique

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ U' \in \mathrm{Ob}(I_{/U})}} \overline{\mathscr{B}}_{/U'}((V_1 \times_U U' \to U_1 \times_U U')) \to \overline{\mathscr{B}}'((V_1 \times_U X' \to U_1 \times_U X')) \tag{7.23.13}$$

est un isomorphisme. Par ailleurs, h étant cohérent, le faisceau $(V_1 \to U_1)^a$ de $\widetilde{\mathscr{E}}_U$ associé à $(V_1 \to U_1)$ est cohérent d'après ([4] 10.5(i)). Donc en vertu de ([4] 10.4 et 10.5(ii)) et ([5] VI 5.3), l'isomorphisme (7.23.13) montre que (7.23.11) est un isomorphisme.

On déduit de l'isomorphisme (7.23.9) et de ([4] (11.4.4)) que l'homomorphisme canonique

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ i \in I^\circ}} \Phi_U^{-1}(\overline{\mathscr{B}}_{/U}) \to \overline{\mathscr{B}}' \tag{7.23.14}$$

est un isomorphisme. Pour tout $U \in \mathrm{Ob}(I)$, le morphisme canonique $U \to X$ induit un morphisme de topos annelés

$$\rho_U \colon (\widetilde{\mathscr{E}}_U, \overline{\mathscr{B}}_{/U}) \to (\widetilde{E}, \overline{\mathscr{B}}). \tag{7.23.15}$$

Comme l'homomorphisme $\rho_U^{-1}(\overline{\mathscr{B}}) \to \overline{\mathscr{B}}_{/U}$ est un isomorphisme en vertu de 7.21(i), la proposition résulte de l'isomorphisme (7.23.14).

8. Topos de Faltings au-dessus d'un trait

8.1. Dans cette section, on se donne un S-schéma cohérent X et un sous-schéma ouvert X° de X_η (2.1). Pour tout X-schéma U, on pose

$$\overline{U} = U \times_S \overline{S} \quad \text{et} \quad U^\circ = U \times_X X^\circ. \tag{8.1.1}$$

On note $j \colon X^\circ \to X$ et $\hbar \colon \overline{X} \to X$ les morphismes canoniques. On suppose j quasi-compact et $\overline{X}$ normal et localement irréductible (3.1). On notera que $\overline{X}$ et $\overline{X}^\circ$ sont cohérents et étale-localement connexes d'après 3.2(iii). On se propose d'appliquer les constructions de § 7 aux morphismes de la ligne supérieure du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \overline{X}^\circ \arrow[r, "j_{\overline{X}}"] \arrow[d] & \overline{X} \arrow[r, "\hbar"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Box"] & X \arrow[d] \\ \overline{\eta} \arrow[r] & \overline{S} \arrow[r] & S \end{tikzcd} \tag{8.1.2}$$

On désigne par E (resp. $\widetilde{E}$) le site (resp. topos) de Faltings associé au morphisme $\hbar \circ j_{\overline{X}} \colon \overline{X}^\circ \to X$ (7.2), et par $\overline{\mathscr{B}}$ l'anneau de $\widetilde{E}$ associé à $\overline{X}$ (7.17), qui est alors une $\mathscr{O}_{\overline{K}}$-algèbre. On note

$$\sigma \colon \widetilde{E} \quad \to \quad X_{\text{ét}}, \tag{8.1.3}$$

$$\rho \colon X_{\text{ét}} \overleftarrow{\times}_{X_{\text{ét}}} \overline{X}^\circ_{\text{ét}} \quad \to \quad \widetilde{E}, \tag{8.1.4}$$

les morphismes canoniques (7.3.3) et (7.6.2), respectivement.

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$\overline{\mathscr{B}}_n = \overline{\mathscr{B}}/p^n\overline{\mathscr{B}}. \tag{8.1.5}$$

Pour tout $U \in \mathrm{Ob}(\mathbf{\acute{E}t}_{/X})$, on pose $\overline{\mathscr{B}}_U = \overline{\mathscr{B}} \circ \alpha_{U!}$ (7.1.6) et

$$\overline{\mathscr{B}}_{U,n} = \overline{\mathscr{B}}_U/p^n\overline{\mathscr{B}}_U. \tag{8.1.6}$$

On notera que l'homomorphisme canonique $\overline{\mathscr{B}}_{U,n} \to \overline{\mathscr{B}}_n \circ \alpha_{U!}$ n'est pas en général un isomorphisme ; c'est pourquoi nous n'utiliserons pas la notation $\overline{\mathscr{B}}_{n,U}$. Toutefois, les correspondances $\{U \mapsto p^n\overline{\mathscr{B}}_U\}$ et $\{U \mapsto \overline{\mathscr{B}}_{U,n}\}$ forment naturellement des préfaisceaux sur E (7.2.1), et les morphismes canoniques

$$\{U \mapsto p^n\overline{\mathscr{B}}_U\}^a \rightarrow p^n\overline{\mathscr{B}}, \tag{8.1.7}$$

$$\{U \mapsto \overline{\mathscr{B}}_{U,n}\}^a \rightarrow \overline{\mathscr{B}}_n, \tag{8.1.8}$$

où les termes de gauche désignent les faisceaux associés dans $\widetilde{E}$, sont des isomorphismes d'après ([4] 8.2 et 8.9).

Lemme 8.2. *$\overline{\mathscr{B}}$ est $\mathscr{O}_{\overline{K}}$-plat.*

Pour tout $(V \to U) \in \mathrm{Ob}(E)$, comme V est un $\overline{\eta}$-schéma, $\overline{U}^V$ est $\overline{S}$-plat en vertu de 7.11(i). Par suite, $\overline{\mathscr{B}}$ n'a pas de $\mathscr{O}_{\overline{K}}$-torsion et est donc $\mathscr{O}_{\overline{K}}$-plat ([7] Chap. VI §3.6 lem. 1).

8.3. Comme X_η est un ouvert de $X_{\text{ét}}$, *i.e.*, un sous-objet de l'objet final X ([5] IV 8.3), $\sigma^*(X_\eta) = (\overline{X}^\circ \to X_\eta)^a$ est un ouvert de $\widetilde{E}$ (7.3.3). On rappelle que le topos $\widetilde{E}_{/\sigma^*(X_\eta)}$ est canoniquement équivalent au topos de Faltings associé au morphisme $\overline{X}^\circ \to X_\eta$ ([4] 10.14). On note

$$\gamma\colon \widetilde{E}_{/\sigma^*(X_\eta)} \to \widetilde{E} \tag{8.3.1}$$

le morphisme de localisation de $\widetilde{E}$ en $\sigma^*(X_\eta)$, que l'on identifie au morphisme de fonctorialité induit par l'injection canonique $X_\eta \to X$ (7.5). On a alors une suite de trois foncteurs adjoints

$$\gamma_!\colon \widetilde{E}_{/\sigma^*(X_\eta)} \to \widetilde{E}, \quad \gamma^*\colon \widetilde{E} \to \widetilde{E}_{/\sigma^*(X_\eta)}, \quad \gamma_*\colon \widetilde{E}_{/\sigma^*(X_\eta)} \to \widetilde{E}, \tag{8.3.2}$$

dans le sens que pour deux foncteurs consécutifs de la suite, celui de droite est adjoint à droite de l'autre. Les foncteurs $\gamma_!$ et γ_* sont pleinement fidèles ([5] IV 9.2.4).

On désigne par $\widetilde{E}_s$ le sous-topos fermé de $\widetilde{E}$ complémentaire de l'ouvert $\sigma^*(X_\eta)$, c'est-à-dire la sous-catégorie pleine de $\widetilde{E}$ formée des faisceaux F tels que $\gamma^*(F)$ soit un objet final de $\widetilde{E}_{/\sigma^*(X_\eta)}$ ([5] IV 9.3.5), et par

$$\delta\colon \widetilde{E}_s \to \widetilde{E} \tag{8.3.3}$$

le plongement canonique, c'est-à-dire le morphisme de topos tel que $\delta_*\colon \widetilde{E}_s \to \widetilde{E}$ soit le foncteur d'injection canonique. Pour tout $F \in \mathrm{Ob}(\widetilde{E})$, on pose $F_s = \delta^*(F)$.

On désigne par $\mathbf{Pt}(\widetilde{E})$, $\mathbf{Pt}(\widetilde{E}_{/\sigma^*(X_\eta)})$ et $\mathbf{Pt}(\widetilde{E}_s)$ les catégories des points de $\widetilde{E}$, $\widetilde{E}_{/\sigma^*(X_\eta)}$ et $\widetilde{E}_s$, respectivement, et par

$$u\colon \mathbf{Pt}(\widetilde{E}_{/\sigma^*(X_\eta)}) \to \mathbf{Pt}(\widetilde{E}) \quad \text{et} \quad v\colon \mathbf{Pt}(\widetilde{E}_s) \to \mathbf{Pt}(\widetilde{E}) \tag{8.3.4}$$

les foncteurs induits par γ et δ, respectivement. Ces foncteurs sont pleinement fidèles, et tout point de $\widetilde{E}$ appartient à l'image essentielle de l'un ou l'autre de ces foncteurs exclusivement ([5] IV 9.7.2).

Remarque 8.4. Par définition, pour tout $F \in \mathrm{Ob}(\widetilde{E}_s)$, la projection canonique

$$\sigma^*(X_\eta) \times \delta_*(F) \to \sigma^*(X_\eta) \tag{8.4.1}$$

est un isomorphisme. Il existe donc un unique morphisme $\sigma^*(X_\eta) \to \delta_*(F)$ de $\widetilde{E}$, autrement dit, $\delta^*(\sigma^*(X_\eta))$ est un objet initial de $\widetilde{E}_s$.

Lemme 8.5. (i) *Soit* $(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x})$ *un point de* $X_{\text{ét}} \overleftarrow{\times}_{X_{\text{ét}}} \overline{X}^\circ_{\text{ét}}$ (7.6). *Pour que* $\rho(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x})$ *appartienne à l'image essentielle de* u *(resp.* v*)* (8.3.4), *il faut et il suffit que* $\overline{x}$ *soit au-dessus de* η *(resp.* s*).*

(ii) *La famille des points de* $\widetilde{E}_{/\sigma^*(X_\eta)}$ *(resp.* $\widetilde{E}_s$*) définie par la famille des points* $\rho(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x})$ *de* $\widetilde{E}$ *tels que* $\overline{x}$ *soit au-dessus de* η *(resp.* s*) est conservative.*

(i) En effet, pour que $\rho(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x})$ appartienne à l'image essentielle de u (resp. v), il faut et il suffit que $(\sigma^*(X_\eta))_{\rho(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x})}$ soit un singleton (resp. vide). Par ailleurs, on a un isomorphisme canonique ([4] (10.20.1))

$$(\sigma^*(X_\eta))_{\rho(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x})} \xrightarrow{\sim} (X_\eta)_{\overline{x}}, \tag{8.5.1}$$

d'où la proposition.

(ii) Cela résulte de (i), ([4] 10.18) et ([5] IV 9.7.3).

Lemme 8.6. *Pour tout faisceau* $F = \{U \mapsto F_U\}$ *de* $\widetilde{E}$*, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) F *est un objet de* $\widetilde{E}_s$*.*

(ii) *Pour tout* $U \in \mathbf{\acute{E}t}_{/X_\eta}$*,* F_U *est un objet final de* $\overline{U}^\circ_{\text{fét}}$*, i.e., est représentable par* $\overline{U}^\circ$*.*

(iii) *Pour tout point* $(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x})$ *de* $X_{\text{ét}} \overleftarrow{\times}_{X_{\text{ét}}} \overline{X}^\circ_{\text{ét}}$ (7.6) *tel que* $\overline{x}$ *soit au-dessus de* η*, la fibre* $F_{\rho(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x})}$ *de* F *en* $\rho(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x})$ *est un singleton.*

En effet, d'après ([4] 5.36), on a un isomorphisme canonique

$$\gamma^*(F) \xrightarrow{\sim} \{U' \mapsto F_{U'}\}, \quad (U' \in \mathrm{Ob}(\mathbf{\acute{E}t}_{/X_\eta})). \tag{8.6.1}$$

Comme $\{U' \mapsto \overline{U}'^\circ\}$, pour $U' \in \mathrm{Ob}(\mathbf{\acute{E}t}_{/X_\eta})$, est un objet final de $\widetilde{E}_{/\sigma^*(X_\eta)}$ (7.4), les conditions (i) et (ii) sont équivalentes. Par ailleurs, les conditions (i) et (iii) sont équivalentes en vertu de 8.5(ii).

Lemme 8.7. *Pour tout* $n \geq 0$*, l'anneau* $\overline{\mathscr{B}}_n$ (8.1.5) *est un objet de* $\widetilde{E}_s$*.*

En effet, pour tout point $(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x})$ de $X_{\text{ét}} \overleftarrow{\times}_{X_{\text{ét}}} \overline{X}^\circ_{\text{ét}}$ (7.6) tel que $\overline{x}$ soit au-dessus de η, l'homomorphisme canonique $\sigma^{-1}(\mathscr{O}_X) \to \overline{\mathscr{B}}$ (7.17) induit un homomorphisme $\mathscr{O}_{X,\overline{x}} \to \overline{\mathscr{B}}_{\rho(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x})}$ ([4] (10.20.1)). Par suite, p est inversible dans $\overline{\mathscr{B}}_{\rho(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x})}$, d'où la proposition en vertu de 8.6.

8.8. Notons $a\colon X_s \to X$ et $b\colon X_\eta \to X$ les injections canoniques. Le topos $\widetilde{E}_{/\sigma^*(X_\eta)}$ étant canoniquement équivalent au topos de Faltings associé au morphisme $\overline{X}^\circ \to X_\eta$, notons

$$\sigma_\eta\colon \widetilde{E}_{/\sigma^*(X_\eta)} \to X_{\eta,\text{ét}} \tag{8.8.1}$$

le morphisme canonique (7.3.3). D'après ([4] (10.12.6)), le diagramme

$$\begin{tikzcd} \widetilde{E}_{/\sigma^*(X_\eta)} \arrow[r, "\sigma_\eta"] \arrow[d, "\gamma"'] & X_{\eta,\text{ét}} \arrow[d, "b"] \\ \widetilde{E} \arrow[r, "\sigma"] & X_{\text{ét}} \end{tikzcd} \tag{8.8.2}$$

est commutatif à isomorphisme canonique près. En vertu de ([5] IV 9.4.3), il existe un morphisme

$$\sigma_s\colon \widetilde{E}_s \to X_{s,\text{ét}} \tag{8.8.3}$$

unique à isomorphisme près tel que le diagramme

$$\begin{CD} \widetilde{E}_s @>{\sigma_s}>> X_{s,\text{ét}} \\ @V{\delta}VV @VV{a}V \\ \widetilde{E} @>{\sigma}>> X_{\text{ét}} \end{CD} \tag{8.8.4}$$

soit commutatif à isomorphisme près.

8.9. Soit n un entier ≥ 1. Le trait S étant strictement local, il existe un unique S-morphisme $s \to \overline{S}$. Celui-ci induit un morphisme $\overline{a}_n\colon X_s \to \overline{X}_n = \overline{X} \times_S S_n$ (2.1.1) qui s'insère dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \overline{X}_n \arrow[r, "\overline{\iota}_n"] \arrow[d, "\hbar_n"] & \overline{X} \arrow[d, "\hbar"] \\ X_s \arrow[ur, "\overline{a}_n"] \arrow[r, "a_n"] & X_n \arrow[r, "\iota_n"] & X \end{tikzcd} \tag{8.9.1}$$

où a_n, ι_n, $\overline{\iota}_n$ et $\hbar_n$ sont les morphismes canoniques. Par ailleurs, l'homomorphisme canonique $\sigma^{-1}(\hbar_*(\mathscr{O}_{\overline{X}})) \to \overline{\mathscr{B}}$ (7.17) induit un homomorphisme (8.1.5)

$$\sigma^{-1}(\iota_{n*}(\hbar_{n*}(\mathscr{O}_{\overline{X}_n}))) \to \overline{\mathscr{B}}_n. \tag{8.9.2}$$

Comme a_n, $\overline{a}_n$ et $\hbar_n$ sont des homéomorphismes universels, on peut identifier $\mathscr{O}_{\overline{X}_n}$ à un faisceau de $X_{s,\text{ét}}$. Par suite, $\sigma^{-1}(\iota_{n*}(\hbar_{n*}(\mathscr{O}_{\overline{X}_n})))$ est canoniquement isomorphe à l'anneau $\sigma_s^*(\mathscr{O}_{\overline{X}_n})$ de $\widetilde{E}_s$ (8.8). Comme $\overline{\mathscr{B}}_n$ est aussi un objet de $\widetilde{E}_s$ (8.7), on peut considérer (8.9.2) comme un homomorphisme de $\widetilde{E}_s$

$$\sigma_s^{-1}(\mathscr{O}_{\overline{X}_n}) \to \overline{\mathscr{B}}_n. \tag{8.9.3}$$

Le morphisme σ_s (8.8.3) est donc sous-jacent à un morphisme de topos annelés, que l'on note

$$\sigma_n\colon (\widetilde{E}_s, \overline{\mathscr{B}}_n) \to (X_{s,\text{ét}}, \mathscr{O}_{\overline{X}_n}). \tag{8.9.4}$$

8.10. On désigne par $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$ l'anneau $(\overline{\mathscr{B}}_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ de $\widetilde{E}_s^{\mathbb{N}^\circ}$ (6.7) et par $\mathscr{O}_{\breve{\overline{X}}}$ l'anneau $(\mathscr{O}_{\overline{X}_{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$ de $X_{s,\text{zar}}^{\mathbb{N}^\circ}$ ou de $X_{s,\text{ét}}^{\mathbb{N}^\circ}$, selon le contexte. Cet abus de notation n'induit aucune confusion (cf. 2.9). D'après 6.5, les morphismes $(\sigma_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ (8.9.4) induisent un morphisme de topos annelés

$$\breve{\sigma}\colon (\widetilde{E}_s^{\mathbb{N}^\circ}, \breve{\overline{\mathscr{B}}}) \to (X_{s,\text{ét}}^{\mathbb{N}^\circ}, \mathscr{O}_{\breve{\overline{X}}}). \tag{8.10.1}$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par

$$u_n\colon (X_{s,\text{ét}}, \mathscr{O}_{\overline{X}_n}) \to (X_{s,\text{zar}}, \mathscr{O}_{\overline{X}_n}) \tag{8.10.2}$$

le morphisme canonique de topos annelés (cf. 2.9 et 8.9). Les morphismes $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ induisent un morphisme de topos annelés

$$\breve{u}\colon (X_{s,\text{ét}}^{\mathbb{N}^\circ}, \mathscr{O}_{\breve{\overline{X}}}) \to (X_{s,\text{zar}}^{\mathbb{N}^\circ}, \mathscr{O}_{\breve{\overline{X}}}). \tag{8.10.3}$$

On désigne par $\mathfrak{X}$ le schéma formel complété p-adique de $\overline{X}$. L'espace topologique sous-jacent à $\mathfrak{X}$ est canoniquement isomorphe à X_s. Il est annelé par le faisceau d'anneaux topologiques $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$

limite projective des faisceaux d'anneaux pseudo-discrets $(\mathscr{O}_{\overline{X}_{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$ ([16] 0.3.9.1). On désigne par

$$\lambda\colon X_{s,\mathrm{zar}}^{\mathbb{N}^\circ} \to X_{s,\mathrm{zar}} \tag{8.10.4}$$

le morphisme défini dans (6.4.3). Le faisceau d'anneaux $\lambda_*(\mathscr{O}_{\breve{\overline{X}}})$ est canoniquement isomorphe au faisceau d'anneaux (sans topologies) sous-jacent à $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ ([16] 0.3.9.1 et 0.3.2.6). On considère alors λ comme un morphisme de topos annelés, respectivement par $\mathscr{O}_{\breve{\overline{X}}}$ et $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$. On note

$$\top\colon (\widetilde{E}_s^{\mathbb{N}^\circ}, \breve{\overline{\mathscr{B}}}) \to (X_{s,\mathrm{zar}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) \tag{8.10.5}$$

le morphisme composé de topos annelés $\lambda\circ\breve{u}\circ\breve{\sigma}$.

8.11. Soient $g\colon X'\to X$ un morphisme cohérent, $X'^{\rhd}$ un sous-schéma ouvert de $X'^\circ = X^\circ\times_X X'$. Pour tout X'-schéma U', on pose

$$U'^{\rhd} = U'\times_{X'} X'^{\rhd}. \tag{8.11.1}$$

On note $j'\colon X'^{\rhd}\to X'$ l'injection canonique et $\hbar'\colon \overline{X}'\to X'$ le morphisme canonique (8.1.1). Supposons $\overline{X}'$ normal et localement irréductible. On désigne par E' (resp. $\widetilde{E}'$) le site (resp. topos) de Faltings associé au morphisme $\hbar'\circ j'_{\overline{X}'}\colon \overline{X}'^{\rhd}\to X'$ (7.2), par $\overline{\mathscr{B}}'$ l'anneau de $\widetilde{E}'$ associé à $\overline{X}'$ (7.17) et par

$$\sigma'\colon (\widetilde{E}', \overline{\mathscr{B}}') \to (X'_{\text{ét}}, \hbar'_*(\mathscr{O}_{\overline{X}'})) \tag{8.11.2}$$

le morphisme canonique de topos annelés (7.17). On note $\widetilde{E}'_s$ le sous-topos fermé de $\widetilde{E}'$ complémentaire de l'ouvert $\sigma'^*(X'_\eta)$,

$$\delta'\colon \widetilde{E}'_s \to \widetilde{E}' \tag{8.11.3}$$

le plongement canonique et

$$\sigma'_s\colon \widetilde{E}'_s \to X'_{s,\text{ét}} \tag{8.11.4}$$

le morphisme canonique de topos (8.8.3). Pour tout entier $n\geq 1$, on pose $\overline{\mathscr{B}}'_n = \overline{\mathscr{B}}'/p^n\overline{\mathscr{B}}'$, et on désigne par

$$\sigma'_n\colon (\widetilde{E}'_s, \overline{\mathscr{B}}'_n) \to (X'_{s,\text{ét}}, \mathscr{O}_{\overline{X}'_n}) \tag{8.11.5}$$

le morphisme de topos annelés induit par σ' (8.9.4).

Soit

$$\Phi\colon (\widetilde{E}', \overline{\mathscr{B}}') \to (\widetilde{E}, \overline{\mathscr{B}}) \tag{8.11.6}$$

le morphisme de topos annelés déduit de g par fonctorialité (7.20). D'après ([4] (10.12.6)) et les définitions 7.17 et 7.20, le diagramme de morphismes de topos annelés

$$\begin{tikzcd} (\widetilde{E}', \overline{\mathscr{B}}') \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\sigma'"'] & (\widetilde{E}, \overline{\mathscr{B}}) \arrow[d, "\sigma"] \\ (X'_{\text{ét}}, \hbar'_*(\mathscr{O}_{\overline{X}'})) \arrow[r, "\overline{g}"] & (X_{\text{ét}}, \hbar_*(\mathscr{O}_{\overline{X}})) \end{tikzcd} \tag{8.11.7}$$

où $\overline{g}$ est le morphisme induit par g, est commutatif à isomorphisme canonique près, dans le sens de ([1] 1.2.3). On a un isomorphisme canonique $\Phi^*(\sigma^*(X_\eta)) \simeq \sigma'^*(X'_\eta)$ (7.5.2). En vertu de ([5] IV 9.4.3), il existe donc un morphisme de topos

$$\Phi_s \colon \widetilde{E}'_s \to \widetilde{E}_s \tag{8.11.8}$$

unique à isomorphisme près tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \widetilde{E}'_s \arrow[r, "\Phi_s"] \arrow[d, "\delta'"'] & \widetilde{E}_s \arrow[d, "\delta"] \\ \widetilde{E}' \arrow[r, "\Phi"] & \widetilde{E} \end{tikzcd} \tag{8.11.9}$$

soit commutatif à isomorphisme près, et même 2-cartésien. Il résulte de ([4] (10.12.6)) et ([5] IV 9.4.3) que le diagramme de morphisme de topos

$$\begin{tikzcd} \widetilde{E}'_s \arrow[r, "\Phi_s"] \arrow[d, "\sigma'_s"'] & \widetilde{E}_s \arrow[d, "\sigma_s"] \\ X'_{s,\text{ét}} \arrow[r, "g_s"] & X_{s,\text{ét}} \end{tikzcd} \tag{8.11.10}$$

est commutatif à isomorphisme canonique près.

L'homomorphisme canonique $\Phi^{-1}(\overline{\mathscr{B}}) \to \overline{\mathscr{B}}'$ induit un homomorphisme $\Phi_s^*(\overline{\mathscr{B}}_n) \to \overline{\mathscr{B}}'_n$. Le morphisme Φ_s est donc sous-jacent à un morphisme de topos annelés, que l'on note

$$\Phi_n \colon (\widetilde{E}'_s, \overline{\mathscr{B}}'_n) \to (\widetilde{E}_s, \overline{\mathscr{B}}_n). \tag{8.11.11}$$

Il résulte de (8.11.7) et (8.11.10) que le diagramme de morphismes de topos annelés

$$\begin{tikzcd} (\widetilde{E}'_s, \overline{\mathscr{B}}'_n) \arrow[r, "\Phi_n"] \arrow[d, "\sigma'_n"'] & (\widetilde{E}_s, \overline{\mathscr{B}}_n) \arrow[d, "\sigma_n"] \\ (X'_{s,\text{ét}}, \mathscr{O}_{\overline{X}'_n}) \arrow[r, "\overline{g}_n"] & (X_{s,\text{ét}}, \mathscr{O}_{\overline{X}_n}) \end{tikzcd} \tag{8.11.12}$$

où $\overline{g}_n$ est le morphisme induit par g, est commutatif à isomorphisme canonique près, dans le sens de ([1] 1.2.3).

Posons $\breve{\overline{\mathscr{B}}}' = (\overline{\mathscr{B}}'_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, qui est un anneau de $\widetilde{E}'^{\mathbb{N}^\circ}_s$. D'après 6.5, les morphismes $(\Phi_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ définissent un morphisme de topos annelés

$$\breve{\Phi} \colon (\widetilde{E}'^{\mathbb{N}^\circ}_s, \breve{\overline{\mathscr{B}}}') \to (\widetilde{E}^{\mathbb{N}^\circ}_s, \breve{\overline{\mathscr{B}}}). \tag{8.11.13}$$

On désigne par $\mathfrak{X}'$ le schéma formel complété p-adique de $\overline{X}'$ et par

$$\top' \colon (\widetilde{E}'^{\mathbb{N}^\circ}_s, \breve{\overline{\mathscr{B}}}') \to (\mathfrak{X}'_{\text{zar}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}) \tag{8.11.14}$$

le morphisme de topos annelés défini dans (8.10.5) relativement à $(X', X'^{\triangleright})$. Il résulte aussitôt de (8.11.12) et du caractère fonctoriel des morphismes $\breve{u}$ (8.10.3) et λ (8.10.4) que le diagramme de morphismes de topos annelés

$$\begin{tikzcd}
(\widetilde{E}'^{\mathbb{N}^\circ}_s, \breve{\overline{\mathscr{B}}}') \arrow[r, "\breve{\Phi}"] \arrow[d, "\top'"'] & (\widetilde{E}^{\mathbb{N}^\circ}_s, \breve{\overline{\mathscr{B}}}) \arrow[d, "\top"] \\
(X'_{s,\mathrm{zar}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}) \arrow[r, "\mathfrak{g}"] & (X_{s,\mathrm{zar}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})
\end{tikzcd} \tag{8.11.15}$$

où $\mathfrak{g}$ est le morphisme induit par g, est commutatif à isomorphisme canonique près, dans le sens de ([1] 1.2.3). On en déduit, pour tout $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-module $\mathscr{F}$ et tout entier $q \geq 0$, un morphisme de changement de base

$$\mathfrak{g}^*(\mathrm{R}^q\top_*(\mathscr{F})) \to \mathrm{R}^q\top'_*(\breve{\Phi}^*(\mathscr{F})). \tag{8.11.16}$$

Lemme 8.12. *Les hypothèses étant celles de* (8.11)*, supposons de plus g étale et $X'^{\rhd} = X'^{\circ}$. Alors* Φ_s (8.11.8) *est canoniquement isomorphe au morphisme de localisation de $\widetilde{E}_s$ en $\sigma_s^*(X'_s)$.*

On observera d'abord que $(\overline{X}'^{\rhd} \to X')$ est un objet de E et que le faisceau associé n'est autre que $\sigma^*(X')$. Par ailleurs, on a un isomorphisme canonique $\delta^*(\sigma^*(X')) \xrightarrow{\sim} \sigma_s^*(X'_s)$ (8.8.4). Notons $j\colon \widetilde{E}_{/\sigma^*(X')} \to \widetilde{E}$ (resp. $j_s\colon (\widetilde{E}_s)_{/\sigma_s^*(X'_s)} \to \widetilde{E}_s$) le morphisme de localisation de $\widetilde{E}$ en $\sigma^*(X')$ (resp. de $\widetilde{E}_s$ en $\sigma_s^*(X'_s)$). D'après ([5] IV 5.10), le morphisme δ induit un morphisme

$$\delta_{/\sigma^*(X')}\colon (\widetilde{E}_s)_{/\sigma_s^*(X'_s)} \to \widetilde{E}_{/\sigma^*(X')} \tag{8.12.1}$$

qui s'insère dans un diagramme commutatif à isomorphisme canonique près

$$\begin{tikzcd}
(\widetilde{E}_s)_{/\sigma_s^*(X'_s)} \arrow[r, "j_s"] \arrow[d, "\delta_{/\sigma^*(X')}"'] & \widetilde{E}_s \arrow[d, "\delta"] \\
\widetilde{E}_{/\sigma^*(X')} \arrow[r, "j"] & \widetilde{E}
\end{tikzcd} \tag{8.12.2}$$

Ce diagramme est en fait 2-cartésien d'après ([5] IV 5.11). D'autre part, les topos $\widetilde{E}'$ et $\widetilde{E}_{/\sigma^*(X')}$ sont canoniquement équivalents et le morphisme Φ s'identifie à j en vertu de ([4] 10.14). Comme le diagramme (8.11.9) est aussi 2-cartésien, la proposition s'ensuit.

Lemme 8.13. *Les hypothèses étant celles de* (8.11)*, supposons de plus que $X'^{\rhd} = X'^{\circ}$ et que l'une des deux conditions suivantes soit remplie :*

(i) *g est étale.*

(ii) *X' est le localisé strict de X en un point géométrique $\overline{x}$.*

Alors pour tout entier $n \geq 1$, l'homomorphisme $\Phi_s^*(\overline{\mathscr{B}}_n) \to \overline{\mathscr{B}}'_n$ est un isomorphisme.

Cela résulte de 7.21(i) et 7.23.

Proposition 8.14. *Les hypothèses étant celles de* (8.11)*, supposons de plus g étale et $X'^{\rhd} = X'^{\circ}$, et notons encore $\lambda\colon \widetilde{E}_s^{\mathbb{N}^\circ} \to \widetilde{E}_s$ le morphisme de topos défini dans* (6.4.3)*. Alors $\breve{\Phi}$* (8.11.13) *est canoniquement isomorphe au morphisme de localisation du topos annelé $(\widetilde{E}_s^{\mathbb{N}^\circ}, \breve{\overline{\mathscr{B}}})$ en $\lambda^*(\sigma_s^*(X'_s))$.*

En effet, le morphisme de topos $\Phi_s^{\mathbb{N}^\circ}\colon \widetilde{E}'^{\mathbb{N}^\circ}_s \to \widetilde{E}^{\mathbb{N}^\circ}_s$ s'identifie au morphisme de localisation de $\widetilde{E}^{\mathbb{N}^\circ}_s$ en $\lambda^*(\sigma_s^*(X'_s))$, d'après 8.12 et 6.6(ii). D'autre part, l'homomorphisme canonique $(\Phi_s^{\mathbb{N}^\circ})^*(\breve{\overline{\mathscr{B}}}) \to \breve{\overline{\mathscr{B}}}'$ est un isomorphisme en vertu de 8.13 et (6.5.4) ; d'où la proposition.

Corollaire 8.15. *Les hypothèses étant celles de* (8.11)*, supposons de plus que g soit une immersion ouverte et que $X'^{\rhd} = X'^{\circ}$. Alors pour tout $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-module $\mathscr{F}$ et tout entier $q \geq 0$, le morphisme de changement de base* (8.11.16)

$$\mathfrak{g}^*(\mathrm{R}^q\top_*(\mathscr{F})) \to \mathrm{R}^q\top'_*(\breve{\Phi}^*(\mathscr{F})) \tag{8.15.1}$$

est un isomorphisme.

En effet, les carrés du diagramme de morphismes de topos

$$\begin{tikzcd} \widetilde{E}_s^{\mathbb{N}^\circ} \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\sigma_s^{\mathbb{N}^\circ}"'] & \widetilde{E}_s \arrow[d, "\sigma_s"] \\ X_{s,\mathrm{\acute{e}t}}^{\mathbb{N}^\circ} \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "u_s^{\mathbb{N}^\circ}"'] & X_{s,\mathrm{\acute{e}t}} \arrow[d, "u_s"] \\ X_{s,\mathrm{zar}}^{\mathbb{N}^\circ} \arrow[r, "\lambda"] & X_{s,\mathrm{zar}} \end{tikzcd} \tag{8.15.2}$$

où u_s est le morphisme canonique (2.9.2) et λ désigne (abusivement) les morphismes définis dans (6.4.3), sont commutatifs à isomorphismes canoniques près (6.5.4). Notant $\mathtt{T} = \lambda \circ u_s^{\mathbb{N}^\circ} \circ \sigma_s^{\mathbb{N}^\circ}$, qui est le morphisme de topos sous-jacent à $\top$ (8.10.5), on en déduit un isomorphisme

$$\mathtt{T}^*(X'_s) \xrightarrow{\sim} \lambda^*(\sigma_s^*(X'_s)). \tag{8.15.3}$$

Il résulte alors de (8.11.15) et 8.14 que $\top'$ s'identifie au morphisme $\top_{/X'_s}$ (cf. [5] IV 5.10) ; d'où la proposition.

9. Les algèbres de Higgs-Tate

9.1. Dans cette section, $f\colon (X, \mathscr{M}_X) \to (S, \mathscr{M}_S)$ désigne un morphisme adéquat de schémas logarithmiques (3.9). On note X° le sous-schéma ouvert maximal de X où la structure logarithmique $\mathscr{M}_X$ est triviale ; c'est un sous-schéma ouvert de X_η. Pour tout S-schéma Y et tout X-schéma usuel U, on pose (2.1)

$$\overline{Y} = Y \times_S \overline{S}, \quad \breve{\overline{Y}} = Y \times_S \breve{\overline{S}} \quad \text{et} \quad U^\circ = U \times_X X^\circ. \tag{9.1.1}$$

On note $j\colon X^\circ \to X$ et $\hbar\colon \overline{X} \to X$ les morphismes canoniques. Pour alléger les notations, on pose

$$\widetilde{\Omega}^1_{X/S} = \Omega^1_{(X,\mathscr{M}_X)/(S,\mathscr{M}_S)}, \tag{9.1.2}$$

que l'on considère comme un faisceau de X_{zar} ou $X_{\mathrm{\acute{e}t}}$, selon le contexte (cf. 2.9). Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n} = \widetilde{\Omega}^1_{X/S} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_{\overline{X}_n}, \tag{9.1.3}$$

où $\overline{X}_n = \overline{X} \times_S S_n$ (2.1.1), que l'on considère comme un faisceau de $X_{s,\mathrm{zar}}$ ou $X_{s,\mathrm{\acute{e}t}}$, selon le contexte (cf. 2.9 et 8.9). On munit $\overline{X}$ et $\breve{\overline{X}}$ des structures logarithmiques $\mathscr{M}_{\overline{X}}$ et $\mathscr{M}_{\breve{\overline{X}}}$ images inverses de $\mathscr{M}_X$. On a alors des isomorphismes canoniques (2.1)

$$(\overline{X}, \mathscr{M}_{\overline{X}}) \xrightarrow{\sim} (X, \mathscr{M}_X) \times_{(S,\mathscr{M}_S)} (\overline{S}, \mathscr{M}_{\overline{S}}), \tag{9.1.4}$$

$$(\breve{\overline{X}}, \mathscr{M}_{\breve{\overline{X}}}) \xrightarrow{\sim} (X, \mathscr{M}_X) \times_{(S,\mathscr{M}_S)} (\breve{\overline{S}}, \mathscr{M}_{\breve{\overline{S}}}), \tag{9.1.5}$$

le produit étant indifféremment pris dans la catégorie des schémas logarithmiques ou dans celle des schémas logarithmiques fins.

Une $(\mathscr{A}_2(\overline{S}), \mathscr{M}_{\mathscr{A}_2(\overline{S})})$-*déformation lisse* de $(\check{\overline{X}}, \mathscr{M}_{\check{\overline{X}}})$ (2.3) est la donnée d'un morphisme lisse de schémas logarithmiques fins

$$\widetilde{f}\colon (\widetilde{X}, \mathscr{M}_{\widetilde{X}}) \to (\mathscr{A}_2(\overline{S}), \mathscr{M}_{\mathscr{A}_2(\overline{S})}) \tag{9.1.6}$$

et d'un $(\check{\overline{S}}, \mathscr{M}_{\check{\overline{S}}})$-isomorphisme

$$(\check{\overline{X}}, \mathscr{M}_{\check{\overline{X}}}) \xrightarrow{\sim} (\widetilde{X}, \mathscr{M}_{\widetilde{X}}) \times_{(\mathscr{A}_2(\overline{S}), \mathscr{M}_{\mathscr{A}_2(\overline{S})})} (\check{\overline{S}}, \mathscr{M}_{\check{\overline{S}}}), \tag{9.1.7}$$

le produit étant indifféremment pris dans la catégorie des schémas logarithmiques ou dans celle des schémas logarithmiques fins (cf. [22] 3.14). Dans la suite de cette section, *on suppose qu'il existe une telle déformation* $(\widetilde{X}, \mathscr{M}_{\widetilde{X}})$ *que l'on fixe.*

9.2. D'après 3.10(v), les schémas X et $\overline{X}$ sont normaux et localement irréductibles. Par ailleurs, X étant noethérien, j est quasi-compact. On peut donc appliquer les constructions de § 8 aux morphismes de la ligne supérieure du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \overline{X}^{\circ} \arrow[r, "j_{\overline{X}}"] \arrow[d] & \overline{X} \arrow[r, "\hbar"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Box"] & X \arrow[d] \\ \overline{\eta} \arrow[r] & \overline{S} \arrow[r] & S \end{tikzcd} \tag{9.2.1}$$

On note

$$\pi\colon E \to \mathbf{\acute{E}t}_{/X} \tag{9.2.2}$$

le $\mathbb{U}$-site fibré de Faltings associé au morphisme $\hbar \circ j_{\overline{X}}\colon \overline{X}^{\circ} \to X$ (7.1). On munit E de la topologie co-évanescente et on désigne par $\widetilde{E}$ le topos des faisceaux de $\mathbb{U}$-ensembles sur E (7.2), par $\overline{\mathscr{B}}$ l'anneau de $\widetilde{E}$ associé à $\overline{X}$ (7.17) et par

$$\sigma\colon \widetilde{E} \to X_{\text{ét}}, \tag{9.2.3}$$

$$\rho\colon X_{\text{ét}} \overleftarrow{\times}_{X_{\text{ét}}} \overline{X}^{\circ}_{\text{ét}} \to \widetilde{E}, \tag{9.2.4}$$

les morphismes canoniques (7.3.3) et (7.6.2). On note $\widetilde{E}_s$ le sous-topos fermé de $\widetilde{E}$ complémentaire de l'ouvert $\sigma^*(X_\eta)$ (8.3),

$$\delta\colon \widetilde{E}_s \to \widetilde{E} \tag{9.2.5}$$

le plongement canonique et

$$\sigma_s\colon \widetilde{E}_s \to X_{s,\text{ét}} \tag{9.2.6}$$

le morphisme de topos induit par σ (8.8.3). Pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$\overline{\mathscr{B}}_n = \overline{\mathscr{B}}/p^n\overline{\mathscr{B}}. \tag{9.2.7}$$

Pour tout $U \in \mathrm{Ob}(\mathbf{\acute{E}t}_{/X})$, on pose $\overline{\mathscr{B}}_U = \overline{\mathscr{B}} \circ \alpha_{U!}$ (7.1.6) et

$$\overline{\mathscr{B}}_{U,n} = \overline{\mathscr{B}}_U/p^n\overline{\mathscr{B}}_U. \tag{9.2.8}$$

On notera que l'homomorphisme canonique $\overline{\mathscr{B}}_{U,n} \to \overline{\mathscr{B}}_n \circ \alpha_{U!}$ n'est pas en général un isomorphisme (cf. (8.1.8)). On rappelle (8.7) que $\overline{\mathscr{B}}_n$ est un anneau de $\widetilde{E}_s$. Si $n \geq 1$, on note

$$\sigma_n\colon (\widetilde{E}_s, \overline{\mathscr{B}}_n) \to (X_{s,\text{ét}}, \mathscr{O}_{\overline{X}_n}) \tag{9.2.9}$$

le morphisme canonique de topos annelés (8.9.4).

9.3. On désigne par $\mathbf{P}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{\acute{E}t}_{/X}$ formée des schémas affines U tels que le morphisme $(U, \mathscr{M}_X|U) \to (S, \mathscr{M}_S)$ induit par f admette une carte adéquate (3.8). On munit $\mathbf{P}$ de la topologie induite par celle de $\mathbf{\acute{E}t}_{/X}$. Comme X est noethérien et donc quasi-séparé, tout objet de $\mathbf{P}$ est cohérent sur X. Par suite, $\mathbf{P}$ est une famille $\mathbb{U}$-petite, topologiquement génératrice du site $\mathbf{\acute{E}t}_{/X}$ et est stable par produits fibrés. On désigne par

$$\pi_{\mathbf{P}} \colon E_{\mathbf{P}} \to \mathbf{P} \tag{9.3.1}$$

le site fibré déduit de π (9.2.2) par changement de base par le foncteur d'injection canonique $\mathbf{P} \to \mathbf{\acute{E}t}_{/X}$. On munit $E_{\mathbf{P}}$ de la topologie co-évanescente définie par $\pi_{\mathbf{P}}$ et on note $\widetilde{E}_{\mathbf{P}}$ le topos des faisceaux de $\mathbb{U}$-ensembles sur $E_{\mathbf{P}}$. D'après ([4] 5.19 et 5.20), la topologie de $E_{\mathbf{P}}$ est induite par celle de E au moyen du foncteur de projection canonique $E_{\mathbf{P}} \to E$, et celui-ci induit par restriction une équivalence de catégories

$$\widetilde{E} \xrightarrow{\sim} \widetilde{E}_{\mathbf{P}}. \tag{9.3.2}$$

Remarque 9.4. Soient U un objet de $\mathbf{P}$, $\overline{y}$ un point géométrique générique de $\overline{U}^{\circ}$, $\overline{R}^{\overline{y}}_U$ l'anneau défini dans (7.13.2). Les schémas U et $\overline{U}$ étant localement irréductibles (3.3), ils sont les sommes des schémas induits sur leurs composantes irréductibles. Notons U' (resp. $\overline{U}'$) la composante irréductible de U (resp. $\overline{U}$) contenant $\overline{y}$. De même, $\overline{U}^{\circ}$ est la somme des schémas induits sur ses composantes irréductibles et $\overline{U}'^{\circ} = \overline{U}' \times_X X^{\circ}$ est la composante irréductible de $\overline{U}^{\circ}$ contenant $\overline{y}$. Alors U' est naturellement un objet de $\mathbf{P}$ au-dessus de U, et l'homomorphisme canonique $\overline{R}^{\overline{y}}_U \to \overline{R}^{\overline{y}}_{U'}$ est un isomorphisme $\pi_1(\overline{U}'^{\circ}, \overline{y})$-équivariant. Si $U'_s = \emptyset$, $\overline{R}^{\overline{y}}_U$ est une $\overline{K}$-algèbre. Supposons $U'_s \neq \emptyset$, de sorte que le morphisme $(U', \mathscr{M}_X|U') \to (S, \mathscr{M}_S)$ induit par f vérifie les hypothèses de ([3] 6.2). L'algèbre $\overline{R}^{\overline{y}}_U$ munie de l'action de $\pi_1(\overline{U}'^{\circ}, \overline{y})$ correspond alors à l'algèbre $\overline{R}$ munie de l'action de Δ introduite dans ([3] 6.7 et 6.9) ; d'où la notation. L'anneau du schéma affine $\overline{U}'$ correspond à l'algèbre R_1 dans *loc. cit.*, d'après ([3] 6.8(i)).

9.5. On désigne par $\mathbf{Q}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{P}$ (9.3) formée des schémas affines connexes U tels qu'il existe une carte fine et saturée $M \to \Gamma(U, \mathscr{M}_X)$ pour $(U, \mathscr{M}_X|U)$ induisant un isomorphisme

$$M \xrightarrow{\sim} \Gamma(U, \mathscr{M}_X)/\Gamma(U, \mathscr{O}_X^{\times}). \tag{9.5.1}$$

Cette carte est a priori indépendante de la carte adéquate requise dans la définition des objets de $\mathbf{P}$. On munit $\mathbf{Q}$ de la topologie induite par celle de $\mathbf{\acute{E}t}_{/X}$. Il résulte de ([3] 5.17) que $\mathbf{Q}$ est une sous-catégorie topologiquement génératrice de $\mathbf{\acute{E}t}_{/X}$. On désigne par

$$\pi_{\mathbf{Q}} \colon E_{\mathbf{Q}} \to \mathbf{Q} \tag{9.5.2}$$

le site fibré déduit de π (9.2.2) par changement de base par le foncteur d'injection canonique $\mathbf{Q} \to \mathbf{\acute{E}t}_{/X}$. Le foncteur de projection canonique $E_{\mathbf{Q}} \to E$ est pleinement fidèle et la catégorie $E_{\mathbf{Q}}$ est $\mathbb{U}$-petite et topologiquement génératrice du site E. On munit $E_{\mathbf{Q}}$ de la topologie induite par celle de E. Par restriction, le topos $\widetilde{E}$ est alors équivalent à la catégorie des faisceaux de $\mathbb{U}$-ensembles sur $E_{\mathbf{Q}}$ ([5] III 4.1). On prendra garde qu'en général, $\mathbf{Q}$ n'étant pas stable par produits fibrés, on ne peut pas parler de topologie co-évanescente sur $E_{\mathbf{Q}}$ associée à $\pi_{\mathbf{Q}}$, et encore moins appliquer ([4] 5.19 et 5.20).

9.6. On désigne par $\widehat{E}_{\mathbf{Q}}$ la catégorie des préfaisceaux de $\mathbb{U}$-ensembles sur $E_{\mathbf{Q}}$ et par

$$\mathscr{P}^{\vee}_{\mathbf{Q}} \to \mathbf{Q}^{\circ} \tag{9.6.1}$$

la catégorie fibrée obtenue en associant à tout $U \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Q})$ la catégorie $(\mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{f}/\overline{U}^{\circ}})^{\wedge}$ des préfaisceaux de $\mathbb{U}$-ensembles sur $\mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{f}/\overline{U}^{\circ}}$, et à tout morphisme $f \colon U' \to U$ de $\mathbf{Q}$ le foncteur

$$\overline{f}^{\circ}_{\mathrm{f\acute{e}t}*} \colon (\mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{f}/\overline{U}'^{\circ}})^{\wedge} \to (\mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{f}/\overline{U}^{\circ}})^{\wedge} \tag{9.6.2}$$

obtenu en composant avec le foncteur image inverse $\mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{f}/\overline{U}^{\circ}} \to \mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{f}/\overline{U}'^{\circ}}$ par le morphisme $\overline{f}^{\circ} \colon \overline{U}'^{\circ} \to \overline{U}^{\circ}$ déduit de f ; autrement dit, $\mathscr{P}^{\vee}_{\mathbf{Q}}$ est la catégorie fibrée sur $\mathbf{Q}^{\circ}$ déduite de la catégorie fibrée (7.1.9) par changement de base par le foncteur d'injection canonique $\mathbf{Q} \to \mathbf{\acute{E}t}_{/X}$. Pour tout $U \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Q})$, on note $\alpha_{U!} \colon \mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{f}/\overline{U}^{\circ}} \to E_{\mathbf{Q}}$ le foncteur canonique (7.1.6). D'après ([14] VI 12 ; cf. aussi [1] 1.1.2), on a une équivalence de catégories

$$\begin{array}{rcl} \widehat{E}_{\mathbf{Q}} & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{Hom}_{\mathbf{Q}^{\circ}}(\mathbf{Q}^{\circ}, \mathscr{P}^{\vee}_{\mathbf{Q}}) \\ F & \mapsto & \{U \mapsto F \circ \alpha_{U!}\}. \end{array} \tag{9.6.3}$$

On identifiera dans la suite F à la section $\{U \mapsto F \circ \alpha_{U!}\}$ qui lui est associée par cette équivalence.

