

Catégories syntactiques pour les motifs de Nori

Laurent LAFFORGUE



Institut des Hautes Études Scientifiques
35, route de Chartres
91440 – Bures-sur-Yvette (France)

Novembre 2015

IHES/M/15/26

Catégories syntactiques pour les motifs de Nori

(Cours à l'IHÉS des mardis 22 septembre, 6 octobre et 13 octobre 2015)

par Laurent Lafforgue

Sommaire

Introduction

Chapitre I : Les énoncés

1. La construction de Nori
2. La réinterprétation et généralisation de Caramello
3. Application aux motifs

Chapitre II : Les démonstrations

1. Logique : syntaxe et sémantique
2. Catégories syntactiques et topos classifiants
3. Démonstration des propriétés des catégories \mathcal{C}_T
4. Les critères d'équivalence entre catégories \mathcal{C}_T

Chapitre III : Quelques questions

1. Une question sur les catégories triangulées de Voevodsky
2. À la recherche de topos motiviques

Références bibliographiques

Introduction

Voici les notes d'un cours donné à l'IHÉS les 22 septembre, 6 octobre et 13 octobre 2015.

L'objet principal de ce cours est de présenter le contenu de l'article :

[SCNM] L. Barbieri-Viale, O. Caramello et L. Lafforgue, "Syntactic categories for Nori motives", arXiv:1506.06113.

La fin du cours donne aussi une introduction à l'article programmatique beaucoup plus sophistiqué :

[MT] O. Caramello, "Motivic toposes : a research programme", arXiv:1507.06271.

Le premier de ces deux textes est cosigné par trois auteurs, dont moi-même, mais l'honnêteté oblige à préciser que tous ses résultats et l'essentiel de sa rédaction sont dûs à Olivia Caramello, à partir d'une question initiale posée par Luca Barbieri-Viale que je vais d'ailleurs exposer dans cette introduction. Si O. Caramello a voulu que nous cosignions ce texte avec elle, c'est uniquement parce que, dit-elle, "ce travail n'aurait pas existé sans nous" : c'est moi qui l'ai initiée à la géométrie algébrique et à certaines de ses problématiques et j'ai passé de très nombreuses heures à lui enseigner de la géométrie algébrique et plus encore à l'écouter – en me laissant enseigner moi-même –, à l'encourager et à réagir en géomètre algébriste à ce qu'elle me racontait ; elle a aussi bénéficié de nombreuses heures de conversation avec L. Barbieri-Viale qui l'a invitée plusieurs fois à Milan et surtout a commencé à travailler à partir de la question initiale de L. Barbieri-Viale qui lui a en particulier appris l'existence de la construction de Nori en théorie des motifs.

Les deux articles [SCNM] et [MT] se placent dans le contexte de la théorie des "topos classifiants", une théorie qui existe depuis les années 1970 et qui trouve son origine chez Grothendieck et son élève Monique Hakim mais dont la plupart des géomètres algébristes ignorent jusqu'à l'existence. C'était aussi mon cas jusqu'au moment où O. Caramello a commencé à m'en parler à l'occasion d'une première visite à l'IHÉS à l'automne 2011, et c'est pourquoi nous avons pensé qu'il valait mieux que je me charge de ce cours : je saurais peut-être plus facilement qu'elle me faire comprendre des géomètres algébristes.

Le premier article [SCNM] est assez élémentaire au sens qu'il ne fait appel qu'à certaines constructions de base de la théorie des topos classifiants ou à des variantes de telles constructions. Tous les ingrédients nécessaires peuvent en particulier être trouvés dans le texte d'exposition :

[TTB] O. Caramello, "Topos-theoretic background", prépublication IHES/M/14/27 (à paraître comme chapitres I et II d'une monographie de recherche intitulée "Lattices of theories", Oxford University Press).

Le second article [MT] fait appel à des développements beaucoup plus sophistiqués de la théorie des topos classifiants et dont un bon nombre sont dûs à O. Caramello et tirés de ses travaux antérieurs.

La notion de topos classifiant d'une théorie du premier ordre (au sens de la logique) est apparue dans des cas particuliers dans la thèse de M. Hakim dirigée par Grothendieck et a été progressivement systématisée dans la première moitié des années 1970 par Lawvere, Cole, Reyes, Joyal, Makkai et d'autres.

Techniquement, elle associe à toute théorie du premier ordre \mathbb{T} qui est "géométrique" un topos $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ construit comme la catégorie des faisceaux d'ensembles sur une catégorie définie à partir de \mathbb{T} , la "catégorie syntactique" $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ de \mathbb{T} , munie d'une topologie de Grothendieck, la "topologie syntactique" $\mathcal{J}_{\mathbb{T}}$.

Le topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ est caractérisé par la propriété que, pour tout topos (de Grothendieck) \mathcal{E} , la catégorie $\mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E})$ des modèles de la théorie \mathbb{T} dans \mathcal{E} est naturellement équivalente à celle des morphismes géométriques de topos

$$\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{T}}.$$

En particulier, la catégorie $\mathbb{T}\text{-mod}(\text{Ens})$ des modèles ensemblistes de $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ est équivalente à celle des points du topos $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ au sens de Grothendieck, c'est-à-dire des morphismes

$$\text{Ens} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{T}}.$$

Le sens de cette construction de $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ à partir de \mathbb{T} est qu'elle associe à une théorie présentée en termes logiques un objet mathématique, son topos classifiant, qui incarne le contenu mathématique de la théorie.

Il peut se produire que des théories différentes aient des topos classifiants équivalents, et donc le même contenu mathématique. On dit alors que ces théories sont équivalentes au sens de Morita.