Comme $E_{\mathbf{Q}}$ est une sous-catégorie topologiquement génératrice de E, le foncteur "faisceau associé" sur $E_{\mathbf{Q}}$ induit un foncteur que l'on note aussi

$$\widehat{E}_{\mathbf{Q}} \to \widetilde{E}, \quad F \mapsto F^{a}. \tag{9.6.4}$$

Soient $F = \{W \mapsto G_W\}$ ($W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{\acute{E}t}_{/X})$) un objet de $\widehat{E}$ (7.2.1), $F_{\mathbf{Q}} = \{U \mapsto G_U\}$ ($U \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Q})$) l'objet de $\widehat{E}_{\mathbf{Q}}$ obtenu en restreignant F à $E_{\mathbf{Q}}$. Il résulte aussitôt de ([5] II 3.0.4) et de la définition du foncteur "faisceau associé" ([5] II 3.4) qu'on a un isomorphisme canonique de $\widetilde{E}$

$$F^{a}_{\mathbf{Q}} \xrightarrow{\sim} F^{a}. \tag{9.6.5}$$

Remarque 9.7. Soit $F = \{U \mapsto F_U\}$ un préfaisceau sur $E_{\mathbf{Q}}$. Pour chaque $U \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Q})$, notons F^{a}_{U} le faisceau de $\overline{U}^{\circ}_{\mathrm{f\acute{e}t}}$ associé à F_U. Alors $\{U \mapsto F^{a}_{U}\}$ est un préfaisceau sur $E_{\mathbf{Q}}$ et on a un morphisme canonique $\{U \mapsto F_U\} \to \{U \mapsto F^{a}_{U}\}$ de $\widehat{E}_{\mathbf{Q}}$, induisant un isomorphisme entre les faisceaux associés. Cette assertion ne résulte pas directement de ([4] 5.15) puisque $\mathbf{Q}$ n'est pas stable par produits fibrés. La preuve est toutefois similaire. Le seul point à vérifier est l'isomorphisme ([4] (5.15.3)). Soient $G = \{W \mapsto G_W\}$ ($W \in \mathrm{Ob}(\mathbf{\acute{E}t}_{/X})$) un objet de $\widetilde{E}$, $G_{\mathbf{Q}} = \{U \mapsto G_U\}$ ($U \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Q})$) l'objet de $\widehat{E}_{\mathbf{Q}}$ obtenu en restreignant G à $E_{\mathbf{Q}}$. Pour tout $U \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Q})$, G_U est un faisceau de $\overline{U}^{\circ}_{\mathrm{f\acute{e}t}}$ (7.2.2). Par suite, l'application

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{E}_{\mathbf{Q}}}(\{U \mapsto F^{a}_{U}\}, \{U \mapsto G_U\}) \to \mathrm{Hom}_{\widehat{E}_{\mathbf{Q}}}(\{U \mapsto F_U\}, \{U \mapsto G_U\}) \tag{9.7.1}$$

induite par le morphisme canonique $\{U \mapsto F_U\} \to \{U \mapsto F^{a}_{U}\}$ est un isomorphisme. L'assertion s'ensuit.

9.8. Soient $\overline{x}$ un point géométrique de X au-dessus de s, X' le localisé strict de X en $\overline{x}$. On note $j' \colon X'^{\circ} \to X'$ l'injection canonique et g, $\overline{g}$ et $\hbar'$ les flèches canoniques du diagramme cartésien suivant

$$\begin{array}{ccc} \overline{X}' & \xrightarrow{\overline{g}} & \overline{X} \\ {\scriptstyle \hbar'}\downarrow & \square & \downarrow{\scriptstyle \hbar} \\ X' & \xrightarrow{g} & X \end{array} \tag{9.8.1}$$

En vertu de 3.7, $\overline{X}'$ est normal et strictement local (et en particulier intègre). On désigne par E' (resp. $\widetilde{E}'$) le site (resp. topos) de Faltings associé au morphisme $\hbar' \circ j'_{\overline{X}'} \colon \overline{X}'^{\circ} \to X'$ (7.2) et par $\overline{\mathscr{B}}'$ l'anneau de $\widetilde{E}'$ associé à $\overline{X}'$ (7.17). On note

$$\sigma' \colon \widetilde{E}' \to X'_{\text{ét}}, \tag{9.8.2}$$

$$\rho' \colon X'_{\text{ét}} \overleftarrow{\times}_{X'_{\text{ét}}} \overline{X}'^{\circ}_{\text{ét}} \to \widetilde{E}', \tag{9.8.3}$$

les morphismes canoniques (7.3.3) et (7.6.2), respectivement, et

$$\Phi \colon (\widetilde{E}', \overline{\mathscr{B}}') \to (\widetilde{E}, \overline{\mathscr{B}}) \tag{9.8.4}$$

le morphisme de topos annelés déduit de g par fonctorialité (7.20). D'après 7.23, l'homomorphisme canonique $\Phi^{-1}(\overline{\mathscr{B}}) \to \overline{\mathscr{B}}'$ est un isomorphisme. On désigne par $\widetilde{E}'_s$ le sous-topos fermé de $\widetilde{E}'$ complémentaire de l'ouvert $\sigma'^*(X'_\eta)$, par

$$\delta' \colon \widetilde{E}'_s \to \widetilde{E}' \tag{9.8.5}$$

le plongement canonique et par

$$\Phi_s \colon \widetilde{E}'_s \to \widetilde{E}_s \tag{9.8.6}$$

le morphisme de topos induit par Φ (8.11.8). Pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$\overline{\mathscr{B}}'_n = \overline{\mathscr{B}}'/p^n\overline{\mathscr{B}}', \tag{9.8.7}$$

et on note

$$\Phi_n \colon (\widetilde{E}'_s, \overline{\mathscr{B}}'_n) \to (\widetilde{E}_s, \overline{\mathscr{B}}_n) \tag{9.8.8}$$

le morphisme de topos annelés induit par Φ (8.11.11).

On désigne par

$$\varphi_{\overline{x}} \colon \widetilde{E} \to \overline{X}'^{\circ}_{\text{fét}} \tag{9.8.9}$$

le foncteur (7.8.4). On rappelle que la donnée d'un voisinage du point de $X_{\text{ét}}$ associé à $\overline{x}$ dans le site $\mathbf{\acute{E}t}_{/X}$ (resp. $\mathbf{P}$ (9.3), resp. $\mathbf{Q}$ (9.5)) est équivalente à la donnée d'un X-schéma étale $\overline{x}$-pointé (resp. de $\mathbf{P}$, resp. de $\mathbf{Q}$) ([5] IV 6.8.2). Ces objets forment naturellement une catégorie cofiltrante, que l'on note $\mathfrak{E}_{\overline{x}}$ (resp. $\mathfrak{E}_{\overline{x}}(\mathbf{P})$, resp. $\mathfrak{E}_{\overline{x}}(\mathbf{Q})$). Les catégories $\mathfrak{E}_{\overline{x}}(\mathbf{P})$ et $\mathfrak{E}_{\overline{x}}(\mathbf{Q})$ sont $\mathbb{U}$-petites, et les foncteurs d'injection canoniques $\mathbf{Q} \to \mathbf{P} \to \mathbf{\acute{E}t}_{/X}$ induisent des foncteurs pleinement fidèles et cofinaux $\mathfrak{E}_{\overline{x}}(\mathbf{Q}) \to \mathfrak{E}_{\overline{x}}(\mathbf{P}) \to \mathfrak{E}_{\overline{x}}$. Pour tout $U \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{E}_{\overline{x}})$, on désigne par

$$t_U \colon \overline{X}'^{\circ} \to \overline{U}^{\circ} \tag{9.8.10}$$

le morphisme canonique. D'après (7.8.6), comme $\overline{X}'^{\circ}$ est intègre (3.7), on a un isomorphisme canonique

$$\varinjlim_{U \in \mathfrak{E}^{\circ}_{\overline{x}}} (t_U)^*_{\text{fét}}(\overline{\mathscr{B}}_U) \xrightarrow{\sim} \varphi_{\overline{x}}(\overline{\mathscr{B}}), \tag{9.8.11}$$

où $\overline{\mathscr{B}}_U$ est le faisceau de $\overline{U}^{\circ}_{\text{fét}}$ défini dans (7.10.3). On peut évidemment remplacer dans la limite ci-dessus $\mathfrak{E}_{\overline{x}}$ par $\mathfrak{E}_{\overline{x}}(\mathbf{P})$ ou $\mathfrak{E}_{\overline{x}}(\mathbf{Q})$.

9.9. Conservons les hypothèses de (9.8), soient de plus $\overline{y}$ un point géométrique de $\overline{X}^{\circ}$, $u\colon \overline{y} \to X'$ un X-morphisme, $(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x})$ le point de $X_{\text{ét}} \overleftarrow{\times}_{X_{\text{ét}}} \overline{X}^{\circ}_{\text{ét}}$ défini par u (7.6). On note aussi (abusivement) $\overline{x}$ le point fermé de X', $\overline{y}$ le point géométrique de $\overline{X}'^{\circ}$ défini par le morphisme $v\colon \overline{y} \to \overline{X}'^{\circ}$ induit par u, et $(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x})$ le point de $X'_{\text{ét}} \overleftarrow{\times}_{X'_{\text{ét}}} \overline{X}'^{\circ}_{\text{fét}}$ défini par v. Les points $\rho(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x})$ et $\Phi(\rho'(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x}))$ de $\widetilde{E}$ sont alors canoniquement isomorphes ([4] 10.16). L'homomorphisme canonique $\Phi^{-1}(\overline{\mathscr{B}}) \to \overline{\mathscr{B}}'$ étant un isomorphisme (7.23), il induit un isomorphisme

$$\overline{\mathscr{B}}_{\rho(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x})} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathscr{B}}'_{\rho'(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x})}. \tag{9.9.1}$$

On désigne par $\mathbf{B}_{\pi_1(\overline{X}'^{\circ}, \overline{y})}$ le topos classifiant du groupe profini $\pi_1(\overline{X}'^{\circ}, \overline{y})$ ($\overline{X}'^{\circ}$ étant intègre) et par

$$\nu_{\overline{y}}\colon \overline{X}'^{\circ}_{\text{fét}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{B}_{\pi_1(\overline{X}'^{\circ}, \overline{y})} \tag{9.9.2}$$

le foncteur fibre de $\overline{X}'^{\circ}_{\text{fét}}$ en $\overline{y}$ (2.10.3). Pour tout $U \in \text{Ob}(\mathfrak{C}_{\overline{x}})$, on note aussi (abusivement) $\overline{y}$ le point géométrique de $\overline{U}^{\circ}$ défini par le morphisme $t_U \circ v\colon \overline{y} \to \overline{U}^{\circ}$ (9.8.10). Comme $\overline{U}$ est localement irréductible (3.3), il est la somme des schémas induits sur ses composantes irréductibles. Notons $\overline{U}'$ la composante irréductible de $\overline{U}$ contenant $\overline{y}$. De même, $\overline{U}^{\circ}$ est la somme des schémas induits sur ses composantes irréductibles et $\overline{U}'^{\circ} = \overline{U}' \times_X X^{\circ}$ est la composante irréductible de $\overline{U}^{\circ}$ contenant $\overline{y}$. Le morphisme t_U se factorise donc à travers $\overline{U}'^{\circ}$. On désigne par $\mathbf{B}_{\pi_1(\overline{U}'^{\circ}, \overline{y})}$ le topos classifiant du groupe profini $\pi_1(\overline{U}'^{\circ}, \overline{y})$ et par $\overline{R}^{\overline{y}}_U$ la $\mathscr{O}_{\overline{K}}$-algèbre de $\mathbf{B}_{\pi_1(\overline{U}'^{\circ}, \overline{y})}$ définie dans (7.13.2).

On déduit de (9.8.11) et (7.15.1) un isomorphisme de $\mathscr{O}_{\overline{K}}$-algèbres de $\mathbf{B}_{\pi_1(\overline{X}'^{\circ}, \overline{y})}$

$$\varinjlim_{U \in \mathfrak{C}^{\circ}_{\overline{x}}} \overline{R}^{\overline{y}}_U \xrightarrow{\sim} \nu_{\overline{y}}(\varphi_{\overline{x}}(\overline{\mathscr{B}})). \tag{9.9.3}$$

Par suite, pour tout entier $n \geq 0$, on a des isomorphismes canoniques d'anneaux de $\mathbf{B}_{\pi_1(\overline{X}'^{\circ}, \overline{y})}$

$$\varinjlim_{U \in \mathfrak{C}^{\circ}_{\overline{x}}} \overline{R}^{\overline{y}}_U / p^n \overline{R}^{\overline{y}}_U \xrightarrow{\sim} \nu_{\overline{y}}(\varphi_{\overline{x}}(\overline{\mathscr{B}}_n)). \tag{9.9.4}$$

D'après ([4] 10.30 et 9.8), l'anneau sous-jacent à $\nu_{\overline{y}}(\varphi_{\overline{x}}(\overline{\mathscr{B}}))$ est canoniquement isomorphe à la fibre $\overline{\mathscr{B}}_{\rho(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x})}$, et de même pour $\overline{\mathscr{B}}_n$

Proposition 9.10. *Soit $(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x})$ un point de $X_{\text{ét}} \overleftarrow{\times}_{X_{\text{ét}}} \overline{X}^{\circ}_{\text{ét}}$ tel que $\overline{x}$ soit au-dessus de s. Alors :*

(i) *La fibre $\overline{\mathscr{B}}_{\rho(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x})}$ de $\overline{\mathscr{B}}$ en $\rho(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x})$ est un anneau normal et strictement local.*

(ii) *La fibre $\hbar(\mathscr{O}_{\overline{X}})_{\overline{x}}$ de $\hbar(\mathscr{O}_{\overline{X}})$ en $\overline{x}$ est un anneau normal et strictement local.*

(iii) *L'homomorphisme*

$$\hbar(\mathscr{O}_{\overline{X}})_{\overline{x}} \to \overline{\mathscr{B}}_{\rho(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x})} \tag{9.10.1}$$

induit par l'homomorphisme canonique $\sigma^{-1}(\hbar_*(\mathscr{O}_{\overline{X}})) \to \overline{\mathscr{B}}$ (7.17) est local.

Reprenons les notations de 9.8 et 9.9.

(i) Cela résulte de (9.9.1) et 7.19(i).

(ii) D'après 3.6, le morphisme canonique $\overline{g}^{-1}(\mathscr{O}_{\overline{X}}) \to \mathscr{O}_{\overline{X}'}$ est un isomorphisme de $\overline{X}'_{\text{ét}}$. On en déduit par ([5] VIII 5.2) un isomorphisme canonique

$$\hbar_*(\mathscr{O}_{\overline{X}})_{\overline{x}} \xrightarrow{\sim} \Gamma(\overline{X}', \mathscr{O}_{\overline{X}'}). \tag{9.10.2}$$

La proposition s'ensuit en vertu de 3.7.

(iii) Le diagramme de morphismes de topos

$$\begin{tikzcd} \widetilde{E}' \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\sigma'"'] & \widetilde{E} \arrow[d, "\sigma"] \\ X'_{\text{ét}} \arrow[r, "g"] & X_{\text{ét}} \end{tikzcd} \tag{9.10.3}$$

est commutatif à isomorphisme canonique près ([4] (10.12.6)). De plus, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \sigma'^{-1}(g^{-1}(\hbar_*(\mathscr{O}_{\overline{X}}))) \arrow[r, equal] \arrow[d, "c"'] & \Phi^{-1}(\sigma^{-1}(\hbar_*\mathscr{O}_{\overline{X}})) \arrow[r] & \Phi^{-1}(\overline{\mathscr{B}}) \arrow[d, "b"] \\ \sigma'^{-1}(\hbar'_*(\overline{g}^{-1}(\mathscr{O}_{\overline{X}}))) \arrow[r, "a"] & \sigma'^{-1}(\hbar'_*(\mathscr{O}_{\overline{X}'})) \arrow[r] & \overline{\mathscr{B}}' \end{tikzcd} \tag{9.10.4}$$

où c est le morphisme de changement de base relativement au diagramme (9.8.1) et les autres flèches sont les morphismes canoniques, est commutatif. Comme $\hbar$ est entier, c est un isomorphisme ([5] VIII 5.6). Par ailleurs, a est un isomorphisme (3.6) et b est un isomorphisme (7.23). La proposition résulte alors de 7.19(iii).

Corollaire 9.11. (i) *Le topos $\widetilde{E}_s$ est localement annelé par $\overline{\mathscr{B}}_s = \overline{\mathscr{B}}|\widetilde{E}_s$.*

(ii) *Pour tout entier $n \geq 1$, $\sigma_n \colon (\widetilde{E}_s, \overline{\mathscr{B}}_n) \to (X_{s,\text{ét}}, \mathscr{O}_{\overline{X}_n})$ (9.2.9) est un morphisme de topos localement annelés.*

Cela résulte de 8.5, 9.10 et ([5] IV 13.9).

Proposition 9.12. *L'endomorphisme de Frobenius absolu de $\overline{\mathscr{B}}_1$ est surjectif.*

En vertu de 8.5, 8.7 et ([4] 10.39), il suffit de montrer que pour tout point géométrique $\overline{x}$ de X au-dessus de s, l'endomorphisme de Frobenius absolu de $\overline{\mathscr{B}}_1$ induit un endomorphisme surjectif de $\varphi_{\overline{x}}(\overline{\mathscr{B}}_1)$. Soient $\overline{y}$ un point géométrique générique de $\overline{X}^{\circ}$, $u \colon \overline{y} \to X'$ un X-morphisme, où X' est le localisé strict de X en $\overline{x}$. Avec les notations de 9.8 et 9.9, on a un isomorphisme canonique (9.9.4)

$$\nu_{\overline{y}}(\varphi_{\overline{x}}(\overline{\mathscr{B}}_1)) \xrightarrow{\sim} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ U \in \mathfrak{E}_{\overline{x}}(\mathbf{P})^{\circ}}} \overline{R}^{\overline{y}}_U / p\overline{R}^{\overline{y}}_U. \tag{9.12.1}$$

Par fonctorialité de l'isomorphisme (7.8.6), celui-ci est compatible aux endomorphismes de Frobenius absolus de $\overline{\mathscr{B}}_1$ et $\overline{R}^{\overline{y}}_U/p\overline{R}^{\overline{y}}_U$. Pour tout $U \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{E}_{\overline{x}}(\mathbf{P}))$, l'endomorphisme de Frobenius absolu de $\overline{R}^{\overline{y}}_U/p\overline{R}^{\overline{y}}_U$ est surjectif en vertu de 9.4 et ([3] 9.10) ; d'où la proposition.

9.13. Soient Y un objet de $\mathbf{Q}$ (9.5) tel que $Y_s \neq \emptyset$, $\overline{y}$ un point géométrique de $\overline{Y}^{\circ}$. Comme $\overline{Y}$ est localement irréductible (3.3), il est la somme des schémas induits sur ses composantes irréductibles. On note $\overline{Y}'$ la composante irréductible de $\overline{Y}$ contenant $\overline{y}$. De même, $\overline{Y}^{\circ}$ est la somme des schémas induits sur ses composantes irréductibles, et $\overline{Y}'^{\circ} = \overline{Y}' \times_X X^{\circ}$ est la composante irréductible de $\overline{Y}^{\circ}$ contenant $\overline{y}$. On désigne par $\overline{R}^{\overline{y}}_Y$ l'anneau défini dans (7.13.2) et par $\widehat{\overline{R}}^{\overline{y}}_Y$ son séparé complété p-adique. On pose (2.2.1)

$$\mathscr{R}_{\overline{R}^{\overline{y}}_Y} = \lim_{\substack{\longleftarrow \\ x \mapsto x^p}} \overline{R}^{\overline{y}}_Y / p\overline{R}^{\overline{y}}_Y, \tag{9.13.1}$$

et on note $\theta_Y \colon \mathrm{W}(\mathscr{R}_{\overline{R}^{\overline{y}}_Y}) \to \widehat{\overline{R}}^{\overline{y}}_Y$ l'homomorphisme de Fontaine défini dans ([3] (9.3.4)). On pose

$$\mathscr{A}_2(\overline{R}^{\overline{y}}_Y) = \mathrm{W}(\mathscr{R}_{\overline{R}^{\overline{y}}_Y})/\ker(\theta_Y)^2, \tag{9.13.2}$$

et on note encore $\theta_Y \colon \mathscr{A}_2(\overline{R}^{\overline{y}}_Y) \to \widehat{\overline{R}}^{\overline{y}}_Y$ l'homomorphisme induit par θ_Y ([3] (9.3.5)). On pose enfin

$$\overline{Y}^{\overline{y}} = \mathrm{Spec}(\overline{R}^{\overline{y}}_Y), \tag{9.13.3}$$

$$\widehat{\overline{Y}}^{\overline{y}} = \mathrm{Spec}(\widehat{\overline{R}}^{\overline{y}}_Y), \tag{9.13.4}$$

$$\mathscr{A}_2(\overline{Y}^{\overline{y}}) = \mathrm{Spec}(\mathscr{A}_2(\overline{R}^{\overline{y}}_Y)). \tag{9.13.5}$$

On observera que $\overline{Y}$ étant affine, $\overline{Y}^{\overline{y}}$ n'est autre que le schéma défini dans 7.14. On munit $\overline{Y}^{\overline{y}}$ (resp. $\widehat{\overline{Y}}^{\overline{y}}$) de la structure logarithmique $\mathscr{M}_{\overline{Y}^{\overline{y}}}$ (resp. $\mathscr{M}_{\widehat{\overline{Y}}^{\overline{y}}}$) image inverse de $\mathscr{M}_X$ (cf. [3] 5.11) et $\mathscr{A}_2(\overline{Y}^{\overline{y}})$ de la structure logarithmique $\mathscr{M}_{\mathscr{A}_2(\overline{Y}^{\overline{y}})}$ définie comme suit. Soient Q_Y le monoïde et $q_Y \colon Q_Y \to \mathrm{W}(\mathscr{R}_{\overline{R}^{\overline{y}}_Y})$ l'homomorphisme définis dans ([3] 9.6) (notés Q et q dans *loc. cit.*) en prenant pour u l'homomorphisme canonique $\Gamma(Y, \mathscr{M}_X) \to \Gamma(\overline{Y}^{\overline{y}}, \mathscr{M}_{\overline{Y}^{\overline{y}}})$. On désigne par $\mathscr{M}_{\mathscr{A}_2(\overline{Y}^{\overline{y}})}$ la structure logarithmique sur $\mathscr{A}_2(\overline{Y}^{\overline{y}})$ associée à la structure pré-logarithmique définie par l'homomorphisme $Q_Y \to \mathscr{A}_2(\overline{R}^{\overline{y}}_Y)$ induit par q_Y. L'homomorphisme θ_Y induit alors un morphisme ([3] (9.6.4))

$$i_Y \colon (\widehat{\overline{Y}}^{\overline{y}}, \mathscr{M}_{\widehat{\overline{Y}}^{\overline{y}}}) \to (\mathscr{A}_2(\overline{Y}^{\overline{y}}), \mathscr{M}_{\mathscr{A}_2(\overline{Y}^{\overline{y}})}). \tag{9.13.6}$$

Le schéma logarithmique $(\mathscr{A}_2(\overline{Y}^{\overline{y}}), \mathscr{M}_{\mathscr{A}_2(\overline{Y}^{\overline{y}})})$ est fin et saturé et i_Y est une immersion fermée exacte. En effet, tous les foncteurs fibre de $\overline{Y}'^{\circ}_{\text{fét}}$ étant isomorphes, il suffit de montrer cette assertion dans le cas où $\overline{y}$ est localisé en un point générique de $\overline{Y}$. Compte tenu de 9.4, les notations ci-dessus correspondent alors à celles introduites dans ([3] 9.11), à l'exception de $\mathscr{M}_{\mathscr{A}_2(\overline{Y}^{\overline{y}})}$ qui correspond plutôt à la structure logarithmique $\mathscr{M}'_{\mathscr{A}_2(\overline{Y}^{\overline{y}})}$ dans *loc. cit.* Mais comme Y est un objet de $\mathbf{Q}$, cette dernière est canoniquement isomorphe à la structure logarithmique $\mathscr{M}_{\mathscr{A}_2(\overline{Y}^{\overline{y}})}$ introduite dans ([3] 9.12) en vertu de ([3] 9.13) ; d'où l'assertion (et la notation).

On pose

$$\mathrm{T}^{\overline{y}}_Y = \mathrm{Hom}_{\widehat{\overline{R}}^{\overline{y}}_Y}(\widetilde{\Omega}^1_{X/S}(Y) \otimes_{\mathscr{O}_X(Y)} \widehat{\overline{R}}^{\overline{y}}_Y, \xi \widehat{\overline{R}}^{\overline{y}}_Y) \tag{9.13.7}$$

et on identifie le $\widehat{\overline{R}}^{\overline{y}}_Y$-module dual à $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{X/S}(Y) \otimes_{\mathscr{O}_X(Y)} \widehat{\overline{R}}^{\overline{y}}_Y$ (cf. 2.3). On désigne par $\widehat{\overline{Y}}^{\overline{y}}_{\mathrm{zar}}$ le topos de Zariski de $\widehat{\overline{Y}}^{\overline{y}}$, par $\widetilde{\mathrm{T}}^{\overline{y}}_Y$ le $\mathscr{O}_{\widehat{\overline{Y}}^{\overline{y}}}$-module associé à $\mathrm{T}^{\overline{y}}_Y$ et par $\mathbf{T}^{\overline{y}}_Y$ le $\widehat{\overline{Y}}^{\overline{y}}$-fibré vectoriel associé à son dual, autrement dit, (2.7)

$$\mathbf{T}^{\overline{y}}_Y = \mathrm{Spec}(\mathrm{S}_{\widehat{\overline{R}}^{\overline{y}}_Y}(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{X/S}(Y) \otimes_{\mathscr{O}_X(Y)} \widehat{\overline{R}}^{\overline{y}}_Y)). \tag{9.13.8}$$

Soient U un ouvert de Zariski de $\widehat{\overline{Y}}^{\overline{y}}$, $\widetilde{U}$ l'ouvert de $\mathscr{A}_2(\overline{Y}^{\overline{y}})$ défini par U. On note $\mathscr{L}_Y^{\overline{y}}(U)$ l'ensemble des flèches pointillées qui complètent le diagramme

(9.13.9)
$$\begin{tikzcd}
(U, \mathscr{M}_{\widehat{\overline{Y}}^{\overline{y}}}|U) \arrow[r, "i_Y|U"] \arrow[d] & (\widetilde{U}, \mathscr{M}_{\mathscr{A}_2(\overline{Y}^{\overline{y}})}|\widetilde{U}) \arrow[d, dotted] \arrow[dd, bend left] \\
(\check{\overline{X}}, \mathscr{M}_{\check{\overline{X}}}) \arrow[r] \arrow[d] & (\widetilde{X}, \mathscr{M}_{\widetilde{X}}) \arrow[d] \\
(\check{\overline{S}}, \mathscr{M}_{\check{\overline{S}}}) \arrow[r, "i_{\overline{S}}"] & (\mathscr{A}_2(\overline{S}), \mathscr{M}_{\mathscr{A}_2(\overline{S})})
\end{tikzcd}$$

de façon à le laisser commutatif. D'après ([3] 5.23), le foncteur $U \mapsto \mathscr{L}_Y^{\overline{y}}(U)$ est un $\widetilde{\mathrm{T}}_Y^{\overline{y}}$-torseur de $\widehat{\overline{Y}}^{\overline{y}}_{\mathrm{zar}}$. On désigne par $\mathscr{F}_Y^{\overline{y}}$ le $\widehat{\overline{R}}_Y^{\overline{y}}$-module des fonctions affines sur $\mathscr{L}_Y^{\overline{y}}$ (cf. [3] 4.9). Celui-ci s'insère dans une suite exacte canonique ([3] (4.9.1))

$$0 \to \widehat{\overline{R}}_Y^{\overline{y}} \to \mathscr{F}_Y^{\overline{y}} \to \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{X/S}(Y) \otimes_{\mathscr{O}_X(Y)} \widehat{\overline{R}}_Y^{\overline{y}} \to 0. \tag{9.13.10}$$

Cette suite induit pour tout entier $m \geq 1$, une suite exacte (4.2.2)

$$0 \to \mathrm{S}^{m-1}_{\widehat{\overline{R}}_Y^{\overline{y}}}(\mathscr{F}_Y^{\overline{y}}) \to \mathrm{S}^m_{\widehat{\overline{R}}_Y^{\overline{y}}}(\mathscr{F}_Y^{\overline{y}}) \to \mathrm{S}^m_{\widehat{\overline{R}}_Y^{\overline{y}}}(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{X/S}(Y) \otimes_{\mathscr{O}_X(Y)} \widehat{\overline{R}}_Y^{\overline{y}}) \to 0. \tag{9.13.11}$$

Les $\widehat{\overline{R}}_Y^{\overline{y}}$-modules $(\mathrm{S}^m_{\widehat{\overline{R}}_Y^{\overline{y}}}(\mathscr{F}_Y^{\overline{y}}))_{m \in \mathbb{N}}$ forment donc un système inductif filtrant, dont la limite inductive

$$\mathscr{C}_Y^{\overline{y}} = \varinjlim_{m \geq 0} \mathrm{S}^m_{\widehat{\overline{R}}_Y^{\overline{y}}}(\mathscr{F}_Y^{\overline{y}}) \tag{9.13.12}$$

est naturellement munie d'une structure de $\widehat{\overline{R}}_Y^{\overline{y}}$-algèbre. D'après ([3] 4.10), le $\widehat{\overline{Y}}^{\overline{y}}$-schéma

$$\mathbf{L}_Y^{\overline{y}} = \mathrm{Spec}(\mathscr{C}_Y^{\overline{y}}) \tag{9.13.13}$$

est naturellement un $\mathbf{T}_Y^{\overline{y}}$-fibré principal homogène sur $\widehat{\overline{Y}}^{\overline{y}}$ qui représente canoniquement $\mathscr{L}_Y^{\overline{y}}$. On notera que $\mathscr{L}_Y^{\overline{y}}$, $\mathscr{F}_Y^{\overline{y}}$, $\mathscr{C}_Y^{\overline{y}}$ et $\mathbf{L}_Y^{\overline{y}}$ dépendent du choix de la déformation $(\widetilde{X}, \mathscr{M}_{\widetilde{X}})$ fixée dans 9.1.

Le groupe $\pi_1(\overline{Y}'^{\circ}, \overline{y})$ agit naturellement à gauche sur les schémas logarithmiques $(\widehat{\overline{Y}}^{\overline{y}}, \mathscr{M}_{\widehat{\overline{Y}}^{\overline{y}}})$ et $(\mathscr{A}_2(\overline{Y}^{\overline{y}}), \mathscr{M}_{\mathscr{A}_2(\overline{Y}^{\overline{y}})})$, et le morphisme i_Y est $\pi_1(\overline{Y}'^{\circ}, \overline{y})$-équivariant (cf. [3] 9.11). Procédant comme dans ([3] 10.4), on munit $\widetilde{\mathrm{T}}_Y^{\overline{y}}$ d'une structure canonique de $\mathscr{O}_{\widehat{\overline{Y}}^{\overline{y}}}$-module $\pi_1(\overline{Y}'^{\circ}, \overline{y})$-équivariant et $\mathscr{L}_Y^{\overline{y}}$ d'une structure canonique de $\widetilde{\mathrm{T}}_Y^{\overline{y}}$-torseur $\pi_1(\overline{Y}'^{\circ}, \overline{y})$-équivariant (cf. [3] 4.18). D'après ([3] 4.21), ces deux structures induisent une structure $\pi_1(\overline{Y}'^{\circ}, \overline{y})$-équivariante sur le $\mathscr{O}_{\widehat{\overline{Y}}^{\overline{y}}}$-module associé à $\mathscr{F}_Y^{\overline{y}}$, ou, ce qui revient au même, une action $\widehat{\overline{R}}_Y^{\overline{y}}$-semi-linéaire de $\pi_1(\overline{Y}'^{\circ}, \overline{y})$ sur $\mathscr{F}_Y^{\overline{y}}$, telle que les morphismes de la suite (9.13.10) soient $\pi_1(\overline{Y}'^{\circ}, \overline{y})$-équivariants. On en déduit une action de $\pi_1(\overline{Y}'^{\circ}, \overline{y})$ sur $\mathscr{C}_Y^{\overline{y}}$ par des automorphismes d'anneaux, compatible avec son action sur $\widehat{\overline{R}}_Y^{\overline{y}}$.

Lemme 9.14. *Sous les hypothèses de* (9.13), *les actions de* $\pi_1(\overline{Y}'^{\circ}, \overline{y})$ *sur* $\mathscr{F}_Y^{\overline{y}}$ *et sur* $\mathscr{C}_Y^{\overline{y}}$ *sont continues pour les topologies p-adiques.*

En effet, compte tenu de 7.15 et du fait que tous les foncteurs fibres de $\overline{Y}'^{\circ}_{\text{fét}}$ sont isomorphes (2.10.3), on peut supposer que $\overline{y}$ est localisé en un point générique de $\overline{Y}$. Notons $\widetilde{Y} \to \widetilde{X}$ l'unique morphisme étale qui relève $\check{\overline{Y}} \to \check{\overline{X}}$ ([19] 18.1.2) et $\mathscr{M}_{\check{\overline{Y}}}$ (resp. $\mathscr{M}_{\widetilde{Y}}$) la structure logarithmique sur $\check{\overline{Y}}$ (resp. $\widetilde{Y}$) image inverse de $\mathscr{M}_{\check{\overline{X}}}$ (resp. $\mathscr{M}_{\widetilde{X}}$). Soient U un ouvert de Zariski de $\widehat{\overline{Y}}^{\overline{y}}$, $\widetilde{U}$ l'ouvert de $\mathscr{A}_2(\overline{Y}^{\overline{y}})$ défini par U. L'ensemble $\mathscr{L}_Y^{\overline{y}}(U)$ est alors canoniquement isomorphe à l'ensemble des flèches pointillées qui complètent le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(U, \mathscr{M}_{\widehat{\overline{Y}}^{\overline{y}}}|U) \arrow[r, "i_Y|U"] \arrow[d] & (\widetilde{U}, \mathscr{M}_{\mathscr{A}_2(\overline{Y}^{\overline{y}})}|\widetilde{U}) \arrow[d, dotted] \arrow[dd, bend left] \\
(\check{\overline{Y}}, \mathscr{M}_{\check{\overline{Y}}}) \arrow[r] \arrow[d] & (\widetilde{Y}, \mathscr{M}_{\widetilde{Y}}) \arrow[d] \\
(\check{\overline{S}}, \mathscr{M}_{\check{\overline{S}}}) \arrow[r, "i_{\overline{S}}"] & (\mathscr{A}_2(\overline{S}), \mathscr{M}_{\mathscr{A}_2(\overline{S})})
\end{tikzcd} \tag{9.14.1}$$

de façon à le laisser commutatif. La $\widehat{\overline{R}}_Y^{\overline{y}}$-algèbre $\mathscr{C}_Y^{\overline{y}}$ munie de l'action de $\pi_1(\overline{Y}'^{\circ}, \overline{y})$ s'identifie donc à l'algèbre de Higgs-Tate associée à $(Y, \mathscr{M}_Y, \widetilde{Y}, \mathscr{M}_{\widetilde{Y}})$ définie dans ([3] 10.5) (cf. 9.4). La proposition s'ensuit en vertu de ([3] 12.4).

9.15. Soient Y un objet de $\mathbf{Q}$ (9.3) tel que $Y_s \neq \emptyset$, n un entier ≥ 0. Si A est un anneau et M un A-module, on note encore A (resp. M) le faisceau constant de valeur A (resp. M) de $\overline{Y}^{\circ}_{\text{fét}}$. Le schéma $\overline{Y}^{\circ}$ étant localement irréductible, il est la somme des schémas induits sur ses composantes irréductibles. Soient W une composante irréductible de $\overline{Y}^{\circ}$, $\Pi(W)$ son groupoïde fondamental ([4] 9.9). Compte tenu de 7.15 et ([4] 9.10), le faisceau $\overline{\mathscr{B}}_Y|W$ de $W_{\text{fét}}$ définit un foncteur

$$\Pi(W) \to \mathbf{Ens}, \quad \overline{y} \mapsto \overline{R}_Y^{\overline{y}}. \tag{9.15.1}$$

On en déduit un foncteur

$$\Pi(W) \to \mathbf{Ens}, \quad \overline{y} \mapsto \mathscr{F}_Y^{\overline{y}}/p^n\mathscr{F}_Y^{\overline{y}}. \tag{9.15.2}$$

D'après 9.14, pour tout point géométrique $\overline{y}$ de W, $\mathscr{F}_Y^{\overline{y}}/p^n\mathscr{F}_Y^{\overline{y}}$ est une représentation discrète et continue de $\pi_1(W, \overline{y})$. Par suite, en vertu de ([4] 9.10), le foncteur (9.15.2) définit un $(\overline{\mathscr{B}}_{Y,n}|W)$-module $\mathscr{F}_{W,n}$ de $W_{\text{fét}}$, unique à isomorphisme canonique près, où $\overline{\mathscr{B}}_{Y,n} = \overline{\mathscr{B}}_Y/p^n\overline{\mathscr{B}}_Y$ (9.2.8). Par descente ([13] II 3.4.4), il existe un $\overline{\mathscr{B}}_{Y,n}$-module $\mathscr{F}_{Y,n}$ de $\overline{Y}^{\circ}_{\text{fét}}$, unique à isomorphisme canonique près, tel que pour toute composante irréductible W de $\overline{Y}^{\circ}$, on ait $\mathscr{F}_{Y,n}|W = \mathscr{F}_{W,n}$.

La suite exacte (9.13.10) induit une suite exacte de $\overline{\mathscr{B}}_{Y,n}$-modules

$$0 \to \overline{\mathscr{B}}_{Y,n} \to \mathscr{F}_{Y,n} \to \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{X/S}(Y) \otimes_{\mathscr{O}_X(Y)} \overline{\mathscr{B}}_{Y,n} \to 0. \tag{9.15.3}$$

Celle-ci induit pour tout entier $m \geq 1$, une suite exacte (4.2.2)

$$0 \to \mathrm{S}^{m-1}_{\overline{\mathscr{B}}_{Y,n}}(\mathscr{F}_{Y,n}) \to \mathrm{S}^m_{\overline{\mathscr{B}}_{Y,n}}(\mathscr{F}_{Y,n}) \to \mathrm{S}^m_{\overline{\mathscr{B}}_{Y,n}}(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{X/S}(Y) \otimes_{\mathscr{O}_X(Y)} \overline{\mathscr{B}}_{Y,n}) \to 0.$$

Les $\overline{\mathscr{B}}_{Y,n}$-modules $(\mathrm{S}^m_{\overline{\mathscr{B}}_{Y,n}}(\mathscr{F}_{Y,n}))_{m\in\mathbb{N}}$ forment donc un système inductif dont la limite inductive

$$\mathscr{C}_{Y,n} = \varinjlim_{m\geq 0} \mathrm{S}^m_{\overline{\mathscr{B}}_{Y,n}}(\mathscr{F}_{Y,n}) \tag{9.15.4}$$

est naturellement munie d'une structure de $\overline{\mathscr{B}}_{Y,n}$-algèbre de $\overline{Y}^{\circ}_{\text{fét}}$. On notera que $\mathscr{F}_{Y,n}$ et $\mathscr{C}_{Y,n}$ dépendent du choix de la déformation $(\widetilde{X}, \mathscr{M}_{\widetilde{X}})$ fixée dans 9.1.

9.16. Soient $g\colon Y \to Z$ un morphisme de $\mathbf{Q}$ tel que $Y_s \neq \emptyset$, $\overline{y}$ un point géométrique de $\overline{Y}^{\circ}$, $\overline{z} = \overline{g}(\overline{y})$. On rappelle que $\overline{Y}$ et $\overline{Z}$ sont sommes des schémas induits sur leurs composantes irréductibles (3.3). On note $\overline{Y}'$ la composante irréductible de $\overline{Y}$ contenant $\overline{y}$ et $\overline{Z}'$ la composante irréductible de $\overline{Z}$ contenant $\overline{z}$, de sorte que $\overline{g}(\overline{Z}') \subset \overline{Y}'$. On reprend les notations de 9.13 pour Y et pour Z. Le morphisme $\overline{g}^{\circ}\colon \overline{Y}^{\circ} \to \overline{Z}^{\circ}$ induit un homomorphisme de groupes $\pi_1(\overline{Y}'^{\circ}, \overline{y}) \to \pi_1(\overline{Z}'^{\circ}, \overline{z})$. Le morphisme canonique $(\overline{g}^{\circ})^*_{\text{fét}}(\overline{\mathscr{B}}_Z) \to \overline{\mathscr{B}}_Y$ induit un homomorphisme d'anneaux $\pi_1(\overline{Y}'^{\circ}, \overline{y})$-équivariant (7.15.1)

$$\overline{R}^{\overline{z}}_Z \to \overline{R}^{\overline{y}}_Y, \tag{9.16.1}$$

et par suite un morphisme $\pi_1(\overline{Y}'^{\circ}, \overline{y})$-équivariant de schémas $h\colon \widehat{\overline{Y}}^{\overline{y}} \to \widehat{\overline{Z}}^{\overline{z}}$. Comme g est étale, on a un morphisme canonique $\mathscr{O}_{\widehat{\overline{Z}}^{\overline{z}}}$-linéaire et $\pi_1(\overline{Y}'^{\circ}, \overline{y})$-équivariant $u\colon \widetilde{\mathrm{T}}^{\overline{z}}_Z \to h_*(\widetilde{\mathrm{T}}^{\overline{y}}_Y)$ tel que le morphisme adjoint $u^{\sharp}\colon h^*(\widetilde{\mathrm{T}}^{\overline{z}}_Z) \to \widetilde{\mathrm{T}}^{\overline{y}}_Y$ soit un isomorphisme. Il résulte aussitôt des définitions (9.13.9) qu'on a un morphisme canonique u-équivariant et $\pi_1(\overline{Y}'^{\circ}, \overline{y})$-équivariant

$$v\colon \mathscr{L}^{\overline{z}}_Z \to h_*(\mathscr{L}^{\overline{y}}_Y). \tag{9.16.2}$$

D'après ([3] 4.22), le couple (u, v) induit un isomorphisme $\widehat{\overline{R}}^{\overline{z}}_Y$-linéaire et $\pi_1(\overline{Y}'^{\circ}, \overline{y})$-équivariant

$$\mathscr{F}^{\overline{y}}_Y \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}^{\overline{z}}_Z \otimes_{\widehat{\overline{R}}^{\overline{z}}_Z} \widehat{\overline{R}}^{\overline{y}}_Y, \tag{9.16.3}$$

et par suite, un morphisme $\widehat{\overline{R}}^{\overline{z}}_Z$-linéaire et $\pi_1(\overline{Y}'^{\circ}, \overline{y})$-équivariant

$$\mathscr{F}^{\overline{z}}_Z \to \mathscr{F}^{\overline{y}}_Y \tag{9.16.4}$$

qui s'insère dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \widehat{\overline{R}}^{\overline{z}}_Z \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{F}^{\overline{z}}_Z \arrow[r] \arrow[d] & \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{X/S}(Z) \otimes_{\mathscr{O}_X(Z)} \widehat{\overline{R}}^{\overline{z}}_Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \widehat{\overline{R}}^{\overline{y}}_Y \arrow[r] & \mathscr{F}^{\overline{y}}_Y \arrow[r] & \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{X/S}(Y) \otimes_{\mathscr{O}_X(Y)} \widehat{\overline{R}}^{\overline{y}}_Y \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{9.16.5}$$

On en déduit un homomorphisme $\pi_1(\overline{Y}'^{\circ}, \overline{y})$-équivariant de $\widehat{\overline{R}}^{\overline{z}}_Z$-algèbres

$$\mathscr{C}^{\overline{z}}_Z \to \mathscr{C}^{\overline{y}}_Y. \tag{9.16.6}$$

On désigne par $\Pi(\overline{Y}'^{\circ})$ et $\Pi(\overline{Z}'^{\circ})$ les groupoïdes fondamentaux de $\overline{Y}'^{\circ}$ et $\overline{Z}'^{\circ}$ et par

$$\gamma\colon \Pi(\overline{Y}'^{\circ}) \to \Pi(\overline{Z}'^{\circ}) \tag{9.16.7}$$

le foncteur induit par le foncteur image inverse $\mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{f}/\overline{Z}'^{\circ}} \to \mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{f}/\overline{Y}'^{\circ}}$. Pour tout entier $n \geq 0$, on note $F_{Y,n}\colon \Pi(\overline{Y}'^{\circ}) \to \mathbf{Ens}$ et $F_{Z,n}\colon \Pi(\overline{Z}'^{\circ}) \to \mathbf{Ens}$ les foncteurs associés par ([4] 9.10) aux objets $\mathscr{F}_{Y,n}|\overline{Y}'^{\circ}$ de $\overline{Y}'^{\circ}_{\text{fét}}$ et $\mathscr{F}_{Z,n}|\overline{Z}'^{\circ}$ de $\overline{Z}'^{\circ}_{\text{fét}}$, respectivement. Le morphisme (9.16.4) induit clairement un morphisme de foncteurs

$$F_{Z,n} \circ \gamma \to F_{Y,n}. \tag{9.16.8}$$

On en déduit par ([4] 9.10) un morphisme $(\overline{g}^{\circ})^{*}_{\text{fét}}(\overline{\mathscr{B}}_{Z,n})$-linéaire

$$(\overline{g}^{\circ})^{*}_{\text{fét}}(\mathscr{F}_{Z,n}) \to \mathscr{F}_{Y,n}, \tag{9.16.9}$$

et donc par adjonction, un morphisme $\overline{\mathscr{B}}_{Z,n}$-linéaire

$$\mathscr{F}_{Z,n} \to \overline{g}^{\circ}_{\text{fét}*}(\mathscr{F}_{Y,n}). \tag{9.16.10}$$

Il résulte de (9.16.5) que le diagramme

(9.16.11)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (\overline{g}^{\circ})^{*}_{\text{fét}}(\overline{\mathscr{B}}_{Z,n}) \arrow[r] \arrow[d] & (\overline{g}^{\circ})^{*}_{\text{fét}}(\mathscr{F}_{Z,n}) \arrow[r] \arrow[d] & \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^{1}_{X/S}(Z) \times_{\mathscr{O}_X(Z)} (\overline{g}^{\circ})^{*}_{\text{fét}}(\overline{\mathscr{B}}_{Z,n}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \overline{\mathscr{B}}_{Y,n} \arrow[r] & \mathscr{F}_{Y,n} \arrow[r] & \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^{1}_{X/S}(Y) \times_{\mathscr{O}_X(Y)} \overline{\mathscr{B}}_{Y,n} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

est commutatif. On en déduit un homomorphisme de $(\overline{g}^{\circ})^{*}_{\text{fét}}(\overline{\mathscr{B}}_{Z,n})$-algèbres

$$(\overline{g}^{\circ})^{*}_{\text{fét}}(\mathscr{C}_{Z,n}) \to \mathscr{C}_{Y,n}, \tag{9.16.12}$$

et donc par adjonction un homomorphisme de $\overline{\mathscr{B}}_{Z,n}$-algèbres

$$\mathscr{C}_{Z,n} \to \overline{g}^{\circ}_{\text{fét}*}(\mathscr{C}_{Y,n}). \tag{9.16.13}$$

9.17. Pour tout entier $n \geq 0$ et tout objet Y de $\mathbf{Q}$ tel que $Y_s = \emptyset$, on pose $\mathscr{C}_{Y,n} = \mathscr{F}_{Y,n} = 0$. La suite exacte (9.15.3) vaut encore dans ce cas, puisque $\overline{\mathscr{B}}_{Y}$ est une $\overline{K}$-algèbre. Les morphismes (9.16.10) et (9.16.13) sont alors définis pour tout morphisme de $\mathbf{Q}$, et ils vérifient des relations de cocycles du type ([1] (1.1.2.2)).

9.18. Soient r un nombre rationnel ≥ 0, n un entier ≥ 0, Y un objet de $\mathbf{Q}$. On désigne par $\mathscr{F}^{(r)}_{Y,n}$ l'extension de $\overline{\mathscr{B}}_{Y,n}$-modules de $\overline{Y}^{\circ}_{\text{fét}}$ déduite de $\mathscr{F}_{Y,n}$ (9.15.3) par image inverse par le morphisme de multiplication par p^r sur $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^{1}_{X/S}(Y)\otimes_{\mathscr{O}_X(Y)}\overline{\mathscr{B}}_{Y,n}$, de sorte qu'on a une suite exacte canonique de $\overline{\mathscr{B}}_{Y,n}$-modules

$$0 \to \overline{\mathscr{B}}_{Y,n} \to \mathscr{F}^{(r)}_{Y,n} \to \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^{1}_{X/S}(Y) \otimes_{\mathscr{O}_X(Y)} \overline{\mathscr{B}}_{Y,n} \to 0. \tag{9.18.1}$$

Celle-ci induit pour tout entier $m \geq 1$, une suite exacte de $\overline{\mathscr{B}}_{Y,n}$-modules (4.2.2)

$$0 \to \mathrm{S}^{m-1}_{\overline{\mathscr{B}}_{Y,n}}(\mathscr{F}^{(r)}_{Y,n}) \to \mathrm{S}^{m}_{\overline{\mathscr{B}}_{Y,n}}(\mathscr{F}^{(r)}_{Y,n}) \to \mathrm{S}^{m}_{\overline{\mathscr{B}}_{Y,n}}(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^{1}_{X/S}(Y) \otimes_{\mathscr{O}_X(Y)} \overline{\mathscr{B}}_{Y,n}) \to 0.$$

Les $\overline{\mathscr{B}}_{Y,n}$-modules $(\mathrm{S}^{m}_{\overline{\mathscr{B}}_{Y,n}}(\mathscr{F}^{(r)}_{Y,n}))_{m\in\mathbb{N}}$ forment donc un système inductif dont la limite inductive

$$\mathscr{C}^{(r)}_{Y,n} = \varinjlim_{m\geq 0} \mathrm{S}^{m}_{\overline{\mathscr{B}}_{Y,n}}(\mathscr{F}^{(r)}_{Y,n}) \tag{9.18.2}$$

est naturellement munie d'une structure de $\overline{\mathscr{B}}_{Y,n}$-algèbre de $\overline{Y}^{\circ}_{\text{fét}}$.

Pour tous nombres rationnels $r \geq r' \geq 0$, on a un morphisme $\overline{\mathscr{B}}_{Y,n}$-linéaire canonique

$$\mathtt{a}^{r,r'}_{Y,n} \colon \mathscr{F}^{(r)}_{Y,n} \to \mathscr{F}^{(r')}_{Y,n} \tag{9.18.3}$$

qui relève la multiplication par $p^{r-r'}$ sur $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^{1}_{X/S}(Y)\otimes_{\mathscr{O}_X(Y)}\overline{\mathscr{B}}_{Y,n}$ et qui étend l'identité sur $\overline{\mathscr{B}}_{Y,n}$ (9.18.1). Il induit un homomorphisme de $\overline{\mathscr{B}}_{Y,n}$-algèbres

$$\alpha^{r,r'}_{Y,n} \colon \mathscr{C}^{(r)}_{Y,n} \to \mathscr{C}^{(r')}_{Y,n}. \tag{9.18.4}$$

9.19. Soient r un nombre rationnel ≥ 0, n un entier ≥ 0, $g\colon Y \to Z$ un morphisme de $\mathbf{Q}$. Le diagramme (9.16.11) induit un morphisme $(\overline{g}^{\circ})^*_{\text{fét}}(\overline{\mathscr{B}}_{Z,n})$-linéaire

$$(\overline{g}^{\circ})^*_{\text{fét}}(\mathscr{F}^{(r)}_{Z,n}) \to \mathscr{F}^{(r)}_{Y,n} \tag{9.19.1}$$

qui s'insère dans un diagramme commutatif
(9.19.2)

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & (\overline{g}^{\circ})^*_{\text{fét}}(\overline{\mathscr{B}}_{Z,n}) \arrow[r] \arrow[d] & (\overline{g}^{\circ})^*_{\text{fét}}(\mathscr{F}^{(r)}_{Z,n}) \arrow[r] \arrow[d] & \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{X/S}(Z) \times_{\mathscr{O}_X(Z)} (\overline{g}^{\circ})^*_{\text{fét}}(\overline{\mathscr{B}}_{Z,n}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \overline{\mathscr{B}}_{Y,n} \arrow[r] & \mathscr{F}^{(r)}_{Y,n} \arrow[r] & \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{X/S}(Y) \times_{\mathscr{O}_X(Y)} \overline{\mathscr{B}}_{Y,n} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

On en déduit par adjonction un morphisme $\overline{\mathscr{B}}_{Z,n}$-linéaire

$$\mathscr{F}^{(r)}_{Z,n} \to (\overline{g}^{\circ})_{\text{fét}*}(\mathscr{F}^{(r)}_{Y,n}). \tag{9.19.3}$$

On en déduit aussi un morphisme de $(\overline{g}^{\circ})^*_{\text{fét}}(\overline{\mathscr{B}}_{Z,n})$-algèbres

$$(\overline{g}^{\circ})^*_{\text{fét}}(\mathscr{C}^{(r)}_{Z,n}) \to \mathscr{C}^{(r)}_{Y,n}, \tag{9.19.4}$$

et donc par adjonction un morphisme de $\overline{\mathscr{B}}_{Z,n}$-algèbres

$$\mathscr{C}^{(r)}_{Z,n} \to (\overline{g}^{\circ})_{\text{fét}*}(\mathscr{C}^{(r)}_{Y,n}). \tag{9.19.5}$$

Les morphismes (9.19.3) et (9.19.5) vérifient des relations de cocycles du type ([1] (1.1.2.2)).

Lemme 9.20. *Pour tout nombre rationnel $r \geq 0$, tout entier $n \geq 0$ et tout morphisme $g\colon Y \to Z$ de $\mathbf{Q}$, les morphismes* (9.19.1) *et* (9.19.4) *induisent des isomorphismes*

$$(\overline{g}^{\circ})^*_{\text{fét}}(\mathscr{F}^{(r)}_{Z,n}) \otimes_{(\overline{g}^{\circ})^*_{\text{fét}}(\overline{\mathscr{B}}_{Z,n})} \overline{\mathscr{B}}_{Y,n} \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}^{(r)}_{Y,n}, \tag{9.20.1}$$

$$(\overline{g}^{\circ})^*_{\text{fét}}(\mathscr{C}^{(r)}_{Z,n}) \otimes_{(\overline{g}^{\circ})^*_{\text{fét}}(\overline{\mathscr{B}}_{Z,n})} \overline{\mathscr{B}}_{Y,n} \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}^{(r)}_{Y,n}. \tag{9.20.2}$$

En effet, le premier isomorphisme résulte du diagramme (9.19.2) et du fait que le morphisme canonique

$$\widetilde{\Omega}^1_{X/S}(Z) \otimes_{\mathscr{O}_X(Z)} \mathscr{O}_X(Y) \to \widetilde{\Omega}^1_{X/S}(Y) \tag{9.20.3}$$

est un isomorphisme. Le second isomorphisme se déduit du premier.

9.21. Soient r un nombre rationnel ≥ 0, n un entier ≥ 0. D'après 9.19, les correspondances

$$\{Y \mapsto \mathscr{F}^{(r)}_{Y,n}\} \quad \text{et} \quad \{Y \mapsto \mathscr{C}^{(r)}_{Y,n}\}, \quad (Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Q})), \tag{9.21.1}$$

définissent des préfaisceaux sur $E_{\mathbf{Q}}$ (9.5.2) de modules et d'algèbres, respectivement, relativement à l'anneau $\{Y \mapsto \overline{\mathscr{B}}_{Y,n}\}$. On pose

$$\mathscr{F}^{(r)}_n = \{Y \mapsto \mathscr{F}^{(r)}_{Y,n}\}^a, \tag{9.21.2}$$

$$\mathscr{C}^{(r)}_n = \{Y \mapsto \mathscr{C}^{(r)}_{Y,n}\}^a, \tag{9.21.3}$$

les faisceaux associés dans $\widetilde{E}$ (9.6.4). D'après (8.1.8) et (9.6.5), $\mathscr{F}^{(r)}_n$ est un $\overline{\mathscr{B}}_n$-module ; on l'appelle la *$\overline{\mathscr{B}}_n$-extension de Higgs-Tate d'épaisseur r* associée à $(f, \widetilde{X}, \mathscr{M}_{\widetilde{X}})$. De même, $\mathscr{C}^{(r)}_n$ est une $\overline{\mathscr{B}}_n$-algèbre ; on l'appelle la *$\overline{\mathscr{B}}_n$-algèbre de Higgs-Tate d'épaisseur r* associée à $(f, \widetilde{X}, \mathscr{M}_{\widetilde{X}})$. On pose

$\mathscr{F}_n = \mathscr{F}_n^{(0)}$ et $\mathscr{C}_n = \mathscr{C}_n^{(0)}$, et on les appelle la $\overline{\mathscr{B}}_n$*-extension de Higgs-Tate* et la $\overline{\mathscr{B}}_n$*-algèbre de Higgs-Tate*, respectivement, associées à $(f, \widetilde{X}, \mathscr{M}_{\widetilde{X}})$.

Pour tous nombres rationnels $r \geq r' \geq 0$, les morphismes (9.18.3) induisent un morphisme $\overline{\mathscr{B}}_n$-linéaire

$$\mathtt{a}_n^{r,r'} \colon \mathscr{F}_n^{(r)} \to \mathscr{F}_n^{(r')}. \tag{9.21.4}$$

Les homomorphismes (9.18.4) induisent un homomorphisme de $\overline{\mathscr{B}}_n$-algèbres

$$\alpha_n^{r,r'} \colon \mathscr{C}_n^{(r)} \to \mathscr{C}_n^{(r')}. \tag{9.21.5}$$

Pour tous nombres rationnels $r \geq r' \geq r'' \geq 0$, on a

$$\mathtt{a}_n^{r,r''} = \mathtt{a}_n^{r',r''} \circ \mathtt{a}_n^{r,r'} \quad \text{et} \quad \alpha_n^{r,r''} = \alpha_n^{r',r''} \circ \alpha_n^{r,r'}. \tag{9.21.6}$$

Proposition 9.22. *Soient r un nombre rationnel ≥ 0, n un entier ≥ 1. Alors :*

(i) *Les faisceaux $\mathscr{F}_n^{(r)}$ et $\mathscr{C}_n^{(r)}$ sont des objets de $\widetilde{E}_s$.*

(ii) *On a une suite exacte localement scindée canonique de $\overline{\mathscr{B}}_n$-modules* ((9.1.3) *et* (9.2.9))

$$0 \to \overline{\mathscr{B}}_n \to \mathscr{F}_n^{(r)} \to \sigma_n^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n}) \to 0. \tag{9.22.1}$$

Elle induit pour tout entier $m \geq 1$, une suite exacte de $\overline{\mathscr{B}}_n$-modules (2.7)

$$0 \to \mathrm{S}^{m-1}_{\overline{\mathscr{B}}_n}(\mathscr{F}_n^{(r)}) \to \mathrm{S}^m_{\overline{\mathscr{B}}_n}(\mathscr{F}_n^{(r)}) \to \sigma_n^*(\mathrm{S}^m_{\mathscr{O}_{\overline{X}_n}}(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n})) \to 0. \tag{9.22.2}$$

En particulier, les $\overline{\mathscr{B}}_n$-modules $(\mathrm{S}^m_{\overline{\mathscr{B}}_n}(\mathscr{F}_n^{(r)}))_{m\in\mathbb{N}}$ forment un système inductif filtrant.

(iii) *On a un isomorphisme canonique de $\overline{\mathscr{B}}_n$-algèbres*

$$\mathscr{C}_n^{(r)} \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{m\geq 0} \mathrm{S}^m_{\overline{\mathscr{B}}_n}(\mathscr{F}_n^{(r)}). \tag{9.22.3}$$

(iv) *Pour tous nombres rationnels $r \geq r' \geq 0$, le diagramme*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \overline{\mathscr{B}}_n \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathscr{F}_n^{(r)} \arrow[r] \arrow[d, "\mathtt{a}_n^{r,r'}"] & \sigma_n^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n}) \arrow[r] \arrow[d, "\cdot p^{r-r'}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \overline{\mathscr{B}}_n \arrow[r] & \mathscr{F}_n^{(r')} \arrow[r] & \sigma_n^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{9.22.4}$$

où les lignes horizontales sont les suites exactes (9.22.1) *et la flèche verticale de droite désigne la multiplication par $p^{r-r'}$, est commutatif. De plus, les morphismes $\mathtt{a}_n^{r,r'}$ et $\alpha_n^{r,r'}$ sont compatibles avec les isomorphismes* (9.22.3) *pour r et r'.*

(i) En effet, comme $\mathscr{F}_{Y,n}^{(r)} = \mathscr{C}_{Y,n}^{(r)} = 0$ pour tout $Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Q})$ tel que $Y_s = \emptyset$, on a $\mathscr{F}_n^{(r)}|\sigma^*(X_\eta) = \mathscr{C}_n^{(r)}|\sigma^*(X_\eta) = 0$ en vertu de ([5] III 5.5).

(ii) On a un isomorphisme canonique (8.8.4)

$$\sigma_n^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n}) \xrightarrow{\sim} \sigma^{-1}(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{X/S}) \otimes_{\sigma^{-1}(\mathscr{O}_X)} \overline{\mathscr{B}}_n. \tag{9.22.5}$$

Donc en vertu de ([4] 5.32(ii), 8.9 et 5.15) et (9.6.5), $\sigma_n^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n})$ est le faisceau de $\widetilde{E}$ associé au préfaisceau sur $E_{\mathbf{Q}}$ défini par la correspondance

$$\{Y \mapsto \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{X/S}(Y) \otimes_{\mathscr{O}_X(Y)} \overline{\mathscr{B}}_{Y,n}\}, \quad (Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Q})). \tag{9.22.6}$$

La suite exacte (9.22.1) résulte alors de (9.18.1) et (9.19.2) puisque le foncteur “faisceau associé” est exact ([5] II 4.1). Elle est localement scindée car le $\overline{\mathscr{B}}_n$-module $\sigma_n^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n})$ est localement libre de type fini. La suite exacte (9.22.2) s'en déduit par (4.2.2).

(iii) On déduit facilement de 9.7 et ([5] IV 12.10) que pour tout entier $m \geq 0$, $\mathrm{S}^m_{\overline{\mathscr{B}}_n}(\mathscr{F}_n^{(r)})$ est le faisceau associé au préfaisceau

$$\{Y \mapsto \mathrm{S}^m_{\overline{\mathscr{B}}_{Y,n}}(\mathscr{F}^{(r)}_{Y,n})\}, \quad (Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Q})). \tag{9.22.7}$$

La proposition s'ensuit compte tenu de 9.7 et du fait que le foncteur “faisceau associé” commute aux limites inductives ([5] II 4.1).

(iv) Cela résulte aussitôt des preuves de (ii) et (iii).

9.23. Soient r un nombre rationnel ≥ 0, n un entier ≥ 1. D'après 9.22, on a un isomorphisme canonique $\mathscr{C}_n^{(r)}$-linéaire

$$\Omega^1_{\mathscr{C}_n^{(r)}/\overline{\mathscr{B}}_n} \xrightarrow{\sim} \sigma_n^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n}) \otimes_{\overline{\mathscr{B}}_n} \mathscr{C}_n^{(r)}. \tag{9.23.1}$$

La $\overline{\mathscr{B}}_n$-dérivation universelle de $\mathscr{C}_n^{(r)}$ correspond via cet isomorphisme à l'unique $\overline{\mathscr{B}}_n$-dérivation

$$d_n^{(r)} \colon \mathscr{C}_n^{(r)} \to \sigma_n^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n}) \otimes_{\overline{\mathscr{B}}_n} \mathscr{C}_n^{(r)} \tag{9.23.2}$$

qui prolonge le morphisme canonique $\mathscr{F}_n^{(r)} \to \sigma_n^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n})$ (9.22.1). Il résulte de 9.22(iv) que pour tous nombres rationnels $r \geq r' \geq 0$, on a

$$p^{r-r'}(\mathrm{id} \otimes \alpha_n^{r,r'}) \circ d_n^{(r)} = d_n^{(r')} \circ \alpha_n^{r,r'}. \tag{9.23.3}$$

9.24. Soient Y un objet de $\mathbf{Q}$ (9.5) tel que $Y_s \neq \emptyset$, $\overline{y}$ un point géométrique de $\overline{Y}^\circ$. Reprenons les notations de (9.13). Pour tout nombre rationnel $r \geq 0$, on désigne par $\mathscr{F}_Y^{\overline{y},(r)}$ l'extension de $\widehat{\overline{R}}{}^{\overline{y}}_Y$-modules déduite de $\mathscr{F}_Y^{\overline{y}}$ (9.13.10) par image inverse par le morphisme de multiplication par p^r sur $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{X/S}(Y) \otimes_{\mathscr{O}_X(Y)} \widehat{\overline{R}}{}^{\overline{y}}_Y$, de sorte qu'on a une suite exacte de $\widehat{\overline{R}}{}^{\overline{y}}_Y$-modules

$$0 \to \widehat{\overline{R}}{}^{\overline{y}}_Y \to \mathscr{F}_Y^{\overline{y},(r)} \to \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{X/S}(Y) \otimes_{\mathscr{O}_X(Y)} \widehat{\overline{R}}{}^{\overline{y}}_Y \to 0. \tag{9.24.1}$$

Celle-ci induit pour tout entier $m \geq 1$, une suite exacte de $\widehat{\overline{R}}{}^{\overline{y}}_Y$-modules (4.2.2)

$$0 \to \mathrm{S}^{m-1}_{\widehat{\overline{R}}{}^{\overline{y}}_Y}(\mathscr{F}_Y^{\overline{y},(r)}) \to \mathrm{S}^m_{\widehat{\overline{R}}{}^{\overline{y}}_Y}(\mathscr{F}_Y^{\overline{y},(r)}) \to \mathrm{S}^m_{\widehat{\overline{R}}{}^{\overline{y}}_Y}(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{X/S}(Y) \otimes_{\mathscr{O}_X(Y)} \widehat{\overline{R}}{}^{\overline{y}}_Y) \to 0. \tag{9.24.2}$$

En particulier, les $\widehat{\overline{R}}{}^{\overline{y}}_Y$-modules $(\mathrm{S}^m_{\widehat{\overline{R}}{}^{\overline{y}}_Y}(\mathscr{F}_Y^{\overline{y},(r)}))_{m \in \mathbb{N}}$ forment un système inductif filtrant dont la limite inductive

$$\mathscr{C}_Y^{\overline{y},(r)} = \varinjlim_{m \geq 0} \mathrm{S}^m_{\widehat{\overline{R}}{}^{\overline{y}}_Y}(\mathscr{F}_Y^{\overline{y},(r)}), \tag{9.24.3}$$

est naturellement munie d'une structure de $\widehat{\overline{R}}{}^{\overline{y}}_Y$-algèbre. Il résulte aussitôt de 9.16 que les formations de $\mathscr{F}_Y^{\overline{y},(r)}$ et $\mathscr{C}_Y^{\overline{y},(r)}$ sont fonctorielles en la paire $(Y, \overline{y})$.

Comme $\overline{Y}$ est localement irréductible (3.3), il est la somme des schémas induits sur ses composantes irréductibles. On note $\overline{Y}'$ la composante irréductible de $\overline{Y}$ contenant $\overline{y}$. De même, $\overline{Y}^\circ$ est la somme des schémas induits sur ses composantes irréductibles, et $\overline{Y}'^\circ = \overline{Y}' \times_X X^\circ$ est la composante irréductible de $\overline{Y}^{\circ}$ contenant $\overline{y}$. On note $\mathbf{B}_{\pi_1(\overline{Y}'^{\circ},\overline{y})}$ le topos classifiant du groupe profini $\pi_1(\overline{Y}'^{\circ},\overline{y})$ et

$$\nu_{\overline{y}}\colon \overline{Y}'^{\circ}_{\text{fét}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{B}_{\pi_1(\overline{Y}'^{\circ},\overline{y})} \tag{9.24.4}$$

le foncteur fibre en $\overline{y}$ (2.10.3). On a alors un isomorphisme canonique d'anneaux (7.15.1)

$$\nu_{\overline{y}}(\overline{\mathscr{B}}_Y|\overline{Y}'^{\circ}) \xrightarrow{\sim} \overline{R}^{\overline{y}}_Y. \tag{9.24.5}$$

Comme $\nu_{\overline{y}}$ est exact et qu'il commute aux limites inductives, pour tout entier $n \geq 0$, on a des isomorphismes canoniques de $\overline{R}^{\overline{y}}_Y$-modules et de $\overline{R}^{\overline{y}}_Y$-algèbres, respectivement,

$$\nu_{\overline{y}}(\mathscr{F}^{(r)}_{Y,n}|\overline{Y}'^{\circ}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}^{\overline{y},(r)}_Y/p^n\mathscr{F}^{\overline{y},(r)}_Y, \tag{9.24.6}$$

$$\nu_{\overline{y}}(\mathscr{C}^{(r)}_{Y,n}|\overline{Y}'^{\circ}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}^{\overline{y},(r)}_Y/p^n\mathscr{C}^{\overline{y},(r)}_Y. \tag{9.24.7}$$

Proposition 9.25. *Soient $\overline{x}$ un point de X au-dessus de s, X' le localisé strict de X en $\overline{x}$, r un nombre rationnel ≥ 0, n un entier ≥ 0. Reprenons les notations de* (9.8). *On a alors des isomorphismes canoniques de $\overline{X}'^{\circ}_{\text{fét}}$*

$$\varinjlim_{U\in\mathfrak{E}_{\overline{x}}(\mathbf{Q})^{\circ}} (t_U)^*_{\text{fét}}(\mathscr{C}^{(r)}_{U,n}) \xrightarrow{\sim} \varphi_{\overline{x}}(\mathscr{C}^{(r)}_n), \tag{9.25.1}$$

$$\varinjlim_{U\in\mathfrak{E}_{\overline{x}}(\mathbf{Q})^{\circ}} (t_U)^*_{\text{fét}}(\mathscr{F}^{(r)}_{U,n}) \xrightarrow{\sim} \varphi_{\overline{x}}(\mathscr{F}^{(r)}_n). \tag{9.25.2}$$

On notera que la proposition ne résulte pas directement de ([4] 10.37) puisque $\mathbf{Q}$ n'est pas stable par produits fibrés. Mais la preuve est similaire. Écrivant (7.2.1)

$$\mathscr{C}^{(r)}_n = \{U \mapsto C_U\}, \quad U \in \mathrm{Ob}(\mathbf{\acute{E}t}_{/X}), \tag{9.25.3}$$

on a, en vertu de ([4] 10.35), un isomorphisme canonique fonctoriel

$$\varinjlim_{U\in\mathfrak{E}^{\circ}_{\overline{x}}} (t_U)^*_{\text{fét}}(C_U) \xrightarrow{\sim} \varphi_{\overline{x}}(\mathscr{C}^{(r)}_n). \tag{9.25.4}$$

On peut évidemment remplacer $\mathfrak{E}_{\overline{x}}$ par $\mathfrak{E}_{\overline{x}}(\mathbf{Q})$. Pour tout $U \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Q})$, on a un morphisme canonique $\mathscr{C}^{(r)}_{U,n} \to C_U$. Pour démontrer (9.25.1), il suffit donc de montrer que le morphisme induit

$$u\colon \varinjlim_{U\in\mathfrak{E}_{\overline{x}}(\mathbf{Q})^{\circ}} (t_U)^*_{\text{fét}}(\mathscr{C}^{(r)}_{U,n}) \to \varinjlim_{U\in\mathfrak{E}_{\overline{x}}(\mathbf{Q})^{\circ}} (t_U)^*_{\text{fét}}(C_U) \tag{9.25.5}$$

est un isomorphisme.

Soient $\overline{y}$ un point géométrique de $\overline{X}'^{\circ}$, $\psi_{\overline{y}}\colon \overline{X}'^{\circ}_{\text{fét}} \to \mathbf{Ens}$ le foncteur fibre associé au point $\rho_{\overline{X}'^{\circ}}(\overline{y})$ de $\overline{X}'^{\circ}_{\text{fét}}$. Notons encore $\overline{y}$ le point géométrique $t_X(\overline{y})$ de $\overline{X}^{\circ}$ (9.8.10), de sorte qu'on a une flèche de spécialisation de $h(\overline{y})$ dans $\overline{x}$, *i.e.*, $(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x})$ est un point de $X_{\text{ét}} \overleftarrow{\times}_{X_{\text{ét}}} \overline{X}^{\circ}_{\text{ét}}$. D'après ([4] (10.20.4) et 10.21(i)), pour qu'un objet $(V \to U)$ de $E_{\mathbf{Q}}$ soit sous-jacent à un voisinage de $\rho(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x})$ dans $E_{\mathbf{Q}}$ ([5] IV 6.8.2), il faut et il suffit qu'il existe un X-morphisme $\overline{x} \to U$ et un morphisme $\overline{y} \to V$ qui relève le morphisme composé $\overline{y} \to \overline{X}'^{\circ} \xrightarrow{t_U} \overline{U}^{\circ}$ (9.8.10). Pour tout $U \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{E}_{\overline{x}})$, $\overline{U}^{\circ}$ est la somme des schémas induits sur ses composantes irréductibles (3.3). Notons V la composante irréductible de $\overline{U}^{\circ}$ contenant $t_U(\overline{y})$ et $(V_j)_{j\in J^{\overline{y}}_U}$ le revêtement universel normalisé de V en $t_U(\overline{y})$ (cf. 2.10). D'après

([5] IV (6.8.4)), on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim_{U\in\mathfrak{E}_{\overline{x}}(\mathbf{Q})^{\circ}} \varinjlim_{j\in(J_U^{\overline{y}})^{\circ}} \mathscr{C}_{U,n}^{(r)}(V_j) \arrow[d, "v"'] \arrow[dr] & \\
\varinjlim_{U\in\mathfrak{E}_{\overline{x}}(\mathbf{Q})^{\circ}} \varinjlim_{j\in(J_U^{\overline{y}})^{\circ}} C_U(V_j) \arrow[r] & (\mathscr{C}_n^{(r)})_{\rho(\overline{y}\rightsquigarrow\overline{x})}
\end{tikzcd} \tag{9.25.6}$$

où la flèche horizontale et la flèche oblique sont des isomorphismes et v est le morphisme canonique ; c'est donc un isomorphisme. Par ailleurs, on a $v=\psi_{\overline{y}}(u)$ ([4] 9.8). Comme $\overline{X}'^{\circ}$ est intègre (3.7) et que le point $\rho_{\overline{X}'^{\circ}}(\overline{y})$ de $\overline{X}'^{\circ}_{\text{fét}}$ est conservatif, u est un isomorphisme ; d'où l'isomorphisme (9.25.1). La preuve de (9.25.2) est similaire.

Corollaire 9.26. *Soient* $(\overline{y}\rightsquigarrow\overline{x})$ *un point de* $X_{\text{ét}}\overleftarrow{\times}_{X_{\text{ét}}}\overline{X}^{\circ}_{\text{ét}}$ *tel que* $\overline{x}$ *soit au-dessus de* s, X' *le localisé strict de* X *en* $\overline{x}$, n *un entier* ≥ 0, r *un nombre rationnel* ≥ 0. *Reprenons les notations de* (9.8) *et* (9.9). *On a alors des isomorphismes canoniques de* $\mathbf{B}_{\pi_1(\overline{X}'^{\circ},\overline{y})}$

$$\varinjlim_{U\in\mathfrak{E}_{\overline{x}}(\mathbf{Q})^{\circ}} \mathscr{C}_U^{\overline{y},(r)}/p^n\mathscr{C}_U^{\overline{y},(r)} \xrightarrow{\sim} \nu_{\overline{y}}(\varphi_{\overline{x}}(\mathscr{C}_n^{(r)})), \tag{9.26.1}$$

$$\varinjlim_{U\in\mathfrak{E}_{\overline{x}}(\mathbf{Q})^{\circ}} \mathscr{F}_U^{\overline{y},(r)}/p^n\mathscr{F}_U^{\overline{y},(r)} \xrightarrow{\sim} \nu_{\overline{y}}(\varphi_{\overline{x}}(\mathscr{F}_n^{(r)})). \tag{9.26.2}$$

Remarques 9.27. Conservons les hypothèses de (9.26) ; supposons, de plus, $n\geq 1$.

(i) Les isomorphismes (9.26.1), (9.26.2) et (9.9.4) sont compatibles entre eux.

(ii) On a un isomorphisme canonique de $\mathbf{B}_{\pi_1(\overline{X}'^{\circ},\overline{y})}$

$$\varinjlim_{U\in\mathfrak{E}_{\overline{x}}^{\circ}} \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{X/S}(U)\otimes_{\mathscr{O}_X(U)}(\overline{R}_U^{\overline{y}}/p^n\overline{R}_U^{\overline{y}}) \xrightarrow{\sim} \nu_{\overline{y}}(\varphi_{\overline{x}}(\sigma_n^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n}))). \tag{9.27.1}$$

En effet, d'après (9.22.5) et ([4] 5.32(ii), 8.9 et 5.15), $\sigma_n^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n})$ est le faisceau de $\widetilde{E}$ associé au préfaisceau sur $E_{\mathbf{Q}}$ défini par la correspondance

$$\{U\mapsto \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{X/S}(U)\otimes_{\mathscr{O}_X(U)}\overline{\mathscr{B}}_{U,n}\},\quad (U\in \mathrm{Ob}(\mathbf{\acute{E}t}_{/X})). \tag{9.27.2}$$

L'assertion résulte donc de ([4] 10.37) et (7.15.1).

(iii) L'image de la suite exacte (9.22.1) par le foncteur composé $\nu_{\overline{y}}\circ\varphi_{\overline{x}}$ s'identifie à la limite projective sur la catégorie $\mathfrak{E}_{\overline{x}}(\mathbf{Q})^{\circ}$ des suites exactes

$$0\to\overline{R}_U^{\overline{y}}/p^n\overline{R}_U^{\overline{y}}\to\mathscr{F}_U^{\overline{y},(r)}/p^n\mathscr{F}_U^{\overline{y},(r)}\to\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{X/S}(U)\otimes_{\mathscr{O}_X(U)}(\overline{R}_U^{\overline{y}}/p^n\overline{R}_U^{\overline{y}})\to 0 \tag{9.27.3}$$

déduites de (9.24.1).

(iv) L'image de l'isomorphisme (9.22.3) par le foncteur composé $\nu_{\overline{y}}\circ\varphi_{\overline{x}}$ s'identifie à l'isomorphisme

$$\varinjlim_{U\in\mathfrak{E}_{\overline{x}}(\mathbf{Q})^{\circ}} \mathscr{C}_U^{\overline{y},(r)}/p^n\mathscr{C}_U^{\overline{y},(r)} \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{U\in\mathfrak{E}_{\overline{x}}(\mathbf{Q})^{\circ}}\varinjlim_{m\geq 0} \mathrm{S}^m_{\overline{R}_U^{\overline{y}}}(\mathscr{F}_U^{\overline{y},(r)}/p^n\mathscr{F}_U^{\overline{y},(r)}) \tag{9.27.4}$$

déduit de (9.24.3). La preuve est similaire à celle 9.25 et est laissée au lecteur.

9.28. On désigne par $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$ l'anneau $(\overline{\mathscr{B}}_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ de $\widetilde{E}_s^{\mathbb{N}^\circ}$ (6.7), par $\mathscr{O}_{\breve{\overline{X}}}$ l'anneau $(\mathscr{O}_{\overline{X}_{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$ de $X_{s,\text{ét}}^{\mathbb{N}^\circ}$ (à ne pas confondre avec $\mathscr{O}_{\breve{X}}$ (9.1.1)) et par $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\breve{\overline{X}}/\breve{\overline{S}}}$ le $\mathscr{O}_{\breve{\overline{X}}}$-module $(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_{n+1}/\overline{S}_{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$ de $X_{s,\text{ét}}^{\mathbb{N}^\circ}$ (9.1.3). On note

$$\breve{\sigma}\colon (\widetilde{E}_s^{\mathbb{N}^\circ}, \breve{\overline{\mathscr{B}}}) \to (X_{s,\text{ét}}^{\mathbb{N}^\circ}, \mathscr{O}_{\breve{\overline{X}}}) \tag{9.28.1}$$

le morphisme de topos annelés induit par les $(\sigma_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ (9.2.9).

Soit r un nombre rationnel ≥ 0. Pour tous entiers $m \geq n \geq 1$, on a un morphisme $\overline{\mathscr{B}}_m$-linéaire canonique $\mathscr{F}_m^{(r)} \to \mathscr{F}_n^{(r)}$ et un homomorphisme canonique de $\overline{\mathscr{B}}_m$-algèbres $\mathscr{C}_m^{(r)} \to \mathscr{C}_n^{(r)}$, compatibles avec la suite exacte (9.22.1) et l'isomorphisme (9.22.3) et tels que les morphismes induits

$$\mathscr{F}_m^{(r)} \otimes_{\overline{\mathscr{B}}_m} \overline{\mathscr{B}}_n \to \mathscr{F}_n^{(r)} \quad \text{et} \quad \mathscr{C}_m^{(r)} \otimes_{\overline{\mathscr{B}}_m} \overline{\mathscr{B}}_n \to \mathscr{C}_n^{(r)} \tag{9.28.2}$$

soient des isomorphismes. Ces morphismes forment des systèmes compatibles lorsque m et n varient, de sorte que $(\mathscr{F}_{n+1}^{(r)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathscr{C}_{n+1}^{(r)})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des systèmes projectifs. On appelle *$\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-extension de Higgs-Tate d'épaisseur r* associée à $(f, \widetilde{X}, \mathscr{M}_{\widetilde{X}})$, et l'on note $\breve{\mathscr{F}}^{(r)}$, le $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-module $(\mathscr{F}_{m+1}^{(r)})_{m\in\mathbb{N}}$ de $\widetilde{E}_s^{\mathbb{N}^\circ}$. On appelle *$\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-algèbre de Higgs-Tate d'épaisseur r* associée à $(f, \widetilde{X}, \mathscr{M}_{\widetilde{X}})$, et l'on note $\breve{\mathscr{C}}^{(r)}$, la $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-algèbre $(\mathscr{C}_{m+1}^{(r)})_{m\in\mathbb{N}}$ de $\widetilde{E}_s^{\mathbb{N}^\circ}$. Ce sont des $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-modules adiques (6.16). D'après 6.3(i), (6.5.4) et (6.12.1), la suite exacte (9.22.1) induit une suite exacte de $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-modules

$$0 \to \breve{\overline{\mathscr{B}}} \to \breve{\mathscr{F}}^{(r)} \to \breve{\sigma}^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\breve{\overline{X}}/\breve{\overline{S}}}) \to 0. \tag{9.28.3}$$

Comme le $\mathscr{O}_X$-module $\widetilde{\Omega}^1_{X/S}$ est localement libre de type fini, le $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-module $\breve{\sigma}^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\breve{\overline{X}}/\breve{\overline{S}}})$ est localement libre de type fini et la suite (9.28.3) est localement scindée. D'après (4.2.2), elle induit pour tout entier $m \geq 1$, une suite exacte de $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-modules

$$0 \to \mathrm{S}^{m-1}_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}}(\breve{\mathscr{F}}^{(r)}) \to \mathrm{S}^{m}_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}}(\breve{\mathscr{F}}^{(r)}) \to \breve{\sigma}^*(\mathrm{S}^m_{\mathscr{O}_{\breve{\overline{X}}}}(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\breve{\overline{X}}/\breve{\overline{S}}})) \to 0. \tag{9.28.4}$$

En particulier, les $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-modules $(\mathrm{S}^m_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}}(\breve{\mathscr{F}}^{(r)}))_{m\in\mathbb{N}}$ forment un système inductif filtrant. D'après 6.3(i), (6.12.3) et (9.22.3), on a un isomorphisme canonique de $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-algèbres

$$\breve{\mathscr{C}}^{(r)} \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{m\geq 0} \mathrm{S}^m_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}}(\breve{\mathscr{F}}^{(r)}). \tag{9.28.5}$$

On pose $\breve{\mathscr{F}} = \breve{\mathscr{F}}^{(0)}$ et $\breve{\mathscr{C}} = \breve{\mathscr{C}}^{(0)}$, et on les appelle la *$\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-extension de Higgs-Tate* et la *$\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-algèbre de Higgs-Tate*, respectivement, associées à $(f, \widetilde{X}, \mathscr{M}_{\widetilde{X}})$. Pour tous nombres rationnels $r \geq r' \geq 0$, les morphismes $(\mathsf{a}_n^{r,r'})_{n\in\mathbb{N}}$ (9.21.4) induisent un morphisme de $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-linéaire

$$\breve{\mathsf{a}}^{r,r'}\colon \breve{\mathscr{F}}^{(r)} \to \breve{\mathscr{F}}^{(r')}. \tag{9.28.6}$$

Les homomorphismes $(\alpha_n^{r,r'})_{n\in\mathbb{N}}$ (9.21.5) induisent un homomorphisme de $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-algèbres

$$\breve{\alpha}^{r,r'}\colon \breve{\mathscr{C}}^{(r)} \to \breve{\mathscr{C}}^{(r')}. \tag{9.28.7}$$

Pour tous nombres rationnels $r \geq r' \geq r'' \geq 0$, on a

$$\breve{\mathsf{a}}^{r,r''} = \breve{\mathsf{a}}^{r',r''} \circ \breve{\mathsf{a}}^{r,r'} \quad \text{et} \quad \breve{\alpha}^{r,r''} = \breve{\alpha}^{r',r''} \circ \breve{\alpha}^{r,r'}. \tag{9.28.8}$$

Les dérivations $(d^{(r)}_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ (9.23.2) définissent un morphisme

$$\breve{d}^{(r)}\colon \breve{\mathscr{C}}^{(r)} \to \breve{\sigma}^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\breve{\overline{X}}/\breve{\overline{S}}}) \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}} \breve{\mathscr{C}}^{(r)}, \tag{9.28.9}$$

qui n'est autre que la $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-dérivation universelle de $\breve{\mathscr{C}}^{(r)}$. Elle prolonge le morphisme canonique $\breve{\mathscr{F}}^{(r)} \to \breve{\sigma}^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\breve{\overline{X}}/\breve{\overline{S}}})$. Pour tous nombres rationnels $r \geq r' \geq 0$, on a

$$p^{r-r'}(\mathrm{id}\otimes\breve{\alpha}^{r,r'})\circ\breve{d}^{(r)} = \breve{d}^{(r')}\circ\breve{\alpha}^{r,r'}. \tag{9.28.10}$$

Remarques 9.29. Soient r un nombre rationnel ≥ 0, n un entier ≥ 1.

(i) Pour tout entier $m \geq 0$, les morphismes canoniques $\mathrm{S}^m_{\overline{\mathscr{B}}_n}(\mathscr{F}^{(r)}_n) \to \mathscr{C}^{(r)}_n$ et $\mathrm{S}^m_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}}(\breve{\mathscr{F}}^{(r)}) \to \breve{\mathscr{C}}^{(r)}$ sont injectifs. En effet, pour tout entier $m' \geq m$, le morphisme canonique $\mathrm{S}^m_{\overline{\mathscr{B}}_n}(\mathscr{F}^{(r)}_n) \to \mathrm{S}^{m'}_{\overline{\mathscr{B}}_n}(\mathscr{F}^{(r)}_n)$ est injectif (9.22.2). Comme les limites injectives filtrantes commutent aux limites projectives finies dans $\widetilde{E}^{\mathbb{N}^\circ}_s$, $\mathrm{S}^m_{\overline{\mathscr{B}}_n}(\mathscr{F}^{(r)}_n) \to \mathscr{C}^{(r)}_n$ est injectif. La seconde assertion se déduit de la première par 6.3(i).

(ii) On a $\sigma^*_n(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n}) = d^{(r)}_n(\mathscr{F}^{(r)}_n) \subset d^{(r)}_n(\mathscr{C}^{(r)}_n)$ (9.23.2). Par suite, la dérivation $d^{(r)}_n$ est un $\overline{\mathscr{B}}_n$-champ de Higgs à coefficients dans $\sigma^*_n(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n})$ d'après ([3] 2.12).

(iii) On a $\breve{\sigma}^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\breve{\overline{X}}/\breve{\overline{S}}}) = \breve{d}^{(r)}(\breve{\mathscr{F}}^{(r)}) \subset \breve{d}^{(r)}(\breve{\mathscr{C}}^{(r)})$ (9.28.9). Par suite, la dérivation $\breve{d}^{(r)}$ est un $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-champ de Higgs à coefficients dans $\breve{\sigma}^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\breve{\overline{X}}/\breve{\overline{S}}})$.

Proposition 9.30. *Pour tout nombre rationnel $r \geq 0$, le foncteur*

$$\mathbf{Mod}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}) \to \mathbf{Mod}(\breve{\mathscr{C}}^{(r)}), \quad M \mapsto M \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}} \breve{\mathscr{C}}^{(r)} \tag{9.30.1}$$

est exact et fidèle ; en particulier, $\breve{\mathscr{C}}^{(r)}$ est $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-plat.

Comme le $\mathscr{O}_X$-module $\widetilde{\Omega}^1_{X/S}$ est localement libre de type fini, la suite exacte (9.28.3) est localement scindée. Un scindage local de cette suite induit, pour tout entier $m \geq 0$, un scindage local de la suite exacte (9.28.4). On en déduit que $\mathrm{S}^m_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}}(\breve{\mathscr{F}}^{(r)})$ est $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-plat et que l'homomorphisme canonique $\breve{\overline{\mathscr{B}}} \to \breve{\mathscr{C}}^{(r)}$ admet localement des sections. La proposition s'ensuit compte tenu de (9.28.5).

10. Calculs cohomologiques

10.1. Les hypothèses et notations générales de § 9 sont en vigueur dans cette section. On désigne, de plus, par $d = \dim(X/S)$ la dimension relative de X sur S, par $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$ l'anneau $(\overline{\mathscr{B}}_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ de $\widetilde{E}^{\mathbb{N}^\circ}_s$ (6.7) et par $\mathscr{O}_{\breve{\overline{X}}}$ l'anneau $(\mathscr{O}_{\overline{X}_{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$ de $X^{\mathbb{N}^\circ}_{s,\mathrm{zar}}$ ou de $X^{\mathbb{N}^\circ}_{s,\mathrm{\acute{e}t}}$, selon le contexte (cf. 2.9 et 8.9). Pour tous entiers $i, n \geq 1$, on pose

$$\widetilde{\Omega}^i_{X/S} = \wedge^i(\widetilde{\Omega}^1_{X/S}) \quad \text{et} \quad \widetilde{\Omega}^i_{\overline{X}_n/\overline{S}_n} = \wedge^i(\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n}). \tag{10.1.1}$$

On note $\xi^{-i}\widetilde{\Omega}^i_{\breve{\overline{X}}/\breve{\overline{S}}}$ le $\mathscr{O}_{\breve{\overline{X}}}$-module $(\xi^{-i}\widetilde{\Omega}^i_{\overline{X}_{n+1}/\overline{S}_{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$. On a un isomorphisme canonique (6.12.4)

$$\xi^{-i}\widetilde{\Omega}^i_{\breve{\overline{X}}/\breve{\overline{S}}} \xrightarrow{\sim} \wedge^i(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\breve{\overline{X}}/\breve{\overline{S}}}). \tag{10.1.2}$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par

$$\sigma_n\colon (\widetilde{E}_s, \overline{\mathscr{B}}_n) \to (X_{s,\mathrm{\acute{e}t}}, \mathscr{O}_{\overline{X}_n}) \tag{10.1.3}$$

le morphisme canonique de topos annelés (9.2.9), par

$$u_n\colon (X_{s,\text{ét}}, \mathscr{O}_{\overline{X}_n}) \to (X_{s,\text{zar}}, \mathscr{O}_{\overline{X}_n}) \tag{10.1.4}$$

le morphisme canonique de topos annelés (2.9) et par

$$\tau_n\colon (\widetilde{E}_s, \overline{\mathscr{B}}_n) \to (X_{s,\text{zar}}, \mathscr{O}_{\overline{X}_n}) \tag{10.1.5}$$

le morphisme composé $u_n \circ \sigma_n$. On note

$$\breve{\sigma}\colon (\widetilde{E}_s^{\mathbb{N}^\circ}, \breve{\overline{\mathscr{B}}}) \quad \to \quad (X_{s,\text{ét}}^{\mathbb{N}^\circ}, \mathscr{O}_{\breve{\overline{X}}}), \tag{10.1.6}$$

$$\breve{u}\colon (X_{s,\text{ét}}^{\mathbb{N}^\circ}, \mathscr{O}_{\breve{\overline{X}}}) \quad \to \quad (X_{s,\text{zar}}^{\mathbb{N}^\circ}, \mathscr{O}_{\breve{\overline{X}}}), \tag{10.1.7}$$

$$\breve{\tau}\colon (\widetilde{E}_s^{\mathbb{N}^\circ}, \breve{\overline{\mathscr{B}}}) \quad \to \quad (X_{s,\text{zar}}^{\mathbb{N}^\circ}, \mathscr{O}_{\breve{\overline{X}}}), \tag{10.1.8}$$

les morphismes de topos annelés induit par les $(\sigma_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\tau_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, respectivement, de sorte que $\breve{\tau} = \breve{u} \circ \breve{\sigma}$.