Ce phénomène des équivalences de Morita constitue le sujet d'étude central des travaux d'O. Caramello et c'est d'ailleurs la raison pour laquelle j'ai été vite convaincu de l'intérêt de cette théorie : en géométrie algébrique comme dans le programme de Langlands, certaines des problématiques les plus importantes consistent à relier entre elles des théories différentes, or la théorie des topos classifiants est une théorie des relations entre les contenus mathématiques de théories différentes, donc fournit un cadre général pour penser ces relations.

À partir du moment où j'ai eu connaissance de cette théorie, j'en ai parlé à un certain nombre de géomètres algébristes que je connaissais, en particulier à L. Barbieri-Viale à l'occasion d'une visite qu'il a faite à l'IHÉS courant 2012 puis d'un cours que j'ai donné à Milan en décembre 2012.

En avril 2013, j'eus la surprise de recevoir de lui un courriel intitulé "topos motivique" dans lequel il m'écrivait que, intrigué par mon enthousiasme pour les topos classifiants, il avait réfléchi à une possible application de cette notion dans son domaine de recherche habituel, les motifs.

Son message était assez sibyllin mais j'ai compris – à ce moment-là ou un an plus tard quand L. Barbieri-Viale s'est tourné vers O. Caramello – qu'il posait la question de présenter les motifs par un topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$, associé à une théorie \mathbb{T} qui axiomatise les propriétés des foncteurs cohomologiques, tel que :

- les foncteurs cohomologiques s'interprètent comme des points de $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$,
- les motifs sont les objets abéliens de $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$,
- les foncteurs de réalisation des motifs dans les diverses théories cohomologiques sont les foncteurs fibres en les points correspondants de $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$,
- la propriété universelle qui définit la catégorie des motifs de Nori se réinterprète comme la propriété universelle qui définit le topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ de \mathbb{T} .

L. Barbieri-Viale concluait son message en indiquant qu'il commençait à travailler là-dessus avec un autre professeur, spécialiste de logique catégorique et de topos.

Mais dans l'année qui suivit ils ne parvinrent pas à avancer, l'autre professeur se retira finalement de ce projet et, sur mon conseil, L. Barbieri-Viale se tourna finalement vers O. Caramello à partir du printemps 2014.

Celle-ci commença par apprendre de la géométrie algébrique et par étudier à fond tous les textes disponibles sur la construction de Nori dont L. Barbieri-Viale lui avait appris l'existence et l'intérêt.

Elle commença à élaborer le texte [MT] à partir de la fin de l'année 2014. Elle consacrait ce texte à la question principale de l'étude des relations entre théories cohomologiques différentes mais sans oublier la question plus particulière – qu'elle avait détachée de l'autre – de réinterpréter la construction de Nori.

Une telle réinterprétation très simple lui apparut au printemps 2014 et elle rédigea en quelques semaines le texte [CSNM] auquel L. Barbieri-Viale et moi ne contribuâmes un peu qu'à la fin, lui pour rappeler la construction originale de Nori et moi pour l'introduction.

Le cours est divisé en trois chapitres.

Le chapitre I est centré sur son paragraphe 2 qui énonce les deux résultats principaux du texte [SCNM].

Le paragraphe 1 commence par rappeler la construction originale de Nori et il cite deux résultats qui illustrent l'intérêt de la construction de Nori. Les deux premières références qui exposent la construction de Nori sont :

[LMM] M. Nori, "Lectures on mixed motives", notes prises par N. Fakhruddin, TIFR, Bombay (2000).

[TTN] A. Bruguières, "On a tannakian theorem due to Nori", Prépublication disponible à : <http://www.math.univ-montp2.fr/~bruguieres/recherche.html> (2004).

Le premier résultat cité est un théorème de J. Ayoub et L. Barbieri-Viale qui montre que le procédé de Nori fournit une construction alternative de la catégorie abélienne des 1-motifs de Deligne. Il est tiré de l'article :

[N1M] J. Ayoub et L. Barbieri-Viale, "Nori 1-motives", *Math. Annalen* 361, n° 1-2, p. 367-402 (2015).

Le second résultat dit que le spectre de l'algèbre des périodes formelles de Kontsevich et Zagier est un torseur sous l'action du groupe motivique défini par la catégorie tannakienne des motifs de Nori. Ce théorème a été énoncé pour la première fois dans l'article :

[OMDQ] M. Kontsevich, "Operads and motives in deformation quantization", *Letters in Math. Physics*, vol. 48, p. 35-72 (1999).

Il est démontré dans le texte suivant, qui expose en même temps la construction générale de Nori et ses propriétés :

[NMKP] A. Huber et S. Müller-Stach, "On the relation between Nori Motives and Kontsevich periods", arXiv:1105.0865.

Le paragraphe 2 expose la construction complètement différente des catégories abéliennes universelles de Nori donnée par O. Caramello et les deux conséquences principales de cette nouvelle construction : le fait de s'affranchir des hypothèses de dimension finie, et les critères nécessaires et suffisants d'équivalence entre catégories abéliennes universelles associées à différents foncteurs ou représentations.

Précisons toutefois que le texte [SCNM] contient plusieurs autres résultats intéressants dont ce cours ne parle pas : la description explicite des objets des catégories abéliennes universelles qui sont construites, et l'explicitation de l'équivalence entre les catégories abéliennes universelles construites suivant le procédé de Nori et celui de Caramello.