On rappelle qu'on a posé $\mathscr{S} = \operatorname{Spf}(\mathscr{O}_C)$ (2.1). On désigne par $\mathfrak{X}$ le schéma formel complété p-adique de $\overline{X}$. C'est un $\mathscr{S}$-schéma formel de présentation finie ([1] 2.3.15). Il est donc idyllique ([1] 2.6.13). On désigne par $\xi^{-i}\widetilde{\Omega}^i_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ le complété p-adique du $\mathscr{O}_{\overline{X}}$-module $\xi^{-i}\widetilde{\Omega}^i_{\overline{X}/\overline{S}} = \xi^{-i}\widetilde{\Omega}^i_{X/S}\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{O}_{\overline{X}}$ ([1] 2.5.1). On a un isomorphisme canonique ([1] 2.5.5(ii))

$$\xi^{-i}\widetilde{\Omega}^i_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}} \xrightarrow{\sim} \wedge^i(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}). \tag{10.1.9}$$

On désigne par

$$\lambda\colon (X_{s,\text{zar}}^{\mathbb{N}^\circ}, \mathscr{O}_{\breve{\overline{X}}}) \to (X_{s,\text{zar}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) \tag{10.1.10}$$

le morphisme défini dans (8.10.5) et par

$$\top\colon (\widetilde{E}_s^{\mathbb{N}^\circ}, \breve{\overline{\mathscr{B}}}) \to (X_{s,\text{zar}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) \tag{10.1.11}$$

le morphisme composé $\lambda\circ\breve{\tau}$. Nous utilisons pour les modules la notation $\top^{-1}$ pour désigner l'image inverse au sens des faisceaux abéliens et nous réservons la notation $\top^*$ pour l'image inverse au sens des modules ; et de même pour $\breve{\sigma}$ et $\breve{\tau}$. Pour tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module $\mathscr{F}$ de $X_{s,\text{zar}}$, on a un isomorphisme canonique

$$\top^*(\mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \breve{\tau}^*((\mathscr{F}/p^{n+1}\mathscr{F})_{n\in\mathbb{N}}). \tag{10.1.12}$$

En particulier, $\top^*(\mathscr{F})$ est adique (6.18).

10.2. Pour tout entier $n \geq 1$, le morphisme d'adjonction de $X_{s,\text{ét}}$

$$\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n} \to \sigma_{n*}(\sigma_n^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n})) \tag{10.2.1}$$

induit un morphisme $\mathscr{O}_{\overline{X}_n}$-linéaire

$$\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n} \to \tau_{n*}(\sigma_n^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n})). \tag{10.2.2}$$

De même, compte tenu de (6.5.3), le morphisme d'adjonction

$$\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\breve{\overline{X}}/\breve{\overline{S}}} \to \breve{\sigma}_*(\breve{\sigma}^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\breve{\overline{X}}/\breve{\overline{S}}})) \tag{10.2.3}$$

induit un morphisme $\mathscr{O}_{\breve{\overline{X}}}$-linéaire

$$\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\breve{\overline{X}}/\breve{\overline{S}}} \to \breve{\tau}_*(\breve{\sigma}^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\breve{\overline{X}}/\breve{\overline{S}}})). \tag{10.2.4}$$

Ce dernier induit un morphisme $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-linéaire

$$\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}} \to \top_*(\breve{\sigma}^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\breve{\overline{X}}/\breve{\overline{S}}})). \tag{10.2.5}$$

On notera que le morphisme adjoint

$$\top^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) \to \breve{\sigma}^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\breve{\overline{X}}/\breve{\overline{S}}}) \tag{10.2.6}$$

est un isomorphisme d'après (10.1.12) et la remarque suivant (2.9.5).

On désigne par

$$\partial_n : \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n} \to \mathrm{R}^1\sigma_{n*}(\overline{\mathscr{B}}_n) \tag{10.2.7}$$

le morphisme $\mathscr{O}_{\overline{X}_n}$-linéaire de $X_{s,\text{ét}}$ composé du morphisme (10.2.1) et du morphisme bord de la suite exacte longue de cohomologie déduite de la suite exacte canonique (9.22.1)

$$0 \to \overline{\mathscr{B}}_n \to \mathscr{F}_n \to \sigma_n^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n}) \to 0. \tag{10.2.8}$$

On note

$$\breve{\partial}\colon \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\breve{\overline{X}}/\breve{\overline{S}}} \to \mathrm{R}^1\breve{\sigma}_*(\breve{\overline{\mathscr{B}}}) \tag{10.2.9}$$

le morphisme $\mathscr{O}_{\breve{\overline{X}}}$-linéaire de $X^{\mathbb{N}^\circ}_{s,\text{ét}}$ composé du morphisme (10.2.3) et du morphisme bord de la suite exacte longue de cohomologie déduite de la suite exacte canonique (9.28.3)

$$0 \to \breve{\overline{\mathscr{B}}} \to \breve{\mathscr{F}} \to \breve{\sigma}^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\breve{\overline{X}}/\breve{\overline{S}}}) \to 0. \tag{10.2.10}$$

Compte tenu de (6.5.4), (6.5.5) et (6.12.1), on peut identifier $\breve{\partial}$ au morphisme $(\partial_n)_{n\geq 1}$.

On désigne par

$$\delta\colon \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}} \to \mathrm{R}^1\top_*(\breve{\overline{\mathscr{B}}}) \tag{10.2.11}$$

le morphisme $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-linéaire de $X_{s,\text{zar}}$ composé du morphisme (10.2.5) et du morphisme bord de la suite exacte longue de cohomologie déduite de la suite exacte canonique (9.28.3)

$$0 \to \breve{\overline{\mathscr{B}}} \to \breve{\mathscr{F}} \to \breve{\sigma}^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\breve{\overline{X}}/\breve{\overline{S}}}) \to 0. \tag{10.2.12}$$

Proposition 10.3. *Soit n un entier ≥ 1.*

(i) *Il existe un et un unique homomorphisme de $\mathscr{O}_{\overline{X}_n}$-algèbres graduées de $\overline{X}_{n,\text{ét}}$*

$$\wedge\,(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n}) \to \oplus_{i\geq 0}\mathrm{R}^i\sigma_{n*}(\overline{\mathscr{B}}_n) \tag{10.3.1}$$

dont la composante en degré un est le morphisme ∂_n (10.2.7). De plus, son noyau est annulé par $p^{\frac{2d}{p-1}}\mathfrak{m}_{\overline{K}}$ et son conoyau est annulé par $p^{\frac{2d+1}{p-1}}\mathfrak{m}_{\overline{K}}$.

(ii) *Pour tout entier $i \geq d+1$ (10.1), $\mathrm{R}^i\sigma_{n*}(\overline{\mathscr{B}}_n)$ est presque-nul.*

Soit $\overline{x}$ un point géométrique de X au-dessus de s. On désigne par X' le localisé strict de X en $\overline{x}$, par

$$\varphi_{\overline{x}}\colon \widetilde{E} \to \overline{X}'^{\circ}_{\text{fét}} \tag{10.3.2}$$

le foncteur (7.8.4), par $\mathfrak{E}_{\overline{x}}$ (resp. $\mathfrak{E}_{\overline{x}}(\mathbf{Q})$) la catégorie des voisinages du point de $X_{\text{ét}}$ associé à $\overline{x}$ dans le site $\mathbf{\acute{E}t}_{/X}$ (resp. $\mathbf{Q}$ (9.5)) et pour tout $U \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{E}_{\overline{x}})$, par

$$t_U\colon \overline{X}'^{\circ} \to \overline{U}^{\circ} \tag{10.3.3}$$

le morphisme canonique. En vertu de 3.7, $\overline{X}'$ est normal et strictement local (et en particulier intègre). D'après ([4] 10.31), pour tout entier $i \geq 0$, on a un isomorphisme canonique

$$(\mathrm{R}^i\sigma_{n*}(\overline{\mathscr{B}}_n))_{\overline{x}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^i(\overline{X}'^{\circ}_{\text{fét}}, \varphi_{\overline{x}}(\overline{\mathscr{B}}_n)). \tag{10.3.4}$$

Comme $\overline{X}'$ est $\overline{S}$-plat, $\overline{X}'^{\circ}$ est intègre et non-vide. Soient $\beta\colon \overline{y} \to \overline{X}'^{\circ}$ un point géométrique générique,

$$\nu_{\overline{y}}\colon \overline{X}'^{\circ}_{\text{fét}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{B}_{\pi_1(\overline{X}'^{\circ}, \overline{y})} \tag{10.3.5}$$

le foncteur fibre associé (2.10.3). On note encore $\overline{y}$ le point géométrique de $\overline{X}^{\circ}$ et $\alpha\colon \overline{y} \to X'$ le morphisme induits par β. On obtient ainsi un point $(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x})$ de $X_{\text{ét}} \overleftarrow{\times}_{X_{\text{ét}}} \overline{X}^{\circ}_{\text{ét}}$. Pour tout $U \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{E}_{\overline{x}})$, on note encore $\overline{y}$ le point géométrique de $\overline{U}^{\circ}$ défini par le morphisme composé $t_U \circ \beta\colon \overline{y} \to \overline{U}^{\circ}$ (10.3.3). On observera que $\overline{y}$ est localisé en un point générique de $\overline{U}^{\circ}$ ([5] VIII 7.5). Comme $\overline{U}$ est localement irréductible (3.3), il est la somme des schémas induits sur ses composantes irréductibles. Notons $\overline{U}'$ la composante irréductible de $\overline{U}$ contenant $\overline{y}$. De même, $\overline{U}^{\circ}$ est la somme des schémas induits sur ses composantes irréductibles, et $\overline{U}'^{\circ} = \overline{U}' \times_X X^{\circ}$ est la composante irréductible de $\overline{U}^{\circ}$ contenant $\overline{y}$. Le morphisme t_U se factorise à travers $\overline{U}'^{\circ}$. D'après (7.8.6), on a un isomorphisme canonique

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ U \in \mathfrak{E}^{\circ}_{\overline{x}}}} (t_U)^*_{\text{fét}}(\overline{\mathscr{B}}_U) \xrightarrow{\sim} \varphi_{\overline{x}}(\overline{\mathscr{B}}). \tag{10.3.6}$$

Celui-ci induit pour tout entier $i \geq 0$, un isomorphisme

$$\mathrm{H}^i(\overline{X}'^{\circ}_{\text{fét}}, \varphi_{\overline{x}}(\overline{\mathscr{B}}_n)) \xrightarrow{\sim} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ U \in \mathfrak{E}^{\circ}_{\overline{x}}}} \mathrm{H}^i((\overline{U}^{\circ}_{\text{fét}})_{/\overline{U}'^{\circ}}, \overline{\mathscr{B}}_{U,n}). \tag{10.3.7}$$

En effet, si Z est un voisinage étale affine de $\overline{x}$ dans X, il suffit d'appliquer ([4] 11.10) à la sous-catégorie pleine de $(\mathfrak{E}_{\overline{x}})_{/Z}$ formée des schémas affines sur Z. Compte tenu de (7.15.1) et ([4] (9.7.6)), on déduit de (10.3.4) et (10.3.7) un isomorphisme

$$(\mathrm{R}^i\sigma_{n*}(\overline{\mathscr{B}}_n))_{\overline{x}} \xrightarrow{\sim} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ U \in \mathfrak{E}^{\circ}_{\overline{x}}}} \mathrm{H}^i(\pi_1(\overline{U}'^{\circ}, \overline{y}), \overline{R}^{\overline{y}}_U / p^n \overline{R}^{\overline{y}}_U). \tag{10.3.8}$$

Les isomorphismes (10.3.4) et (10.3.7) sont clairement compatibles aux cup-produits. Il en est donc de même de (10.3.8).

D'autre part, on a un isomorphisme canonique ([5] VIII 5.2)

$$(\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n})_{\overline{x}} \xrightarrow{\sim} \Gamma(\overline{X}', \widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n} | \overline{X}'), \tag{10.3.9}$$

où l'on considère $\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n}$ à gauche comme un faisceau de $X_{s,\text{ét}}$ et à droite comme un faisceau de $\overline{X}_{\text{ét}}$. Comme $\overline{X}'$ est intègre, on en déduit un isomorphisme ([5] VII 5.8)

$$(\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n})_{\overline{x}} \xrightarrow{\sim} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ U \in \mathfrak{E}^{\circ}_{\overline{x}}}} \widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n}(\overline{U}'). \tag{10.3.10}$$

(i) Soit U un objet de $\mathfrak{E}_{\overline{x}}(\mathbf{Q})$. On notera que les schémas U, $\overline{U}$ et $\overline{U}'$ sont affines. La suite exacte de $\overline{R}^{\overline{y}}_U$-représentations de $\pi_1(\overline{U}'^{\circ}, \overline{y})$

$$0 \to \overline{R}^{\overline{y}}_U / p^n \overline{R}^{\overline{y}}_U \to \mathscr{F}^{\overline{y}}_U / p^n \mathscr{F}^{\overline{y}}_U \to \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{X/S}(U) \otimes_{\mathscr{O}_X(U)} (\overline{R}^{\overline{y}}_U / p^n \overline{R}^{\overline{y}}_U) \to 0 \tag{10.3.11}$$

déduite de (9.13.10), induit un morphisme $\mathscr{O}_{\overline{X}_n}(\overline{U}')$-linéaire

$$\alpha_U\colon \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n}(\overline{U}') \to \mathrm{H}^1(\pi_1(\overline{U}'^\circ,\overline{y}),\overline{R}^{\overline{y}}_U/p^n\overline{R}^{\overline{y}}_U), \tag{10.3.12}$$

où l'on considère $\mathscr{O}_{\overline{X}_n}$ et $\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n}$ comme des faisceaux de $\overline{X}_{\text{ét}}$. On peut explicitement décrire ce morphisme en tenant compte de 9.4. En effet, d'après ([3] 10.16), on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n}(\overline{U}') \arrow[r, "\alpha_U"] \arrow[d, "a"'] & \mathrm{H}^1(\pi_1(\overline{U}'^\circ,\overline{y}),\overline{R}^{\overline{y}}_U/p^n\overline{R}^{\overline{y}}_U) \\ \mathrm{H}^1(\pi_1(\overline{U}'^\circ,\overline{y}),\xi^{-1}\overline{R}^{\overline{y}}_U(1)/p^n\xi^{-1}\overline{R}^{\overline{y}}_U(1)) \arrow[r, "-b", "\sim"'] & \mathrm{H}^1(\pi_1(\overline{U}'^\circ,\overline{y}),p^{\frac{1}{p-1}}\overline{R}^{\overline{y}}_U/p^{n+\frac{1}{p-1}}\overline{R}^{\overline{y}}_U) \arrow[u, "c"'] \end{tikzcd} \tag{10.3.13}$$

où a est induit par le morphisme défini dans ([3] (8.13.2)), b est induit par l'isomorphisme

$$\widehat{\overline{R}}^{\overline{y}}_U(1) \xrightarrow{\sim} p^{\frac{1}{p-1}}\xi\widehat{\overline{R}}^{\overline{y}}_U \tag{10.3.14}$$

défini dans ([3] 9.18) et c est induit par l'injection canonique $p^{\frac{1}{p-1}}\overline{R}^{\overline{y}}_U \to \overline{R}^{\overline{y}}_U$.

En vertu de ([3] 8.17(i)), il existe un et un unique homomorphisme de $\mathscr{O}_{\overline{X}_n}(\overline{U}')$-algèbres graduées

$$\wedge\,(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n}(\overline{U}')) \to \oplus_{i\geq 0}\mathrm{H}^i(\pi_1(\overline{U}'^\circ,\overline{y}),\xi^{-i}\overline{R}^{\overline{y}}_U(i)/p^n\xi^{-i}\overline{R}^{\overline{y}}_U(i)) \tag{10.3.15}$$

dont la composante en degré un est le morphisme a. Celui-ci est presque-injectif et son conoyau est annulé par $p^{\frac{1}{p-1}}\mathfrak{m}_{\overline{K}}$. On en déduit qu'il existe un et un unique homomorphisme de $\mathscr{O}_{\overline{X}_n}(\overline{U}')$-algèbres graduées

$$\wedge\,(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n}(\overline{U}')) \to \oplus_{i\geq 0}\mathrm{H}^i(\pi_1(\overline{U}'^\circ,\overline{y}),\overline{R}^{\overline{y}}_U/p^n\overline{R}^{\overline{y}}_U) \tag{10.3.16}$$

dont la composante en degré 1 est α_U. Une chasse au diagramme (10.3.13) montre que le noyau de (10.3.16) est annulé par $p^{\frac{2d}{p-1}}\mathfrak{m}_{\overline{K}}$. Comme $\mathrm{H}^i(\pi_1(\overline{U}'^\circ,\overline{y}),\overline{R}^{\overline{y}}_U/p^n\overline{R}^{\overline{y}}_U)$ est presque-nul pour tout $i\geq d+1$ en vertu de ([3] 8.17(ii)), le conoyau de (10.3.16) est annulé par $p^{\frac{2d+1}{p-1}}\mathfrak{m}_{\overline{K}}$.

Par ailleurs, d'après 9.27(iii), l'image de la suite exacte (10.2.8) par le foncteur $\nu_{\overline{y}}\circ\varphi_{\overline{x}}$ s'identifie à la limite inductive sur la catégorie $\mathfrak{E}_{\overline{x}}(\mathbf{Q})^\circ$ des suites exactes (10.3.11). On en déduit péniblement que la fibre du morphisme ∂_n (10.2.7) en $\overline{x}$ s'identifie à la limite inductive sur la catégorie $\mathfrak{E}_{\overline{x}}(\mathbf{Q})^\circ$ des morphismes α_U ; d'où l'existence (et l'unicité) de l'homomorphisme (10.3.1) compte tenu de 8.5(ii). La fibre de ce dernier en $\overline{x}$ s'identifie à la limite inductive sur la catégorie $\mathfrak{E}_{\overline{x}}(\mathbf{Q})^\circ$ des homomorphismes (10.3.16). La proposition s'ensuit puisque les limites inductives filtrantes sont exactes.

(ii) Cela résulte de (10.3.8), 8.5(ii) et ([3] 8.17(ii)).

Corollaire 10.4. (i) *Il existe un et un unique homomorphisme de $\mathscr{O}_{\breve{\overline{X}}}$-algèbres graduées de $X^{\mathbb{N}^\circ}_{s,\text{ét}}$*

$$\wedge\,(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\breve{\overline{X}}/\breve{\overline{S}}}) \to \oplus_{i\geq 0}\mathrm{R}^i\breve{\sigma}_*(\breve{\overline{\mathscr{B}}}) \tag{10.4.1}$$

dont la composante en degré un est induite par le morphisme $\breve{\partial}$ (10.2.9). *De plus, son noyau est annulé par $p^{\frac{2d}{p-1}}\mathfrak{m}_{\overline{K}}$ et son conoyau est annulé par $p^{\frac{2d+1}{p-1}}\mathfrak{m}_{\overline{K}}$.*

(ii) *Pour tout entier $i\geq d+1$, $\mathrm{R}^i\breve{\sigma}_*(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$ est presque-nul.*

Cela résulte de 10.3, 6.3(i) et (6.5.5).

Proposition 10.5. (i) *Pour tous entiers $i \geq 1$ et $j \geq 1$, le $\mathscr{O}_{\breve{\overline{X}}}$-module $\mathrm{R}^i \breve{u}_*(\mathrm{R}^j \breve{\sigma}_*(\breve{\overline{\mathscr{B}}}))$ est annulé par $p^{\frac{4d+1}{p-1}} \mathfrak{m}_{\overline{K}}$.*

(ii) *Pour tout entier $q \geq 0$, le noyau du morphisme*

$$\mathrm{R}^q \breve{\tau}_*(\breve{\overline{\mathscr{B}}}) \to \breve{u}_*(\mathrm{R}^q \breve{\sigma}_*(\breve{\overline{\mathscr{B}}})) \tag{10.5.1}$$

induit par la suite spectrale de Cartan-Leray, est annulé par $p^{\frac{(d+1)(4d+1)}{p-1}} \mathfrak{m}_{\overline{K}}$ et son conoyau est annulé par $p^{\frac{q(4d+1)}{p-1}} \mathfrak{m}_{\overline{K}}$.

(i) En effet, il résulte de 10.3(i) et ([5] VII 4.3) que pour tout entier $n \geq 1$, les $\mathscr{O}_{\overline{X}_n}$-modules $\mathrm{R}^i u_{n*}(\mathrm{R}^j \sigma_{n*}(\overline{\mathscr{B}}_n))$ sont annulés par $p^{\frac{4d+1}{p-1}} \mathfrak{m}_{\overline{K}}$. La proposition s'ensuit compte tenu de (6.5.5).

(ii) On peut clairement se borner au cas où $q \geq 1$. Considérons la suite spectrale de Cartan-Leray ([5] V 5.4)

$$\mathrm{E}_2^{i,j} = \mathrm{R}^i \breve{u}_*(\mathrm{R}^j \breve{\sigma}_*(\breve{\overline{\mathscr{B}}})) \Rightarrow \mathrm{R}^{i+j} \breve{\tau}_*(\breve{\overline{\mathscr{B}}}), \tag{10.5.2}$$

et notons $(\mathrm{E}_i^q)_{0 \leq i \leq q}$ la filtration aboutissement sur $\mathrm{R}^q \breve{\tau}_*(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$. On observera que E_1^q est le noyau du morphisme (10.5.1). On sait que $\mathrm{E}_2^{i,j}$ est annulé par $p^{\frac{4d+1}{p-1}} \mathfrak{m}_{\overline{K}}$ pour tous $i \geq 1$ et $j \geq 0$ d'après (i), et qu'il est presque-nul pour tous $i \geq 0$ et $j \geq d+1$ en vertu de 10.4(ii). On en déduit que

$$\mathrm{E}_i^q / \mathrm{E}_{i+1}^q = \mathrm{E}_\infty^{i,q-i} \tag{10.5.3}$$

est annulé par $p^{\frac{4d+1}{p-1}} \mathfrak{m}_{\overline{K}}$ pour tout $i \geq 1$ et qu'il est presque-nul pour tout $i \leq q-d-1$. Par suite, E_1^q est annulé par $p^{\frac{(4d+1)(d+1)}{p-1}} \mathfrak{m}_{\overline{K}}$; d'où la première assertion. Par ailleurs, on a $\mathrm{E}_\infty^{0,q} = \mathrm{E}_{q+2}^{0,q}$, et le conoyau du morphisme (10.5.1) s'identifie au conoyau du composé des injections canoniques

$$\mathrm{E}_{q+2}^{0,q} \to \mathrm{E}_{q+1}^{0,q} \to \cdots \to \mathrm{E}_2^{0,q}. \tag{10.5.4}$$

Le conoyau de chacune de ces injections est annulé par $p^{\frac{4d+1}{p-1}} \mathfrak{m}_{\overline{K}}$ d'après (i) ; d'où la seconde assertion.

Lemme 10.6. *Soit $\breve{\mathscr{M}} = (\mathscr{M}_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ un $\mathscr{O}_{\breve{\overline{X}}}$-module de $X_{s,\mathrm{zar}}^{\mathbb{N}^\circ}$ tel que pour tous entiers $m \geq n \geq 1$, $\mathscr{M}_n$ soit un $\mathscr{O}_{\overline{X}_n}$-module quasi-cohérent sur $\overline{X}_n$ et que le morphisme canonique $\mathscr{M}_m \to \mathscr{M}_n$ soit surjectif. Alors $\mathrm{R}^i \lambda_*(\breve{\mathscr{M}})$ (10.1.10) est nul pour tout entier $i \geq 1$.*

En effet, d'après ([5] V 5.1), $\mathrm{R}^i \lambda_*(\breve{\mathscr{M}})$ est le faisceau associé au préfaisceau sur $X_{s,\mathrm{zar}}$ qui à tout ouvert de Zariski U de X_s, associe le $\mathscr{O}_{\breve{\overline{X}}}(U)$-module $\mathrm{H}^i(\lambda^*(U), \breve{\mathscr{M}})$. En vertu de 6.11, on a une suite exacte canonique

$$0 \to \mathrm{R}^1 \varprojlim_{n \geq 1} \mathrm{H}^{i-1}(U, \mathscr{M}_n) \to \mathrm{H}^i(\lambda^*(U), \breve{\mathscr{M}}) \to \varprojlim_{n \geq 1} \mathrm{H}^i(U, \mathscr{M}_n) \to 0. \tag{10.6.1}$$

On identifie dans la suite les sites de Zariski de X_s et $\overline{X}_1$ (8.9). Soit U un ouvert affine de $\overline{X}_1$. Pour tout entier $n \geq 1$, U détermine un ouvert affine de $\overline{X}_n$ ([16] 2.3.5). Par suite, $\mathrm{H}^i(U, \mathscr{M}_n) = 0$ et pour tous entiers $m \geq n \geq 1$, le morphisme canonique

$$\mathrm{H}^0(U, \mathscr{M}_m) \to \mathrm{H}^0(U, \mathscr{M}_n) \tag{10.6.2}$$

est surjectif, de sorte que le système projectif de groupes abéliens $(\mathrm{H}^0(U, \mathscr{M}_{n+1}))_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la condition de Mittag-Leffler. On en déduit que $\mathrm{H}^i(\lambda^*(U), \breve{\mathscr{M}}) = 0$ ([21] 1.15 et [26] 3.1). La proposition s'ensuit puisque les ouverts affines de $\overline{X}_1$ forment une famille topologiquement génératrice du site de Zariski de $\overline{X}_1$

Proposition 10.7. *Pour tout entier $j \geq 0$, posons $\alpha_j = \frac{(d+1+j)(4d+1)+6d+1}{p-1}$. Alors :*

(i) *Pour tous entiers $i \geq 1$ et $j \geq 0$, le $\mathscr{O}_{\breve{\overline{X}}}$-module $\mathrm{R}^i\lambda_*(\mathrm{R}^j\breve{\tau}_*(\breve{\overline{\mathscr{B}}}))$ est annulé par $p^{\alpha_j}\mathfrak{m}_{\overline{K}}$.*

(ii) *Pour tout entier $q \geq 0$, le noyau et le conoyau du morphisme*

$$\mathrm{R}^q\top_*(\breve{\overline{\mathscr{B}}}) \to \lambda_*(\mathrm{R}^q\breve{\tau}_*(\breve{\overline{\mathscr{B}}})) \tag{10.7.1}$$

induit par la suite spectrale de Cartan-Leray (10.1.11), *sont annulés par* $p^{\sum_{j=0}^{q-1}\alpha_j}\mathfrak{m}_{\overline{K}}$.

(i) En effet, en vertu de 10.4(i), on a un morphisme $\mathscr{O}_{\breve{\overline{X}}}$-linéaire de $X_{s,\mathrm{zar}}^{\mathbb{N}^\circ}$

$$\xi^{-j}\widetilde{\Omega}^j_{\breve{\overline{X}}/\breve{\overline{S}}} \to \breve{u}_*(\mathrm{R}^j\breve{\sigma}_*(\breve{\overline{\mathscr{B}}})), \tag{10.7.2}$$

dont le noyau est annulé par $p^{\frac{2d}{p-1}}\mathfrak{m}_{\overline{K}}$ et le conoyau est annulé par $p^{\frac{4d+1}{p-1}}\mathfrak{m}_{\overline{K}}$. On en déduit, compte tenu de 10.6, que $\mathrm{R}^i\lambda_*(\breve{u}_*(\mathrm{R}^j\breve{\sigma}_*(\breve{\overline{\mathscr{B}}})))$ est annulé par $p^{\frac{6d+1}{p-1}}\mathfrak{m}_{\overline{K}}$. Par ailleurs, d'après 10.5(ii), on a un morphisme $\mathscr{O}_{\breve{\overline{X}}}$-linéaire

$$\mathrm{R}^j\breve{\tau}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}) \to \breve{u}_*(\mathrm{R}^j\breve{\sigma}_*(\breve{\overline{\mathscr{B}}})) \tag{10.7.3}$$

dont le noyau est annulé par $p^{\frac{(d+1)(4d+1)}{p-1}}\mathfrak{m}_{\overline{K}}$ et le conoyau est annulé par $p^{\frac{j(4d+1)}{p-1}}\mathfrak{m}_{\overline{K}}$. La proposition s'ensuit.

(ii) La preuve est similaire à celle de 10.5(ii). On peut clairement supposer $q \geq 1$. Considérons la suite spectrale de Cartan-Leray

$$\mathrm{E}_2^{i,j} = \mathrm{R}^i\lambda_*(\mathrm{R}^j\breve{\tau}_*(\breve{\overline{\mathscr{B}}})) \Rightarrow \mathrm{R}^{i+j}\top_*(\breve{\overline{\mathscr{B}}}), \tag{10.7.4}$$

et notons $(\mathrm{E}_i^q)_{0\leq i\leq q}$ la filtration aboutissement sur $\mathrm{R}^q\top_*(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$. On observera que E_1^q est le noyau du morphisme (10.7.1). D'après (i), $\mathrm{E}_2^{i,j}$ est annulé par $p^{\alpha_j}\mathfrak{m}_{\overline{K}}$ pour tous $i \geq 1$ et $j \geq 0$. Il en est alors de même de

$$\mathrm{E}_i^q/\mathrm{E}_{i+1}^q = \mathrm{E}_\infty^{i,q-i} \tag{10.7.5}$$

pour tout $i \geq 1$. Donc E_1^q est annulé par $p^{\sum_{j=0}^{q-1}\alpha_j}\mathfrak{m}_{\overline{K}}$. Par ailleurs, on a $\mathrm{E}_\infty^{0,q} = \mathrm{E}_{q+2}^{0,q}$, et le conoyau du morphisme (10.7.1) s'identifie au conoyau du composé des injections canoniques

$$\mathrm{E}_{q+2}^{0,q} \to \mathrm{E}_{q+1}^{0,q} \to \cdots \to \mathrm{E}_2^{0,q}. \tag{10.7.6}$$

Pour tout entier m tel que $2 \leq m \leq q+1$, le conoyau de l'injection canonique $\mathrm{E}_{m+1}^{0,q} \to \mathrm{E}_m^{0,q}$ est annulé par $p^{\alpha_{q-m+1}}\mathfrak{m}_{\overline{K}}$ d'après (i) ; d'où la proposition.

Corollaire 10.8. *Il existe un et un unique isomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-algèbres graduées* (5.13.2)

$$\wedge\,(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}[\frac{1}{p}]) \xrightarrow{\sim} \oplus_{i\geq 0}\mathrm{R}^i\top_*(\breve{\overline{\mathscr{B}}})[\frac{1}{p}] \tag{10.8.1}$$

dont la composante en degré un est le morphisme $\delta \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ (10.2.11).

En effet, l'homomorphisme (10.4.1) induit un homomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbres graduées

$$\wedge\,(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) \to \oplus_{i\geq 0}\lambda_*(\breve{u}_*(\mathrm{R}^i\breve{\sigma}_*(\breve{\overline{\mathscr{B}}}))) \tag{10.8.2}$$

dont le noyau et le conoyau sont rig-nuls d'après 10.4(i) (cf. 5.13). Par ailleurs, les morphismes

$$\oplus_{i\geq 0}\,\mathrm{R}^i\top_*(\breve{\overline{\mathscr{B}}}) \to \oplus_{i\geq 0}\lambda_*(\mathrm{R}^i\breve{\tau}_*(\breve{\overline{\mathscr{B}}})) \to \oplus_{i\geq 0}\lambda_*(\breve{u}_*(\mathrm{R}^i\breve{\sigma}_*(\breve{\overline{\mathscr{B}}}))) \tag{10.8.3}$$

induits par les suites spectrales de Cartan-Leray, sont des homomorphismes de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbres graduées (cf. [18] 0.12.2.6), dont les noyaux et conoyaux sont rig-nuls en vertu de 10.5(ii) et 10.7(ii). On obtient l'isomorphisme (10.8.1) recherché en appliquant le foncteur $-\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p$.

Lemme 10.9. *Soient $\mathscr{M}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module localement libre de type fini, q un entier ≥ 0. Pour tout entier $n\geq 1$, posons $\mathscr{M}_n=\mathscr{M}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}\mathscr{O}_{\overline{X}_n}$ et $\breve{\mathscr{M}}=(\mathscr{M}_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ que l'on considère aussi comme un faisceau de $X^{\mathbb{N}^\circ}_{s,\text{ét}}$* ([5] VII 2 c)). *On a alors un isomorphisme canonique*

$$\mathscr{M}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}\mathrm{R}^q\top_*(\breve{\overline{\mathscr{B}}})\xrightarrow{\sim}\mathrm{R}^q\top_*(\breve{\sigma}^*(\breve{\mathscr{M}})).\tag{10.9.1}$$

En effet, on a un isomorphisme canonique $\breve{u}_*(\breve{\mathscr{M}})\xrightarrow{\sim}\breve{\mathscr{M}}$. Par ailleurs, en vertu de ([1] 2.8.5), on a un isomorphisme canonique $\mathscr{M}\xrightarrow{\sim}\lambda_*(\breve{\mathscr{M}})$. Le morphisme d'adjonction $\breve{\mathscr{M}}\to\breve{\sigma}_*(\breve{\sigma}^*(\breve{\mathscr{M}}))$ induit alors un morphisme $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-linéaire

$$\mathscr{M}\to\top_*(\breve{\sigma}^*(\breve{\mathscr{M}})).\tag{10.9.2}$$

On en déduit par cup-produit un morphisme $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-linéaire

$$\mathscr{M}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}\mathrm{R}^q\top_*(\breve{\overline{\mathscr{B}}})\to\mathrm{R}^q\top_*(\breve{\sigma}^*(\breve{\mathscr{M}})).\tag{10.9.3}$$

Pour voir que c'est un isomorphisme, on peut se ramener au cas où $\mathscr{M}=\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ (la question étant locale pour la topologie de Zariski de $\mathfrak{X}$), auquel cas l'assertion est immédiate.

10.10. D'après ([20] I 4.3.1.7), la suite exacte canonique (9.28.3)

$$0\to\breve{\overline{\mathscr{B}}}\to\breve{\mathscr{F}}\to\breve{\sigma}^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\breve{\overline{X}}/\breve{\overline{S}}})\to 0\tag{10.10.1}$$

induit, pour tout entier $m\geq 1$, une suite exacte (2.7)

$$0\to\mathrm{S}^{m-1}_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}}(\breve{\mathscr{F}})\to\mathrm{S}^{m}_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}}(\breve{\mathscr{F}})\to\breve{\sigma}^*(\mathrm{S}^m_{\mathscr{O}_{\breve{\overline{X}}}}(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\breve{\overline{X}}/\breve{\overline{S}}}))\to 0.\tag{10.10.2}$$

On munit $\mathrm{S}^{m}_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}}(\breve{\mathscr{F}})$ de la filtration décroissante exhaustive $(\mathrm{S}^{m-i}_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}}(\breve{\mathscr{F}}))_{i\in\mathbb{N}}$. On a alors une suite exacte canonique

$$0\to\breve{\sigma}^*(\mathrm{S}^{m-1}_{\mathscr{O}_{\breve{\overline{X}}}}(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\breve{\overline{X}}/\breve{\overline{S}}}))\to\mathrm{S}^{m}_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}}(\breve{\mathscr{F}})/\mathrm{S}^{m-2}_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}}(\breve{\mathscr{F}})\to\breve{\sigma}^*(\mathrm{S}^m_{\mathscr{O}_{\breve{\overline{X}}}}(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\breve{\overline{X}}/\breve{\overline{S}}}))\to 0.\tag{10.10.3}$$

Pour tous entiers i et j, posons

$$\mathrm{E}^{i,j}_1=\mathrm{R}^{i+j}\top_*(\breve{\sigma}^*(\mathrm{S}^{-i}_{\mathscr{O}_{\breve{\overline{X}}}}(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\breve{\overline{X}}/\breve{\overline{S}}}))),\tag{10.10.4}$$

et notons

$$d^{i,j}_1\colon\mathrm{E}^{i,j}_1\to\mathrm{E}^{i+1,j}_1\tag{10.10.5}$$

le morphisme induit par la suite exacte (10.10.3). D'après 10.9, on a un isomorphisme $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-linéaire canonique

$$\mathrm{S}^{-i}(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})\otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}\mathrm{R}^{i+j}\top_*(\breve{\overline{\mathscr{B}}})\xrightarrow{\sim}\mathrm{E}^{i,j}_1.\tag{10.10.6}$$

On en déduit, compte tenu de 10.8, un isomorphisme

$$\mathrm{S}^{-i}(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}[\frac{1}{p}])\otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]}\wedge^{i+j}(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}[\frac{1}{p}])\xrightarrow{\sim}\mathrm{E}^{i,j}_1[\frac{1}{p}].\tag{10.10.7}$$

Proposition 10.11. *On a un diagramme commutatif*

(10.11.1)
$$\begin{tikzcd} \mathrm{S}^{-i}(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}[\frac{1}{p}]) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]} \wedge^{i+j}(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}[\frac{1}{p}]) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\phi^{i,j}"'] & \mathrm{E}_1^{i,j}[\frac{1}{p}] \arrow[d, "d_1^{i,j}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p"] \\ \mathrm{S}^{-i-1}(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}[\frac{1}{p}]) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]} \wedge^{i+j+1}(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}[\frac{1}{p}]) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{E}_1^{i+1,j}[\frac{1}{p}] \end{tikzcd}$$

où $\phi^{i,j}$ est la restriction de la $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-dérivation de

(10.11.2)
$$\mathrm{S}(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}[\frac{1}{p}]) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]} \wedge(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}[\frac{1}{p}])$$

définie dans (4.1.1) *relativement au morphisme identique de $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}[\frac{1}{p}]$, et les flèches horizontales sont les isomorphismes* (10.10.7)*.*

En effet, en vertu de 4.7 et compte tenu du morphisme (10.2.5), on a un diagramme commutatif

(10.11.3)
$$\begin{tikzcd} \mathrm{S}^{-i}(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathrm{R}^{i+j}\top_*(\breve{\overline{\mathscr{B}}}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\alpha\otimes\mathrm{id}"'] & \mathrm{E}_1^{i,j} \arrow[dd, "d_1^{i,j}"] \\ \mathrm{S}^{-i-1}(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathrm{R}^1\top_*(\breve{\overline{\mathscr{B}}}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathrm{R}^{i+j}\top_*(\breve{\overline{\mathscr{B}}}) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\cup"'] & \\ \mathrm{S}^{-i-1}(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathrm{R}^{i+j+1}\top_*(\breve{\overline{\mathscr{B}}}) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{E}_1^{i+1,j} \end{tikzcd}$$

où α est la restriction à $\mathrm{S}^{-i}(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})$ de la $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-dérivation d_δ de $\mathrm{S}(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \wedge(\mathrm{R}^1\top_*(\breve{\overline{\mathscr{B}}}))$ définie dans (4.1.1) relativement au morphisme δ (10.2.11), $\cup$ est le cup-produit de la $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbre $\oplus_{i\geq 0}\mathrm{R}^i\top_*(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$ et les flèches horizontales sont les isomorphismes (10.10.6). La proposition s'ensuit.

Proposition 10.12. *Soit m un entier ≥ 1. Alors :*

(i) *Le morphisme*

(10.12.1)
$$\top_*(\mathrm{S}^{m-1}_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}}(\breve{\mathscr{F}}))[\frac{1}{p}] \to \top_*(\mathrm{S}^{m}_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}}(\breve{\mathscr{F}}))[\frac{1}{p}]$$

induit par (10.10.2) *est un isomorphisme.*

(ii) *Pour tout entier $q \geq 1$, le morphisme*

(10.12.2)
$$\mathrm{R}^q\top_*(\mathrm{S}^{m-1}_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}}(\breve{\mathscr{F}}))[\frac{1}{p}] \to \mathrm{R}^q\top_*(\mathrm{S}^{m}_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}}(\breve{\mathscr{F}}))[\frac{1}{p}]$$

induit par (10.10.2) *est nul.*

Pour tous entiers i et j, on pose (10.10.4)

(10.12.3)
$${}_m\mathrm{E}_1^{i,j} = \begin{cases} \mathrm{E}_1^{i-m,j+m} & \text{si } i \geq 0, \\ 0 & \text{si } i < 0. \end{cases}$$

On désigne par

(10.12.4)
$${}_m\mathrm{E}_1^{i,j} \Rightarrow \mathrm{R}^{i+j}\top_*(\mathrm{S}^m_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}}(\breve{\mathscr{F}}))$$

la suite spectrale d'hypercohomologie du $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-module filtré $\mathrm{S}^m_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}}(\breve{\mathscr{F}})$ (10.10.2), dont les différentielles ${}_m d_1^{i,j}$ sont données par (10.10.5)

$$
{}_m d_1^{i,j} = \begin{cases} d_1^{i-m,j+m} & \text{si } i \geq 0, \\ 0 & \text{si } i < 0. \end{cases} \tag{10.12.5}
$$

Pour tout entier $q \geq 0$, notons $({}_m\mathrm{E}_i^q)_{i\in\mathbb{Z}}$ la filtration aboutissement sur $\mathrm{R}^q\top_*(\mathrm{S}^m_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}}(\breve{\mathscr{F}}))$, de sorte que l'on a

$$
{}_m\mathrm{E}_\infty^{i,q-i} = {}_m\mathrm{E}_i^q / {}_m\mathrm{E}_{i+1}^q. \tag{10.12.6}
$$

On a alors

$$
{}_m\mathrm{E}_i^q = \begin{cases} \mathrm{R}^q\top_*(\mathrm{S}^m_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}}(\breve{\mathscr{F}})) & \text{si } i \leq 0, \\ 0 & \text{si } i \geq m+1, \end{cases} \tag{10.12.7}
$$

et ${}_m\mathrm{E}_\infty^{0,q} \subset {}_m\mathrm{E}_1^{0,q}$. On déduit que l'image du morphisme canonique

$$
\mathrm{R}^q\top_*(\mathrm{S}^{m-1}_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}}(\breve{\mathscr{F}})) \to \mathrm{R}^q\top_*(\mathrm{S}^m_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}}(\breve{\mathscr{F}})) \tag{10.12.8}
$$

est ${}_m\mathrm{E}_1^q$, et son conoyau est ${}_m\mathrm{E}_\infty^{0,q}$.

Par ailleurs, il résulte de 10.11 et 4.1 que pour tous entiers i et q vérifiant l'une des deux conditions suivantes :

(i) $q = 0$ et $i < m$,
(ii) $q \geq 1$ et $i \geq 1$,

on a

$$
{}_m\mathrm{E}_\infty^{i,q-i}[\frac{1}{p}] = {}_m\mathrm{E}_2^{i,q-i}[\frac{1}{p}] = 0. \tag{10.12.9}
$$

La proposition s'ensuit.

Proposition 10.13. *Soient r, r' deux nombres rationnels tels que $r > r' > 0$. Alors :*

(i) *Pour tout entier $n \geq 1$, l'homomorphisme canonique* (9.21.3)

$$
\mathscr{O}_{\overline{X}_n} \to \sigma_{n*}(\mathscr{C}_n^{(r)}) \tag{10.13.1}
$$

est presque-injectif. Notons $\mathscr{H}_n^{(r)}$ son conoyau.

(ii) *Il existe un nombre rationnel $\alpha > 0$ tel que pour tout entier $n \geq 1$, le morphisme*

$$
\mathscr{H}_n^{(r)} \to \mathscr{H}_n^{(r')} \tag{10.13.2}
$$

induit par l'homomorphisme $\alpha_n^{r,r'} \colon \mathscr{C}_n^{(r)} \to \mathscr{C}_n^{(r')}$ (9.21.5) *soit annulé par p^α.*

(ii) *Il existe un nombre rationnel $\beta > 0$ tel que pour tous entiers $n, q \geq 1$, le morphisme canonique*

$$
\mathrm{R}^q\sigma_{n*}(\mathscr{C}_n^{(r)}) \to \mathrm{R}^q\sigma_{n*}(\mathscr{C}_n^{(r')}) \tag{10.13.3}
$$

soit annulé par p^β.

Soient n et q deux entiers tels que $n \geq 1$ et $q \geq 0$, $\overline{x}$ un point géométrique de X au-dessus de s. On désigne par X' le localisé strict de X en $\overline{x}$, par

$$
\varphi_{\overline{x}} \colon \widetilde{E} \to \overline{X}'^{\circ}_{\text{fét}} \tag{10.13.4}
$$

le foncteur (7.8.4), par $\mathfrak{E}_{\overline{x}}$ (resp. $\mathfrak{E}_{\overline{x}}(\mathbf{Q})$) la catégorie des voisinages du point de $X_{\text{ét}}$ associé à $\overline{x}$ dans le site $\mathbf{\acute{E}t}_{/X}$ (resp. $\mathbf{Q}$ (9.5)) et pour tout $U \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{E}_{\overline{x}})$, par

$$t_U : \overline{X}'^{\circ} \to \overline{U}^{\circ} \tag{10.13.5}$$

le morphisme canonique. En vertu de 3.7, $\overline{X}'$ est normal et strictement local (et en particulier intègre). D'après ([4] 10.31), on a un isomorphisme canonique

$$(\mathrm{R}^q \sigma_{n*}(\mathscr{C}_n^{(r)}))_{\overline{x}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(\overline{X}'^{\circ}_{\text{fét}}, \varphi_{\overline{x}}(\mathscr{C}_n^{(r)})). \tag{10.13.6}$$

Comme $\overline{X}'$ est $\overline{S}$-plat, $\overline{X}'^{\circ}$ est intègre et non-vide. Soient $\beta\colon \overline{y} \to \overline{X}'^{\circ}$ un point générique géométrique,

$$\nu_{\overline{y}} \colon \overline{X}'^{\circ}_{\text{fét}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{B}_{\pi_1(\overline{X}'^{\circ}, \overline{y})} \tag{10.13.7}$$

le foncteur fibre associé (2.10.3). On note encore $\overline{y}$ le point géométrique de $\overline{X}^{\circ}$ et $\alpha\colon \overline{y} \to X'$ le morphisme induits par β. On obtient ainsi un point $(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x})$ de $X_{\text{ét}} \overleftarrow{\times}_{X_{\text{ét}}} \overline{X}^{\circ}_{\text{ét}}$. Pour tout $U \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{E}_{\overline{x}})$, on note encore $\overline{y}$ le point géométrique de $\overline{U}^{\circ}$ défini par le morphisme composé $t_U \circ \beta \colon \overline{y} \to \overline{U}$ (10.13.5). On observera que $\overline{y}$ est localisé en un point générique de $\overline{U}^{\circ}$ ([5] VIII 7.5). Comme $\overline{U}$ est localement irréductible (3.3), il est la somme des schémas induits sur ses composantes irréductibles. Notons $\overline{U}'$ la composante irréductible de $\overline{U}$ contenant $\overline{y}$. De même, $\overline{U}^{\circ}$ est la somme des schémas induits sur ses composantes irréductibles, et $\overline{U}'^{\circ} = \overline{U}' \times_X X^{\circ}$ est la composante irréductible de $\overline{U}^{\circ}$ contenant $\overline{y}$. Le morphisme t_U se factorise à travers $\overline{U}'^{\circ}$. D'après (9.26.1), on a un isomorphisme canonique de $\mathbf{B}_{\pi_1(\overline{X}'^{\circ}, \overline{y})}$

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ U \in \mathfrak{E}_{\overline{x}}(\mathbf{Q})^{\circ}}} \mathscr{C}_U^{\overline{y},(r)}/p^n \mathscr{C}_U^{\overline{y},(r)} \xrightarrow{\sim} \nu_{\overline{y}}(\varphi_{\overline{x}}(\mathscr{C}_n^{(r)})). \tag{10.13.8}$$

En vertu de ([4] 11.10 et (9.7.6)), celui-ci induit un isomorphisme

$$\mathrm{H}^q(\overline{X}'^{\circ}_{\text{fét}}, \varphi_{\overline{x}}(\mathscr{C}_n^{(r)})) \xrightarrow{\sim} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ U \in \mathfrak{E}_{\overline{x}}(\mathbf{Q})^{\circ}}} \mathrm{H}^q(\pi_1(\overline{U}'^{\circ}, \overline{y}), \mathscr{C}_U^{\overline{y},(r)}/p^n \mathscr{C}_U^{\overline{y},(r)}). \tag{10.13.9}$$

On déduit de (10.13.6) et (10.13.9) un isomorphisme

$$(\mathrm{R}^q \sigma_{n*}(\mathscr{C}_n^{(r)}))_{\overline{x}} \xrightarrow{\sim} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ U \in \mathfrak{E}_{\overline{x}}(\mathbf{Q})^{\circ}}} \mathrm{H}^q(\pi_1(\overline{U}'^{\circ}, \overline{y}), \mathscr{C}_U^{\overline{y},(r)}/p^n \mathscr{C}_U^{\overline{y},(r)}). \tag{10.13.10}$$

D'autre part, on démontre, comme pour (10.3.10), qu'on a un isomorphisme canonique

$$(\mathscr{O}_{\overline{X}_n})_{\overline{x}} \xrightarrow{\sim} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ U \in \mathfrak{E}_{\overline{x}}^{\circ}}} \mathscr{O}_{\overline{X}_n}(\overline{U}'), \tag{10.13.11}$$

où l'on considère $\mathscr{O}_{\overline{X}_n}$ à gauche comme un faisceau de $X_{s,\text{ét}}$ et à droite comme un faisceau de $\overline{X}_{\text{ét}}$.