Enfin, le paragraphe 3 du chapitre I applique aux motifs les deux résultats généraux du paragraphe 2. Comme il n'y a plus de conditions de dimension, la construction du paragraphe précédent associe à tout foncteur cohomologique à coefficients de caractéristique 0 (donc non seulement la cohomologie de Betti sur un corps de base de caractéristique 0 mais aussi les cohomologies ℓ -adiques sur un corps de base de caractéristique $\neq \ell$ ou encore la cohomologie p -adique sur un corps de base de caractéristique p) une catégorie abélienne \mathbb{Q} -linéaire qui est une candidate au titre de catégorie des motifs. De plus, cette catégorie abélienne \mathbb{Q} -linéaire est construite à partir de la "théorie régulière" du foncteur cohomologique considéré, c'est-à-dire de la théorie au sens de la logique définie par la famille des propriétés algébriques d'un type bien précis vérifiées par ce foncteur. Les catégories abéliennes \mathbb{Q} -linéaires associées à différents foncteurs cohomologiques sont équivalentes si et seulement si ces foncteurs ont la même théorie régulière associée.

Finalement, l'existence d'une catégorie des motifs au sens habituel – c'est-à-dire d'une catégorie abélienne \mathbb{Q} -linéaire à travers laquelle les foncteurs cohomologiques classiques se factorisent en des foncteurs exacts et fidèles – s'avère équivalente à l'identité des théories régulières de ces foncteurs cohomologiques classiques.

Autrement dit, si les motifs existent, ils appartiennent à la logique.

Le chapitre II donne les démonstrations des deux théorèmes du paragraphe I.2.

Plus précisément, le théorème I.10 sur les propriétés des catégories abéliennes universelles construites est démontré dans le paragraphe II.3 tandis que le théorème I.11 sur les conditions d'équivalence de telles catégories est démontré dans le paragraphe II.4.

Auparavant, les paragraphes II.1 et II.2 ont rappelé les différents ingrédients tirés de la théorie des topos classifiants qui entrent dans ces démonstrations. Plus précisément, le paragraphe II.1 introduit à la logique catégorique et à sa distinction fondamentale entre syntaxe et sémantique : d’une part la notion de théorie du premier ordre, et les notions plus particulières de théorie géométrique et de théorie régulière ; d’autre part les notions de modèles d’une telle théorie dans des catégories vérifiant des propriétés appropriées et de 2-foncteur des modèles défini par une telle théorie sur une 2-catégorie de catégories. Quant au paragraphe II.2, il construit les catégories syntactiques [resp. les catégories syntactiques régulières] et les topos classifiants des théories géométriques du premier ordre [resp. des théories régulières] qui représentent les 2-foncteurs des modèles de ces théories sur la 2-catégorie des catégories géométriques [resp. régulières] et sur la 2-catégorie des topos.

Le chapitre III est composé de deux paragraphes indépendants.

Le paragraphe 1 utilise le théorème I.10 pour construire un foncteur naturel de la catégorie triangulée $DM_{\text{gm}}^{\text{eff}}(K)$ des “motifs mixtes géométriques effectifs” sur un corps de base K vers la catégorie dérivée $D(\mathcal{C}_Q)$ d’une certaine catégorie abélienne \mathcal{C}_Q . Il pose la question de savoir si ce foncteur est pleinement fidèle et s’il est possible de caractériser son image.

La construction est d’ailleurs générale et s’applique à toute catégorie triangulée D définie comme le quotient par une sous-catégorie épaisse Q de la catégorie triangulée $K^b(A)$ des complexes bornés d’une catégorie additive A et de leurs morphismes modulo homotopie. Elle associe à de telles données une catégorie abélienne universelle \mathcal{C}_Q définie par le théorème I.10 puis un foncteur de catégories triangulées $D \rightarrow D(\mathcal{C}_Q)$.

Le cas de la catégorie $DM_{\text{gm}}^{\text{eff}}(K)$ est celui où la catégorie additive A est celle $c\mathcal{L}(K)$ des correspondances finies entre schémas lisses de type fini sur K , et où la sous-catégorie épaisse Q par laquelle on quotiente $K^b(A)$ est engendrée par les complexes de type homotopique $[X \times \mathbb{A}^1] \rightarrow [X]$ et les complexes de Mayer-Vietoris $[U \cap V] \rightarrow [U] \oplus [V] \rightarrow [U \cup V]$. Dans le texte nous résumons cette construction telle qu’elle est exposée dans le livre de référence :

[IM] Yves André, “Une introduction aux motifs”, Panoramas et synthèses 17, SMF (2004).

Enfin, le dernier paragraphe III.2 donne une introduction au texte programmatique [MT].

Le but du programme esquissé dans ce texte est de définir des “topos motiviques” dont les foncteurs cohomologiques classiques seraient naturellement des points et qui possèderaient en tant que topos des propriétés assez fortes pour imposer à tous leurs points de partager les propriétés communes attendues des foncteurs cohomologiques classiques dans le cadre de la théorie conjecturale des motifs.

Si l’on savait que tous les foncteurs cohomologiques classiques T ont la même théorie régulière \mathbb{T} associée, une première possibilité serait de considérer le topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ de cette théorie \mathbb{T} . D’après le lemme II.21, la catégorie abélienne universelle \mathcal{C}_T associée à chaque T par le théorème I.10 est équivalente à la sous-catégorie pleine \mathcal{M} de $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ constituée des objets “supercohérents”, et le foncteur exact et fidèle de factorisation de T à travers \mathcal{C}_T s’identifie à la restriction à \mathcal{M} du foncteur fibre associé à T vu comme point de $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$.