La fibre du morphisme (10.13.1) en $\overline{x}$ s'identifie à la limite inductive sur la catégorie $\mathfrak{E}_{\overline{x}}(\mathbf{Q})^{\circ}$ du morphisme canonique

$$\mathscr{O}_{\overline{X}_n}(\overline{U}') \to (\mathscr{C}_U^{\overline{y},(r)}/p^n \mathscr{C}_U^{\overline{y},(r)})^{\pi_1(\overline{U}'^{\circ}, \overline{y})}. \tag{10.13.12}$$

Comme les limites inductives filtrantes sont exactes, la proposition résulte alors de ([3] 12.7), compte tenu de 9.4 et de la preuve de 9.14.

Corollaire 10.14. *Soient r, r' deux nombres rationnels tels que $r > r' > 0$. Alors :*

(i) *L'homomorphisme canonique de* $X_{s,\text{ét}}^{\mathbb{N}^\circ}$ (9.28)

$$\mathscr{O}_{\breve{\overline{X}}} \to \breve{\sigma}_*(\breve{\mathscr{C}}^{(r)}) \tag{10.14.1}$$

est presque-injectif. Notons $\breve{\mathscr{H}}^{(r)}$ *son conoyau.*

(ii) *Il existe un nombre rationnel* $\alpha > 0$ *tel que le morphisme*

$$\breve{\mathscr{H}}^{(r)} \to \breve{\mathscr{H}}^{(r')} \tag{10.14.2}$$

induit par l'homomorphisme canonique $\breve{\alpha}^{r,r'} \colon \breve{\mathscr{C}}^{(r)} \to \breve{\mathscr{C}}^{(r')}$ (9.28.7) *soit annulé par* p^α.

(iii) *Il existe un nombre rationnel* $\beta > 0$ *tel que pour tout entier* $q \geq 1$, *le morphisme canonique de* $X_{s,\text{ét}}^{\mathbb{N}^\circ}$

$$\mathrm{R}^q\breve{\sigma}_*(\breve{\mathscr{C}}^{(r)}) \to \mathrm{R}^q\breve{\sigma}_*(\breve{\mathscr{C}}^{(r')}) \tag{10.14.3}$$

soit annulé par p^β.

Cela résulte de 10.13, 6.3(i) et (6.5.5).

Lemme 10.15. *Soient* r, r' *deux nombres rationnels tels que* $r > r' > 0$. *Alors :*

(i) *L'homomorphisme canonique de* $X_{s,\text{zar}}^{\mathbb{N}^\circ}$ (9.28.1)

$$\mathscr{O}_{\breve{\overline{X}}} \to \breve{\tau}_*(\breve{\mathscr{C}}^{(r)}) \tag{10.15.1}$$

est presque-injectif. Notons $\breve{\mathscr{K}}^{(r)}$ *son conoyau.*

(ii) *Il existe un nombre rationnel* $\alpha > 0$ *tel que le morphisme*

$$\breve{\mathscr{K}}^{(r)} \to \breve{\mathscr{K}}^{(r')} \tag{10.15.2}$$

induit par l'homomorphisme canonique $\breve{\alpha}^{r,r'} \colon \breve{\mathscr{C}}^{(r)} \to \breve{\mathscr{C}}^{(r')}$ (9.28.7) *soit annulé par* p^α.

(iii) *Pour tout entier* $q \geq 1$, *il existe un nombre rationnel* $\beta > 0$ *tel que le morphisme canonique de* $X_{s,\text{zar}}^{\mathbb{N}^\circ}$

$$\mathrm{R}^q\breve{\tau}_*(\breve{\mathscr{C}}^{(r)}) \to \mathrm{R}^q\breve{\tau}_*(\breve{\mathscr{C}}^{(r')}) \tag{10.15.3}$$

soit annulé par p^β.

Reprenons les notations de 10.14, de plus, notons $\breve{\mathscr{N}}^{(r)}$ et $\breve{\mathscr{M}}^{(r)}$ les noyaux des morphismes (10.14.1) et (10.15.1), respectivement.

(i) Comme $\breve{\mathscr{M}}^{(r)} = \breve{u}_*(\breve{\mathscr{N}}^{(r)})$, la proposition résulte de 10.14(i).

(ii) Comme $\mathrm{R}^1\breve{u}_*(\mathscr{O}_{\breve{\overline{X}}}) = 0$ d'après (6.5.5) et ([5] VII 4.3), on a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{R}^1\breve{u}_*(\breve{\mathscr{N}}^{(r)}) \to \breve{\mathscr{K}}^{(r)} \to \breve{u}_*(\breve{\mathscr{H}}^{(r)}). \tag{10.15.4}$$

La proposition résulte alors de 10.14(i)-(ii).

(iii) Considérons la suite spectrale de Cartan-Leray

$${}^r\mathrm{E}_2^{i,j} = \mathrm{R}^i\breve{u}_*(\mathrm{R}^j\breve{\sigma}_*(\breve{\mathscr{C}}^{(r)})) \Rightarrow \mathrm{R}^{i+j}\breve{\tau}_*(\breve{\mathscr{C}}^{(r)}), \tag{10.15.5}$$

et notons $({}^r\mathrm{E}_i^q)_{0\leq i\leq q}$ la filtration aboutissement sur $\mathrm{R}^q\breve{\tau}_*(\breve{\mathscr{C}}^r)$, de sorte que l'on a

$${}^r\mathrm{E}_i^q/{}^r\mathrm{E}_{i+1}^q = {}^r\mathrm{E}_\infty^{i,q-i}. \tag{10.15.6}$$

Pour tout entier $0 \leq i \leq q+1$, posons $r_i = r' + (q+1-i)(r-r')/(q+1)$. D'après 10.14(iii), pour tout entier $0 \leq i \leq q-1$, il existe un nombre rationnel $\beta_i > 0$ tel que le morphisme canonique

$${}^{r_i}\mathrm{E}_2^{i,q-i} \to {}^{r_{i+1}}\mathrm{E}_2^{i,q-i} \tag{10.15.7}$$

soit annulé par p^{β_i}. Il en est alors de même du morphisme ${}^{r_i}\mathrm{E}_{\infty}^{i,q-i} \to {}^{r_{i+1}}\mathrm{E}_{\infty}^{i,q-i}$. Par ailleurs, $\mathrm{R}^q\breve{u}_*(\mathscr{O}_{\breve{\overline{X}}}) = 0$ d'après (6.5.5) et ([5] VII 4.3). On en déduit que le morphisme canonique

$$\mathrm{R}^q\breve{u}_*(\breve{\sigma}_*(\breve{\mathscr{C}}^{(r')})) \to \mathrm{R}^q\breve{u}_*(\breve{\mathscr{H}}^{(r')}) \tag{10.15.8}$$

est presque-injectif d'après 10.14(i). Par suite, en vertu de 10.14(ii), il existe un nombre rationnel $\beta_q > 0$ tel que le morphisme canonique

$${}^{r_q}\mathrm{E}_2^{q,0} \to {}^{r_{q+1}}\mathrm{E}_2^{q,0} \tag{10.15.9}$$

soit annulé par p^{β_q}. Il en est alors de même du morphisme ${}^{r_q}\mathrm{E}_{\infty}^{q,0} \to {}^{r_{q+1}}\mathrm{E}_{\infty}^{q,0}$. La proposition s'ensuit en prenant $\beta = \sum_{i=0}^q \beta_i$.

Proposition 10.16. *Soient r, r' deux nombres rationnels tels que $r > r' > 0$. Alors :*

(i) *L'homomorphisme canonique* (9.28.1)

$$\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \to \top_*(\breve{\mathscr{C}}^{(r)}) \tag{10.16.1}$$

est injectif. Notons $\mathscr{L}^{(r)}$ son conoyau.

(ii) *Il existe un nombre rationnel $\alpha > 0$ tel que le morphisme*

$$\mathscr{L}^{(r)} \to \mathscr{L}^{(r')} \tag{10.16.2}$$

induit par l'homomorphisme canonique $\breve{\alpha}^{r,r'} : \breve{\mathscr{C}}^{(r)} \to \breve{\mathscr{C}}^{(r')}$ (9.28.7) *soit annulé par p^{α}.*

(iii) *Pour tout entier $q \geq 1$, il existe un nombre rationnel $\beta > 0$ tel que le morphisme canonique*

$$\mathrm{R}^q\top_*(\breve{\mathscr{C}}^{(r)}) \to \mathrm{R}^q\top_*(\breve{\mathscr{C}}^{(r')}) \tag{10.16.3}$$

soit annulé par p^{β}.

Reprenons les notations de 10.15, de plus, notons $\breve{\mathscr{M}}^{(r)}$ le noyau du morphisme (10.15.1).

(i) Le noyau du morphisme (10.16.1) est canoniquement isomorphe à $\lambda_*(\breve{\mathscr{M}}^{(r)})$ (10.1.10). Il est donc presque-nul en vertu de 10.15(i). Comme $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ est $\mathscr{O}_C$-plat d'après 3.10(iii) (rig-pur dans la terminologie de [1] 2.10.1.4), le morphisme (10.16.1) est injectif.

(ii) Comme $\mathrm{R}^1\lambda_*(\mathscr{O}_{\breve{\overline{X}}}) = 0$ d'après 10.6, on a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{R}^1\lambda_*(\breve{\mathscr{M}}^{(r)}) \to \mathscr{L}^{(r)} \to \lambda_*(\breve{\mathscr{K}}^{(r)}). \tag{10.16.4}$$

La proposition résulte alors de 10.15(i)-(ii).

(iii) La preuve est similaire à celle de 10.15(iii). Considérons la suite spectrale de Cartan-Leray

$${}^r\mathrm{E}_2^{i,j} = \mathrm{R}^i\lambda_*(\mathrm{R}^j\breve{\tau}_*(\breve{\mathscr{C}}^{(r)})) \Rightarrow \mathrm{R}^{i+j}\top_*(\breve{\mathscr{C}}^{(r)}), \tag{10.16.5}$$

et notons $({}^r\mathrm{E}_i^q)_{0\leq i\leq q}$ la filtration aboutissement sur $\mathrm{R}^q\top_*(\breve{\mathscr{C}}^{r)})$, de sorte que l'on a

$${}^r\mathrm{E}_i^q/{}^r\mathrm{E}_{i+1}^q = {}^r\mathrm{E}_{\infty}^{i,q-i}. \tag{10.16.6}$$

Pour tout entier $0 \leq i \leq q+1$, posons $r_i = r' + (q+1-i)(r-r')/(q+1)$. D'après 10.15(iii), pour tout entier $0 \leq i \leq q-1$, il existe un nombre rationnel $\beta_i > 0$ tel que le morphisme canonique

$${}^{r_i}\mathrm{E}_2^{i,q-i} \to {}^{r_{i+1}}\mathrm{E}_2^{i,q-i} \tag{10.16.7}$$

soit annulé par p^{β_i}. Il en est alors de même du morphisme ${}^{r_i}\mathrm{E}_{\infty}^{i,q-i} \to {}^{r_{i+1}}\mathrm{E}_{\infty}^{i,q-i}$. Par ailleurs, $\mathrm{R}^q\breve{u}_*(\mathscr{O}_{\breve{\overline{X}}}) = 0$ d'après 10.6. On en déduit que le morphisme canonique

$$\mathrm{R}^q\lambda_*(\breve{\tau}_*(\breve{\mathscr{C}}^{(r')})) \to \mathrm{R}^q\lambda_*(\breve{\mathscr{K}}^{(r')}) \tag{10.16.8}$$

est presque-injectif d'après 10.15(i). Par suite, en vertu de 10.15(ii), il existe un nombre rationnel $\beta_q > 0$ tel que le morphisme canonique

$$ {}^{r_q}\mathrm{E}_2^{q,0} \to {}^{r_{q+1}}\mathrm{E}_2^{q,0} \tag{10.16.9}$$

soit annulé par p^{β_q}. Il en est alors de même du morphisme ${}^{r_q}\mathrm{E}_\infty^{q,0} \to {}^{r_{q+1}}\mathrm{E}_\infty^{q,0}$. La proposition s'ensuit en prenant $\beta = \sum_{i=0}^q \beta_i$.

Corollaire 10.17. *Soient r, r' deux nombres rationnels tels que $r > r' > 0$.*

(i) *L'homomorphisme canonique*

$$ u^r\colon \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}] \to \top_*(\breve{\mathscr{C}}^{(r)})[\frac{1}{p}] \tag{10.17.1}$$

admet (en tant que morphisme $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-linéaire) un inverse à gauche canonique

$$ v^r\colon \top_*(\breve{\mathscr{C}}^{(r)})[\frac{1}{p}] \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]. \tag{10.17.2}$$

(ii) *Le composé*

$$ \top_*(\breve{\mathscr{C}}^{(r)})[\frac{1}{p}] \xrightarrow{v^r} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}] \xrightarrow{u^{r'}} \top_*(\breve{\mathscr{C}}^{(r')})[\frac{1}{p}] \tag{10.17.3}$$

est l'homomorphisme canonique.

(iii) *Pour tout entier $q \geq 1$, le morphisme canonique*

$$ \mathrm{R}^q\top_*(\breve{\mathscr{C}}^{(r)})[\frac{1}{p}] \to \mathrm{R}^q\top_*(\breve{\mathscr{C}}^{(r')})[\frac{1}{p}] \tag{10.17.4}$$

est nul.

En effet, d'après 10.16(i)-(ii), u^r est injectif et il existe un et un unique morphisme $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-linéaire

$$ v^{r,r'}\colon \top_*(\breve{\mathscr{C}}^{(r)})[\frac{1}{p}] \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}] \tag{10.17.5}$$

tel que $u^{r'} \circ v^{r,r'}$ soit l'homomorphisme canonique $\top_*(\breve{\mathscr{C}}^{(r)})[\frac{1}{p}] \to \top_*(\breve{\mathscr{C}}^{(r')})[\frac{1}{p}]$. Comme on a $u^{r'} \circ v^{r,r'} \circ u^r = u^{r'}$, on en déduit que $v^{r,r'}$ est un inverse à gauche de u^r. On vérifie aussitôt qu'il ne dépend pas de r' ; d'où les propositions (i) et (ii). La proposition (iii) résulte aussitôt de 10.16(iii).

Corollaire 10.18. *L'homomorphisme canonique*

$$ \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}] \to \varinjlim_{r\in\mathbb{Q}_{>0}} \top_*(\breve{\mathscr{C}}^{(r)})[\frac{1}{p}] \tag{10.18.1}$$

est un isomorphisme, et pour tout entier $q \geq 1$,

$$ \varinjlim_{r\in\mathbb{Q}_{>0}} \mathrm{R}^q\top_*(\breve{\mathscr{C}}^{(r)})[\frac{1}{p}] = 0. \tag{10.18.2}$$

10.19. Pour tout nombre rationnel $r \geq 0$ et tout entier $n \geq 1$, on rappelle que la $\overline{\mathscr{B}}_n$-dérivation universelle de $\mathscr{C}_n^{(r)}$ (9.23.2)

$$d_n^{(r)} \colon \mathscr{C}_n^{(r)} \to \sigma_n^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n}) \otimes_{\overline{\mathscr{B}}_n} \mathscr{C}_n^{(r)} \tag{10.19.1}$$

est un $\overline{\mathscr{B}}_n$-champ de Higgs à coefficients dans $\sigma_n^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n})$ (9.29). On note $\mathbb{K}^\bullet(\mathscr{C}_n^{(r)}, p^r d_n^{(r)})$ le complexe de Dolbeault du $\overline{\mathscr{B}}_n$-module de Higgs $(\mathscr{C}_n^{(r)}, p^r d_n^{(r)})$ ([3] 2.8.2) et $\widetilde{\mathbb{K}}^\bullet(\mathscr{C}_n^{(r)}, p^r d_n^{(r)})$ le complexe de Dolbeault augmenté

$$\overline{\mathscr{B}}_n \to \mathbb{K}^0(\mathscr{C}_n^{(r)}, p^r d_n^{(r)}) \to \mathbb{K}^1(\mathscr{C}_n^{(r)}, p^r d_n^{(r)}) \to \mathbb{K}^2(\mathscr{C}_n^{(r)}, p^r d_n^{(r)}) \to \dots, \tag{10.19.2}$$

où $\overline{\mathscr{B}}_n$ est placé en degré -1 et la différentielle $\overline{\mathscr{B}}_n \to \mathscr{C}_n^{(r)}$ est l'homomorphisme canonique.

Pour tous nombres rationnels $r \geq r' \geq 0$, on a (9.23.3)

$$p^r(\mathrm{id} \otimes \alpha_n^{r,r'}) \circ d_n^{(r)} = p^{r'} d_n^{(r')} \circ \alpha_n^{r,r'}, \tag{10.19.3}$$

où $\alpha_n^{r,r'} \colon \mathscr{C}_n^{(r)} \to \mathscr{C}_n^{(r')}$ est l'homomorphisme (9.21.5). Par suite, $\alpha_n^{r,r'}$ induit un morphisme

$$\nu_n^{r,r'} \colon \widetilde{\mathbb{K}}^\bullet(\mathscr{C}_n^{(r)}, p^r d_n^{(r)}) \to \widetilde{\mathbb{K}}^\bullet(\mathscr{C}_n^{(r')}, p^{r'} d_n^{(r')}). \tag{10.19.4}$$

Proposition 10.20. *Pour tous nombres rationnels $r > r' > 0$, il existe un nombre rationnel $\alpha \geq 0$ tel que pour tous entiers n et q avec $n \geq 1$, le morphisme*

$$\mathrm{H}^q(\nu_n^{r,r'}) \colon \mathrm{H}^q(\widetilde{\mathbb{K}}^\bullet(\mathscr{C}_n^{(r)}, p^r d_n^{(r)})) \to \mathrm{H}^q(\widetilde{\mathbb{K}}^\bullet(\mathscr{C}_n^{(r')}, p^{r'} d_n^{(r')})) \tag{10.20.1}$$

soit annulé par p^α.

Soient n un entier ≥ 1, $\overline{x}$ un point géométrique de X au-dessus de s. On désigne par X' le localisé strict de X en $\overline{x}$, par

$$\varphi_{\overline{x}} \colon \widetilde{E} \to \overline{X}'^{\circ}_{\mathrm{fét}} \tag{10.20.2}$$

le foncteur (7.8.4), par $\mathfrak{E}_{\overline{x}}$ (resp. $\mathfrak{E}_{\overline{x}}(\mathbf{Q})$) la catégorie des voisinages du point de $X_{\text{ét}}$ associé à $\overline{x}$ dans le site $\mathbf{\acute{E}t}_{/X}$ (resp. $\mathbf{Q}$ (9.5)) et pour tout $U \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{E}_{\overline{x}})$, par

$$t_U \colon \overline{X}'^{\circ} \to \overline{U}^{\circ} \tag{10.20.3}$$

le morphisme canonique. En vertu de 3.7, $\overline{X}'$ est normal et strictement local (et en particulier intègre). Comme $\overline{X}'$ est $\overline{S}$-plat, $\overline{X}'^{\circ}$ est intègre et non-vide. Soient $\beta \colon \overline{y} \to \overline{X}'^{\circ}$ un point géométrique générique,

$$\nu_{\overline{y}} \colon \overline{X}'^{\circ}_{\mathrm{fét}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{B}_{\pi_1(\overline{X}'^{\circ}, \overline{y})} \tag{10.20.4}$$

le foncteur fibre associé (2.10.3). On note encore $\overline{y}$ le point géométrique de $\overline{X}^{\circ}$ et $\alpha \colon \overline{y} \to X'$ le morphisme induit par β. On obtient ainsi un point $(\overline{y} \rightsquigarrow \overline{x})$ de $X_{\text{ét}} \overleftarrow{\times}_{X_{\text{ét}}} \overline{X}^{\circ}_{\text{ét}}$. Pour tout $U \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{E}_{\overline{x}})$, on note encore $\overline{y}$ le point géométrique de $\overline{U}^{\circ}$ défini par le morphisme composé $t_U \circ \beta \colon \overline{y} \to \overline{U}^{\circ}$ (10.20.3). On observera que $\overline{y}$ est localisé en un point générique de $\overline{U}^{\circ}$ ([5] VIII 7.5). Comme $\overline{U}$ est localement irréductible (3.3), il est la somme des schémas induits sur ses composantes irréductibles. Notons $\overline{U}'$ la composante irréductible de $\overline{U}$ contenant $\overline{y}$. De même, $\overline{U}^{\circ}$ est la somme des schémas induits sur ses composantes irréductibles, et $\overline{U}'^{\circ} = \overline{U}' \times_X X^{\circ}$ est la composante irréductible de $\overline{U}^\circ$ contenant $\overline{y}$. Le morphisme t_U se factorise à travers $\overline{U}'^\circ$. D'après (9.9.4) et (9.26.1), on a des isomorphismes canoniques de $\mathbf{B}_{\pi_1(\overline{X}'^\circ,\overline{y})}$

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ U\in\mathfrak{E}^\circ_{\overline{x}}}} \overline{R}^{\overline{y}}_U/p^n\overline{R}^{\overline{y}}_U \xrightarrow{\sim} \nu_{\overline{y}}(\varphi_{\overline{x}}(\overline{\mathscr{B}}_n)), \tag{10.20.5}$$

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ U\in\mathfrak{E}_{\overline{x}}(\mathbf{Q})^\circ}} \mathscr{C}^{\overline{y},(r)}_U/p^n\mathscr{C}^{\overline{y},(r)}_U \xrightarrow{\sim} \nu_{\overline{y}}(\varphi_{\overline{x}}(\mathscr{C}^{(r)}_n)). \tag{10.20.6}$$

Les anneaux sous-jacents à ces représentations sont canoniquement isomorphes aux fibres de $\overline{\mathscr{B}}_n$ et $\mathscr{C}^{(r)}_n$ en $\rho(\overline{y}\rightsquigarrow\overline{x})$ ([4] 10.30 et 9.8). D'autre part, on a des isomorphismes canoniques (10.13.11) et (10.3.10)

$$(\mathscr{O}_{\overline{X}_n})_{\overline{x}} \xrightarrow{\sim} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ U\in\mathfrak{E}^\circ_{\overline{x}}}} \mathscr{O}_{\overline{X}_n}(\overline{U}'), \tag{10.20.7}$$

$$(\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n})_{\overline{x}} \xrightarrow{\sim} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ U\in\mathfrak{E}^\circ_{\overline{x}}}} \widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n}(\overline{U}'), \tag{10.20.8}$$

où l'on considère $\mathscr{O}_{\overline{X}_n}$ et $\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n}$ à gauche comme des faisceaux de $X_{s,\text{ét}}$ et à droite comme des faisceaux de $\overline{X}_{\text{ét}}$. Ces modules sont canoniquement isomorphes aux fibres de $\sigma^*_s(\mathscr{O}_{\overline{X}_n})$ et $\sigma^*_s(\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n})$ en $\rho(\overline{y}\rightsquigarrow\overline{x})$ ([4] (10.20.1)). Il résulte de 9.27 que la fibre de la dérivation $d^{(r)}_n$ (9.23.2) en $\rho(\overline{y}\rightsquigarrow\overline{x})$ s'identifie à la limite inductive sur la catégorie $\mathfrak{E}_{\overline{x}}(\mathbf{Q})^\circ$ des $(\overline{R}^{\overline{y}}_U/p^n\overline{R}^{\overline{y}}_U)$-dérivations universelles

$$\mathscr{C}^{\overline{y},(r)}_U/p^n\mathscr{C}^{\overline{y},(r)}_U \to \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{X/S}(U)\otimes_{\mathscr{O}_X(U)}(\mathscr{C}^{\overline{y},(r)}_U/p^n\mathscr{C}^{\overline{y},(r)}_U). \tag{10.20.9}$$

D'après 8.5, la famille des points $\rho(\overline{y}\rightsquigarrow\overline{x})$ de $\widetilde{E}_s$ est conservative. Comme les limites inductives filtrantes sont exactes, la proposition résulte alors de ([3] 12.3(i)), compte tenu de 9.4 et de la preuve de 9.14.

10.21. Pour tout nombre rationnel $r\geq 0$, on note encore

$$\breve{d}^{(r)}\colon \breve{\mathscr{C}}^{(r)} \to \top^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})\otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}}\breve{\mathscr{C}}^{(r)} \tag{10.21.1}$$

la $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-dérivation induite par $\breve{d}^{(r)}$ (9.28.9) et l'isomorphisme (10.2.6), que l'on identifie à la $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-dérivation universelle de $\breve{\mathscr{C}}^{(r)}$. C'est un $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-champ de Higgs à coefficients dans $\top^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})$ (9.29). On désigne par $\mathbb{K}^\bullet(\breve{\mathscr{C}}^{(r)},p^r\breve{d}^{(r)})$ le complexe de Dolbeault du $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-module de Higgs $(\breve{\mathscr{C}}^{(r)},p^r\breve{d}^{(r)})$ et par $\widetilde{\mathbb{K}}^\bullet(\breve{\mathscr{C}}^{(r)},p^r\breve{d}^{(r)})$ le complexe de Dolbeault augmenté

$$\breve{\overline{\mathscr{B}}} \to \mathbb{K}^0(\breve{\mathscr{C}}^{(r)},p^r\breve{d}^{(r)}) \to \mathbb{K}^1(\breve{\mathscr{C}}^{(r)},p^r\breve{d}^{(r)}) \to \cdots \to \mathbb{K}^n(\breve{\mathscr{C}}^{(r)},p^r\breve{d}^{(r)}) \to \ldots, \tag{10.21.2}$$

où $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$ est placé en degré -1 et la différentielle $\breve{\overline{\mathscr{B}}}\to\breve{\mathscr{C}}^{(r)}$ est l'homomorphisme canonique.

Pour tous nombres rationnels $r\geq r'\geq 0$, on a (9.28.10)

$$p^r(\mathrm{id}\otimes\breve{\alpha}^{r,r'})\circ\breve{d}^{(r)} = p^{r'}\breve{d}^{(r')}\circ\breve{\alpha}^{r,r'}, \tag{10.21.3}$$

où $\breve{\alpha}^{r,r'}\colon\breve{\mathscr{C}}^{(r)}\to\breve{\mathscr{C}}^{(r')}$ est l'homomorphisme (9.28.7). Par suite, $\breve{\alpha}^{r,r'}$ induit un morphisme de complexes

$$\breve{\nu}^{r,r'}\colon \widetilde{\mathbb{K}}^\bullet(\breve{\mathscr{C}}^{(r)},p^r\breve{d}^{(r)}) \to \widetilde{\mathbb{K}}^\bullet(\breve{\mathscr{C}}^{(r')},p^{r'}\breve{d}^{(r')}). \tag{10.21.4}$$

On note $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$ la catégorie des $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-modules de $\widetilde{E}_s^{\mathbb{N}^\circ}$ à isogénie près (5.2), et on désigne par $\mathbb{K}^\bullet_{\mathbb{Q}}(\breve{\mathscr{C}}^{(r)}, p^r\breve{d}^{(r)})$ et $\widetilde{\mathbb{K}}^\bullet_{\mathbb{Q}}(\breve{\mathscr{C}}^{(r)}, p^r\breve{d}^{(r)})$ les images des complexes $\mathbb{K}^\bullet(\breve{\mathscr{C}}^{(r)}, p^r\breve{d}^{(r)})$ et $\widetilde{\mathbb{K}}^\bullet(\breve{\mathscr{C}}^{(r)}, p^r\breve{d}^{(r)})$ dans $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$.

Proposition 10.22. *Pour tous nombres rationnels $r > r' > 0$ et tout entier q, le morphisme canonique* (10.21.4)

$$\mathrm{H}^q(\breve{\nu}^{r,r'}_{\mathbb{Q}})\colon \mathrm{H}^q(\widetilde{\mathbb{K}}^\bullet_{\mathbb{Q}}(\breve{\mathscr{C}}^{(r)}, p^r\breve{d}^{(r)})) \to \mathrm{H}^q(\widetilde{\mathbb{K}}^\bullet_{\mathbb{Q}}(\breve{\mathscr{C}}^{(r')}, p^{r'}\breve{d}^{(r')})) \tag{10.22.1}$$

est nul.

Cela résulte de 10.20 et 6.3(i).

Corollaire 10.23. *Soient r, r' deux nombres rationnels tels que $r > r' > 0$.*

(i) *Le morphisme canonique*

$$u^r\colon \breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{H}^0(\mathbb{K}^\bullet_{\mathbb{Q}}(\breve{\mathscr{C}}^{(r)}, p^r\breve{d}^{(r)})) \tag{10.23.1}$$

admet un inverse à gauche canonique

$$v^r\colon \mathrm{H}^0(\mathbb{K}^\bullet_{\mathbb{Q}}(\breve{\mathscr{C}}^{(r)}, p^r\breve{d}^{(r)})) \to \breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}. \tag{10.23.2}$$

(ii) *Le composé*

$$\mathrm{H}^0(\mathbb{K}^\bullet_{\mathbb{Q}}(\breve{\mathscr{C}}^{(r)}, p^r\breve{d}^{(r)})) \xrightarrow{v^r} \breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{u^{r'}} \mathrm{H}^0(\mathbb{K}^\bullet_{\mathbb{Q}}(\breve{\mathscr{C}}^{(r')}, p^{r'}\breve{d}^{(r')})) \tag{10.23.3}$$

est le morphisme canonique.

(iii) *Pour tout entier $q \geq 1$, le morphisme canonique*

$$\mathrm{H}^q(\mathbb{K}^\bullet_{\mathbb{Q}}(\breve{\mathscr{C}}^{(r)}, p^r\breve{d}^{(r)})) \to \mathrm{H}^q(\mathbb{K}^\bullet_{\mathbb{Q}}(\breve{\mathscr{C}}^{(r')}, p^{r'}\breve{d}^{(r')})) \tag{10.23.4}$$

est nul.

En effet, considérons le diagramme commutatif canonique (sans la flèche pointillée)

$$\begin{tikzcd}
\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "u^r"] \arrow[d, equal] & \mathrm{H}^0(\mathbb{K}^\bullet_{\mathbb{Q}}(\breve{\mathscr{C}}^{(r)}, p^r\breve{d}^{(r)})) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\varpi^{r,r'}"] \arrow[dl, dotted, "v^{r,r'}"'] & \mathrm{H}^0(\widetilde{\mathbb{K}}^\bullet_{\mathbb{Q}}(\breve{\mathscr{C}}^{(r)}, p^r\breve{d}^{(r)})) \arrow[d, "\mathrm{H}^0(\breve{\nu}^{r,r'}_{\mathbb{Q}})"] \\
\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "u^{r'}"'] & \mathrm{H}^0(\mathbb{K}^\bullet_{\mathbb{Q}}(\breve{\mathscr{C}}^{(r')}, p^{r'}\breve{d}^{(r')})) \arrow[r, two heads] & \mathrm{H}^0(\widetilde{\mathbb{K}}^\bullet_{\mathbb{Q}}(\breve{\mathscr{C}}^{(r')}, p^{r'}\breve{d}^{(r')}))
\end{tikzcd} \tag{10.23.5}$$

Il résulte de 10.22 que u^r et par suite $u^{r'}$ sont injectifs, et qu'il existe un et un unique morphisme $v^{r,r'}$ comme ci-dessus tel que $\varpi^{r,r'} = u^{r'} \circ v^{r,r'}$. Comme on a $u^{r'} \circ v^{r,r'} \circ u^r = u^{r'}$, on en déduit que $v^{r,r'}$ est un inverse à gauche de u^r. On vérifie aussitôt qu'il ne dépend pas de r' ; d'où les propositions (i) et (ii). La proposition (iii) résulte aussitôt de 10.22.

Corollaire 10.24. *Le morphisme canonique*

$$\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}} \to \varinjlim_{r\in\mathbb{Q}_{>0}} \mathrm{H}^0(\mathbb{K}^\bullet_{\mathbb{Q}}(\breve{\mathscr{C}}^{(r)}, p^r\breve{d}^{(r)})) \tag{10.24.1}$$

est un isomorphisme, et pour tout entier $q \geq 1$,

$$\varinjlim_{r\in\mathbb{Q}_{>0}} \mathrm{H}^q(\mathbb{K}^\bullet_{\mathbb{Q}}(\breve{\mathscr{C}}^{(r)}, p^r\breve{d}^{(r)})) = 0. \tag{10.24.2}$$

Cela résulte de 10.23.

Remarque 10.25. Les limites inductives filtrantes ne sont pas a priori représentables dans la catégorie $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$.

11. Modules de Dolbeault

11.1. Les hypothèses et notations générales de § 9 sont en vigueur dans cette section. On désigne, de plus, par $\mathbf{Mod}(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$ la catégorie des $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-modules de $\widetilde{E}_s^{\mathbb{N}^\circ}$ (9.28), par $\mathbf{Mod}^{\mathrm{ad}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$ (resp. $\mathbf{Mod}^{\mathrm{atf}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$) la sous-catégorie pleine formée des $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-modules adiques (resp. $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-modules adiques de type fini) (6.16) et par $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$ (resp. $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ad}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$, resp. $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{atf}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$) la catégorie des objets de $\mathbf{Mod}(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$ (resp. $\mathbf{Mod}^{\mathrm{ad}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$, resp. $\mathbf{Mod}^{\mathrm{atf}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$) à isogénie près (5.1.1). La catégorie $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$ est alors abélienne et les foncteurs canoniques

$$\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{atf}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}) \to \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ad}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}) \to \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}) \tag{11.1.1}$$

sont pleinement fidèles.

On désigne par $\mathfrak{X}$ le $\mathscr{S}$-schéma formel complété p-adique de $\overline{X}$ et par $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ le complété p-adique du $\mathscr{O}_{\overline{X}}$-module $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}/\overline{S}} = \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{X/S} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_{\overline{X}}$ (cf. 2.1). On note $\mathbf{Mod}^{\mathrm{coh}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ (resp. $\mathbf{Mod}^{\mathrm{coh}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}])$) la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules (resp. $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-modules) cohérents de $X_{s,\mathrm{zar}}$ (5.13).

On désigne par

$$\top\colon (\widetilde{E}_s^{\mathbb{N}^\circ}, \breve{\overline{\mathscr{B}}}) \to (X_{s,\mathrm{zar}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) \tag{11.1.2}$$

le morphisme de topos annelés défini dans (10.1.11). Le foncteur $\top_*$ induit un foncteur additif et exact à gauche que l'on note encore

$$\top_*\colon \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}) \to \mathbf{Mod}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]). \tag{11.1.3}$$

D'après 5.14, le foncteur $\top^*$ induit un foncteur additif que l'on note encore

$$\top^*\colon \mathbf{Mod}^{\mathrm{coh}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]) \to \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{atf}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}). \tag{11.1.4}$$

Pour tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-module cohérent $\mathscr{F}$ et tout $\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}$-module $\mathscr{G}$, on a un homomorphisme canonique bifonctoriel

$$\mathrm{Hom}_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}}(\top^*(\mathscr{F}), \mathscr{G}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]}(\mathscr{F}, \top_*(\mathscr{G})), \tag{11.1.5}$$

qui est injectif d'après (5.13.3) et 5.14. On appelle abusivement l'*adjoint* d'un morphisme $\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}$-linéaire $\top^*(\mathscr{F}) \to \mathscr{G}$ son image par l'homomorphisme (11.1.5).

On note

$$\mathrm{R}\top_*\colon \mathbf{D}^+(\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}})) \to \mathbf{D}^+(\mathbf{Mod}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}])), \tag{11.1.6}$$

$$\mathrm{R}^q\top_*\colon \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}) \to \mathbf{Mod}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]), \quad (q \in \mathbb{N}), \tag{11.1.7}$$

les foncteurs dérivés droits du foncteur $\top_*$ (11.1.3). Ces notations n'induisent aucune confusion avec celles des foncteurs dérivés droits du foncteur $\top_*\colon \mathbf{Mod}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}) \to \mathbf{Mod}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$, puisque le foncteur de localisation $\mathbf{Mod}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}) \to \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$ est exact et transforme les objets injectifs en des objets injectifs.

11.2. Soient $\mathscr{M}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module, $\mathscr{N}$ un $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-module, q un entier ≥ 0. Le morphisme d'adjonction $\mathscr{M} \to \top_*(\top^*(\mathscr{M}))$ et le cup-produit induisent un morphisme bifonctoriel

$$\mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathrm{R}^q\top_*(\mathscr{N}) \to \mathrm{R}^q\top_*(\top^*(\mathscr{M}) \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}} \mathscr{N}). \tag{11.2.1}$$

On peut faire les remarques suivantes :

(i) Pour tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module $\mathscr{M}'$, le composé

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{M}' \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathrm{R}^q\top_*(\mathscr{N}) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathrm{R}^q\top_*(\top^*(\mathscr{M}') \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}} \mathscr{N}) \arrow[d] \\
& \mathrm{R}^q\top_*(\top^*(\mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{M}') \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}} \mathscr{N})
\end{tikzcd} \tag{11.2.2}$$

des morphismes induits par les morphismes (11.2.1) relatifs à $\mathscr{M}$ et $\mathscr{M}'$, n'est autre que le morphisme (11.2.1) relatif à $\mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{M}'$.

(ii) Lorsque $q = 0$, le morphisme (11.2.1) est le composé

$$\mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \top_*(\mathscr{N}) \to \top_*(\top^*(\mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \top_*(\mathscr{N}))) \to \top_*(\top^*(\mathscr{M}) \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}} \mathscr{N}), \tag{11.2.3}$$

où la première flèche est le morphisme d'adjonction et la seconde flèche est induite par le morphisme canonique $\top^*(\top_*(\mathscr{N})) \to \mathscr{N}$. Son adjoint

$$\top^*(\mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \top_*(\mathscr{N})) \to \top^*(\mathscr{M}) \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}} \mathscr{N} \tag{11.2.4}$$

est donc induit par le morphisme canonique $\top^*(\top_*(\mathscr{N})) \to \mathscr{N}$.

11.3. Soient $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-module cohérent, $\mathscr{G}$ un $\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}$-module, q un entier ≥ 0. Compte tenu de 5.14, le morphisme (11.2.1) induit un morphisme bifonctoriel

$$\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]} \mathrm{R}^q\top_*(\mathscr{G}) \to \mathrm{R}^q\top_*(\top^*(\mathscr{F}) \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}} \mathscr{G}). \tag{11.3.1}$$

On peut faire les remarques suivantes :

(i) Soit $\mathscr{F}'$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-module cohérent. Il résulte de 11.2(i) que le composé

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]} \mathscr{F}' \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]} \mathrm{R}^q\top_*(\mathscr{G}) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]} \mathrm{R}^q\top_*(\top^*(\mathscr{F}') \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}} \mathscr{G}) \arrow[d] \\
& \mathrm{R}^q\top_*(\top^*(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]} \mathscr{F}') \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}} \mathscr{G})
\end{tikzcd} \tag{11.3.2}$$

des morphismes induits par les morphismes (11.3.1) relatifs à $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$, n'est autre que le morphisme (11.3.1) relatif à $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]} \mathscr{F}'$.

(ii) Soient $\mathscr{L}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-module cohérent, $u\colon \top^*(\mathscr{L}) \to \mathscr{G}$ un morphisme $\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}$-linéaire, $v\colon \mathscr{L} \to \top_*(\mathscr{G})$ le morphisme adjoint (11.1.5). Il résulte alors de 11.2(ii) et 5.14 que le morphisme

$$\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]} \mathscr{L} \to \top_*(\top^*(\mathscr{F}) \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}} \mathscr{G}) \tag{11.3.3}$$

induit par (11.3.1) et v, est l'adjoint du morphisme

$$\top^*(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]} \mathscr{L}) \to \top^*(\mathscr{F}) \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}} \mathscr{G} \tag{11.3.4}$$

induit par u.

Lemme 11.4. (i) *Soient* $\mathscr{M}$ *un* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$*-module localement libre de type fini,* $\mathscr{N}$ *un* $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$*-module, q un entier* ≥ 0*. Alors le morphisme canonique* (11.2.1)

$$\mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathrm{R}^q\top_*(\mathscr{N}) \to \mathrm{R}^q\top_*(\top^*(\mathscr{M}) \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}} \mathscr{N}) \tag{11.4.1}$$

est un isomorphisme.

(ii) *Soient* $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$*-module localement projectif de type fini* (2.8)*,* $\mathscr{G}$ *un* $\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}$*-module, q un entier* ≥ 0*. Alors le morphisme canonique* (11.3.1)

$$\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]} \mathrm{R}^q\top_*(\mathscr{G}) \to \mathrm{R}^q\top_*(\top^*(\mathscr{F}) \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}} \mathscr{G}) \tag{11.4.2}$$

est un isomorphisme.

On se limite à démontrer (ii) ; la preuve de (i) est similaire et plus simple. Il existe un recouvrement ouvert de Zariski $(U_i)_{i\in I}$ de X tel que pour tout $i \in I$, la restriction de $\mathscr{F}$ à $(U_i)_s$ soit un facteur direct d'un $(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|U_i)[\frac{1}{p}]$-module libre de type fini. Compte tenu de 8.15, on peut alors se borner au cas où $\mathscr{F}$ est un facteur direct d'un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-module libre de type fini, et même au cas où $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-module libre de type fini, auquel cas l'assertion est évidente.

11.5. On désigne par $\mathbf{IH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}, \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})$ la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-isogénies de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ (5.8) et par $\mathbf{IH}^{\mathrm{coh}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}, \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})$ la sous-catégorie pleine formée des quadruplets $(\mathscr{M}, \mathscr{N}, u, \theta)$ tels que $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ soient des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents. Ce sont des catégories additives. On note $\mathbf{IH}_{\mathbb{Q}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}, \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})$ (resp. $\mathbf{IH}^{\mathrm{coh}}_{\mathbb{Q}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}, \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})$) la catégorie des objets de $\mathbf{IH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}, \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})$ (resp. $\mathbf{IH}^{\mathrm{coh}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}, \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})$) à isogénie près (5.1.1).

On sous-entend par $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-module de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$, un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-module de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}[\frac{1}{p}]$ ([3] 2.8). Dans la suite, on omettra le champ de Higgs de la notation d'un module de Higgs lorsqu'on en n'a pas explicitement besoin. On désigne par $\mathbf{MH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})$ la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-module de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ et par $\mathbf{MH}^{\mathrm{coh}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})$ la sous-catégorie pleine formée des modules de Higgs dont le $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-module sous-jacent est cohérent. Le foncteur (5.15.1)

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{IH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}, \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) & \to & \mathbf{MH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) \\ (\mathscr{M}, \mathscr{N}, u, \theta) & \mapsto & (\mathscr{M}_{\mathbb{Q}_p}, (\mathrm{id} \otimes u^{-1}_{\mathbb{Q}_p}) \circ \theta_{\mathbb{Q}_p}) \end{array} \tag{11.5.1}$$

induit un foncteur

$$\mathbf{IH}_{\mathbb{Q}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}, \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) \to \mathbf{MH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}). \tag{11.5.2}$$

D'après 5.17, celui-ci induit une équivalence de catégories

$$\mathbf{IH}^{\mathrm{coh}}_{\mathbb{Q}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}, \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{MH}^{\mathrm{coh}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}). \tag{11.5.3}$$

Définition 11.6. On appelle $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$*-fibré de Higgs à coefficients dans* $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-module de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ dont le $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-module sous-jacent est localement projectif de type fini (2.8).

11.7. Soit r un nombre rationnel ≥ 0. On note encore

$$\breve{d}^{(r)} \colon \breve{\mathscr{C}}^{(r)} \to \top^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}} \breve{\mathscr{C}}^{(r)} \tag{11.7.1}$$

la $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-dérivation induite par $\breve{d}^{(r)}$ (9.28.9) et l'isomorphisme (10.2.6), que l'on identifie à la $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-dérivation universelle de $\breve{\mathscr{C}}^{(r)}$. C'est un $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-champ de Higgs à coefficients dans $\top^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})$ (9.29). On désigne par Ξ^r la catégorie des p^r-isoconnexions intégrables relativement à l'extension $\breve{\mathscr{C}}^{(r)}/\breve{\overline{\mathscr{B}}}$ (5.10) et par $\mathbf{IH}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}, \top^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}))$ la catégorie des $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-isogénies de Higgs à coefficients dans $\top^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})$ (5.8). Ce sont deux catégories additives. On note $\Xi^r_{\mathbb{Q}}$ (resp. $\mathbf{IH}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}, \top^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}))$) la catégorie des objets de Ξ^r (resp. $\mathbf{IH}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}, \top^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}))$) à isogénie près (5.1.1). D'après 5.12 et 9.29(iii), on a un foncteur naturel

$$\Xi^r \to \mathbf{IH}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}, \top^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})). \tag{11.7.2}$$

En particulier, on peut associer fonctoriellement à tout objet de $\Xi^r_{\mathbb{Q}}$ un complexe de Dolbeault dans $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$ (cf. 5.9).

Considérons le foncteur

$$\mathfrak{S}^r \colon \mathbf{Mod}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}) \to \Xi^r, \quad \mathscr{M} \mapsto (\breve{\mathscr{C}}^{(r)} \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}} \mathscr{M}, \breve{\mathscr{C}}^{(r)} \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}} \mathscr{M}, \mathrm{id}, p^r \breve{d}^{(r)} \otimes \mathrm{id}), \tag{11.7.3}$$

où $\breve{d}^{(r)}$ est la $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-dérivation universelle de $\breve{\mathscr{C}}^{(r)}$ (10.21.1), et notons encore

$$\mathfrak{S}^r \colon \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}) \to \Xi^r_{\mathbb{Q}} \tag{11.7.4}$$

le foncteur induit. Considérons par ailleurs le foncteur

$$\mathscr{K}^r \colon \Xi^r \to \mathbf{Mod}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}), \quad (\mathscr{F}, \mathscr{G}, u, \nabla) \mapsto \ker(\nabla), \tag{11.7.5}$$

et notons encore

$$\mathscr{K}^r \colon \Xi^r_{\mathbb{Q}} \to \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}) \tag{11.7.6}$$

le foncteur induit. Il est clair que le foncteur (11.7.3) est un adjoint à gauche du foncteur (11.7.5). Par suite, le foncteur (11.7.4) est un adjoint à gauche du foncteur (11.7.6).

D'après 5.12, si $(\mathscr{N}, \mathscr{N}', v, \theta)$ est une $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-isogénie de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$,

$$(\breve{\mathscr{C}}^{(r)} \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}} \top^*(\mathscr{N}), \breve{\mathscr{C}}^{(r)} \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}} \top^*(\mathscr{N}'), \mathrm{id} \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}} \top^*(v), p^r \breve{d}^{(r)} \otimes \top^*(v) + \mathrm{id} \otimes \top^*(\theta)) \tag{11.7.7}$$

est un objet de Ξ^r. On obtient ainsi un foncteur

$$\top^{r+} \colon \mathbf{IH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}, \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) \to \Xi^r. \tag{11.7.8}$$

D'après (11.5.3), celui-ci induit un foncteur que l'on note encore

$$\top^{r+} \colon \mathbf{MH}^{\mathrm{coh}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) \to \Xi^r_{\mathbb{Q}}. \tag{11.7.9}$$

Soit $(\mathscr{F}, \mathscr{G}, u, \nabla)$ un objet de Ξ^r. Compte tenu de 11.4(i), ∇ induit un morphisme $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-linéaire :

$$\top_*(\nabla) \colon \top_*(\mathscr{F}) \to \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \top_*(\mathscr{G}). \tag{11.7.10}$$

On déduit facilement de 11.3(i) que $(\top_*(\mathscr{F}), \top_*(\mathscr{G}), \top_*(u), \top_*(\nabla))$ est une $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-isogénie de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$. On obtient ainsi un foncteur

$$\top^r_+ \colon \Xi^r \to \mathbf{IH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}, \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}). \tag{11.7.11}$$

Le composé des foncteurs (11.7.11) et (11.5.1) induit un foncteur que l'on note encore

$$\top^r_+\colon \Xi^r_{\mathbb{Q}} \to \mathbf{MH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}). \tag{11.7.12}$$

Il est clair que le foncteur (11.7.8) est un adjoint à gauche du foncteur (11.7.11). On en déduit que pour tous $\mathscr{N} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{MH}^{\mathrm{coh}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}))$ et $\mathscr{A} \in \mathrm{Ob}(\Xi^r_{\mathbb{Q}})$, on a un homomorphisme canonique bifonctoriel

$$\mathrm{Hom}_{\Xi^r_{\mathbb{Q}}}(\top^{r+}(\mathscr{N}), \mathscr{A}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{MH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})}(\mathscr{N}, \top^r_+(\mathscr{A})), \tag{11.7.13}$$

qui est injectif d'après 5.16 et 5.17. On appelle abusivement l'*adjoint* d'un morphisme $\top^{r+}(\mathscr{N}) \to \mathscr{A}$ de $\Xi^r_{\mathbb{Q}}$, son image par l'homomorphisme (11.7.13).