Cependant, cette définition de “topos motivique” resterait insuffisante car elle ignore la variété des corps de coefficients des différents foncteurs cohomologiques classiques et ignore a fortiori les questions de dimension des espaces de cohomologie. Or on s’attend à ce que les dimensions sur leurs corps de coefficients respectifs des espaces de cohomologie et de leurs sous-espaces définis géométriquement soient indépendantes des foncteurs cohomologiques considérés.

L’article [MT] cherche donc des topos motiviques aux propriétés assez fortes pour imposer à tous leurs points de partager toutes les propriétés dans un fragment de la logique assez fin pour formuler la notion de dimension.

Rappelons qu’une théorie du premier ordre [resp. géométrique] est dite “complète” si toute formule “fermée” (c’est-à-dire sans variable libre) formulable dans la logique du premier ordre [resp. dans la logique géométrique] est ou bien démontrablement vraie ou bien démontrablement fausse dans cette théorie. Un

modèle d'une telle théorie vérifie une propriété exprimable comme une formule fermée du premier ordre [resp. géométrique] si et seulement si tous les modèles de la théorie vérifient cette propriété.

Or la notion de dimension des espaces vectoriels est exprimable par des formules fermées dans la logique du premier ordre mais pas dans son fragment géométrique. Il est donc naturel de rechercher des “topos motiviques” $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ construits comme les topos classifiants de théories géométriques \mathbb{T} qui soient complètes non seulement au sens géométrique mais au sens de la logique du premier ordre tout entière.

Il est connu qu'une telle théorie \mathbb{T} est complète au sens géométrique si et seulement si son topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ est “à deux valeurs”, ce qui signifie que l'objet final de $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ est un “atome” (autrement dit, un objet non vide qui ne possède aucun sous-objet propre). Il est connu d'autre part que si le topos $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ est “atomique”, c'est-à-dire si tout objet de $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ est somme disjointe d'atomes, alors la complétude de \mathbb{T} au sens géométrique équivaut à sa complétude au sens de la logique du premier ordre.

Pour ces raisons, O. Caramello propose de rechercher des “topos motiviques” qui soient “atomiques à deux valeurs”.

Elle appuie sa recherche sur un bon nombre de ses travaux antérieurs, tout particulièrement l'article suivant qui donne un procédé général de construction de topos atomiques à deux valeurs :

[FC] O. Caramello, “Fraïssé's construction from a topos-theoretic perspective”, *Logica Universalis* 8(2), p. 261-281 (2014).

Voici ce procédé :

On part d'une théorie géométrique \mathbb{S} qui est “de type préfaisceau” c'est-à-dire dont le topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{S}}$ est équivalent au topos des préfaisceaux sur une catégorie.

On considère la catégorie \mathcal{C} de ses modèles ensemblistes “finiment présentables” et on suppose qu'elle vérifie une certaine propriété très concrète, la “propriété d'amalgamation” (PA). Cette propriété permet de munir la catégorie opposée \mathcal{C}^{op} de la topologie dite atomique J^{at} pour laquelle tout crible non vide est couvrant. Un résultat de Barr et Diaconescu dit alors que le topos $\text{Sh}(\mathcal{C}^{\text{op}}, J^{\text{at}})$ des faisceaux sur \mathcal{C}^{op} muni de J^{at} est atomique.

Dans ces conditions, le topos $\text{Sh}(\mathcal{C}^{\text{op}}, J^{\text{at}})$ est également à deux valeurs si et seulement si la catégorie \mathcal{C} vérifie une autre propriété très concrète, la “propriété de plongement conjoint” (PPC). On note au passage le fait remarquable que pour n'importe quelle théorie géométrique \mathbb{T} dont le topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ est équivalent à $\text{Sh}(\mathcal{C}^{\text{op}}, J^{\text{at}})$, \mathbb{T} est complète (au sens géométrique ou au sens du premier ordre) si et seulement si la catégorie \mathcal{C} vérifie la propriété (PPC) : c'est un exemple de mise en relation de deux propriétés totalement différentes par le “pont” que constitue une équivalence de topos. S'il en est ainsi, les points de $\text{Sh}(\mathcal{C}^{\text{op}}, J^{\text{at}}) \cong \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$, c'est-à-dire les modèles ensemblistes de \mathbb{T} , s'identifient à un certain type de modèles ensemblistes de \mathbb{S} , les “modèles homogènes”.

Si de plus un modèle homogène de \mathbb{S} possède les propriétés supplémentaires d'être “ultrahomogène” et “universel”, son groupe G des automorphismes est naturellement muni d'une topologie, et le topos atomique à deux valeurs $\text{Sh}(\mathcal{C}^{\text{op}}, J^{\text{at}})$ devient équivalent au topos

$$\text{Cont}(G)$$

des ensembles discrets munis d'une action continue de G . Les topos de cette forme sont dits “galoisiens” car ils généralisent la théorie des catégories galoisiennes de Grothendieck. Ils constituent une classe très importante de topos atomiques à deux valeurs. Leur étude systématique fait l'objet de la prépublication :

[TGT] O. Caramello, “Topological Galois theory”, arXiv:1301.0300.

Ainsi, la théorie des topos classifiants atomiques à deux valeurs embrasse la théorie de Galois mais elle peut aussi s'appliquer à des théories linéaires telles que les théories cohomologiques, sans qu'il soit encore nécessaire de développer deux approches distinctes et parallèles, comme avec les notions de catégories galoisiennes et de catégories tannakiennes.

Le texte programmatique [MT] propose une définition de théorie de type préfaisceau \mathbb{S} et de théorie atomique à deux valeurs \mathbb{T} déduite de \mathbb{S} et susceptible de classifier les foncteurs cohomologiques sur les schémas de type fini sur un corps de base K .