11.8. Soient r, r' deux nombres rationnels tels que $r \geq r' \geq 0$, $(\mathscr{F}, \mathscr{G}, u, \nabla)$ une p^r-isoconnexion intégrable relativement à l'extension $\breve{\mathscr{C}}^{(r)}/\breve{\overline{\mathscr{B}}}$. D'après (10.21.3), il existe un et un unique morphisme $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-linéaire

$$\nabla'\colon \breve{\mathscr{C}}^{(r')} \otimes_{\breve{\mathscr{C}}^{(r)}} \mathscr{F} \to \top^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}} \breve{\mathscr{C}}^{(r')} \otimes_{\breve{\mathscr{C}}^{(r)}} \mathscr{G} \tag{11.8.1}$$

tel que pour toutes sections locales x' de $\breve{\mathscr{C}}^{(r')}$ et s de $\mathscr{F}$, on ait

$$\nabla'(x' \otimes_{\breve{\mathscr{C}}^{(r)}} s) = p^{r'}\breve{d}^{(r')}(x') \otimes_{\breve{\mathscr{C}}^{(r)}} u(s) + x' \otimes_{\breve{\mathscr{C}}^{(r)}} \nabla(s). \tag{11.8.2}$$

Le quadruplet $(\breve{\mathscr{C}}^{(r')} \otimes_{\breve{\mathscr{C}}^{(r)}} \mathscr{F}, \breve{\mathscr{C}}^{(r')} \otimes_{\breve{\mathscr{C}}^{(r)}} \mathscr{G}, \mathrm{id} \otimes_{\breve{\mathscr{C}}^{(r)}} u, \nabla')$ est une $p^{r'}$-isoconnexion intégrable relativement à l'extension $\breve{\mathscr{C}}^{(r')}/\breve{\overline{\mathscr{B}}}$. On obtient ainsi un foncteur

$$\epsilon^{r,r'}\colon \Xi^r \to \Xi^{r'}. \tag{11.8.3}$$

Celui-ci induit un foncteur que l'on note encore

$$\epsilon^{r,r'}\colon \Xi^r_{\mathbb{Q}} \to \Xi^{r'}_{\mathbb{Q}}. \tag{11.8.4}$$

On a un isomorphisme canonique de foncteurs de $\mathbf{Mod}(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$ dans $\Xi^{r'}$ (resp. de $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$ dans $\Xi^{r'}_{\mathbb{Q}}$)

$$\epsilon^{r,r'} \circ \mathfrak{S}^r \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}^{r'}. \tag{11.8.5}$$

Par ailleurs, on a un isomorphisme canonique de foncteurs de $\mathbf{IH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}, \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})$ dans $\Xi^{r'}$ (resp. de $\mathbf{MH}^{\mathrm{coh}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})$ dans $\Xi^{r'}_{\mathbb{Q}}$)

$$\epsilon^{r,r'} \circ \top^{r+} \xrightarrow{\sim} \top^{r'+}. \tag{11.8.6}$$

Le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d, "\breve{\alpha}^{r,r'} \otimes_{\breve{\mathscr{C}}^{(r)}} \mathrm{id}"'] & \top^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}} \mathscr{G} \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}} \breve{\alpha}^{r,r'} \otimes_{\breve{\mathscr{C}}^{(r)}} \mathrm{id}"] \\ \breve{\mathscr{C}}^{(r')} \otimes_{\breve{\mathscr{C}}^{(r)}} \mathscr{F} \arrow[r, "\nabla'"] & \top^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}} \breve{\mathscr{C}}^{(r')} \otimes_{\breve{\mathscr{C}}^{(r)}} \mathscr{G} \end{tikzcd} \tag{11.8.7}$$

est clairement commutatif. On en déduit un morphisme canonique de foncteurs de Ξ^r dans $\mathbf{Mod}(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$ (resp. de $\Xi^r_{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$)

$$\mathscr{K}^r \to \mathscr{K}^{r'} \circ \epsilon^{r,r'}. \tag{11.8.8}$$

On en déduit aussi un morphisme canonique de foncteurs de Ξ^r dans $\mathbf{IH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}, \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})$ (resp. de $\Xi^r_{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbf{MH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})$)

$$\top^r_+ \longrightarrow \top^{r'}_+ \circ \epsilon^{r,r'}. \tag{11.8.9}$$

Pour tout nombre rationnel r'' tel $r' \geq r'' \geq 0$, on a un isomorphisme canonique de foncteurs de Ξ^r dans $\Xi^{r''}$ (resp. de $\Xi^r_{\mathbb{Q}}$ dans $\Xi^{r''}_{\mathbb{Q}}$)

$$\epsilon^{r',r''} \circ \epsilon^{r,r'} \xrightarrow{\sim} \epsilon^{r,r''}. \tag{11.8.10}$$

Remarque 11.9. Sous les hypothèses de (11.8), $(\breve{\mathscr{C}}^{(r')} \otimes_{\breve{\mathscr{C}}^{(r)}} \mathscr{F}, \breve{\mathscr{C}}^{(r')} \otimes_{\breve{\mathscr{C}}^{(r)}} \mathscr{G}, \mathrm{id} \otimes_{\breve{\mathscr{C}}^{(r)}} u, p^{r-r'}\nabla')$ est la p^r-isoconnexion intégrable relativement à l'extension $\breve{\mathscr{C}}^{(r')}/\breve{\overline{\mathscr{B}}}$ déduite de $(\mathscr{F}, \mathscr{G}, u, \nabla)$ par extension des scalaires par $\breve{\alpha}^{r,r'}$, définie dans 5.11. Ce décalage s'explique par le fait que l'homomorphisme canonique $\Omega^1_{\breve{\mathscr{C}}^{(r)}/\breve{\overline{\mathscr{B}}}} \to \Omega^1_{\breve{\mathscr{C}}^{(r')}/\breve{\overline{\mathscr{B}}}}$ s'identifie à

$$p^{r-r'}\mathrm{id} \otimes \breve{\alpha}^{r,r'} \colon \top^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}} \breve{\mathscr{C}}^{(r)} \to \top^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}} \breve{\mathscr{C}}^{(r')}. \tag{11.9.1}$$

Définition 11.10. Soient $\mathscr{M}$ un objet de $\mathbf{Mod}^{\mathrm{atf}}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$ (11.1), $\mathscr{N}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-fibré de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ (11.6).

(i) Soit r un nombre rationnel > 0. On dit que $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ sont *r-associés* s'il existe un isomorphisme de $\Xi^r_{\mathbb{Q}}$

$$\alpha\colon \top^{r+}(\mathscr{N}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}^r(\mathscr{M}). \tag{11.10.1}$$

On dit alors aussi que le triplet $(\mathscr{M}, \mathscr{N}, \alpha)$ est *r-admissible*.

(ii) On dit que $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ sont *associés* s'il existe un nombre rationnel $r > 0$ tel que $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ soient r-associés.

On notera que pour tous nombres rationnels $r \geq r' > 0$, si $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ sont r-associés, ils sont r'-associés, compte tenu de (11.8.5) et (11.8.6).

Définition 11.11. (i) On appelle *$\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}$-module de Dolbeault* tout objet de $\mathbf{Mod}^{\mathrm{atf}}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$ pour lequel il existe un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-fibré de Higgs associé, à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$.

(ii) On dit qu'un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-fibré de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ est *soluble* s'il admet un module de Dolbeault associé.

On désigne par $\mathbf{Mod}^{\mathrm{Dolb}}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Mod}^{\mathrm{atf}}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$ formée des $\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}$-modules de Dolbeault, et par $\mathbf{MH}^{\mathrm{sol}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{MH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})$ formée des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-fibrés de Higgs solubles à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$.

Proposition 11.12. *Tout $\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}$-module de Dolbeault est $\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}$-plat* (5.4).

Soient $\mathscr{M}$ un $\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}$-module de Dolbeault, $\mathscr{N}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-fibré de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$, r un nombre rationnel > 0, $\alpha\colon \top^{r+}(\mathscr{N}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}^r(\mathscr{M})$ un isomorphisme de $\Xi^r_{\mathbb{Q}}$. Comme le $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-module $\mathscr{N}$ est localement libre de type fini, le $\breve{\mathscr{C}}^{(r)}_{\mathbb{Q}}$-module $\top^*(\mathscr{N}) \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}} \breve{\mathscr{C}}^{(r)}_{\mathbb{Q}}$ est plat d'après 5.7(iii). On en déduit que $\mathscr{M} \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}} \breve{\mathscr{C}}^{(r)}_{\mathbb{Q}}$ est $\breve{\mathscr{C}}^{(r)}_{\mathbb{Q}}$-plat. Par suite, $\mathscr{M}$ est $\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}$-plat en vertu de 5.4.4 et 9.30.

11.13. Pour tout $\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}$-module $\mathscr{M}$ et tous nombres rationnels $r \geq r' \geq 0$, le morphisme (11.8.9) et l'isomorphisme (11.8.5) induisent un morphisme de $\mathbf{MH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})$

$$\top^r_+(\mathfrak{S}^r(\mathscr{M})) \to \top^{r'}_+(\mathfrak{S}^{r'}(\mathscr{M})). \tag{11.13.1}$$

On obtient ainsi un système inductif filtrant $(\top^r_+(\mathfrak{S}^r(\mathscr{M})))_{r\in\mathbb{Q}_{\geq 0}}$. On désigne par $\mathscr{H}$ le foncteur

$$\mathscr{H}\colon \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}) \to \mathbf{MH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}), \quad \mathscr{M} \mapsto \varinjlim_{r\in\mathbb{Q}_{>0}} \top^r_+(\mathfrak{S}^r(\mathscr{M})). \tag{11.13.2}$$

Pour tout objet $\mathscr{N}$ de $\mathbf{MH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})$ et tous nombres rationnels $r \geq r' \geq 0$, le morphisme (11.8.8) et l'isomorphisme (11.8.6) induisent un morphisme de $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$

$$\mathscr{K}^r(\top^{r+}(\mathscr{N})) \to \mathscr{K}^{r'}(\top^{r'+}(\mathscr{N})). \tag{11.13.3}$$

On obtient ainsi un système inductif filtrant $(\mathscr{K}^r(\top^{r+}(\mathscr{N})))_{r\geq 0}$. On rappelle (10.25) que les limites inductives filtrantes ne sont pas a priori représentables dans la catégorie $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$.

Lemme 11.14. *On a un isomorphisme canonique de* $\mathbf{MH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})$

$$(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], 0) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}). \tag{11.14.1}$$

Cela résulte de 10.18.

Lemme 11.15. *Soient* $\mathscr{N}$ *un* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$*-fibré de Higgs à coefficients dans* $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ (11.6)*,* r *un nombre rationnel* ≥ 0*. On a alors un isomorphisme canonique de* $\mathbf{MH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})$

$$\gamma^r\colon \mathscr{N} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]} \top^r_+(\mathfrak{S}^r(\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}})) \xrightarrow{\sim} \top^r_+(\top^{r+}(\mathscr{N})), \tag{11.15.1}$$

où le membre de gauche est le produit tensoriel des modules de Higgs ([3] 2.8.8)*. De plus, on a les propriétés suivantes :*

(i) *Le morphisme*

$$\mathscr{N} \to \top^r_+(\top^{r+}(\mathscr{N})) \tag{11.15.2}$$

induit par γ^r *et le morphisme canonique* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}] \to \top^r_+(\mathfrak{S}^r(\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}))$*, est l'adjoint du morphisme identité de* $\top^{r+}(\mathscr{N})$ (11.7.13)*.*

(ii) *Pour tout nombre rationnel* r' *tel que* $r \geq r' \geq 0$*, le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{N} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]} \top^r_+(\mathfrak{S}^r(\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}})) \arrow[r, "\gamma^r"] \arrow[d] & \top^r_+(\top^{r+}(\mathscr{N})) \arrow[d] \\ \mathscr{N} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]} \top^{r'}_+(\mathfrak{S}^{r'}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}})) \arrow[r, "\gamma^{r'}"] & \top^{r'}_+(\top^{r'+}(\mathscr{N})) \end{tikzcd} \tag{11.15.3}$$

où les flèches verticales sont induites par le morphisme (11.8.9) *et par les isomorphismes* (11.8.5) *et* (11.8.6)*, est commutatif.*

En effet, d'après 11.4(ii), on a des isomorphismes canoniques de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-modules

$$\mathscr{N} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]} \top_*(\breve{\mathscr{C}}_{\mathbb{Q}}^{(r)}) \xrightarrow{\sim} \top_*(\top^*(\mathscr{N}) \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}} \breve{\mathscr{C}}_{\mathbb{Q}}^{(r)}), \tag{11.15.4}$$

$$\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \top_*(\top^*(\mathscr{N}) \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}} \breve{\mathscr{C}}_{\mathbb{Q}}^{(r)}) \xrightarrow{\sim} \top_*(\top^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{N}) \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}} \breve{\mathscr{C}}_{\mathbb{Q}}^{(r)}), \tag{11.15.5}$$

$$\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{N} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]} \top_*(\breve{\mathscr{C}}_{\mathbb{Q}}^{(r)}) \xrightarrow{\sim} \top_*(\top^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{N}) \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}} \breve{\mathscr{C}}_{\mathbb{Q}}^{(r)}). \tag{11.15.6}$$

Le troisième isomorphisme est induit par les deux premiers d'après 11.3(i). De plus, compte tenu du caractère bifonctoriel de l'isomorphisme (11.4.2), le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{N} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]} \top_*(\breve{\mathscr{C}}_{\mathbb{Q}}^{(r)}) \arrow[r] \arrow[d, "\theta\otimes\mathrm{id}+p^r\mathrm{id}\otimes\top_*(\breve{d}_{\mathbb{Q}}^{(r)})"'] & \top_*(\top^*(\mathscr{N}) \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}} \breve{\mathscr{C}}_{\mathbb{Q}}^{(r)}) \arrow[d, "\top_*(\top^*(\theta)\otimes\mathrm{id}+p^r\mathrm{id}\otimes\breve{d}^{(r)})"] \\
\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{N} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]} \top_*(\breve{\mathscr{C}}_{\mathbb{Q}}^{(r)}) \arrow[r] & \top_*(\top^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{N}) \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}} \breve{\mathscr{C}}_{\mathbb{Q}}^{(r)})
\end{tikzcd} \tag{11.15.7}$$

où θ est le champs de Higgs de $\mathscr{N}$, est commutatif. On prend alors pour γ^r (11.15.1) l'isomorphisme (11.15.4). La proposition (i) résulte de 11.2(ii) et 5.17. La proposition (ii) est une conséquence du caractère bifonctoriel de l'isomorphisme (11.4.2).

11.16. Soient r un nombre rationnel > 0, $(\mathscr{M}, \mathscr{N}, \alpha)$ un triplet r-admissible. Pour tout nombre rationnel r' tel que $0 < r' \leq r$, on désigne par

$$\alpha^{r'} \colon \top^{r'+}(\mathscr{N}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}^{r'}(\mathscr{M}) \tag{11.16.1}$$

l'isomorphisme de $\Xi^{r'}_{\mathbb{Q}}$ induit par $\epsilon^{r,r'}(\alpha)$ et les isomorphismes (11.8.5) et (11.8.6), et par

$$\beta^{r'} \colon \mathscr{N} \to \top^{r'}_{+}(\mathfrak{S}^{r'}(\mathscr{M})) \tag{11.16.2}$$

son adjoint (11.7.13).

Proposition 11.17. *Les hypothèses étant celles de* (11.16)*, soient, de plus, r', r'' deux nombres rationnels tels que $0 < r'' < r' \leq r$. Alors :*

(i) *Le morphisme composé*

$$\mathscr{N} \xrightarrow{\beta^{r'}} \top^{r'}_{+}(\mathfrak{S}^{r'}(\mathscr{M})) \longrightarrow \mathscr{H}(\mathscr{M}), \tag{11.17.1}$$

où la seconde flèche est le morphisme canonique (11.13.2)*, est un isomorphisme, indépendant de r'.*

(ii) *Le morphisme composé*

$$\top^{r'}_{+}(\mathfrak{S}^{r'}(\mathscr{M})) \longrightarrow \mathscr{H}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{N} \xrightarrow{\beta^{r''}} \top^{r''}_{+}(\mathfrak{S}^{r''}(\mathscr{M})) \tag{11.17.2}$$

où la première flèche est le morphisme canonique (11.13.2) *et la deuxième flèche est l'isomorphisme inverse de* (11.17.1)*, est le morphisme canonique* (11.13.1)*.*

(i) Pour tout nombre rationnel $0 < t \leq r$, on désigne par

$$\gamma^t \colon \mathscr{N} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]} \top^t_{+}(\mathfrak{S}^t(\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}})) \xrightarrow{\sim} \top^t_{+}(\top^{t+}(\mathscr{N})) \tag{11.17.3}$$

l'isomorphisme (11.15.1) de $\mathbf{MH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})$, et par

$$\delta^t \colon \mathscr{N} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]} \top^t_{+}(\mathfrak{S}^t(\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}})) \xrightarrow{\sim} \top^t_{+}(\mathfrak{S}^t(\mathscr{M})) \tag{11.17.4}$$

le composé $\top_+^t(\alpha^t)\circ\gamma^t$. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathscr{N}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]}\top_+^{r'}(\mathfrak{S}^{r'}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}})) \arrow[r, "\delta^{r'}"] \arrow[d] & \top_+^{r'}(\mathfrak{S}^{r'}(\mathscr{M})) \arrow[d] \\ \mathscr{N}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]}\top_+^{r''}(\mathfrak{S}^{r''}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}})) \arrow[r, "\delta^{r''}"] & \top_+^{r''}(\mathfrak{S}^{r''}(\mathscr{M})) \end{tikzcd} \tag{11.17.5}$$

où les flèches verticales sont les morphismes canoniques (11.13.1), est commutatif en vertu de 11.15(ii). Les isomorphismes $(\delta^t)_{0<t\leq r}$ induisent par passage à la limite inductive un isomorphisme de $\mathbf{MH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}],\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})$

$$\delta\colon \mathscr{N}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]}\mathscr{H}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}})\xrightarrow{\sim}\mathscr{H}(\mathscr{M}). \tag{11.17.6}$$

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathscr{N} \arrow[r, "\iota^{r'}"] \arrow[dr] & \mathscr{N}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]}\top_+^{r'}(\mathfrak{S}^{r'}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}})) \arrow[r, "\delta^{r'}"] \arrow[d] & \top_+^{r'}(\mathfrak{S}^{r'}(\mathscr{M})) \arrow[d] \\ & \mathscr{N}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]}\mathscr{H}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}) \arrow[r, "\delta"] & \mathscr{H}(\mathscr{M}) \end{tikzcd} \tag{11.17.7}$$

où $\iota^{r'}$ est induit par le morphisme canonique $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]\to\top_+^{r'}(\mathfrak{S}^{r'}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}))$ et les flèches verticales sont les morphismes canoniques. D'après 11.15(i), on a

$$\delta^{r'}\circ\iota^{r'}=\top_+^{r'}(\alpha^{r'})\circ\gamma^{r'}\circ\iota^{r'}=\beta^{r'}. \tag{11.17.8}$$

La proposition s'ensuit en vertu de 11.14.

(ii) Cela résulte de (11.17.5), (11.17.7) et 10.17(ii).

Corollaire 11.18. *Pour tout $\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}$-module de Dolbeault $\mathscr{M}$, $\mathscr{H}(\mathscr{M})$* (11.13.2) *est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-fibré de Higgs soluble associé à $\mathscr{M}$. En particulier, $\mathscr{H}$ induit un foncteur que l'on note encore*

$$\mathscr{H}\colon \mathbf{Mod}^{\mathrm{Dolb}}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}})\to\mathbf{MH}^{\mathrm{sol}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}],\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}),\quad \mathscr{M}\mapsto\mathscr{H}(\mathscr{M}). \tag{11.18.1}$$

Corollaire 11.19. *Pour tout $\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}$-module de Dolbeault $\mathscr{M}$, il existe un nombre rationnel $r>0$ et un isomorphisme de $\Xi^r_{\mathbb{Q}}$*

$$\alpha\colon \top^{r+}(\mathscr{H}(\mathscr{M}))\xrightarrow{\sim}\mathfrak{S}^r(\mathscr{M}) \tag{11.19.1}$$

vérifiant les propriétés suivantes. Pour tout nombre rationnel r' tel que $0<r'\leq r$, notons

$$\alpha^{r'}\colon \top^{r'+}(\mathscr{H}(\mathscr{M}))\xrightarrow{\sim}\mathfrak{S}^{r'}(\mathscr{M}) \tag{11.19.2}$$

l'isomorphisme de $\Xi^{r'}_{\mathbb{Q}}$ induit par $\epsilon^{r,r'}(\alpha)$ et les isomorphismes (11.8.5) *et* (11.8.6), *et*

$$\beta^{r'}\colon \mathscr{H}(\mathscr{M})\to\top_+^{r'}(\mathfrak{S}^{r'}(\mathscr{M})) \tag{11.19.3}$$

son adjoint (11.7.13). *Alors :*

(i) *Pour tout nombre rationnel r' tel que $0<r'\leq r$, le morphisme $\beta^{r'}$ est un inverse à droite du morphisme canonique $\varpi^{r'}\colon \top_+^{r'}(\mathfrak{S}^{r'}(\mathscr{M}))\to\mathscr{H}(\mathscr{M})$.*

(ii) *Pour tous nombres rationnels r' et r'' tels que $0 < r'' < r' \leq r$, le composé*

$$\mathrm{T}_+^{r'}(\mathfrak{S}^{r'}(\mathscr{M})) \xrightarrow{\varpi^{r'}} \mathscr{H}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\beta^{r''}} \mathrm{T}_+^{r''}(\mathfrak{S}^{r''}(\mathscr{M})) \tag{11.19.4}$$

est le morphisme canonique.

Remarque 11.20. Sous les hypothèses de 11.19, l'isomorphisme α n'est a priori pas uniquement déterminé par $(\mathscr{M}, r)$, mais pour tout nombre rationnel $0 < r' < r$, le morphisme $\alpha^{r'}$ (11.19.2) ne dépend que de $\mathscr{M}$, et il en dépend fonctoriellement (cf. la preuve de 11.26).

11.21. Soient r un nombre rationnel > 0, $(\mathscr{M}, \mathscr{N}, \alpha)$ un triplet r-admissible. Pour éviter toute ambiguïté avec (11.16.1), notons

$$\breve{\alpha}\colon \mathfrak{S}^r(\mathscr{M}) \to \mathrm{T}^{r+}(\mathscr{N}) \tag{11.21.1}$$

l'inverse de α dans $\Xi^r_{\mathbb{Q}}$. Pour tout nombre rationnel r' tel que $0 < r' \leq r$, on désigne par

$$\breve{\alpha}^{r'}: \mathfrak{S}^{r'}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}^{r'+}(\mathscr{N}) \tag{11.21.2}$$

l'isomorphisme de $\Xi^{r'}_{\mathbb{Q}}$ induit par $\epsilon^{r,r'}(\breve{\alpha})$ et les isomorphismes (11.8.5) et (11.8.6), et par

$$\breve{\beta}^{r'}: \mathscr{M} \to \mathscr{K}^{r'}(\mathrm{T}^{r'+}(\mathscr{N})) \tag{11.21.3}$$

le morphisme adjoint.

Proposition 11.22. *Les hypothèses étant celles de* (11.21)*, soient, de plus, r', r'' deux nombres rationnels tels que $0 < r'' < r' \leq r$. Alors :*

(i) *La limite inductive $\mathscr{V}(\mathscr{N})$ du système inductif $(\mathscr{K}^t(\mathrm{T}^{t+}(\mathscr{N})))_{t\in\mathbb{Q}_{>0}}$* (11.13.3) *est représentable dans $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$.*

(ii) *Le morphisme composé*

$$\mathscr{M} \xrightarrow{\breve{\beta}^{r'}} \mathscr{K}^{r'}(\mathrm{T}^{r'+}(\mathscr{N})) \longrightarrow \mathscr{V}(\mathscr{N}), \tag{11.22.1}$$

où la seconde flèche est le morphisme canonique, est un isomorphisme, indépendant de r'.

(iii) *Le morphisme composé*

$$\mathscr{K}^{r'}(\mathrm{T}^{r'+}(\mathscr{N})) \longrightarrow \mathscr{V}(\mathscr{N}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{M} \xrightarrow{\breve{\beta}^{r''}} \mathscr{K}^{r''}(\mathrm{T}^{r''+}(\mathscr{N})) \tag{11.22.2}$$

où la première flèche est le morphisme canonique et la seconde flèche est l'isomorphisme inverse de (11.22.1)*, est le morphisme canonique* (11.13.3).

(i) Comme $\mathscr{M}$ est $\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}$-plat d'après 11.12, pour tout nombre rationnel $t \geq 0$, on a un isomorphisme canonique de $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$

$$\gamma^t: \mathscr{M} \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}} \mathscr{K}^t(\mathfrak{S}^t(\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}})) \xrightarrow{\sim} \mathscr{K}^t(\mathfrak{S}^t(\mathscr{M})). \tag{11.22.3}$$

On désigne par

$$\delta^t: \mathscr{M} \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}} \mathscr{K}^t(\mathfrak{S}^t(\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}})) \xrightarrow{\sim} \mathscr{K}^t(\mathrm{T}^{t+}(\mathscr{N})) \tag{11.22.4}$$

le composé $\mathscr{K}^t(\check{\alpha}^t)\circ\gamma^t$. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathscr{M}\otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}}\mathscr{K}^{r'}(\mathfrak{S}^{r'}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}})) \arrow[r, "\delta^{r'}"] \arrow[d] & \mathscr{K}^{r'}(\top^{r'+}(\mathscr{N})) \arrow[d] \\ \mathscr{M}\otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}}\mathscr{K}^{r''}(\mathfrak{S}^{r''}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}})) \arrow[r, "\delta^{r''}"] & \mathscr{K}^{r''}(\top^{r''+}(\mathscr{N})) \end{tikzcd} \tag{11.22.5}$$

où les flèches verticales sont induites par le morphisme (11.8.8) et les isomorphismes (11.8.5) et (11.8.6), est clairement commutatif. La proposition résulte alors de 10.23.

(ii) D'après 10.23, le morphisme canonique

$$\mathscr{M}\to\varinjlim_{t\in\mathbb{Q}_{>0}}\mathscr{M}\otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}}\mathscr{K}^t(\mathfrak{S}^t(\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}})) \tag{11.22.6}$$

est un isomorphisme. Les isomorphismes $(\delta^t)_{0<t\leq r}$ induisent alors par passage à la limite inductive un isomorphisme

$$\delta\colon\mathscr{M}\xrightarrow{\sim}\mathscr{V}(\mathscr{N}). \tag{11.22.7}$$

Il résulte aussitôt des définitions que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathscr{M}\otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}}\mathscr{K}^{r'}(\mathfrak{S}^{r'}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}})) \arrow[r, "\delta^{r'}"] & \mathscr{K}^{r'}(\top^{r'+}(\mathscr{N})) \arrow[d] \\ \mathscr{M} \arrow[u, "\iota^{r'}"] \arrow[r, "\delta"] & \mathscr{V}(\mathscr{N}) \end{tikzcd} \tag{11.22.8}$$

où $\iota^{r'}$ est induit par le morphisme canonique $\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}\to\mathscr{K}^{r'}(\mathfrak{S}^{r'}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}))$ et la flèche non-libellée est le morphisme canonique, est commutatif. On vérifie aussitôt qu'on a

$$\delta^{r'}\circ\iota^{r'}=\mathscr{K}^{r'}(\check{\alpha}^{r'})\circ\gamma^{r'}\circ\iota^{r'}=\check{\beta}^{r'}. \tag{11.22.9}$$

La proposition s'ensuit.

(iii) Cela résulte de (11.22.5) et 10.23(ii).

Corollaire 11.23. *On a un foncteur*

$$\mathscr{V}\colon\mathbf{MH}^{\mathrm{sol}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}],\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})\to\mathbf{Mod}^{\mathrm{Dolb}}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}),\quad\mathscr{N}\mapsto\varinjlim_{r\in\mathbb{Q}_{>0}}\mathscr{K}^r(\top^{r+}(\mathscr{N}))). \tag{11.23.1}$$

De plus, pour tout objet $\mathscr{N}$ de $\mathbf{MH}^{\mathrm{sol}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}],\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})$, $\mathscr{V}(\mathscr{N})$ est associé à $\mathscr{N}$.

Corollaire 11.24. *Pour tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-fibré de Higgs soluble $\mathscr{N}$ à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$, il existe un nombre rationnel $r>0$ et un isomorphisme de $\Xi^r_{\mathbb{Q}}$*

$$\check{\alpha}\colon\mathfrak{S}^r(\mathscr{V}(\mathscr{N}))\xrightarrow{\sim}\top^{r+}(\mathscr{N}) \tag{11.24.1}$$

vérifiant les propriétés suivantes. Pour tout nombre rationnel r' tel que $0<r'\leq r$, notons

$$\check{\alpha}^{r'}\colon\mathfrak{S}^{r'}(\mathscr{V}(\mathscr{N}))\xrightarrow{\sim}\top^{r'+}(\mathscr{N}) \tag{11.24.2}$$

l'isomorphisme de $\Xi^{r'}_{\mathbb{Q}}$ induit par $\epsilon^{r,r'}(\check{\alpha})$ et les isomorphismes (11.8.5) *et* (11.8.6), *et*

$$\check{\beta}^{r'}\colon\mathscr{V}(\mathscr{N})\to\mathscr{K}^{r'}(\top^{r'+}(\mathscr{N})) \tag{11.24.3}$$

son adjoint. Alors :

(i) *Pour tout nombre rationnel* r' *tel que* $0 < r' \leq r$, *le morphisme* $\check{\beta}^{r'}$ *est un inverse à droite du morphisme canonique* $\varpi^{r'}\colon \mathscr{K}^{r'}(\top^{r'+}(\mathscr{N})) \to \mathscr{V}(\mathscr{N})$.

(ii) *Pour tous nombres rationnels* r' *et* r'' *tels que* $0 < r'' < r' \leq r$, *le composé*

$$\mathscr{K}^{r'}(\top^{r'+}(\mathscr{N})) \xrightarrow{\varpi^{r'}} \mathscr{V}(\mathscr{N}) \xrightarrow{\check{\beta}^{r''}} \mathscr{K}^{r''}(\top^{r''+}(\mathscr{N})) \tag{11.24.4}$$

est le morphisme canonique.

Remarque 11.25. Sous les hypothèses de 11.24, l'isomorphisme $\check{\alpha}$ n'est a priori pas uniquement déterminé par $(\mathscr{N}, r)$, mais pour tout nombre rationnel $0 < r' < r$, le morphisme $\check{\alpha}^{r'}$ (11.24.2) ne dépend que de $\mathscr{N}$ et il en dépend fonctoriellement (cf. la preuve de 11.26).

Théorème 11.26. *Les foncteurs* (11.18.1) *et* (11.23.1)

$$\mathbf{Mod}^{\mathrm{Dolb}}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}) \underset{\mathscr{V}}{\overset{\mathscr{H}}{\rightleftarrows}} \mathbf{MH}^{\mathrm{sol}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\tfrac{1}{p}], \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) \tag{11.26.1}$$

sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre.

Pour tout objet $\mathscr{M}$ de $\mathbf{Mod}^{\mathrm{Dolb}}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$, $\mathscr{H}(\mathscr{M})$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-fibré de Higgs soluble associé à $\mathscr{M}$, en vertu de 11.18. Choisissons un nombre rationnel $r_{\mathscr{M}} > 0$ et un isomorphisme de $\Xi^{r_{\mathscr{M}}}_{\mathbb{Q}}$

$$\alpha_{\mathscr{M}}\colon \top^{r_{\mathscr{M}}+}(\mathscr{H}(\mathscr{M})) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}^{r_{\mathscr{M}}}(\mathscr{M}) \tag{11.26.2}$$

vérifiant les propriétés du 11.19. Pour tout nombre rationnel r tel que $0 < r \leq r_{\mathscr{M}}$, on désigne par

$$\alpha^r_{\mathscr{M}}\colon \top^{r+}(\mathscr{H}(\mathscr{M})) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}^{r}(\mathscr{M}) \tag{11.26.3}$$

l'isomorphisme de $\Xi^r_{\mathbb{Q}}$ induit par $\epsilon^{r_{\mathscr{M}},r}(\alpha_{\mathscr{M}})$ et les isomorphismes (11.8.5) et (11.8.6), par

$$\check{\alpha}_{\mathscr{M}}\colon \mathfrak{S}^{r_{\mathscr{M}}}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \top^{r_{\mathscr{M}}+}(\mathscr{H}(\mathscr{M})), \tag{11.26.4}$$

$$\check{\alpha}^r_{\mathscr{M}}\colon \mathfrak{S}^{r}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \top^{r+}(\mathscr{H}(\mathscr{M})), \tag{11.26.5}$$

les inverses de $\alpha_{\mathscr{M}}$ et $\alpha^r_{\mathscr{M}}$, respectivement, et par

$$\beta^r_{\mathscr{M}}\colon \mathscr{H}(\mathscr{M}) \to \top^r_+(\mathfrak{S}^r(\mathscr{M})), \tag{11.26.6}$$

$$\check{\beta}^r_{\mathscr{M}}\colon \mathscr{M} \to \mathscr{K}^r(\top^{r+}(\mathscr{H}(\mathscr{M}))), \tag{11.26.7}$$

les morphismes adjoints de $\alpha^r_{\mathscr{M}}$ et $\check{\alpha}^r_{\mathscr{M}}$ respectivement. On notera que $\check{\alpha}^r_{\mathscr{M}}$ est induit par $\epsilon^{r_{\mathscr{M}},r}(\check{\alpha}_{\mathscr{M}})$ et les isomorphismes (11.8.5) et (11.8.6). D'après 11.22(ii), le morphisme composé

$$\mathscr{M} \xrightarrow{\check{\beta}^r_{\mathscr{M}}} \mathscr{K}^r(\top^{r+}(\mathscr{H}(\mathscr{M}))) \longrightarrow \mathscr{V}(\mathscr{H}(\mathscr{M})), \tag{11.26.8}$$

où la seconde flèche est le morphisme canonique, est un isomorphisme, qui dépend a priori de $\alpha_{\mathscr{M}}$ mais pas de r. Montrons que cet isomorphisme ne dépend que de $\mathscr{M}$ (mais pas du choix de $\alpha_{\mathscr{M}}$) et qu'il en dépend fonctoriellement. Il suffit de montrer que pour tout morphisme $u\colon \mathscr{M} \to \mathscr{M}'$ de $\mathbf{Mod}^{\mathrm{Dolb}}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$ et tout nombre rationnel $0 < r < \inf(r_{\mathscr{M}}, r_{\mathscr{M}'})$, le diagramme de $\Xi^r_{\mathbb{Q}}$

$$\begin{array}{ccc} \top^{r+}(\mathscr{H}(\mathscr{M})) & \xrightarrow{\alpha^r_{\mathscr{M}}} & \mathfrak{S}^r(\mathscr{M}) \\ {\scriptstyle \top^{r+}(\mathscr{H}(u))}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{S}^r(u)} \\ \top^{r+}(\mathscr{H}(\mathscr{M}')) & \xrightarrow{\alpha^r_{\mathscr{M}'}} & \mathfrak{S}^r(\mathscr{M}') \end{array} \tag{11.26.9}$$

est commutatif. Soient r, r' deux nombres rationnels tels que $0<r<r'<\inf(r_{\mathscr{M}},r_{\mathscr{M}'})$. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbb{T}^{r'}_{+}(\mathfrak{S}^{r'}(\mathscr{M})) \arrow[r, "\varpi^{r'}_{\mathscr{M}}"] \arrow[d, "\mathbb{T}^{r'}_{+}(\mathfrak{S}^{r'}(u))"'] & \mathscr{H}(\mathscr{M}) \arrow[r, "\beta^{r}_{\mathscr{M}}"] \arrow[d, "\mathscr{H}(u)"] & \mathbb{T}^{r}_{+}(\mathfrak{S}^{r}(\mathscr{M})) \arrow[d, "\mathbb{T}^{r}_{+}(\mathfrak{S}^{r}(u))"] \\ \mathbb{T}^{r'}_{+}(\mathfrak{S}^{r'}(\mathscr{M}')) \arrow[r, "\varpi^{r'}_{\mathscr{M}'}"] & \mathscr{H}(\mathscr{M}') \arrow[r, "\beta^{r}_{\mathscr{M}'}"] & \mathbb{T}^{r}_{+}(\mathfrak{S}^{r}(\mathscr{M}')) \end{tikzcd} \tag{11.26.10}$$

où $\varpi^{r'}_{\mathscr{M}}$ et $\varpi^{r'}_{\mathscr{M}'}$ sont les morphismes canoniques. Il résulte de 11.19(ii) que le grand rectangle est commutatif. Comme le carré de gauche est commutatif et que $\varpi^{r'}_{\mathscr{M}'}$ est surjectif d'après 11.19(i), le carré de droite est aussi commutatif. L'assertion recherchée s'ensuit compte tenu de l'injectivité de (11.7.13).

De même, pour tout objet $\mathscr{N}$ de $\mathbf{MH}^{\mathrm{sol}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}],\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})$, $\mathscr{V}(\mathscr{N})$ est un $\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}$-module de Dolbeault associé à $\mathscr{N}$, en vertu de 11.23. Choisissons un nombre rationnel $r_{\mathscr{N}}>0$ et un isomorphisme de $\Xi^{r_{\mathscr{N}}}_{\mathbb{Q}}$

$$\check{\alpha}_{\mathscr{N}}\colon \mathfrak{S}^{r_{\mathscr{N}}}(\mathscr{V}(\mathscr{N}))\xrightarrow{\sim}\mathbb{T}^{r_{\mathscr{N}}+}(\mathscr{N}) \tag{11.26.11}$$

vérifiant les propriétés du 11.24. Pour tout nombre rationnel r tel que $0<r\leq r_{\mathscr{N}}$, on désigne par

$$\check{\alpha}^r_{\mathscr{N}}\colon \mathfrak{S}^{r}(\mathscr{V}(\mathscr{N}))\xrightarrow{\sim}\mathbb{T}^{r+}(\mathscr{N}) \tag{11.26.12}$$

l'isomorphisme de $\Xi^r_{\mathbb{Q}}$ induit par $\epsilon^{r_{\mathscr{N}},r}(\check{\alpha}_{\mathscr{N}})$ et les isomorphismes (11.8.5) et (11.8.6), par

$$\alpha_{\mathscr{N}}\colon \mathbb{T}^{r_{\mathscr{N}}+}(\mathscr{N}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}^{r_{\mathscr{N}}}(\mathscr{V}(\mathscr{N})), \tag{11.26.13}$$

$$\alpha^r_{\mathscr{N}}\colon \mathbb{T}^{r+}(\mathscr{N}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}^{r}(\mathscr{V}(\mathscr{N})), \tag{11.26.14}$$

les inverses de $\check{\alpha}_{\mathscr{M}}$ et $\check{\alpha}^r_{\mathscr{N}}$, respectivement, et par

$$\check{\beta}^r_{\mathscr{N}}\colon \mathscr{V}(\mathscr{N}) \to \mathscr{K}^r(\mathbb{T}^{r+}(\mathscr{N})), \tag{11.26.15}$$

$$\beta^r_{\mathscr{N}}\colon \mathscr{N} \to \mathbb{T}^r_{+}(\mathfrak{S}^r(\mathscr{V}(\mathscr{N}))), \tag{11.26.16}$$

les morphismes adjoints de $\check{\alpha}^r_{\mathscr{N}}$ et $\alpha^r_{\mathscr{N}}$, respectivement. D'après 11.17(i), le morphisme composé

$$\mathscr{N}\xrightarrow{\beta^r}\mathbb{T}^r_{+}(\mathfrak{S}^r(\mathscr{V}(\mathscr{N})))\longrightarrow\mathscr{H}(\mathscr{V}(\mathscr{N})), \tag{11.26.17}$$

où la seconde flèche est le morphisme canonique, est un isomorphisme, qui dépend a priori de $\check{\alpha}_{\mathscr{N}}$ mais pas de r. Montrons que cet isomorphisme ne dépend que de $\mathscr{N}$ (mais pas du choix de $\check{\alpha}_{\mathscr{N}}$) et qu'il en dépend fonctoriellement. Il suffit de montrer que pour tout morphisme $v\colon\mathscr{N}\to\mathscr{N}'$ de $\mathbf{MH}^{\mathrm{sol}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}],\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})$ et tout nombre rationnel $0<r<\inf(r_{\mathscr{N}},r_{\mathscr{N}'})$, le diagramme de $\Xi^r_{\mathbb{Q}}$

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{S}^r(\mathscr{V}(\mathscr{N})) \arrow[r, "\check{\alpha}^r_{\mathscr{N}}"] \arrow[d, "\mathfrak{S}^r(\mathscr{V}(v))"'] & \mathbb{T}^{r+}(\mathscr{N}) \arrow[d, "\mathbb{T}^{r+}(v)"] \\ \mathfrak{S}^r(\mathscr{V}(\mathscr{N}')) \arrow[r, "\check{\alpha}^r_{\mathscr{N}'}"] & \mathbb{T}^{r+}(\mathscr{N}') \end{tikzcd} \tag{11.26.18}$$

est commutatif. Soient r, r' deux nombres rationnels tels que $0 < r < r' < \inf(r_{\mathscr{N}}, r_{\mathscr{N}'})$. Considérons le diagramme de $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{K}^{r'}(\top^{r'+}(\mathscr{N})) \arrow[r, "\varpi^{r'}_{\mathscr{N}}"] \arrow[d, "\mathscr{K}^{r'}(\top^{r'+}(v))"'] & \mathscr{V}(\mathscr{N}) \arrow[r, "\breve{\beta}^{r}_{\mathscr{M}}"] \arrow[d, "\mathscr{V}(v)"] & \mathscr{K}^{r}(\top^{r+}(\mathscr{N})) \arrow[d, "\mathscr{K}^{r}(\top^{r+}(v))"] \\
\mathscr{K}^{r'}(\top^{r'+}(\mathscr{N}')) \arrow[r, "\varpi^{r'}_{\mathscr{N}'}"] & \mathscr{V}(\mathscr{N}') \arrow[r, "\breve{\beta}^{r}_{\mathscr{N}'}"] & \mathscr{K}^{r}(\top^{r+}(\mathscr{N}'))
\end{tikzcd} \tag{11.26.19}$$

où $\varpi^{r'}_{\mathscr{N}}$ et $\varpi^{r'}_{\mathscr{N}'}$ sont les morphismes canoniques. Il résulte de 11.24(ii) que le grand rectangle est commutatif. Comme le carré de gauche est commutatif et que $\varpi^{r'}_{\mathscr{N}}$ est inversible à droite d'après 11.24(i), le carré de droite est aussi commutatif ; d'où l'assertion recherchée.

Lemme 11.27. *Pour tout $\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}$-module plat $\mathscr{M}$ et tout entier $q \geq 0$, on a un isomorphisme canonique fonctoriel* (10.21)

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ r \in \mathbb{Q}_{>0}}} \mathrm{R}^q\top_*(\mathscr{M} \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}} \mathbb{K}^{\bullet}_{\mathbb{Q}}(\breve{\mathscr{C}}^{(r)}, p^r\breve{d}^{(r)})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}^q\top_*(\mathscr{M}), \tag{11.27.1}$$

où $\mathrm{R}^q\top_*(\mathscr{M} \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}} \mathbb{K}^{\bullet}_{\mathbb{Q}}(\breve{\mathscr{C}}^{(r)}, p^r\breve{d}^{(r)}))$ *désigne l'hypercohomologie du foncteur* $\top_*$ (11.1.3) *par rapport au complexe* $\mathscr{M} \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}} \mathbb{K}^{\bullet}_{\mathbb{Q}}(\breve{\mathscr{C}}^{(r)}, p^r\breve{d}^{(r)})$.

En effet, la suite spectrale d'hypercohomologie du foncteur $\top_*$ induit, pour tout nombre rationnel $r \geq 0$, une suite spectrale fonctorielle

$${}^r\mathrm{E}_2^{i,j} = \mathrm{R}^i\top_*(\mathscr{M} \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}} \mathrm{H}^j(\mathbb{K}^{\bullet}_{\mathbb{Q}}(\breve{\mathscr{C}}^{(r)}, p^r\breve{d}^{(r)}))) \Rightarrow \mathrm{R}^{i+j}\top_*(\mathscr{M} \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}} \mathbb{K}^{\bullet}_{\mathbb{Q}}(\breve{\mathscr{C}}^{(r)}, p^r\breve{d}^{(r)})). \tag{11.27.2}$$

D'après 10.23(iii), pour tous entiers $i \geq 0$ et $j \geq 1$ et tous nombres rationnels $r > r' > 0$, le morphisme canonique

$${}^r\mathrm{E}_2^{i,j} \to {}^{r'}\mathrm{E}_2^{i,j} \tag{11.27.3}$$

est nul. On a donc

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ r \in \mathbb{Q}_{>0}}} {}^r\mathrm{E}_2^{i,j} = 0. \tag{11.27.4}$$

Par ailleurs, il résulte de 10.23(ii) que les morphismes canoniques

$$\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{H}^0(\mathbb{K}^{\bullet}_{\mathbb{Q}}(\breve{\mathscr{C}}^{(r)}, p^r\breve{d}^{(r)})), \tag{11.27.5}$$

pour $r \in \mathbb{Q}_{>0}$, induisent un isomorphisme

$$\mathrm{R}^i\top_*(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ r \in \mathbb{Q}_{>0}}} {}^r\mathrm{E}_2^{i,0}. \tag{11.27.6}$$

Comme les limites inductives filtrantes sont représentables dans $\mathbf{Mod}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}])$ et qu'elles commutent aux limites projectives finies ([5] II 4.3), la proposition s'ensuit.

Lemme 11.28. *Soient $\mathscr{N}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-fibré de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$, q un entier ≥ 0. Notons $\mathbb{K}^{\bullet}(\mathscr{N})$ le complexe de Dolbeault de $\mathscr{N}$* ([3] 2.8.2) *et pour tout nombre rationnel $r \geq 0$,*

$\mathbb{K}^\bullet(\top^{r+}(\mathscr{N}))$ *le complexe de Dolbeault de* $\top^{r+}(\mathscr{N})$ (11.7). *On a alors un isomorphisme canonique fonctoriel*

$$\varinjlim_{r\in\mathbb{Q}_{>0}} \mathrm{R}^q\top_*(\mathbb{K}^\bullet(\top^{r+}(\mathscr{N}))) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(\mathbb{K}^\bullet(\mathscr{N})), \tag{11.28.1}$$

où $\mathrm{R}^q\top_*(\mathbb{K}^\bullet(\top^{r+}(\mathscr{N})))$ *désigne l'hypercohomologie du foncteur* $\top_*$ (11.1.3) *par rapport au complexe* $\mathbb{K}^\bullet(\top^{r+}(\mathscr{N}))$.

Soient r un nombre rationnel > 0, i et j deux entiers ≥ 0. Compte tenu de 11.4(i), $\breve{d}^{(r)}$ (10.21.1) induit un morphisme $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-linéaire

$$\delta^{j,(r)}\colon \mathrm{R}^j\top_*(\breve{\mathscr{C}}^{(r)}) \to \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathrm{R}^j\top_*(\breve{\mathscr{C}}^{(r)}), \tag{11.28.2}$$

qui est clairement un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-champ de Higgs sur $\mathrm{R}^j\top_*(\breve{\mathscr{C}}^{(r)})$ à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$. On note θ le $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-champ de Higgs sur $\mathscr{N}$ et $\vartheta^{j,(r)}_{\mathrm{tot}} = \theta\otimes\mathrm{id} + p^r\mathrm{id}\otimes\delta^{j,(r)}$ le $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-champ de Higgs total sur $\mathscr{N}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathrm{R}^j\top_*(\widehat{\mathscr{C}}^{(r)})$ ([3] 2.8.8). D'après 11.4(ii), on a un isomorphisme canonique $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-linéaire

$$\mathrm{R}^j\top_*(\mathbb{K}^i(\top^{r+}(\mathscr{N}))) \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^i(\mathscr{N}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathrm{R}^j\top_*(\breve{\mathscr{C}}^{(r)}), \vartheta^{j,(r)}_{\mathrm{tot}}), \tag{11.28.3}$$

compatible avec les différentielles des deux complexes de Dolbeault.

Par ailleurs, on a une suite spectrale canonique fonctorielle

$${}^r\mathrm{E}_1^{i,j} = \mathrm{R}^j\top_*(\mathbb{K}^i(\top^{r+}(\mathscr{N}))) \Rightarrow \mathrm{R}^{i+j}\top_*(\mathbb{K}^\bullet(\top^{r+}(\mathscr{N}))). \tag{11.28.4}$$

D'après 10.18 et (11.28.3), pour tout $i\geq 0$, on a un isomorphisme canonique

$$\varinjlim_{r\in\mathbb{Q}_{>0}} {}^r\mathrm{E}_1^{i,0} \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^i(\mathscr{N},\theta), \tag{11.28.5}$$

et pour tout $j\geq 1$, on a

$$\varinjlim_{r\in\mathbb{Q}_{>0}} {}^r\mathrm{E}_1^{i,j} = 0. \tag{11.28.6}$$

De plus, les isomorphismes (11.28.5) (pour $i\in\mathbb{N}$) forment un isomorphisme de complexes. La proposition s'ensuit ([5] II 4.3).

Théorème 11.29. *Soient* $\mathscr{M}$ *un* $\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}$*-module de Dolbeault,* q *un entier* ≥ 0*. Notons* $\mathbb{K}^\bullet(\mathscr{H}(\mathscr{M}))$ *le complexe de Dolbeault du* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$*-fibré de Higgs* $\mathscr{H}(\mathscr{M})$ ([3] 2.8.2). *On a alors un isomorphisme canonique fonctoriel de* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$*-modules*

$$\mathrm{R}^q\top_*(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q(\mathbb{K}^\bullet(\mathscr{H}(\mathscr{M}))). \tag{11.29.1}$$

En effet, $\mathscr{H}(\mathscr{M})$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-fibré de Higgs soluble associé à $\mathscr{M}$ en vertu de 11.18. Choisissons un nombre rationnel $r_{\mathscr{M}} > 0$ et un isomorphisme de $\Xi^{r_{\mathscr{M}}}_{\mathbb{Q}}$

$$\alpha_{\mathscr{M}}\colon \top^{r_{\mathscr{M}}+}(\mathscr{H}(\mathscr{M})) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}^{r_{\mathscr{M}}}(\mathscr{M}) \tag{11.29.2}$$

vérifiant les propriétés du 11.19. Pour tout nombre rationnel r tel que $0<r<r_{\mathscr{M}}$, on désigne par

$$\alpha^r_{\mathscr{M}}\colon \top^{r+}(\mathscr{H}(\mathscr{M})) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}^r(\mathscr{M}) \tag{11.29.3}$$

l'isomorphisme de $\Xi^r_{\mathbb{Q}}$ induit par $\epsilon^{r_{\mathscr{M}},r}(\alpha_{\mathscr{M}})$ et les isomorphismes (11.8.5) et (11.8.6). D'après la preuve de 11.26, $\alpha^r_{\mathscr{M}}$ ne dépend que de $\mathscr{M}$ (mais pas de $\alpha_{\mathscr{M}}$) et il en dépend fonctoriellement. Par ailleurs, $\top^{r+}(\mathscr{H}(\mathscr{M}))$ étant naturellement un objet de $\mathbf{IH}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}, \top^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}))$, notons

$\mathbb{K}^\bullet(\top^{r+}(\mathscr{H}(\mathscr{M})))$ son complexe de Dolbeault dans $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$ (11.7). Comme $\mathscr{M}$ est $\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}$-plat d'après 11.12, $\alpha^r_{\mathscr{M}}$ induit un isomorphisme (10.21)

$$\mathbb{K}^\bullet(\top^{r+}(\mathscr{H}(\mathscr{M}))) \xrightarrow{\sim} \mathscr{M} \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}} \mathbb{K}^\bullet_{\mathbb{Q}}(\breve{\mathscr{C}}^{(r)}, p^r \breve{d}^{(r)}). \tag{11.29.4}$$

On en déduit un isomorphisme canonique fonctoriel de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-modules

$$\varinjlim_{r \in \mathbb{Q}_{>0}} \mathrm{R}^q\top_*(\mathbb{K}^\bullet(\top^{r+}(\mathscr{H}(\mathscr{M})))) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{r \in \mathbb{Q}_{>0}} \mathrm{R}^q\top_*(\mathscr{M} \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}} \mathbb{K}^\bullet_{\mathbb{Q}}(\breve{\mathscr{C}}^{(r)}, p^r \breve{d}^{(r)})), \tag{11.29.5}$$

où $\mathrm{R}^q\top_*(-)$ désigne l'hypercohomologie du foncteur $\top_*$. Le théorème s'ensuit compte tenu de 11.27 et 11.28.

12. Image inverse d'un module de Dolbeault par un morphisme étale

12.1. Les hypothèses et notations générales de § 9 et § 11 sont en vigueur dans cette section. Soit, de plus, $g\colon X' \to X$ un morphisme étale. On munit X' de la structure logarithmique $\mathscr{M}_{X'}$ image inverse de $\mathscr{M}_X$ et on note $f'\colon (X', \mathscr{M}_{X'}) \to (S, \mathscr{M}_S)$ le morphisme induit par f et g. On observera que f' est adéquat (3.9) et que $X'^\circ = X^\circ \times_X X'$ est le sous-schéma ouvert maximal de X' où la structure logarithmique $\mathscr{M}_{X'}$ est triviale. On munit $\overline{X}'$ et $\breve{\overline{X}}'$ des structures logarithmiques $\mathscr{M}_{\overline{X}'}$ et $\mathscr{M}_{\breve{\overline{X}}'}$ images inverses de $\mathscr{M}_{X'}$. Il existe essentiellement un unique morphisme étale $\widetilde{g}\colon \widetilde{X}' \to \widetilde{X}$ qui s'insère dans un diagramme cartésien (9.1)

$$\begin{tikzcd} \breve{\overline{X}}' \arrow[r] \arrow[d, "\breve{\overline{g}}"'] & \widetilde{X}' \arrow[d, "\widetilde{g}"] \\ \breve{\overline{X}} \arrow[r] & \widetilde{X} \end{tikzcd} \tag{12.1.1}$$

On munit $\widetilde{X}'$ de la structure logarithmique $\mathscr{M}_{\widetilde{X}'}$ image inverse de $\mathscr{M}_{\widetilde{X}}$, de sorte que $(\widetilde{X}', \mathscr{M}_{\widetilde{X}'})$ est une $(\mathscr{A}_2(\overline{S}), \mathscr{M}_{\mathscr{A}_2(\overline{S})})$-déformation lisse de $(\breve{\overline{X}}', \mathscr{M}_{\breve{\overline{X}}'})$.

On associe à $(f', \widetilde{X}', \mathscr{M}_{\widetilde{X}'})$ des objets analogues à ceux définis dans § 9 et § 11 pour $(f, \widetilde{X}, \mathscr{M}_{\widetilde{X}})$, qu'on note par les mêmes symboles affectés d'un exposant $'$. On désigne par

$$\Phi\colon \widetilde{E}' \to \widetilde{E}, \tag{12.1.2}$$

$$\Phi_s\colon \widetilde{E}'_s \to \widetilde{E}_s, \tag{12.1.3}$$

les morphismes de topos (7.5.3) et (8.11.8) induits par fonctorialité par g. D'après ([4] 10.14), Φ s'identifie au morphisme de localisation de $\widetilde{E}$ en $\sigma^*(X')$. De plus, l'homomorphisme canonique $\Phi^{-1}(\overline{\mathscr{B}}) \to \overline{\mathscr{B}}'$ est un isomorphisme en vertu de 7.21(i). Pour tout entier $n \geq 1$, Φ_s est sous-jacent à un morphisme canonique de topos annelés (8.11.11)

$$\Phi_n\colon (\widetilde{E}'_s, \overline{\mathscr{B}}'_n) \to (\widetilde{E}_s, \overline{\mathscr{B}}_n). \tag{12.1.4}$$

L'homomorphisme $\Phi_s^*(\overline{\mathscr{B}}_n) \to \overline{\mathscr{B}}'_n$ étant un isomorphisme (8.13), il n'y a pas de différence pour les $\overline{\mathscr{B}}_n$-modules entre l'image inverse par Φ_s au sens des faisceaux abéliens et l'image inverse par Φ_n

au sens des modules. Le diagramme de morphismes de topos annelés (8.11.12)

(12.1.5)
$$\begin{CD} (\widetilde{E}'_s, \overline{\mathscr{B}}'_n) @>{\Phi_n}>> (\widetilde{E}_s, \overline{\mathscr{B}}_n) \\ @V{\sigma'_n}VV @VV{\sigma_n}V \\ (X'_{s,\text{ét}}, \mathscr{O}_{\overline{X}'_n}) @>{\overline{g}_n}>> (X_{s,\text{ét}}, \mathscr{O}_{\overline{X}_n}) \end{CD}$$

où $\overline{g}_n$ est le morphisme induit par g, est commutatif à isomorphisme canonique près.

12.2. Tout objet de E' étant naturellement un objet de E, on note $j\colon E' \to E$ le foncteur canonique. Celui-ci se factorise à travers une équivalence de catégories

(12.2.1)
$$E' \xrightarrow{\sim} E_{/(\overline{X}'^{\circ} \to X')},$$

qui est même une équivalence de catégories au-dessus de $\mathbf{\acute{E}t}_{/X'}$, où l'on considère $E_{/(\overline{X}'^{\circ} \to X')}$ comme une $(\mathbf{\acute{E}t}_{/X'})$-catégorie par changement de base du foncteur fibrant canonique $\pi\colon E \to \mathbf{\acute{E}t}_{/X}$ (9.2.2). D'après ([4] 5.36), la topologie co-évanescente de E' est induite par celle de E au moyen de j. Par suite, j est continu et cocontinu ([5] III 5.2). De plus, Φ s'identifie au morphisme de localisation de $\widetilde{E}$ en $\sigma^*(X') = (\overline{X}'^{\circ} \to X')^a$ ([4] 10.14). En particulier, Φ^* n'est autre que le foncteur de restriction par j. On désigne par $\mathbf{Q}'$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{\acute{E}t}_{/X'}$ des objets qui sont dans $\mathbf{Q}$ (9.5) et par

(12.2.2)
$$\pi'_{\mathbf{Q}'}\colon E'_{\mathbf{Q}'} \to \mathbf{Q}'$$

le catégorie fibrée déduite par changement de base du foncteur fibrant canonique $\pi'\colon E' \to \mathbf{\acute{E}t}_{/X'}$. Le foncteur j induit donc un foncteur $j_{\mathbf{Q}}\colon E'_{\mathbf{Q}'} \to E_{\mathbf{Q}}$ qui s'insère dans un diagramme commutatif à isomorphisme canonique près

(12.2.3)
$$\begin{CD} E'_{\mathbf{Q}'} @>{j_{\mathbf{Q}}}>> E_{\mathbf{Q}} \\ @V{u'}VV @VV{u}V \\ E' @>{j}>> E \end{CD}$$

où u et u' sont les foncteurs de projection canoniques. Les foncteurs u et u' sont pleinement fidèles, et la catégorie $E_{\mathbf{Q}}$ (resp. $E'_{\mathbf{Q}'}$) est $\mathbb{U}$-petite et topologiquement génératrice du site E (resp. E') d'après 9.5. Il résulte aussitôt de (12.2.1) que $j_{\mathbf{Q}}$ se factorise à travers une équivalence de catégories

(12.2.4)
$$E'_{\mathbf{Q}'} \xrightarrow{\sim} (E_{\mathbf{Q}})_{/\widehat{u}^*(\overline{X}'^{\circ} \to X')},$$

où $\widehat{u}^*(\overline{X}'^{\circ} \to X')$ est le préfaisceau sur $E_{\mathbf{Q}}$ déduit de $(\overline{X}'^{\circ} \to X')$ par restriction par u. On munit $E_{\mathbf{Q}}$ (resp. $E'_{\mathbf{Q}'}$) de la topologie induite par celle de E (resp. E'). Le foncteur $\Phi^*\colon \widetilde{E} \to \widetilde{E}'$ étant essentiellement surjectif, la topologie de $E'_{\mathbf{Q}'}$ est induite par celle de $E_{\mathbf{Q}}$ par $j_{\mathbf{Q}}$ ([5] II 2.2). Par suite, $j_{\mathbf{Q}}$ est continu et cocontinu ([5] III 5.2).

12.3. Soient Y un objet de $\mathbf{Q}'$ (12.2) tel que $Y_s \neq \emptyset$, $\overline{y}$ un point géométrique de $\overline{Y}^{\circ}$, $\overline{Y}'$ la composante irréductible de $\overline{Y}$ contenant $\overline{y}$ (3.3). Considérons les objets associés à Y dans 9.13 et 9.15 relatifs à $(f, \widetilde{X}, \mathscr{M}_{\widetilde{X}})$. On notera que l'anneau $\overline{R}^{\overline{y}}_Y$ (7.13.2), la structure logarithmique $\mathscr{M}_{\mathscr{A}_2(\overline{Y}^{\overline{y}})}$ sur $\mathscr{A}_2(\overline{Y}^{\overline{y}})$ (9.13.5) et le $\widehat{\overline{R}}^{\overline{y}}_Y$-module $\mathrm{T}^{\overline{y}}_Y$ (9.13.7) ne changent pas que l'on utilise f ou f'. Remplaçant $(f, \widetilde{X}, \mathscr{M}_{\widetilde{X}})$ par $(f', \widetilde{X}', \mathscr{M}_{\widetilde{X}'})$, on désigne par $\mathscr{L}'^{\overline{y}}_Y$ le $\widetilde{\mathrm{T}}^{\overline{y}}_Y$-torseur de $\widehat{\overline{Y}}^{\overline{y}}_{\text{zar}}$ défini dans (9.13.9), par $\mathscr{F}'^{\overline{y}}_Y$ le $\widehat{\overline{R}}^{\overline{y}}_Y$-module défini dans (9.13.10) et par $\mathscr{C}'^{\overline{y}}_Y$ la $\widehat{\overline{R}}^{\overline{y}}_Y$-algèbre définie dans (9.13.12). Soient U un ouvert de Zariski de $\widehat{\overline{Y}}^{\overline{y}}$, $\widetilde{U}$ l'ouvert de $\mathscr{A}_2(\overline{Y}^{\overline{y}})$ défini par U. Considérons le diagramme commutatif (sans la flèche pointillée)

$$\begin{tikzcd}
(U, \mathscr{M}_{\widehat{\overline{Y}}^{\overline{y}}}|U) \arrow[r] \arrow[d, "i_Y|U"'] & (\check{\overline{X}}', \mathscr{M}_{\check{\overline{X}}'}) \arrow[r, "\check{g}"] \arrow[d] & (\check{\overline{X}}, \mathscr{M}_{\check{\overline{X}}}) \arrow[d] \\
(\widetilde{U}, \mathscr{M}_{\mathscr{A}_2(\overline{Y}^{\overline{y}})}|\widetilde{U}) \arrow[r, dotted, "\psi"] & (\widetilde{X}', \mathscr{M}_{\widetilde{X}'}) \arrow[r, "\widetilde{g}"] & (\widetilde{X}, \mathscr{M}_{\widetilde{X}})
\end{tikzcd} \tag{12.3.1}$$

Comme $\widetilde{g}$ est étale, l'application

$$\mathscr{L}'^{\overline{y}}_Y(U) \to \mathscr{L}^{\overline{y}}_Y(U), \quad \psi \mapsto \widetilde{g} \circ \psi, \tag{12.3.2}$$

est bijective. On en déduit un isomorphisme $\widehat{\overline{R}}^{\overline{y}}_Y$-linéaire et $\pi_1(\overline{Y}'^{\circ}, \overline{y})$-équivariant

$$\mathscr{F}^{\overline{y}}_Y \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}'^{\overline{y}}_Y, \tag{12.3.3}$$

qui s'insère dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \widehat{\overline{R}}^{\overline{y}}_Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathscr{F}^{\overline{y}}_Y \arrow[r] \arrow[d] & \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{X/S}(Y) \otimes_{\mathscr{O}_X(Y)} \widehat{\overline{R}}^{\overline{y}}_Y \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \widehat{\overline{R}}^{\overline{y}}_Y \arrow[r] & \mathscr{F}'^{\overline{y}}_Y \arrow[r] & \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{X'/S}(Y) \otimes_{\mathscr{O}_{X'}(Y)} \widehat{\overline{R}}^{\overline{y}}_Y \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{12.3.4}$$

où les lignes horizontales sont les suites exactes (9.13.10). L'isomorphisme (12.3.3) induit un isomorphisme $\pi_1(\overline{Y}'^{\circ}, \overline{y})$-équivariant de $\widehat{\overline{R}}^{\overline{y}}_Y$-algèbres

$$\mathscr{C}^{\overline{y}}_Y \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}'^{\overline{y}}_Y. \tag{12.3.5}$$

Soit n un entier ≥ 1. Remplaçant $(f, \widetilde{X}, \mathscr{M}_{\widetilde{X}})$ par $(f', \widetilde{X}', \mathscr{M}_{\widetilde{X}'})$, on désigne par $\mathscr{F}'_{Y,n}$ le $\overline{\mathscr{B}}'_Y$-module de $\overline{Y}^{\circ}_{\text{fét}}$ défini dans (9.15.3) et par $\mathscr{C}'_{Y,n}$ la $\overline{\mathscr{B}}'_Y$-algèbre de $\overline{Y}^{\circ}_{\text{fét}}$ définie dans (9.15.4). D'après 7.21(ii), on a un isomorphisme canonique d'anneaux de $\overline{Y}^{\circ}_{\text{fét}}$

$$\overline{\mathscr{B}}_Y \xrightarrow{\sim} \overline{\mathscr{B}}'_Y. \tag{12.3.6}$$

Compte tenu de ce qui précède, on a un isomorphisme $\overline{\mathscr{B}}_Y$-linéaire canonique

$$\mathscr{F}_{Y,n} \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}'_{Y,n}. \tag{12.3.7}$$

On en déduit un isomorphisme de $\overline{\mathscr{B}}_Y$-algèbres

$$\mathscr{C}_{Y,n} \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}'_{Y,n}. \tag{12.3.8}$$

12.4. Soient n un entier ≥ 1, r un nombre rationnel ≥ 0. D'après ([5] III 2.3(2)), comme le foncteur $j_{\mathbf{Q}} \colon E'_{\mathbf{Q}'} \to E_{\mathbf{Q}}$ est cocontinu (12.2), les isomorphismes (12.3.7) induisent un isomorphisme de $\overline{\mathscr{B}}'_n$-modules

$$\rho_n \colon \Phi^*_n(\mathscr{F}_n) \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}'_n \tag{12.4.1}$$

qui s'insère dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Phi_n^*(\overline{\mathscr{B}}_n) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Phi_n^*(\mathscr{F}_n) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_n"] & \Phi_n^*(\sigma_n^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n})) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \overline{\mathscr{B}}'_n \arrow[r] & \mathscr{F}'_n \arrow[r] & \sigma'^*_n(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}'_n/\overline{S}_n}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{12.4.2}$$

où les lignes horizontales sont les suites exactes déduites de (9.22.1) (cf. la preuve de 9.22(ii)). De même, les isomorphismes (12.3.8) induisent un isomorphisme de $\overline{\mathscr{B}}'_n$-algèbres

$$\gamma_n \colon \Phi_n^*(\mathscr{C}_n) \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}'_n, \tag{12.4.3}$$

compatible avec ρ_n via les isomorphismes (9.22.3).

D'après (12.4.2), ρ_n induit un isomorphisme $\overline{\mathscr{B}}'_n$-linéaire

$$\rho_n^{(r)} \colon \Phi_n^*(\mathscr{F}_n^{(r)}) \to \mathscr{F}'^{(r)}_n \tag{12.4.4}$$

qui s'insère dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Phi_n^*(\overline{\mathscr{B}}_n) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Phi_n^*(\mathscr{F}_n^{(r)}) \arrow[r] \arrow[d, "\rho_n^{(r)}"] & \Phi_n^*(\sigma_n^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n})) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \overline{\mathscr{B}}'_n \arrow[r] & \mathscr{F}'^{(r)}_n \arrow[r] & \sigma'^*_n(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}'_n/\overline{S}_n}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{12.4.5}$$

où les lignes horizontales sont les suites exactes déduites de (9.22.1). On en déduit un isomorphisme de $\overline{\mathscr{B}}'_n$-algèbres

$$\gamma_n^{(r)} \colon \Phi_n^*(\mathscr{C}_n^{(r)}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}'^{(r)}_n. \tag{12.4.6}$$

12.5. On désigne par $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{X}'$) le schéma formel complété p-adique de $\overline{X}$ (resp. $\overline{X}'$), par

$$\mathfrak{g} \colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X} \tag{12.5.1}$$

le prolongement de $\overline{g} \colon \overline{X}' \to \overline{X}$ aux complétés et par

$$\breve{\Phi} \colon (\widetilde{E}'^{\mathbb{N}^\circ}_s, \breve{\overline{\mathscr{B}}}') \to (\widetilde{E}^{\mathbb{N}^\circ}_s, \breve{\overline{\mathscr{B}}}) \tag{12.5.2}$$

le morphisme de topos annelés induit par les morphismes $(\Phi_n)_{n\geq 1}$ (12.1.4) (cf. 6.5). On note encore

$$\breve{\Phi}^* \colon \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}) \to \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}') \tag{12.5.3}$$

le foncteur induit par l'image inverse par $\breve{\Phi}$. D'après 8.14, $\breve{\Phi}$ est canoniquement isomorphe au morphisme de localisation du topos annelé $(\widetilde{E}^{\mathbb{N}^\circ}_s, \breve{\overline{\mathscr{B}}})$ en $\lambda^*(\sigma_s^*(X'_s))$, où $\lambda \colon \widetilde{E}^{\mathbb{N}^\circ}_s \to \widetilde{E}_s$ est le morphisme de topos défini dans (6.4.3). Par suite, il n'y a pas de différence pour les $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-modules entre l'image inverse par $\breve{\Phi}$ au sens des faisceaux abéliens et l'image inverse au sens des modules. Le diagramme de morphismes de topos annelés

$$\begin{tikzcd} (\widetilde{E}'^{\mathbb{N}^\circ}_s, \breve{\overline{\mathscr{B}}}') \arrow[r, "\breve{\Phi}"] \arrow[d, "\top'"'] & (\widetilde{E}^{\mathbb{N}^\circ}_s, \breve{\overline{\mathscr{B}}}) \arrow[d, "\top"] \\ (X'_{s,\mathrm{zar}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}) \arrow[r, "\mathfrak{g}"] & (X_{s,\mathrm{zar}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) \end{tikzcd} \tag{12.5.4}$$

où $\top$ et $\top'$ sont les morphismes de topos annelés définis dans (10.1.11), est commutatif à isomorphisme canonique près (8.11.15). Le morphisme canonique

$$\mathfrak{g}^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) \to \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}'/\mathscr{S}} \tag{12.5.5}$$

étant un isomorphisme, il induit par (12.5.4) un isomorphisme

$$\delta\colon \breve{\Phi}^*(\top^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})) \xrightarrow{\sim} \top'^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}'/\mathscr{S}}). \tag{12.5.6}$$

Soit r un nombre rationnel ≥ 0. Compte tenu de (6.5.4) et (6.12.1), les isomorphismes $(\rho_n^{(r)})_{n\geq 1}$ (12.4.4) induisent un isomorphisme $\breve{\overline{\mathscr{B}}}'$-linéaire

$$\breve{\rho}^{(r)}\colon \breve{\Phi}^*(\breve{\mathscr{F}}^{(r)}) \xrightarrow{\sim} \breve{\mathscr{F}}'^{(r)}. \tag{12.5.7}$$

De même, les isomorphismes $(\gamma_n^{(r)})_{n\geq 1}$ (12.4.6) induisent un isomorphisme de $\breve{\overline{\mathscr{B}}}'$-algèbres

$$\breve{\gamma}^{(r)}\colon \breve{\Phi}^*(\breve{\mathscr{C}}^{(r)}) \xrightarrow{\sim} \breve{\mathscr{C}}'^{(r)}. \tag{12.5.8}$$

Il résulte aussitôt de (12.4.5) que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\breve{\Phi}^*(\breve{\mathscr{C}}^{(r)}) \arrow[r, "\breve{\gamma}^{(r)}"] \arrow[d, "\breve{\Phi}^*(\breve{d}^{(r)})"'] & \breve{\mathscr{C}}'^{(r)} \arrow[d, "\breve{d}'^{(r)}"] \\
\breve{\Phi}^*(\top^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}} \breve{\mathscr{C}}^{(r)}) \arrow[r, "\delta\otimes\breve{\gamma}^{(r)}"] & \top'^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}'/\mathscr{S}}) \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}'} \breve{\mathscr{C}}'^{(r)}
\end{tikzcd} \tag{12.5.9}$$

où $\breve{d}^{(r)}$ et $\breve{d}'^{(r)}$ sont les dérivations (11.7.1), est commutatif. Pour tous nombres rationnels $r \geq r' \geq 0$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\breve{\Phi}^*(\breve{\mathscr{C}}^{(r)}) \arrow[r, "\breve{\gamma}^{(r)}"] \arrow[d, "\breve{\Phi}^*(\breve{\alpha}^{r,r'})"'] & \breve{\mathscr{C}}'^{(r)} \arrow[d, "\breve{\alpha}'^{r,r'}"] \\
\breve{\Phi}^*(\breve{\mathscr{C}}^{(r')}) \arrow[r, "\breve{\gamma}^{(r')}"] & \breve{\mathscr{C}}'^{(r')}
\end{tikzcd} \tag{12.5.10}$$

où $\breve{\alpha}^{r,r'}$ et $\breve{\alpha}'^{r,r'}$ sont les homomorphismes canoniques (9.28.7), est commutatif.

12.6. On désigne (abusivement) par

$$\mathfrak{g}^*\colon \mathbf{MH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) \to \mathbf{MH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}'/\mathscr{S}}) \tag{12.6.1}$$

le foncteur image inverse pour les modules de Higgs ([3] 2.9) induit par $\mathfrak{g}$ et le morphisme canonique (12.5.5). On définit de même un foncteur image inverse (11.5)

$$\mathfrak{g}^*\colon \mathbf{IH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}, \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) \to \mathbf{IH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}, \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}'/\mathscr{S}}). \tag{12.6.2}$$

Celui-ci induit un foncteur que l'on note encore

$$\mathfrak{g}^*\colon \mathbf{IH}_{\mathbb{Q}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}, \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) \to \mathbf{IH}_{\mathbb{Q}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}, \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}'/\mathscr{S}}). \tag{12.6.3}$$

Le diagramme de foncteurs

$$\begin{tikzcd} \mathbf{IH}_{\mathbb{Q}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}, \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathfrak{g}^*"'] & \mathbf{MH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) \arrow[d, "\mathfrak{g}^*"] \\ \mathbf{IH}_{\mathbb{Q}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}, \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}'/\mathscr{S}}) \arrow[r] & \mathbf{MH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}'/\mathscr{S}}) \end{tikzcd} \tag{12.6.4}$$

où les flèches horizontales sont les foncteurs (11.5.2) est commutatif à isomorphisme canonique près.

12.7. Soit r un nombre rationnel ≥ 0. D'après 5.11 et (12.5.9), pour tout objet $(\mathscr{F}, \mathscr{G}, u, \nabla)$ de Ξ^r (11.7), $(\breve{\Phi}^*(\mathscr{F}), \breve{\Phi}^*(\mathscr{G}), \breve{\Phi}^*(u), \breve{\Phi}^*(\nabla))$ s'identifie à un objet de Ξ'^r au moyen des isomorphismes $\breve{\gamma}^{(r)}$ (12.5.8) et δ (12.5.6). On en déduit un foncteur qu'on note encore

$$\breve{\Phi}^* \colon \Xi^r \to \Xi'^r. \tag{12.7.1}$$

Celui-ci induit un foncteur que l'on note encore

$$\breve{\Phi}^* \colon \Xi^r_{\mathbb{Q}} \to \Xi'^r_{\mathbb{Q}}. \tag{12.7.2}$$

Les diagrammes de foncteurs

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Mod}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}) \arrow[r, "\mathfrak{S}^r"] \arrow[d, "\breve{\Phi}^*"'] & \Xi^r \arrow[d, "\breve{\Phi}^*"] \\ \mathbf{Mod}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}') \arrow[r, "\mathfrak{S}'^r"] & \Xi'^r \end{tikzcd} \tag{12.7.3}$$

où les flèches horizontales sont les foncteurs (11.7.3), et

$$\begin{tikzcd} \mathbf{IH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}, \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) \arrow[r, "\top^{r+}"] \arrow[d, "\mathfrak{g}^*"'] & \Xi^r \arrow[d, "\breve{\Phi}^*"] \\ \mathbf{IH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}, \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}'/\mathscr{S}}) \arrow[r, "\top'^{r+}"] & \Xi'^r \end{tikzcd} \tag{12.7.4}$$

où les flèches horizontales sont les foncteurs (11.7.8), sont clairement commutatifs à isomorphismes canoniques près. D'après 8.14, le diagramme de foncteurs

$$\begin{tikzcd} \Xi^r \arrow[r, "\mathscr{K}^r"] \arrow[d, "\Phi^*"'] & \mathbf{Mod}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}) \arrow[d, "\breve{\Phi}^*"] \\ \Xi'^r \arrow[r, "\mathscr{K}'^r"] & \mathbf{Mod}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}') \end{tikzcd} \tag{12.7.5}$$

où $\mathscr{K}^r$ et $\mathscr{K}'^r$ sont les foncteurs (11.7.5), est commutatif à isomorphisme canonique près.

Le morphisme de changement de base relatif au diagramme (12.5.4) induit un morphisme de foncteurs de Ξ^r dans $\mathbf{IH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}, \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}'/\mathscr{S}})$

$$\mathfrak{g}^* \circ \top^r_+ \to \top'^r_+ \circ \breve{\Phi}^*, \tag{12.7.6}$$

où $\top^r_+$ et $\top'^r_+$ sont les foncteurs (11.7.11). D'après ([5] XVII 2.1.3), celui-ci est l'adjoint du morphisme

$$\top'^{r+} \circ \mathfrak{g}^* \circ \top^r_+ \xrightarrow{\sim} \breve{\Phi}^* \circ \top^{r+} \circ \top^r_+ \to \breve{\Phi}^*, \tag{12.7.7}$$

où la première flèche est l'isomorphisme sous-jacent au diagramme (12.7.4) et la seconde flèche est la flèche d'adjonction. Par suite, pour tout objet $\mathscr{N}$ de $\mathbf{IH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}, \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})$ et tout objet $\mathscr{F}$ de Ξ^r, le diagramme d'applications d'ensembles

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\Xi^r}(\top^{r+}(\mathscr{N}), \mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d, "a"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{IH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}, \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})}(\mathscr{N}, \top^r_+(\mathscr{F})) \arrow[d, "b"] \\ \mathrm{Hom}_{\Xi'^r}(\top'^{r+}(\mathfrak{g}^*(\mathscr{N})), \breve{\Phi}^*(\mathscr{F})) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{IH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}, \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}'/\mathscr{S}})}(\mathfrak{g}^*(\mathscr{N}), \top'^r_+(\breve{\Phi}^*(\mathscr{F}))) \end{tikzcd} \tag{12.7.8}$$

où les flèches horizontales sont les isomorphismes d'adjonction, a est induit par le foncteur $\breve{\Phi}^*$ et l'isomorphisme sous-jacent au diagramme (12.7.4) et b est induit par le foncteur $\mathfrak{g}^*$ et le morphisme (12.7.6), est commutatif.

Pour tous nombres rationnels $r \geq r' \geq 0$, le diagramme de foncteurs

$$\begin{tikzcd} \Xi^r \arrow[r, "\epsilon^{r,r'}"] \arrow[d, "\breve{\Phi}^*"'] & \Xi^{r'} \arrow[d, "\breve{\Phi}^*"] \\ \Xi'^r \arrow[r, "\epsilon'^{r,r'}"] & \Xi'^{r'} \end{tikzcd} \tag{12.7.9}$$

où les flèches horizontales sont les foncteurs (11.8.3), est commutatif à isomorphisme canonique près. Il résulte aussitôt de (12.5.10) que le diagramme de morphismes de foncteurs

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g}^* \circ \top^r_+ \arrow[rr] \arrow[d] & & \mathfrak{g}^* \circ \top^{r'}_+ \circ \epsilon^{r,r'} \arrow[d] \\ \top'^r_+ \circ \breve{\Phi}^* \arrow[r] & \top'^{r'}_+ \circ \epsilon^{r,r'} \circ \breve{\Phi}^* \arrow[r, equal] & \top'^{r'}_+ \circ \breve{\Phi}^* \circ \epsilon^{r,r'} \end{tikzcd} \tag{12.7.10}$$

où les flèches horizontales sont induites par le morphisme (11.8.9), les flèches verticales sont induites par le morphisme (12.7.6) et l'identification notée avec un symbole = provient du diagramme (12.7.9), est commutatif. Par suite, le morphisme composé

$$\mathfrak{g}^* \circ \top^r_+ \circ \mathfrak{S}^r \to \top'^r_+ \circ \breve{\Phi}^* \circ \mathfrak{S} \xrightarrow{\sim} \top'^r_+ \circ \mathfrak{S}'^r \circ \breve{\Phi}^*, \tag{12.7.11}$$

où la première flèche est induite par (12.7.6) et la seconde flèche est l'isomorphisme sous-jacent au diagramme (12.7.3), induit par passage à la limite inductive, pour $r \in \mathbb{Q}_{>0}$, un morphisme de foncteurs de $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$ dans $\mathbf{MH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}'/\mathscr{S}})$

$$\mathfrak{g}^* \circ \mathscr{H} \to \mathscr{H}' \circ \breve{\Phi}, \tag{12.7.12}$$

où $\mathscr{H}$ et $\mathscr{H}'$ sont les foncteurs (11.13.2).

Proposition 12.8. *Supposons que g soit une immersion ouverte. Alors :*

(i) *Pour tout nombre rationnel* $r \geq 0$, *le morphisme* (12.7.6) *est un isomorphisme. Il rend commutatif le diagramme de foncteurs*

(12.8.1)
$$\begin{tikzcd} \Xi^r \arrow[r, "\top_+^r"] \arrow[d, "\check{\Phi}^*"'] & \mathbf{IH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}, \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) \arrow[d, "\mathfrak{g}^*"] \\ \Xi'^r \arrow[r, "\top'^r_+"] & \mathbf{IH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}, \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}'/\mathscr{S}}) \end{tikzcd}$$

(ii) *Le morphisme* (12.7.12) *est un isomorphisme. Il rend commutatif le diagramme de foncteurs*

(12.8.2)
$$\begin{tikzcd} \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}) \arrow[r, "\mathscr{H}"] \arrow[d, "\check{\Phi}^*"'] & \mathbf{MH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) \arrow[d, "\mathfrak{g}^*"] \\ \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}') \arrow[r, "\mathscr{H}'"] & \mathbf{MH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}'/\mathscr{S}}) \end{tikzcd}$$

(i) Cela résulte de 8.15.
(ii) Cela résulte de (i) et des définitions.

Proposition 12.9. *Soient* $\mathscr{M}$ *un* $\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}$*-module de Dolbeault,* $\mathscr{N}$ *un* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$*-fibré de Higgs soluble à coefficients dans* $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$. *Alors* $\check{\Phi}^*(\mathscr{M})$ *est un* $\breve{\overline{\mathscr{B}}}'_{\mathbb{Q}}$*-module de Dolbeault et* $\mathfrak{g}^*(\mathscr{N})$ *est un* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}[\frac{1}{p}]$*-fibré de Higgs soluble à coefficients dans* $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}'/\mathscr{S}}$. *Si de plus,* $\mathscr{M}$ *et* $\mathscr{N}$ *sont associés,* $\check{\Phi}^*(\mathscr{M})$ *et* $\mathfrak{g}^*(\mathscr{N})$ *sont associés.*

En effet, $\mathfrak{g}^*(\mathscr{N})$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}[\frac{1}{p}]$-fibré de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}'/\mathscr{S}}$ et $\check{\Phi}^*(\mathscr{M})$ est un objet de $\mathbf{Mod}^{\mathrm{atf}}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}')$. Supposons qu'il existe un nombre rationnel $r > 0$ et un isomorphisme de $\Xi^r_{\mathbb{Q}}$

(12.9.1)
$$\alpha\colon \top^{r+}(\mathscr{N}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}^r(\mathscr{M}).$$

Compte tenu de (12.7.3) et (12.7.4), $\check{\Phi}^*(\alpha)$ induit un isomorphisme de $\Xi'^r_{\mathbb{Q}}$

(12.9.2)
$$\alpha'\colon \top'^{r+}(\mathfrak{g}^*(\mathscr{N})) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}'^r(\check{\Phi}^*(\mathscr{M}));$$

d'où la proposition.

12.10. D'après 12.9, $\check{\Phi}^*$ induit un foncteur

(12.10.1)
$$\check{\Phi}^*\colon \mathbf{Mod}^{\mathrm{Dolb}}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}) \to \mathbf{Mod}^{\mathrm{Dolb}}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}'),$$

et $\mathfrak{g}^*$ induit un foncteur

(12.10.2)
$$\mathfrak{g}^*\colon \mathbf{MH}^{\mathrm{sol}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) \to \mathbf{MH}^{\mathrm{sol}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}'/\mathscr{S}}).$$

Proposition 12.11. (i) *Le diagramme de foncteurs*

(12.11.1)
$$\begin{tikzcd} \mathbf{Mod}^{\mathrm{Dolb}}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}) \arrow[r, "\mathscr{H}"] \arrow[d, "\check{\Phi}^*"'] & \mathbf{MH}^{\mathrm{sol}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) \arrow[d, "\mathfrak{g}^*"] \\ \mathbf{Mod}^{\mathrm{Dolb}}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}') \arrow[r, "\mathscr{H}'"] & \mathbf{MH}^{\mathrm{sol}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}'/\mathscr{S}}) \end{tikzcd}$$

où $\mathscr{H}$ et $\mathscr{H}'$ sont les foncteurs (11.18.1) *est commutatif à isomorphisme canonique près.*

(ii) *Le diagramme de foncteurs*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{MH}^{\mathrm{sol}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) \arrow[r, "\mathscr{V}"] \arrow[d, "\mathfrak{g}^*"'] & \mathbf{Mod}^{\mathrm{Dolb}}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}) \arrow[d, "\check{\Phi}^*"] \\ \mathbf{MH}^{\mathrm{sol}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}'/\mathscr{S}}) \arrow[r, "\mathscr{V}'"] & \mathbf{Mod}^{\mathrm{Dolb}}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}') \end{tikzcd} \tag{12.11.2}$$

où $\mathscr{V}$ et $\mathscr{V}'$ sont les foncteurs (11.23.1) *est commutatif à isomorphisme canonique près.*

(i) Pour tout objet $\mathscr{M}$ de $\mathbf{Mod}^{\mathrm{Dolb}}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$, $\mathscr{M}$ et $\mathscr{H}(\mathscr{M})$ sont associés en vertu de 11.18. Choisissons un nombre rationnel $r_{\mathscr{M}} > 0$ et un isomorphisme de $\Xi^{r_{\mathscr{M}}}_{\mathbb{Q}}$

$$\alpha_{\mathscr{M}} \colon \top^{r_{\mathscr{M}}+}(\mathscr{H}(\mathscr{M})) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}^{r_{\mathscr{M}}}(\mathscr{M}) \tag{12.11.3}$$

vérifiant les propriétés du 11.19. Pour tout nombre rationnel r tel que $0 < r \leq r_{\mathscr{M}}$, on désigne par

$$\alpha^r_{\mathscr{M}} \colon \top^{r+}(\mathscr{H}(\mathscr{M})) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}^r(\mathscr{M}) \tag{12.11.4}$$

l'isomorphisme de $\Xi^r_{\mathbb{Q}}$ induit par $\epsilon^{r_{\mathscr{M}},r}(\alpha_{\mathscr{M}})$ (11.8.4) et les isomorphismes (11.8.5) et (11.8.6). Compte tenu de (12.7.3) et (12.7.4), $\check{\Phi}^*(\alpha_{\mathscr{M}})$ induit un isomorphisme de $\Xi'^{r_{\mathscr{M}}}_{\mathbb{Q}}$

$$\alpha'_{\mathscr{M}} \colon \top'^{r_{\mathscr{M}}+}(\mathfrak{g}^*(\mathscr{H}(\mathscr{M}))) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}'^{r_{\mathscr{M}}}(\check{\Phi}^*(\mathscr{M})). \tag{12.11.5}$$

De même, $\check{\Phi}^*(\alpha^r_{\mathscr{M}})$ induit un isomorphisme de $\Xi'^r_{\mathbb{Q}}$

$$\alpha'^r_{\mathscr{M}} \colon \top'^{r+}(\mathfrak{g}^*(\mathscr{H}(\mathscr{M}))) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}'^r(\check{\Phi}^*(\mathscr{M})), \tag{12.11.6}$$

qu'on peut aussi déduire de $\epsilon'^{r_{\mathscr{M}},r}(\alpha'_{\mathscr{M}})$ par (12.7.9). On désigne par

$$\beta'^r_{\mathscr{M}} \colon \mathfrak{g}^*(\mathscr{H}(\mathscr{M})) \to \top'^r_+(\mathfrak{S}'^r(\check{\Phi}^*(\mathscr{M})) \tag{12.11.7}$$

son adjoint (11.7.13). D'après 12.9, $\check{\Phi}^*(\mathscr{M})$ est un $\breve{\overline{\mathscr{B}}}'_{\mathbb{Q}}$-module de Dolbeault et $\mathfrak{g}^*(\mathscr{H}(\mathscr{M}))$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}[\frac{1}{p}]$-fibré de Higgs soluble à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}'/\mathscr{S}}$, associé à $\check{\Phi}^*(\mathscr{M})$. Par suite, en vertu de 11.17(i), le morphisme composé

$$\mathfrak{g}^*(\mathscr{H}(\mathscr{M})) \xrightarrow{\beta'^r_{\mathscr{M}}} \top'^r_+(\mathfrak{S}'^r(\check{\Phi}^*(\mathscr{M})) \longrightarrow \mathscr{H}'(\check{\Phi}^*(\mathscr{M})), \tag{12.11.8}$$

où la seconde flèche est le morphisme canonique (11.13.2), est un isomorphisme qui dépend a priori de $\alpha_{\mathscr{M}}$ mais pas de r. D'après la preuve de 11.26, pour tout morphisme $u \colon \mathscr{M} \to \mathscr{M}'$ de $\mathbf{Mod}^{\mathrm{Dolb}}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$ et tout nombre rationnel r tel que $0 < r < \inf(r_{\mathscr{M}}, r_{\mathscr{M}'})$, le diagramme de $\Xi^r_{\mathbb{Q}}$

$$\begin{tikzcd} \top^{r+}(\mathscr{H}(\mathscr{M})) \arrow[r, "\alpha^r_{\mathscr{M}}"] \arrow[d, "\top^{r+}(\mathscr{H}(u))"'] & \mathfrak{S}^r(\mathscr{M}) \arrow[d, "\mathfrak{S}^r(u)"] \\ \top^{r+}(\mathscr{H}(\mathscr{M}')) \arrow[r, "\alpha^r_{\mathscr{M}'}"] & \mathfrak{S}^r(\mathscr{M}') \end{tikzcd} \tag{12.11.9}$$

est commutatif. On en déduit que l'isomorphisme composé (12.11.8)

$$\mathfrak{g}^*(\mathscr{H}(\mathscr{M})) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}'(\check{\Phi}^*(\mathscr{M})) \tag{12.11.10}$$

ne dépend que de $\mathscr{M}$ (mais pas du choix de $\alpha_{\mathscr{M}}$) et qu'il en dépend fonctoriellement ; d'où la proposition.

(ii) La preuve est similaire à celle de (i) et est laissée au lecteur.

Remarque 12.12. Soit $\mathscr{M}$ un $\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}$-module de Dolbeault.

(i) Le morphisme canonique (12.7.12)

$$\mathfrak{g}^*(\mathscr{H}(\mathscr{M})) \to \mathscr{H}'(\check{\Phi}^*(\mathscr{M})) \tag{12.12.1}$$

est un isomorphisme ; c'est l'isomorphisme sous-jacent au diagramme commutatif (12.11.1). En effet, reprenons les notations de la preuve de 12.11(i) et notons, de plus,

$$\beta^r_{\mathscr{M}} \colon \mathscr{H}(\mathscr{M}) \to \top^r_+(\mathfrak{S}^r(\mathscr{M})) \tag{12.12.2}$$

le morphisme adjoint de $\alpha^r_{\mathscr{M}}$. Il résulte de (12.7.8) que le morphisme $\beta'^r_{\mathscr{M}}$ (12.11.7) est égal au composé

$$\mathfrak{g}^*(\mathscr{H}(\mathscr{M})) \xrightarrow{\mathfrak{g}^*(\beta^r_{\mathscr{M}})} \mathfrak{g}^*(\top^r_+(\mathfrak{S}^r(\mathscr{M}))) \longrightarrow \top'^r_+(\check{\Phi}^*(\mathfrak{S}^r(\mathscr{M}))) \xrightarrow{\sim} \top'^r_+(\mathfrak{S}'^r(\check{\Phi}^*(\mathscr{M}))) , \tag{12.12.3}$$

où la deuxième flèche est le morphisme (12.7.6) et la dernière flèche est l'isomorphisme sous-jacent au diagramme (12.7.3). Par ailleurs, la limite inductive des morphismes $\beta^r_{\mathscr{M}}$, pour $r \in \mathbb{Q}_{>0}$, est l'identité, et la limite inductive des morphismes $\beta'^r_{\mathscr{M}}$, pour $r \in \mathbb{Q}_{>0}$, est égale à l'isomorphisme composé (12.11.8), sous-jacent au diagramme commutatif (12.11.1).