Il part pour cela d'un foncteur cohomologique classique (Betti, ℓ -adique, p -adique, ...) T_0 à coefficients dans un corps k_0 de caractéristique 0 supposé homogène, c'est-à-dire algébriquement clos et de degré de transcendance infini sur \mathbb{Q} , tel que $\mathbb{C}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell, \overline{\mathbb{Q}}_p, \dots$. Ce foncteur est vu comme une représentation

$$T_0 : D \rightarrow k_0\text{-vect}$$

d'un carquois D qui peut être le carquois de Nori des paires de schémas $X \leftrightarrow Y$ complétées par un indice $i \in \mathbb{N}$, ou bien l'une des deux catégories de Voevodsky $DM_{\text{gm}}^{\text{eff}}(K)$ et $DM_{\text{gm}}(K)$, ou encore d'autres carquois construits à partir des schémas de type fini sur K et de leurs morphismes ou correspondances.

La théorie \mathbb{S} est définie à partir de T_0 en ne prenant en compte que les propriétés algébriques de T_0 , plus précisément les implications entre formules qui sont des conjonctions finies d'égalités entre combinaisons linéaires de composées de flèches venues du carquois D . En particulier, les axiomes de \mathbb{S} comprennent toutes les relations de complexes $g \circ f = 0$ vérifiées par T_0 mais ils ignorent les propriétés d'exactitude $\text{Im}(f) = \text{Ker}(g)$ des suites longues d'espaces de cohomologie.

Le fait que la théorie \mathbb{S} est de type préfaisceau est établi en recourant à des critères généraux démontrés dans le texte très élaboré :

[EFFPT] O. Caramello, "Extension of flat functors and presheaf type theories", arXiv :1404.4610, (à paraître comme partie de la monographie "Lattices of theories", Oxford University Press).

Par définition, le foncteur T_0 est un modèle de \mathbb{S} et tous ses sous-objets finiment engendrés (c'est-à-dire les collections de sous-espaces indexés par les objets du carquois D , respectés par les flèches de D et globalement engendrés par un nombre fini d'éléments) peuvent être vus comme des objets de la catégorie \mathcal{C} des modèles finiment présentables de \mathbb{S} . La réciproque n'est pas connue a priori, elle signifierait que T_0 est un modèle universel de \mathbb{S} .

On montre que la catégorie \mathcal{C} possède les propriétés (PA) et (PPC), si bien que le topos $\text{Sh}(\mathcal{C}^{\text{op}}, J^{\text{at}})$ est bien défini, atomique et à deux valeurs.

Le texte [MT] définit alors à partir de \mathbb{S} une théorie géométrique \mathbb{T} dont le topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ est équivalent au topos $\text{Sh}(\mathcal{C}^{\text{op}}, J^{\text{at}})$. La théorie \mathbb{T} est écrite dans le même langage que \mathbb{S} et est définie par une liste explicite d'axiomes supplémentaires s'ajoutant à ceux de \mathbb{S} .

Toutes ces définitions étant posées, on arrive à une question évidente : la représentation $T_0 : D \rightarrow k_0\text{-vect}$ qui a servi à définir les théories \mathbb{S} et \mathbb{T} est-elle un modèle homogène de \mathbb{S} ?

S'il en était ainsi pour tout foncteur cohomologique classique T_0 et si d'autre part on pouvait démontrer que la théorie \mathbb{S} ne dépend pas du choix de T_0 , l'indépendance par rapport à T_0 des dimensions des espaces de cohomologie et de leurs sous-espaces définis géométriquement serait prouvée. Elle résulterait de raisons structurelles puisque la théorie \mathbb{S} ne dépend que des propriétés algébriques de T_0 et ne fait aucune référence à la notion de dimension.

Cela rend d'autant plus intéressante et importante la question de savoir si T_0 est un modèle homogène de \mathbb{S} , c'est-à-dire s'il vérifie les axiomes de \mathbb{T} .

Un résultat important de [MT] est que toutes les propriétés d'exactitude de la forme $\text{Im}(f) = \text{Ker}(g)$ vérifiées par T_0 sont démontrablement vraies dans \mathbb{T} . Autrement dit, le passage de \mathbb{S} à la théorie \mathbb{T} de ses modèles homogènes permet de retrouver toutes les propriétés d'exactitude de T_0 qui avaient été perdues en passant de T_0 à \mathbb{S} .

On peut donc considérer les axiomes de \mathbb{T} comme un raffinement des propriétés d'exactitude usuelles des foncteurs cohomologiques. La question posée est celle de savoir si les foncteurs cohomologiques classiques continuent à satisfaire cette forme raffinée de propriété d'exactitude.

Il apparaît qu'il sera peut-être un peu moins difficile de répondre à cette question si les images dans les espaces de T_0 de toutes les flèches provenant de D et de leurs composées et combinaisons linéaires sont

définissables par des formules. Cette propriété sera automatiquement vérifiée si D est la “catégorie triangulée syntactique” introduite à la fin du texte [MT] et, ici, au début du paragraphe III.2. C’est la raison d’introduire cette définition.

À la fin de cette introduction, c’est un plaisir pour moi de remercier O. Caramello pour ses innombrables heures d’explications à propos de la théorie des topos classifiants et de ses travaux sur cette théorie. Je la remercie tout spécialement pour tout ce qu’elle m’a déjà appris de nouveau au sujet des motifs et des possibles relations entre foncteurs cohomologiques.

Je remercie très chaleureusement aussi O. Gabber et les autres auditeurs du cours – P. Cartier, J. Riou, A. Connes, D. Gaitsgory, M. Kontsevich, A. Joyal, ... – qui, par leurs nombreuses questions et interventions, m’ont permis de corriger un certain nombre d’imprécisions et d’erreurs, y compris une erreur importante dans l’exposé oral de la partie III.1. La version écrite corrigée de cette partie III.1 a d’ailleurs bénéficié de remarques supplémentaires d’O. Gabber communiquées en privé.

Enfin, je remercie C. Gourgues qui, comme toujours, a assuré avec une rapidité impressionnante et avec une bonne humeur jamais lassée la frappe entière du manuscrit.

I. Les énoncés

1 La construction de Nori

La construction de Nori est une construction très générale qui porte sur les représentations des carquois dans la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps ou, plus généralement, des modules de type fini sur un anneau noëthérien :

Théorème I.1 (Nori). –

Soit D un carquois (ou diagramme ou graphe orienté) qui consiste en un ensemble d'objets et un ensemble de flèches allant d'un objet source vers un objet but.

Soit R un anneau (commutatif unitaire) noëthérien et

$$T : D \rightarrow R\text{-mod}_f$$

une représentation de D dans la catégorie des R -modules de type fini.

Alors il existe

- *une catégorie abélienne R -linéaire \mathcal{C}_T ,*
- *une représentation $\tilde{T} : D \rightarrow \mathcal{C}_T$ du carquois D dans \mathcal{C}_T ,*
- *un foncteur exact et fidèle $F_T : \mathcal{C}_T \rightarrow R\text{-mod}_f$*

tels que

- (1) *on ait la factorisation*

$$T = F_T \circ \tilde{T},$$

- (2) *la catégorie abélienne R -linéaire \mathcal{C}_T munie de \tilde{T} et F_T est universelle pour cette factorisation.*

Autrement dit, pour toute catégorie abélienne R -linéaire \mathcal{C} munie d'une représentation $S : D \rightarrow \mathcal{C}$ et d'un foncteur exact et fidèle $F : \mathcal{C} \rightarrow R\text{-mod}_f$ tels que

$$T = F \circ S,$$

il existe un foncteur exact (et fidèle)

$$\xi : \mathcal{C}_T \rightarrow \mathcal{C},$$

unique à isomorphisme près, tel que le diagramme suivant commute à isomorphismes près :

$$\begin{array}{ccc}
 D & \begin{array}{l} \xrightarrow{S} \\ \xrightarrow{\tilde{T}} \end{array} & \mathcal{C}_T \xrightarrow{\xi} \mathcal{C} \\
 \downarrow T & \begin{array}{l} \nearrow F_T \\ \searrow F \end{array} & \\
 R\text{-mod}_f & &
 \end{array}$$

Indications sur le procédé de construction de Nori :

i) Nori commence par traiter le cas où le carquois D est fini, c'est-à-dire ne consiste qu'en un ensemble fini d'objets et de flèches reliant ces objets.

Dans ce cas, l'algèbre $\text{End}(T)$ des endomorphismes R -linéaires de T est un R -module de type fini.

Nori montre que la catégorie abélienne R -linéaire

$$\mathcal{C}_T = \text{End}(T)\text{-mod}_f$$

des $\text{End}(T)$ -modules de type fini (ou, ce qui revient au même, des $\text{End}(T)$ -modules qui sont de type fini sur R) répond à la question posée.

Le foncteur exact et fidèle $F_T : \mathcal{C}_T \rightarrow R\text{-mod}_f$ est le foncteur d'oubli de l'action de $\text{End}(T)$ et la représentation $\tilde{T} : D \rightarrow \mathcal{C}_T$ se déduit de $T : D \rightarrow R\text{-mod}_f$ en prenant en compte l'action naturelle de l'algèbre $\text{End}(T)$.

ii) Dans le cas d'un carquois D arbitraire, Nori considère tous les sous-carquois finis D' de D , avec les restrictions

$$T_{D'} : D' \rightarrow R\text{-mod}_f$$

et les catégories abéliennes R -linéaires associées

$$\mathcal{C}_{T_{D'}} = \text{End}(T_{D'})\text{-mod}_f .$$

Il montre que toute relation d'inclusion entre sous-carquois finis

$$D_1 \subseteq D_2$$

induit un foncteur exact et fidèle canonique

$$\mathcal{C}_{T_{D_1}} \rightarrow \mathcal{C}_{T_{D_2}}$$

puis que la catégorie abélienne R -linéaire

$$\mathcal{C}_T = \varinjlim_{D' \text{ fini } \subset D} \mathcal{C}_{T_{D'}}$$

répond à la question posée.

iii) Si $R = k$ est un corps et D est un carquois fini, la catégorie abélienne R -linéaire

$$\mathcal{C}_T = \text{End}(T)\text{-mod}_f$$

des $\text{End}(T)$ -modules de dimension finie sur k s'identifie à la catégorie

$$\text{End}^\vee(T)\text{-comod}_f$$

des comodules sur la coalgèbre $\text{End}^\vee(T)$ duale de l'algèbre $\text{End}(T)$ qui sont de dimension finie sur k .

iv) Si $R = k$ est un corps et D un carquois arbitraire, toute relation d'inclusion entre sous-carquois finis

$$D_1 \subseteq D_2$$

induit un homomorphisme canonique de coalgèbres

$$\text{End}^\vee(T_{D_1}) \rightarrow \text{End}^\vee(T_{D_2})$$

et un foncteur

$$\text{End}^\vee(T_{D_1})\text{-comod}_f \rightarrow \text{End}^\vee(T_{D_2})\text{-comod}_f$$

qui n'est autre que le foncteur canonique

$$\mathcal{C}_{T_{D_1}} \rightarrow \mathcal{C}_{T_{D_2}}.$$

Nori en déduit que la catégorie abélienne R -linéaire

$$\mathcal{C}_T = \varinjlim_{D' \text{ fini } \subset D} \mathcal{C}_{T_{D'}}$$

s'identifie à la catégorie

$$\text{End}^\vee(T)\text{-comod}_f$$

des espaces vectoriels de dimension finie sur k munis d'une structure de comodule sur la coalgèbre

$$\text{End}^\vee(T) = \varinjlim_{D' \text{ fini } \subset D} \text{End}^\vee(T_{D'}).$$