(ii) Soient r un nombre rationnel > 0,

$$\alpha \colon \top^{r+}(\mathscr{H}(\mathscr{M})) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}^r(\mathscr{M}) \tag{12.12.4}$$

un isomorphisme de $\Xi^r_{\mathbb{Q}}$ vérifiant les propriétés de 11.19. Compte tenu de (i), (12.7.3) et (12.7.4), on peut identifier $\check{\Phi}^*(\alpha)$ à un isomorphisme

$$\alpha' \colon \top'^{r+}(\mathscr{H}'(\check{\Phi}^*(\mathscr{M}))) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}'^r(\check{\Phi}^*(\mathscr{M})). \tag{12.12.5}$$

Par ailleurs, $\check{\Phi}^*(\mathscr{M})$ est un $\breve{\overline{\mathscr{B}}}'_{\mathbb{Q}}$-module de Dolbeault d'après 12.9. Il résulte aussitôt de 11.17 que α' vérifie les propriétés de 11.19.

12.13. On note ψ le morphisme composé

$$\psi \colon \widetilde{E}_s^{\mathbb{N}^\circ} \xrightarrow{\lambda} \widetilde{E}_s \xrightarrow{\sigma_s} X_{s,\text{ét}} \xrightarrow{\iota_{\text{ét}}} X_{\text{ét}}, \tag{12.13.1}$$

où λ est le morphisme de topos défini dans (6.4.3) et $\iota \colon X_s \to X$ est l'injection canonique. Pour tout objet U de $\mathbf{\acute{E}t}_{/X}$, on désigne par $f_U \colon (U, \mathscr{M}_X|U) \to (S, \mathscr{M}_S)$ le morphisme induit par f, et par $\widetilde{U} \to \widetilde{X}$ l'unique morphisme étale qui relève $\check{\overline{U}} \to \check{\overline{X}}$, de sorte que $(\widetilde{U}, \mathscr{M}_{\widetilde{X}}|\widetilde{U})$ est une $(\mathscr{A}_2(\overline{S}), \mathscr{M}_{\mathscr{A}_2(\overline{S})})$-déformation lisse de $(\check{\overline{U}}, \mathscr{M}_{\check{\overline{X}}}|\check{\overline{U}})$. Le localisé du topos annelé $(\widetilde{E}_s^{\mathbb{N}^\circ}, \breve{\overline{\mathscr{B}}})$ en $\psi^*(U)$ est canoniquement équivalent au topos annelé analogue associé à f_U en vertu de 8.14. Pour tout nombre rationnel $r \geq 0$, le localisé de la $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-algèbre $\breve{\mathscr{C}}^{(r)}$ en $\psi^*(U)$ est canoniquement isomorphe à la $(\breve{\overline{\mathscr{B}}}|\psi^*(U))$-algèbre analogue associée à la déformation $(\widetilde{U}, \mathscr{M}_{\widetilde{X}}|\widetilde{U})$, d'après (12.5.8). On désigne par $\mathbf{Mod}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}|\psi^*(U))$ la catégorie des $(\breve{\overline{\mathscr{B}}}|\psi^*(U))$-modules de $(\widetilde{E}_s^{\mathbb{N}^\circ})_{/\psi^*(U)}$, par $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}|\psi^*(U))$ la catégorie des $(\breve{\overline{\mathscr{B}}}|\psi^*(U))$-modules à isogénie près, par Ξ^r_U la catégorie des p^r-isoconnexions intégrables relativement à l'extension $(\breve{\mathscr{C}}^{(r)}|\psi^*(U))/(\breve{\overline{\mathscr{B}}}|\psi^*(U))$ (cf. 11.7), par $\Xi^r_{U,\mathbb{Q}}$ la catégorie des objets de Ξ^r_U à isogénie près et par $\mathbf{Mod}^{\mathrm{Dolb}}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}|\psi^*(U))$ la catégorie des $(\breve{\overline{\mathscr{B}}}|\psi^*(U))_{\mathbb{Q}}$-modules de Dolbeault relativement à la déformation $(\widetilde{U}, \mathscr{M}_{\widetilde{X}}|\widetilde{U})$ (cf. 11.11). D'après 12.9, pour tout morphisme $g \colon U' \to U$ de $\mathbf{\acute{E}t}_{/X}$, le foncteur de restriction

$$\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}|\psi^*(U)) \to \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}|\psi^*(U')), \quad \mathscr{M} \mapsto \mathscr{M}|\psi^*(U'), \tag{12.13.2}$$

induit un foncteur

$$\mathbf{Mod}^{\mathrm{Dolb}}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}|\psi^*(U)) \to \mathbf{Mod}^{\mathrm{Dolb}}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}|\psi^*(U')). \tag{12.13.3}$$

On note

$$\Xi^r_U \to \Xi^r_{U'}, \qquad A \mapsto A|\psi^*(U'), \tag{12.13.4}$$

$$\Xi^r_{U,\mathbb{Q}} \to \Xi^r_{U',\mathbb{Q}}, \qquad B \mapsto B|\psi^*(U'), \tag{12.13.5}$$

les foncteurs de restriction définis dans (12.7.1) et (12.7.2), respectivement.

Lemme 12.14. *Soient r un nombre rationnel ≥ 0, A, B deux objets de $\Xi^r_{X,\mathbb{Q}}$, $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement étale de X. Pour tous $(i,j) \in I^2$, on pose $U_{ij} = U_i \times_X U_j$. Alors le diagramme d'applications d'ensembles*

(12.14.1)

$$\mathrm{Hom}_{\Xi^r_{X,\mathbb{Q}}}(A,B) \to \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\Xi^r_{U_i,\mathbb{Q}}}(A|\psi^*(U_i), B|\psi^*(U_i)) \rightrightarrows \prod_{(i,j)\in I^2} \mathrm{Hom}_{\Xi^r_{U_{ij},\mathbb{Q}}}(A|\psi^*(U_{ij}), B|\psi^*(U_{ij}))$$

est exact.

En effet, comme X est quasi-compact, on peut supposer I fini, auquel cas l'assertion résulte facilement de 5.7.

12.15. On note $\mathrm{MOD}'(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$ la $\widetilde{E}^{\mathbb{N}^\circ}_s$-catégorie fibrée (et même scindée [14] VI § 9) des $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-modules sur $\widetilde{E}^{\mathbb{N}^\circ}_s$ ([13] II 3.4.1). C'est un champ au-dessus de $\widetilde{E}^{\mathbb{N}^\circ}_s$ d'après ([13] II 3.4.4). On désigne par $\mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{coh}/X}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{\acute{E}t}_{/X}$ formée des schémas étales de présentation finie sur X et par

$$\mathrm{MOD}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}) \to \mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{coh}/X} \tag{12.15.1}$$

le changement de base de $\mathrm{MOD}'(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$ ([14] VI § 3) par $\psi^* \circ \varepsilon$, où ψ est le morphisme (12.13.1) et $\varepsilon\colon \mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{coh}/X} \to X_{\mathrm{\acute{e}t}}$ est le foncteur canonique. C'est aussi un champ d'après ([13] II 3.1.1). On en déduit une catégorie fibrée

$$\mathrm{MOD}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}) \to \mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{coh}/X}, \tag{12.15.2}$$

dont la fibre au-dessus d'un objet U de $\mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{coh}/X}$ est la catégorie $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}|\psi^*(U))$ et le foncteur image inverse par un morphisme $U' \to U$ de $\mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{coh}/X}$ est le foncteur de restriction (12.13.2). On notera que ce n'est a priori pas un champ. Elle induit une catégorie fibrée

$$\mathrm{MOD}^{\mathrm{Dolb}}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}) \to \mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{coh}/X} \tag{12.15.3}$$

dont la fibre au-dessus d'un objet U de $\mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{coh}/X}$ est la catégorie $\mathbf{Mod}^{\mathrm{Dolb}}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}|\psi^*(U))$ et le foncteur image inverse par un morphisme $U' \to U$ de $\mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{coh}/X}$ est le foncteur de restriction (12.13.3). On s'attend à ce que (12.15.3) soit un champ. On peut toutefois montrer le résultat partiel suivant.

Proposition 12.16. *Soient $\mathscr{M}$ un objet de $\mathbf{Mod}^{\mathrm{atf}}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}})$, $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert (de Zariski) de X. Pour que $\mathscr{M}$ soit de Dolbeault, il faut et il suffit que pour tout $i \in I$, $\mathscr{M}|\psi^*(U_i)$ soit de Dolbeault.*

En effet, la condition est nécessaire en vertu de 12.9. Supposons que pour tout $i \in I$, $\mathscr{M}|\psi^*(U_i)$ soit de Dolbeault et montrons que $\mathscr{M}$ est de Dolbeault. Comme X est quasi-compact, on peut supposer I fini. Choisissons pour tout $i \in I$, un nombre rationnel $r_i > 0$ et un isomorphisme de $\Xi^{r_i}_{U_i,\mathbb{Q}}$

$$\alpha_i \colon \top_i^{r_i+}(\mathscr{H}_i(\mathscr{M}|\psi^*(U_i))) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}_i^{r_i}(\mathscr{M}|\psi^*(U_i)) \tag{12.16.1}$$

vérifiant les propriétés du 11.19, où $\mathscr{H}_i$, $\top_i^{r+}$ et $\mathfrak{S}_i$ sont les foncteurs (11.18.1), (11.7.11) et (11.7.3), respectivement, associés à $(f_{U_i}, \widetilde{U}_i, \mathscr{M}_{\widetilde{X}}|\widetilde{U}_i)$. Pour tout nombre rationnel r tel que $0 < r \leq r_i$, on désigne par $\epsilon_i^{r_i,r} \colon \Xi^{r_i}_{U_i,\mathbb{Q}} \to \Xi^{r}_{U_i,\mathbb{Q}}$ le foncteur (11.8.4) associé à $(f_{U_i}, \widetilde{U}_i, \mathscr{M}_{\widetilde{X}}|\widetilde{U}_i)$ et par

$$\alpha_i^r \colon \top_i^{r+}(\mathscr{H}_i(\mathscr{M}|\psi^*(U_i))) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}_i^{r}(\mathscr{M}|\psi^*(U_i)) \tag{12.16.2}$$

l'isomorphisme de $\Xi^{r}_{U_i,\mathbb{Q}}$ induit par $\epsilon_i^{r_i,r}(\alpha_i)$ et les isomorphismes (11.8.5) et (11.8.6). En vertu de (12.7.3), (12.7.4) et 12.8(ii), on peut identifier α_i^r à un isomorphisme

$$\alpha_i^r \colon \top^{r+}(\mathscr{H}(\mathscr{M}))|\psi^*(U_i) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}^{r}(\mathscr{M})|\psi^*(U_i). \tag{12.16.3}$$

Pour tout $(i,j) \in I^2$, posant $U_{ij} = U_i \times_X U_j$, $\mathscr{M}|\psi^*(U_{ij})$ est de Dolbeault d'après 12.9. Compte tenu de 12.12, les isomorphismes $\alpha_i|\psi^*(U_{ij})$ et $\alpha_j|\psi^*(U_{ij})$ vérifient les propriétés du 11.19. Il résulte alors de la preuve de 11.26 que pour tout nombre rationnel $0 < r < \inf(r_i, r_j)$, on a dans $\Xi^{r}_{U_{ij},\mathbb{Q}}$

$$\alpha_i^r|\psi^*(U_{ij}) = \alpha_j^r|\psi^*(U_{ij}). \tag{12.16.4}$$

D'après 12.14, pour tout nombre rationnel $0 < r < \inf(r_i, i \in I)$, les isomorphismes $(\alpha_i^r)_{i \in I}$ se recollent en un isomorphisme de $\Xi^r_{\mathbb{Q}}$

$$\alpha^r \colon \top^{r+}(\mathscr{H}(\mathscr{M})) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}^{r}(\mathscr{M}). \tag{12.16.5}$$

13. Petits modules de Higgs

Les hypothèses et notations générales de § 9 et § 11 sont en vigueur dans cette section.

Définition 13.1. On dit qu'un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-fibré de Higgs $(\mathscr{N}, \theta)$ à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ est *petit* s'il existe un sous-$\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent $\mathfrak{N}$ de $\mathscr{N}$ qui l'engendre sur $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ et un nombre rationnel $\epsilon > \frac{1}{p-1}$ tels que

$$\theta(\mathfrak{N}) \subset p^{\epsilon}\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathfrak{N}. \tag{13.1.1}$$

Conjecture 13.2. *Tout petit $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-fibré de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ est soluble.*

Proposition 13.3. *La conjecture* (13.2) *vaut si X est un objet de* $\mathbf{Q}$ (9.5), *autrement dit, si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) *X est affine et connexe ;*
(ii) *$f \colon (X, \mathscr{M}_X) \to (S, \mathscr{M}_S)$ admet une carte adéquate* (3.8) *;*
(iii) *il existe une carte fine et saturée $M \to \Gamma(X, \mathscr{M}_X)$ pour $(X, \mathscr{M}_X)$ induisant un isomorphisme*

$$M \xrightarrow{\sim} \Gamma(X, \mathscr{M}_X)/(X, \mathscr{O}_X^\times). \tag{13.3.1}$$

La preuve de cette proposition est donnée dans 13.13, après quelques résultats préliminaires.

Proposition 13.4. *Si la catégorie fibrée* (12.15.3)

$$\mathrm{MOD}^{\mathrm{Dolb}}_{\mathbb{Q}}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}) \to \mathbf{\acute{E}t}_{\mathrm{coh}/X} \tag{13.4.1}$$

est un champ, la conjecture (13.2) *vaut.*

En effet, soient $\mathscr{N}$ un petit $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$-fibré de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$, $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement étale de X par des objets de $\mathbf{Q}$ (9.5). Pour tout $i \in I$, notons $\mathscr{U}_i$ le schéma formel complété p-adique de $\overline{U}_i$. D'après 13.3, $\mathscr{N}|\mathscr{U}_i$ est un $\mathscr{O}_{\mathscr{U}_i}[\frac{1}{p}]$-fibré de Higgs soluble à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathscr{U}_i/\mathscr{S}}$. Avec les notations de 12.13, il lui correspond donc le $\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}|\psi^*(U_i)$-module de Dolbeault $\mathscr{M}_i = \mathscr{V}_i(\mathscr{N}|\mathscr{U}_i)$, où $\mathscr{V}_i$ est le foncteur (11.23.1) associé à $(f_{U_i}, \widetilde{U}_i, \mathscr{M}_{\widetilde{X}}|\widetilde{U}_i)$. D'après 12.11(ii), la donnée de descente sur les fibrés de Higgs $(\mathscr{N}|\mathscr{U}_i)_{i\in I}$ définie par $\mathscr{N}$ induit une donnée de descente sur les modules de Dolbeault $(\mathscr{M}_i)_{i\in I}$. Cette dernière est effective par hypothèse. Il existe donc un $\breve{\overline{\mathscr{B}}}_{\mathbb{Q}}$-module de Dolbeault $\mathscr{M}$ tel que la donnée de descente associée sur $(\mathscr{M}|\psi^*(U_i))_{i\in I}$ soit isomorphe à celle sur $(\mathscr{M}_i)_{i\in I}$. En vertu de 11.26 et 12.11(i), on en déduit par descente des fibrés de Higgs que l'image de $\mathscr{M}$ par le foncteur $\mathscr{H}$ (11.18.1) est canoniquement isomorphe à $\mathscr{N}$. Par suite, $\mathscr{N}$ est soluble.

13.5. Dans la suite de cette section, on suppose que X est un objet de $\mathbf{Q}$ (9.5) et on pose $R = \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$, $R_1 = R \otimes_{\mathscr{O}_K} \mathscr{O}_{\overline{K}}$ et

$$\widetilde{\Omega}^1_{R/\mathscr{O}_K} = \Gamma(X, \widetilde{\Omega}^1_{X/S}). \tag{13.5.1}$$

On désigne par $\widehat{R_1}$ le séparé complété p-adique de R_1, par $\delta\colon \widetilde{E}_s \to \widetilde{E}$ le plongement canonique (9.2.5) et par

$$\beta\colon \widetilde{E} \to \overline{X}^{\circ}_{\text{fét}} \tag{13.5.2}$$

le morphisme canonique (7.3.1). Pour tout entier $n \geq 1$, on note

$$\beta_n\colon (\widetilde{E}_s, \overline{\mathscr{B}}_n) \to (\overline{X}^{\circ}_{\text{fét}}, \overline{\mathscr{B}}_{X,n}) \tag{13.5.3}$$

le morphisme de topos annelés défini par le morphisme de topos $\beta \circ \delta$ et par l'homomorphisme canonique $\overline{\mathscr{B}}_{X,n} \to \beta_*(\overline{\mathscr{B}}_n)$ (cf. 9.2). On rappelle que ce dernier n'est pas en général un isomorphisme (8.1.8). On désigne par $\breve{\overline{\mathscr{B}}}_X$ l'anneau $(\overline{\mathscr{B}}_{X,n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(\overline{X}^{\circ}_{\text{fét}})^{\mathbb{N}^{\circ}}$ et par

$$\breve{\beta}\colon (\widetilde{E}_s^{\mathbb{N}^{\circ}}, \breve{\overline{\mathscr{B}}}) \to ((\overline{X}^{\circ}_{\text{fét}})^{\mathbb{N}^{\circ}}, \breve{\overline{\mathscr{B}}}_X) \tag{13.5.4}$$

le morphisme de topos annelés induit par les $(\beta_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Si A est un anneau et M un A-module, on note encore A (resp. M) le faisceau constant de valeur A (resp. M) de $\overline{X}^{\circ}_{\text{fét}}$ ou $(\overline{X}^{\circ}_{\text{fét}})^{\mathbb{N}^{\circ}}$, selon le contexte.

On sous-entend par $\breve{\overline{\mathscr{B}}}_X$-module de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{R/\mathscr{O}_K}$, un $\breve{\overline{\mathscr{B}}}_X$-module de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{R/\mathscr{O}_K} \otimes_R \breve{\overline{\mathscr{B}}}_X$ ([3] 2.8).

Proposition 13.6. *Pour tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent $\mathfrak{N}$, on a un isomorphisme $\breve{\overline{\mathscr{B}}}$-linéaire canonique et fonctoriel*

$$\breve{\beta}^*(\mathfrak{N}(\mathfrak{X}) \otimes_{\widehat{R_1}} \breve{\overline{\mathscr{B}}}_X) \xrightarrow{\sim} \top^*(\mathfrak{N}). \tag{13.6.1}$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $\mathfrak{N}_n = \mathfrak{N}/p^n\mathfrak{N}$, que l'on considère comme un $\mathscr{O}_{\overline{X}_n}$-module de $X_{s,\text{ét}}$ ou $X_{\text{ét}}$, selon le contexte (cf. 2.9 et 8.9). D'après (10.1.12) et la remarque suivant (2.9.5), on a un isomorphisme canonique

$$\top^*(\mathfrak{N}) \xrightarrow{\sim} (\sigma^*_{n+1}(\mathfrak{N}_{n+1}))_{n\in\mathbb{N}}. \tag{13.6.2}$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on a un isomorphisme canonique (8.8.4)

$$\sigma^*_n(\mathfrak{N}_n) \xrightarrow{\sim} \sigma^{-1}(\mathfrak{N}_n) \otimes_{\sigma^{-1}(\mathscr{O}_{\overline{X}_n})} \overline{\mathscr{B}}_n. \tag{13.6.3}$$

Donc en vertu de ([4] 5.32(ii), 8.9 et 5.15), le $\overline{\mathscr{B}}_n$-module $\sigma_n^*(\mathfrak{N}_n)$ est le faisceau de $\widetilde{E}$ associé au préfaisceau

$$\{U \mapsto \mathfrak{N}_n(U_s) \otimes_{\mathscr{O}_{\overline{X}_n}(U_s)} \overline{\mathscr{B}}_{U,n}\}, \quad (U \in \mathrm{Ob}(\mathbf{\acute{E}t}_{/X})). \tag{13.6.4}$$

Pour tout objet affine U de $\mathbf{\acute{E}t}_{/X}$, on a des isomorphismes canoniques

$$\mathfrak{N}(U_s) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{N}(\mathfrak{X}) \otimes_{\widehat{R_1}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}(U_s), \tag{13.6.5}$$

$$\mathfrak{N}_n(U_s) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{N}(U_s)/p^n\mathfrak{N}(U_s), \tag{13.6.6}$$

$$\mathscr{O}_{\overline{X}_n}(U_s) \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}(U_s)/p^n\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}(U_s). \tag{13.6.7}$$

Par ailleurs, en vertu de ([4] 5.32(i), 8.9 et 5.15), le $\overline{\mathscr{B}}_n$-module $\beta_n^*(\mathfrak{N}(\mathfrak{X}) \otimes_{\widehat{R_1}} \breve{\overline{\mathscr{B}}}_{X,n})$ est le faisceau de $\widetilde{E}$ associé au préfaisceau

$$\{U \mapsto \mathfrak{N}(\mathfrak{X}) \otimes_{\widehat{R_1}} \overline{\mathscr{B}}_{U,n}\}, \quad (U \in \mathrm{Ob}(\mathbf{\acute{E}t}_{/X})). \tag{13.6.8}$$

D'après (9.6.5), on en déduit un isomorphisme $\overline{\mathscr{B}}_n$-linéaire canonique et fonctoriel

$$\beta_n^*(\mathfrak{N}(\mathfrak{X}) \otimes_{\widehat{R_1}} \overline{\mathscr{B}}_{X,n}) \xrightarrow{\sim} \sigma_n^*(\mathfrak{N}_n). \tag{13.6.9}$$

La proposition s'ensuit compte tenu de (6.5.4) et (13.6.2).

13.7. Soit r un nombre rationnel ≥ 0. On désigne par $\breve{\mathscr{F}}_X^{(r)}$ le $\breve{\overline{\mathscr{B}}}_X$-module $(\mathscr{F}_{X,n+1}^{(r)})_{n\in\mathbb{N}}$ et par $\breve{\mathscr{C}}_X^{(r)}$ la $\breve{\overline{\mathscr{B}}}_X$-algèbre $(\mathscr{C}_{X,n+1}^{(r)})_{n\in\mathbb{N}}$ (cf. 9.18). D'après 6.3(i) et (6.12.1), on a une suite exacte de $\breve{\overline{\mathscr{B}}}_X$-modules

$$0 \to \breve{\overline{\mathscr{B}}}_X \to \breve{\mathscr{F}}_X^{(r)} \to \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{R/\mathscr{O}_K} \otimes_R \breve{\overline{\mathscr{B}}}_X \to 0. \tag{13.7.1}$$

Compte tenu de 6.3(i) et (6.12.3), on a un isomorphisme canonique de $\breve{\overline{\mathscr{B}}}_X$-algèbres

$$\breve{\mathscr{C}}_X^{(r)} \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{m\geq 0} \mathrm{S}^m_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}_X}(\breve{\mathscr{F}}_X^{(r)}). \tag{13.7.2}$$

Pour tous nombres rationnels $r \geq r' \geq 0$, les morphismes $(\mathtt{a}_{X,n+1}^{r,r'})_{n\in\mathbb{N}}$ (9.18.3) induisent un morphisme $\breve{\overline{\mathscr{B}}}_X$-linéaire

$$\breve{\mathtt{a}}_X^{r,r'} : \breve{\mathscr{F}}_X^{(r)} \to \breve{\mathscr{F}}_X^{(r')}. \tag{13.7.3}$$

Les homomorphismes $(\alpha_{X,n+1}^{r,r'})_{n\in\mathbb{N}}$ (9.18.4) induisent un homomorphisme de $\breve{\overline{\mathscr{B}}}_X$-algèbres

$$\breve{\alpha}_X^{r,r'} : \breve{\mathscr{C}}_X^{(r)} \to \breve{\mathscr{C}}_X^{(r')}. \tag{13.7.4}$$

Pour tous nombres rationnels $r \geq r' \geq r'' \geq 0$, on a

$$\breve{\mathtt{a}}_X^{r,r''} = \breve{\mathtt{a}}_X^{r',r''} \circ \breve{\mathtt{a}}_X^{r,r'} \quad \text{et} \quad \breve{\alpha}_X^{r,r''} = \breve{\alpha}_X^{r',r''} \circ \breve{\alpha}_X^{r,r'}. \tag{13.7.5}$$

On a un isomorphisme canonique $\breve{\mathscr{C}}_X^{(r)}$-linéaire

$$\Omega^1_{\breve{\mathscr{C}}_X^{(r)}/\breve{\overline{\mathscr{B}}}_X} \xrightarrow{\sim} \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{R/\mathscr{O}_K} \otimes_R \breve{\mathscr{C}}_X^{(r)}. \tag{13.7.6}$$

La $\breve{\overline{\mathscr{B}}}_X$-dérivation universelle de $\breve{\mathscr{C}}_X^{(r)}$ correspond via cet isomorphisme à l'unique $\breve{\overline{\mathscr{B}}}_X$-dérivation

$$\breve{d}_X^{(r)} : \breve{\mathscr{C}}_X^{(r)} \to \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{R/\mathscr{O}_K} \otimes_R \breve{\mathscr{C}}_X^{(r)} \tag{13.7.7}$$

qui prolonge le morphisme canonique $\breve{\mathscr{F}}_X^{(r)} \to \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{R/\mathscr{O}_K} \otimes_R \breve{\overline{\mathscr{B}}}_X$ (13.7.1). Comme

$$\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{R/\mathscr{O}_K} \otimes_R \breve{\overline{\mathscr{B}}}_X = \breve{d}_X^{(r)}(\breve{\mathscr{F}}_X^{(r)}) \subset \breve{d}_X^{(r)}(\breve{\mathscr{C}}_X^{(r)}), \tag{13.7.8}$$

la dérivation $\breve{d}_X^{(r)}$ est un $\breve{\overline{\mathscr{B}}}_X$-champ de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{R/\mathscr{O}_K}$ d'après ([3] 2.12). Pour tous nombres rationnels $r \geq r' \geq 0$, on a

$$p^{r-r'}(\mathrm{id} \otimes \breve{\alpha}_X^{r,r'}) \circ \breve{d}_X^{(r)} = \breve{d}_X^{(r')} \circ \breve{\alpha}_X^{r,r'}. \tag{13.7.9}$$

Proposition 13.8. *Pour tout nombre rationnel $r \geq 0$, les morphismes canoniques*

$$\breve{\beta}^*(\breve{\mathscr{F}}_X^{(r)}) \xrightarrow{\sim} \breve{\mathscr{F}}^{(r)}, \tag{13.8.1}$$

$$\breve{\beta}^*(\breve{\mathscr{C}}_X^{(r)}) \xrightarrow{\sim} \breve{\mathscr{C}}^{(r)}, \tag{13.8.2}$$

sont des isomorphismes. De plus, pour tous nombres rationnels $r \geq r' \geq 0$, les morphismes $\breve{\beta}^*(\breve{\mathtt{a}}_X^{r,r'})$ et $\breve{\beta}^*(\breve{\alpha}_X^{r,r'})$ s'identifient aux morphismes $\breve{\mathtt{a}}^{r,r'}$ (9.28.6) *et $\breve{\alpha}^{r,r'}$* (9.28.7)*, respectivement.*

Pour tout $U \in \mathrm{Ob}(\mathbf{\acute{E}t}_{/X})$, on note $g_U \colon U \to X$ le morphisme canonique. En vertu de ([4] 5.32(i), 8.9 et 5.15), pour tout entier $n \geq 1$, le $\overline{\mathscr{B}}_n$-module $\beta_n^*(\mathscr{F}_{X,n}^{(r)})$ est canoniquement isomorphe au faisceau associé au préfaisceau sur E défini par la correspondance

$$\{U \mapsto (\overline{g}_U^\circ)^*_{\mathrm{f\acute{e}t}}(\mathscr{F}_{X,n}^{(r)}) \otimes_{(\overline{g}_U^\circ)^*_{\mathrm{f\acute{e}t}}(\overline{\mathscr{B}}_{X,n})} \overline{\mathscr{B}}_{U,n}\}. \tag{13.8.3}$$

Pour tout $Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Q})$, l'homomorphisme canonique

$$(\overline{g}_Y^\circ)^*_{\mathrm{f\acute{e}t}}(\mathscr{F}_{X,n}^{(r)}) \otimes_{(\overline{g}_Y^\circ)^*_{\mathrm{f\acute{e}t}}(\overline{\mathscr{B}}_{X,n})} \overline{\mathscr{B}}_{Y,n} \to \mathscr{F}_{Y,n}^{(r)} \tag{13.8.4}$$

est un isomorphisme en vertu de 9.20. Par suite, le morphisme

$$\beta_n^*(\mathscr{F}_{X,n}^{(r)}) \to \mathscr{F}_n^{(r)}, \tag{13.8.5}$$

adjoint du morphisme canonique $\mathscr{F}_{X,n}^{(r)} \to \beta_{n*}(\mathscr{F}_n^{(r)})$, est un isomorphisme d'après (9.6.5). On en déduit, compte tenu de (6.5.4) et (6.12.1), que le morphisme canonique (13.8.1) est un isomorphisme. On démontre de même que l'homomorphisme canonique (13.8.2) est un isomorphisme ; on peut aussi le déduire de (13.8.1). La dernière assertion est évidente par adjonction.

Remarque 13.9. Il résulte de 13.8 que pour tout nombre rationnel $r \geq 0$, $\breve{\beta}^*(\breve{d}_X^{(r)})$ s'identifie à la dérivation $\breve{d}^{(r)}$ (9.28.9). On peut construire l'identification explicitement comme suit. D'après la preuve de 9.22(ii), pour tout entier $n \geq 1$, le diagramme

$$\begin{CD} \mathscr{F}_{X,n}^{(r)} @>>> \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{R/\mathscr{O}_K} \otimes_R \overline{\mathscr{B}}_{X,n} \\ @VVV @VVV \\ \beta_*(\mathscr{F}_n^{(r)}) @>>> \beta_*(\sigma_n^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n})) \end{CD} \tag{13.9.1}$$

où les flèches verticales sont les morphismes canoniques et les flèches horizontales proviennent des suites exactes (9.18.1) et (9.22.1), est commutatif. On en déduit par adjonction un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \beta_n^*(\mathscr{F}^{(r)}_{X,n}) \arrow[r] \arrow[d] & \beta_n^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{R/\mathscr{O}_K} \otimes_R \overline{\mathscr{B}}_{X,n}) \arrow[d] \\ \mathscr{F}^{(r)}_n \arrow[r] & \sigma_n^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\overline{X}_n/\overline{S}_n}) \end{tikzcd} \tag{13.9.2}$$

dont les flèches verticales sont des isomorphismes, d'après les preuves de 13.6 et 13.8. Par suite, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \breve{\beta}^*(\breve{\mathscr{C}}^{(r)}_X) \arrow[r, "\breve{\beta}^*(\breve{d}^{(r)}_X)"] \arrow[d] & \breve{\beta}^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{R/\mathscr{O}_K} \otimes_R \breve{\mathscr{C}}^{(r)}_X) \arrow[d] \\ \breve{\mathscr{C}}^{(r)} \arrow[r, "\breve{d}^{(r)}"] & \breve{\sigma}^*(\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\breve{\overline{X}}/\breve{\overline{S}}}) \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}} \breve{\mathscr{C}}^{(r)} \end{tikzcd} \tag{13.9.3}$$

où les flèches verticales sont les isomorphismes induits par (13.6.1) et (13.8.2) est commutatif.

13.10. Soit r un nombre rationnel ≥ 0. On désigne par $\mathbf{Mod}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}_X)$ la catégorie des $\breve{\overline{\mathscr{B}}}_X$-modules, par Θ^r la catégorie des p^r-isoconnexions intégrables relativement à l'extension $\breve{\mathscr{C}}^{(r)}_X/\breve{\overline{\mathscr{B}}}_X$ (5.10) et par $\mathfrak{S}^r_X$ le foncteur

$$\mathfrak{S}^r_X \colon \mathbf{Mod}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}_X) \to \Theta^r, \quad \mathscr{M} \mapsto (\breve{\mathscr{C}}^{(r)}_X \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}_X} \mathscr{M}, \breve{\mathscr{C}}^{(r)}_X \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}_X} \mathscr{M}, \mathrm{id}, p^r \breve{d}^{(r)}_X \otimes \mathrm{id}). \tag{13.10.1}$$

D'après 5.12, si $(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}', v, \theta)$ est une $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-isogénie de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ (11.5),

$$(\breve{\mathscr{C}}^{(r)}_X \otimes_{\widehat{R_1}} \mathfrak{N}(\mathfrak{X}), \breve{\mathscr{C}}^{(r)}_X \otimes_{\widehat{R_1}} \mathfrak{N}'(\mathfrak{X}), \mathrm{id} \otimes_{\widehat{R_1}} v, p^r \breve{d}^{(r)}_X \otimes v + \mathrm{id} \otimes \theta) \tag{13.10.2}$$

est un objet de Θ^r. On obtient ainsi un foncteur

$$\top^{r+}_X \colon \mathbf{IH}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}, \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) \to \Theta^r. \tag{13.10.3}$$

Proposition 13.11. *Pour tout nombre rationnel $r \geq 0$, les diagrammes de foncteurs*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Mod}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}_X) \arrow[r, "\mathfrak{S}^r_X"] \arrow[d, "\breve{\beta}^*"'] & \Theta^r \arrow[d, "\breve{\beta}^*"] \\ \mathbf{Mod}(\breve{\overline{\mathscr{B}}}) \arrow[r, "\mathfrak{S}^r"] & \Xi^r \end{tikzcd} \tag{13.11.1}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{IH}^{\mathrm{coh}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}, \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) \arrow[r, "\top^{r+}_X"] \arrow[dr, "\top^{r+}"'] & \Theta^r \arrow[d, "\breve{\beta}^*"] \\ & \Xi^r \end{tikzcd} \tag{13.11.2}$$

où le foncteur image inverse par $\breve{\beta}$ pour les p^r-isoconnexions est défini dans (5.11), *sont commutatifs à isomorphismes canoniques près.*

Cela résulte de 13.6, 13.8 et 13.9.

Proposition 13.12. *Soient ϵ, r deux nombres rationnels tels que $\epsilon > r + \frac{1}{p-1}$ et $r > 0$, $\mathfrak{N}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent et $\mathscr{S}$-plat, θ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-champ de Higgs sur $\mathfrak{N}$ à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ tel que*

$$\theta(\mathfrak{N}) \subset p^{\epsilon}\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathfrak{N}. \tag{13.12.1}$$

On note encore $\mathfrak{N}$ la $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-isogénie de Higgs $(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}, \mathrm{id}, \theta)$ à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$. Il existe alors un $\breve{\overline{\mathscr{B}}}_X$-module adique de type fini $\mathscr{M}$ de $(\overline{X}^{\circ}_{\text{fét}})^{\mathbb{N}^{\circ}}$ et un isomorphisme de Θ^r

$$\top^{r+}_X(\mathfrak{N}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}^r_X(\mathscr{M}). \tag{13.12.2}$$

On peut clairement supposer X_s non-vide, de sorte que $(X, \mathscr{M}_X)$ remplit les hypothèses de ([3] 6.2). Soit $\overline{y}$ un point géométrique générique de $\overline{X}^{\circ}$. Comme $\overline{X}$ est localement irréductible (3.1), il est la somme des schémas induits sur ses composantes irréductibles. On note $\overline{X}_{\langle y \rangle}$ la composante irréductible de $\overline{X}$ contenant $\overline{y}$. De même, $\overline{X}^{\circ}$ est la somme des schémas induits sur ses composantes irréductibles, et $\overline{X}^{\circ}_{\langle y \rangle} = \overline{X}_{\langle y \rangle} \times_X X^{\circ}$ est la composante irréductible de $\overline{X}^{\circ}$ contenant $\overline{y}$. On pose $R^{\overline{y}}_1 = \Gamma(\overline{X}_{\langle \overline{y} \rangle}, \mathscr{O}_{\overline{X}})$ et $\Delta_{\overline{y}} = \pi_1(\overline{X}^{\circ}_{\langle y \rangle}, \overline{y})$. On note $\widehat{R_1}^{\overline{y}}$ le séparé complété p-adique de $R^{\overline{y}}_1$, $\mathbf{B}_{\Delta_{\overline{y}}}$ le topos classifiant de $\Delta_{\overline{y}}$,

$$\nu_{\overline{y}} \colon \overline{X}^{\circ}_{\langle y \rangle, \text{fét}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{B}_{\Delta_{\overline{y}}} \tag{13.12.3}$$

le foncteur fibre en $\overline{y}$ (2.10.3), $\overline{R}^{\overline{y}}_X$ l'anneau défini dans (7.13.2) et $\widehat{\overline{R}}^{\overline{y}}_X$ son séparé complété p-adique. On désigne par $\mathscr{C}^{\overline{y},(r)}_X$ la $\widehat{\overline{R}}^{\overline{y}}_X$-algèbre définie dans (9.24.3) par $\widehat{\mathscr{C}}^{\overline{y},(r)}_X$ son séparé complété p-adique, par

$$d_{\mathscr{C}^{\overline{y},(r)}_X} \colon \mathscr{C}^{\overline{y},(r)}_X \to \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{R/\mathscr{O}_K} \otimes_R \mathscr{C}^{\overline{y},(r)}_X \tag{13.12.4}$$

la $\widehat{\overline{R}}^{\overline{y}}_X$-dérivation universelle de $\mathscr{C}^{\overline{y},(r)}_X$ et par

$$d_{\widehat{\mathscr{C}}^{\overline{y},(r)}_X} \colon \widehat{\mathscr{C}}^{\overline{y},(r)}_X \to \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{R/\mathscr{O}_K} \otimes_R \widehat{\mathscr{C}}^{\overline{y},(r)}_X \tag{13.12.5}$$

son prolongement aux complétés (on notera que le R-module $\widetilde{\Omega}^1_{R/\mathscr{O}_K}$ est libre de type fini). Il résulte de 7.15 et des définitions qu'on a des isomorphismes canoniques

$$\nu_{\overline{y}}(\overline{\mathscr{B}}_X | \overline{X}^{\circ}_{\langle \overline{y} \rangle}) \xrightarrow{\sim} \overline{R}^{\overline{y}}_X, \tag{13.12.6}$$

$$\nu_{\overline{y}}(\mathscr{C}^{(r)}_{X,n} | \overline{X}^{\circ}_{\langle \overline{y} \rangle}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}^{\overline{y},(r)}_X / p^n \mathscr{C}^{\overline{y},(r)}_X. \tag{13.12.7}$$

Les objets $\Delta_{\overline{y}}$, $R^{\overline{y}}_1$, $\overline{R}^{\overline{y}}$ et $\mathscr{C}^{\overline{y},(r)}_X$ correspondent aux objets Δ, R_1, $\overline{R}$ et $\mathscr{C}^{(r)}$ définis dans [3], en prenant $\widetilde{\kappa} = \overline{y}$ dans ([3] 6.7). Nous utiliserons dans la suite les constructions de ([3] § 13). Posons $N_{\overline{y}} = \Gamma(\overline{X}_{\langle \overline{y} \rangle, s}, \mathfrak{N})$ et notons

$$\theta_{\overline{y}} \colon N_{\overline{y}} \to \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{R/\mathscr{O}_K} \otimes_R N_{\overline{y}} \tag{13.12.8}$$

le $\widehat{R_1}^{\overline{y}}$-champ de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{R/\mathscr{O}_K}$ induit par θ, qui est ϵ-quasi-petit dans le sens de ([3] 13.2). On lui associe par le foncteur ([3] (13.5.10)) une $\widehat{R_1}^{\overline{y}}$-représentation quasi-petite $\varphi_{\overline{y}}$ de $\Delta_{\overline{y}}$ sur $N_{\overline{y}}$. D'après ([3] 13.20), on a un $\widehat{\mathscr{C}}^{\overline{y},(r)}_X$-isomorphisme $\Delta_{\overline{y}}$-équivariant de modules à p^r-connexions relativement à l'extension $\widehat{\mathscr{C}}^{\overline{y},(r)}_X / \widehat{\overline{R}}^{\overline{y}}$,

$$u_{\overline{y}} \colon N_{\overline{y}} \otimes_{\widehat{R_1}^{\overline{y}}} \widehat{\mathscr{C}}^{\overline{y},(r)}_X \xrightarrow{\sim} N_{\overline{y}} \otimes_{\widehat{R_1}^{\overline{y}}} \widehat{\mathscr{C}}^{\overline{y},(r)}_X, \tag{13.12.9}$$

où $\widehat{\mathscr{C}}^{\overline{y},(r)}_X$ est muni de l'action canonique de $\Delta_{\overline{y}}$ et de la p^r-connexion $p^r d_{\widehat{\mathscr{C}}^{\overline{y},(r)}_X}$, le module $N_{\overline{y}}$ de la source est muni de l'action triviale de $\Delta_{\overline{y}}$ et du $\widehat{R_1}^{\overline{y}}$-champ de Higgs $\theta_{\overline{y}}$, et le module $N_{\overline{y}}$ du but est muni de l'action $\varphi_{\overline{y}}$ de $\Delta_{\overline{y}}$ et du $\widehat{R_1}^{\overline{y}}$-champ de Higgs nul.

Il existe un système projectif $(\mathscr{L}_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ de R_1-modules de $\overline{X}^{\circ}_{\text{fét}}$ tel que pour tout point géométrique générique $\overline{y}$ de $\overline{X}^{\circ}$, on ait un isomorphisme de systèmes projectifs de R_1-représentations de $\Delta_{\overline{y}}$,

$$(\nu_{\overline{y}}(\mathscr{L}_{n+1}|\overline{X}^{\circ}_{\langle\overline{y}\rangle}))_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\sim} (N_{\overline{y}}/p^{n+1}N_{\overline{y}}, \varphi_{\overline{y}})_{n\in\mathbb{N}}. \tag{13.12.10}$$

Ceci résulte aussitôt de la définition du foncteur ([3] (13.5.10)) (cf. [4] 9.7). D'après 2.11, $\mathscr{L}_n$ est de type fini sur R_1. Pour tous entiers $m \geq n \geq 1$, le morphisme $\mathscr{L}_m/p^n\mathscr{L}_m \to \mathscr{L}_n$ induit par le morphisme de transition $\mathscr{L}_m \to \mathscr{L}_n$ est un isomorphisme. On pose

$$\mathscr{M} = (\mathscr{L}_{n+1} \otimes_{R_1} \overline{\mathscr{B}}_{X,n+1})_{n\in\mathbb{N}}. \tag{13.12.11}$$

C'est un $\breve{\overline{\mathscr{B}}}_X$-module adique de type fini de $(\overline{X}^{\circ}_{\text{fét}})^{\mathbb{N}^{\circ}}$ en vertu de 6.14. Les isomorphismes (13.12.9) induisent un isomorphisme $\breve{\mathscr{C}}^{(r)}_X$-linéaire

$$u\colon \mathfrak{N}(\mathfrak{X}) \otimes_{\widehat{R_1}} \breve{\mathscr{C}}^{(r)}_X \xrightarrow{\sim} \mathscr{M} \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}_X} \breve{\mathscr{C}}^{(r)}_X \tag{13.12.12}$$

tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{N}(\mathfrak{X}) \otimes_{\widehat{R_1}} \breve{\mathscr{C}}^{(r)}_X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\theta\otimes\mathrm{id}+p^r\mathrm{id}\otimes\breve{d}^{(r)}_X"'] & \mathscr{M} \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}_X} \breve{\mathscr{C}}^{(r)}_X \arrow[d, "p^r\mathrm{id}\otimes\breve{d}^{(r)}_X"] \\ \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{R/\mathscr{O}_K} \otimes_R \mathfrak{N}(\mathfrak{X}) \otimes_{\widehat{R_1}} \breve{\mathscr{C}}^{(r)}_X \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes u"] & \xi^{-1}\widetilde{\Omega}^1_{R/\mathscr{O}_K} \otimes_R \mathscr{M} \otimes_{\breve{\overline{\mathscr{B}}}_X} \breve{\mathscr{C}}^{(r)}_X \end{tikzcd} \tag{13.12.13}$$

soit commutatif ; d'où la proposition.

13.13. La proposition 13.3 résulte de 13.11 et 13.12.

Références

[1] A. Abbes, Éléments de géométrie rigide. Volume I. Construction et étude géométrique des espaces rigides, Progress in Mathematics Vol. **286**, Birkhäuser (2010).

[2] A. Abbes, M. Gros, *Sur la correspondance de Simpson p-adique. 0 : une vue d'ensemble*, pré-publication (2012).

[3] A. Abbes, M. Gros, *Sur la correspondance de Simpson p-adique. I : étude locale*, pré-publication (2011), arXiv :1102.5466.

[4] A. Abbes, M. Gros, *Topos co-évanescents et généralisations*, pré-publication (2011), arXiv :1107.2380.

[5] M. Artin, A. Grothendieck, J. L. Verdier, Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, SGA 4, Springer-Verlag, Tome 1, LNM **269** (1972) ; Tome 2, LNM **270** (1972) ; Tome 3, LNM **305** (1973).

[6] P. Berthelot, A. Grothendieck, L. Illusie, Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch, SGA 6, LNM **225**, Springer-Verlag (1971).

[7] N. Bourbaki, Algèbre commutative, Chapitres 1-9, Hermann (1985).

[8] P. Deligne, *Théorèmes de finitude en cohomologie ℓ-adique*, dans Cohomologie Étale, SGA $4\frac{1}{2}$, LNM **569**, Springer-Verlag (1977), 233-261.

[9] P. Deligne, N. Katz, Groupes de monodromie en géométrie algébrique, II, SGA 7, Tome 2, LNM **340** (1973), Springer-Verlag.

[10] T. Ekedahl, *On the multiplicative properties of the de Rham-Witt complex. II*, Ark. Mat. **23** (1985), 53-102.

[11] G. Faltings, *Almost étale extensions*, dans Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques. II, Astérisque **279** (2002), 185-270.

[12] P. Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France **90** (1962) 323-448.

[13] J. Giraud, Cohomologie non abélienne, Springer-Verlag (1971).

[14] A. Grothendieck, Revêtements étales et groupe fondamental, SGA 1, *Lecture Notes in Mathematics* **224**, Springer-Verlag (1971).

[15] A. Grothendieck, Cohomologie ℓ-adique et fonctions L, SGA 5, *Lecture Notes in Mathematics* **589**, Springer-Verlag (1977).

[16] A. Grothendieck, J.A. Dieudonné, Éléments de Géométrie Algébrique I, Seconde édition, Springer-Verlag (1971).

[17] A. Grothendieck, J.A. Dieudonné, Éléments de Géométrie Algébrique, II Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes, *Pub. Math. IHES* **8** (1961).

[18] A. Grothendieck, J.A. Dieudonné, Éléments de Géométrie Algébrique, III Étude cohomologique des faisceaux cohérents, *Pub. Math. IHES* **11** (1961), **17** (1963).

[19] A. Grothendieck, J.A. Dieudonné, Éléments de Géométrie Algébrique, IV Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, *Pub. Math. IHES* **20** (1964), **24** (1965), **28** (1966), **32** (1967).

[20] L. Illusie, Complexe cotangent et déformations. I, Lecture Notes in Math. **239**, Springer-Verlag (1971).

[21] U. Jannsen, *Continuous étale Cohomology*, Math. Ann. **280** (1988), 207-245.

[22] K. Kato, *Logarithmic structures of Fontaine-Illusie*, Algebraic analysis, geometry, and number theory, Johns Hopkins UP, Baltimore (1989), 191-224.

[23] K. Kato, *Toric singularities*, American Journal of Math. **116** (1994), 1073-1099.

[24] A. Ogus, Lectures on logarithmic algebraic geometry, livre en préparation.

[25] M. Raynaud, Anneaux locaux henséliens, *Lecture Notes in Mathematics* **169**, Springer-Verlag (1970).

[26] J.-E. Roos, *Derived functors of inverse limits revisited*, J. London Math. Soc. (2) **73** (2006), 65-83.

[27] T. Tsuji, *p-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case*, Invent. math. **137** (1999), 233-411.

[28] T. Tsuji, *Saturated morphisms of logarithmic schemes*, preprint (1997).

A.A. CNRS, Institut des Hautes Études Scientifiques, 35 route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette, France

M.G. CNRS UMR 6625, IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France

E-mail address: abbes@ihes.fr

E-mail address: michel.gros@univ-rennes1.fr