□

Nori applique cette définition générale pour proposer une définition de catégorie de motifs (mixtes) sur un corps de base. Il doit choisir pour cela un carquois D défini en termes de schémas sur le corps de base considéré, un anneau ou corps de coefficients R et une représentation

$$T : D \rightarrow R\text{-mod}_f$$

donnée par un foncteur cohomologique.

Pour pouvoir appliquer le théorème I.1, ce foncteur cohomologique doit être à valeurs dans les R -modules de type fini. Or on cherche une catégorie des motifs qui soit à coefficients dans $R = \mathbb{Z}$ ou \mathbb{Q} . C'est pourquoi Nori propose une définition fondée sur l'homologie de Betti :

Définition I.2. –

Étant donné un sous-corps K de \mathbb{C} , considérons le carquois D défini de la manière suivante :

- les objets de D sont les triplets (X, Y, i) constitués d'un élément X d'un ensemble de représentants des schémas séparés de type fini sur K , d'un sous-schéma fermé Y de X et d'un entier $i \in \mathbb{N}$,
- les flèches de D sont d'une part de la forme

$$(X, Y, i) \rightarrow (X', Y', i), \quad \forall i \geq 0,$$

pour tout carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X' \\ \uparrow & & \uparrow \\ Y & \longrightarrow & Y' \end{array}$$

et d'autre part de la forme

$$(X, Y, i) \rightarrow (Y, Z, i - 1), \quad \forall i \geq 1,$$

pour toute suite d'inclusions fermées

$$Z \hookrightarrow Y \hookrightarrow X.$$

Prenant $R = \mathbb{Z}$ ou \mathbb{Q} , considérons la représentation

$$T : D \rightarrow R\text{-mod}_f$$

qui associe à tout triplet (X, Y, i) son homologie relative de Betti à coefficients dans R

$$H_i(X, Y),$$

munie des homomorphismes de functorialité et des homomorphismes de bord.

Alors on appelle catégorie des motifs de Nori la catégorie abélienne R -linéaire \mathcal{C}_T associée à ce choix de D et de T .

L'intérêt de cette définition est illustré en particulier par le théorème suivant :

Théorème I.3 (Ayoub et Barbieri-Viale, [N1M]). –

Dans la définition I.2 ci-dessus, prenons $R = \mathbb{Z}$ et restreignons le carquois D aux triplets (X, Y, i) tels que $i = 0$ [resp. $i \leq 1$]. Alors :

- (i) Dans le cas de la condition $i = 0$, la catégorie abélienne universelle \mathcal{C}_T de Nori est équivalente à la catégorie abélienne des 0-motifs d'Artin, c'est-à-dire des faisceaux étales constructibles de groupes abéliens sur $\text{Spec}(K)$.
- (ii) Dans le cas de la condition $i \leq 1$, la catégorie abélienne universelle \mathcal{C}_T de Nori est équivalente à la catégorie abélienne des 1-motifs de Deligne, c'est-à-dire des complexes de schémas en groupes abéliens sur $\text{Spec}(K)$ de la forme

$$\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$$

où

- \mathcal{F} est un faisceau étale constructible de groupes abéliens sur $\text{Spec}(K)$,
- \mathcal{G} est une variété semi-abélienne sur $\text{Spec}(K)$.

□

Une autre illustration de l'intérêt de la définition de Nori est fournie par le théorème suivant :

Théorème I.4 (Kontsevich, Huber et Müller-Stach, [OMDQ] et [NMKP]). –

Dans la définition I.2 ci-dessus, prenons pour coefficients le corps $R = \mathbb{Q}$.

Partons du carquois des triplets (X, Y, i) muni du produit défini par

$$(X, Y, i) \times (X', Y', i') = (X \times X', Y \times Y', i + i')$$

et prenons pour carquois D celui qui s'en déduit en inversant formellement le produit par l'objet

$$(\mathbb{G}_m, \{1\}, 1).$$

Alors :

- (i) La catégorie abélienne universelle \mathcal{C}_T de Nori munie du foncteur $F_T : \mathcal{C}_T \rightarrow \mathbb{Q}\text{-vect}_f$ d'homologie relative de Betti a naturellement la structure d'une catégorie tannakienne rigide munie d'un foncteur fibre. Elle définit un groupe de Galois motivique G_{mot} .
- (ii) Si le corps de base est $K = \mathbb{Q}$ et P désigne l'algèbre des "périodes formelles" de Kontsevich-Zagier, $\text{Spec}(P)$ est un torseur sous l'action de G_{mot} .

□

2 La réinterprétation et généralisation de Caramello

Le procédé de construction est important en lui-même donc nous allons commencer par exposer ses étapes successives, d'abord en des termes en partie informels. On précisera plus tard toutes les définitions.

Point de départ :

On part d'un carquois arbitraire D , d'un anneau de coefficients R (pas nécessairement commutatif) et d'une représentation

$$T : D \rightarrow R\text{-mod}$$

de D dans la catégorie des R -modules (sans aucune hypothèse sur la taille de ces R -modules).

Étape 1 (la plus importante) :

On associe à la représentation T de D sa théorie \mathbb{T} dans le "fragment régulier" de la "logique du premier ordre".

Comme toute théorie, la théorie régulière \mathbb{T} de T consiste en un langage et une syntaxe c'est-à-dire des axiomes.

Le langage (ou "signature") \mathbb{L} de T est défini comme consistant en :

- des "sortes" (c'est-à-dire des noms d'objets) indexées par les objets d de D (susceptibles de nommer des objets M_d de catégories de coefficients),
- des "symboles de fonctions" (c'est-à-dire des noms de flèches) indexés par les flèches $d \rightarrow d'$ de D (et susceptibles de nommer des flèches $M_d \rightarrow M_{d'}$),
- des "symboles de fonctions" indexés par les objets d de D , susceptibles de nommer des lois d'addition $M_d \times M_d \rightarrow M_d$ dans des catégories de coefficients où les produits finis existent,
- des "symboles de fonctions" indexés par les objets $d \in D$ et les scalaires $a \in R$, susceptibles de nommer des endomorphismes $M_d \rightarrow M_d$ de multiplication par les scalaires $a \in R$,
- enfin des "symboles de constantes" indexés par les objets $d \in D$, susceptibles de nommer des éléments zéros $0 \rightarrow M_d$ dans des objets M_d de catégories qui possèdent un objet final.

On remarque que ce langage \mathbb{L} dépend de D et R mais pas de T .

Afin de choisir les axiomes de définition de \mathbb{T} , on doit considérer successivement :

- les "termes" de \mathbb{L} , qui sont constitués de familles finies \vec{x} de variables associées chacune à une sorte et de symboles de fonctions, ou de composés de tels symboles, portant sur ces variables,
- les "formules atomiques" de \mathbb{L} qui consistent en les termes de \mathbb{L} et les relations d'égalité entre familles de variables ou de termes de même sortes,
- les "formules régulières" de \mathbb{L} déduites des formules atomiques en ajoutant la formule de vérité (sans variable libre) et en autorisant des combinaisons avec le signe de conjonction binaire (ou finitaire) \wedge et avec le quantificateur existentiel \exists (portant sur une partie des variables),
- les contextes pour de telles formules qui sont des familles finies de variables comprenant les variables libres des formules considérées,
- les "séquents" réguliers de \mathbb{L} qui ont la forme d'une implication

$$\varphi \xrightarrow{\vec{x}} \psi$$

entre deux formules régulières φ et ψ de \mathbb{L} dans le contexte d'une famille de variables \vec{x} qui donc comprend les variables libres de φ et celles de ψ .

Les “formules régulières” du langage \mathbb{L} prennent un sens dans la catégorie $R\text{-mod}$ image de la représentation T de D : chacune définit un sous-module d’un produit fini de R -modules associés à des objets de D .

Cela permet de poser la définition suivante :

Définition I.5 ([SCNM], §2.2). –

La “théorie régulière” \mathbb{T} d’une représentation $T : D \rightarrow R\text{-mod}$ est écrite dans le langage \mathbb{L} associé ci-dessus à D et R .

Ses axiomes sont par définition les séquents réguliers

$$\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi$$

qui sont vérifiés par T , autrement dit tels que le sous-module défini par la formule φ via T soit contenu dans le sous-module défini par la formule ψ via T (en remarquant que tous deux sont des sous-modules d’un même produit fini de R -modules puisque φ et ψ sont deux formules dans le contexte de la même famille de variables \vec{x}).

□

Étape 2 (qui est reprise de la construction générale des “topos classifiants” des théories géométriques du premier ordre) :

Ayant associé à la représentation $T : D \rightarrow R\text{-mod}$ sa théorie régulière \mathbb{T} , on associe à \mathbb{T} sa “catégorie syntactique régulière” $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$:

Définition I.6. –

La “catégorie syntactique régulière” $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$ d’une théorie régulière \mathbb{T} de signature \mathbb{L} est définie de la manière suivante :

- (1) Ses objets sont les formules régulières $\varphi(\vec{x})$ du langage \mathbb{L} , écrites chacune dans le contexte d’une famille finie de variables \vec{x} , modulo la relation d’équivalence définie par substitution de familles de variables.
- (2) Étant données deux formules régulières $\varphi(\vec{x})$ et $\psi(\vec{y})$ dans le contexte de familles de variables \vec{x} et \vec{y} disjointes (ce que l’on peut toujours supposer quitte à renommer les variables), les morphismes

$$\varphi(\vec{x}) \rightarrow \psi(\vec{y})$$

sont les classes d’équivalence de formules régulières

$$\theta(\vec{x}, \vec{y})$$

dans le contexte des variables \vec{x} et \vec{y} qui sont “démontrablement fonctionnelles” de $\varphi(\vec{x})$ vers $\psi(\vec{y})$ c’est-à-dire telles que les trois séquents

$$\theta \vdash_{\vec{x}, \vec{y}} \varphi \wedge \psi,$$

$$\varphi \vdash_{\vec{x}} (\exists \vec{y}) \theta,$$

$$\theta(\vec{x}, \vec{y}) \wedge \theta(\vec{x}, \vec{y}') \vdash_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{y}'} \vec{y} = \vec{y}'$$

soient démontrables dans la théorie \mathbb{T} .

La relation d’équivalence entre formules $\theta(\vec{x}, \vec{y})$ et $\theta'(\vec{x}, \vec{y})$ signifie que les deux séquents

$$\theta \vdash_{\vec{x}, \vec{y}} \theta'$$

$$\theta' \vdash_{\vec{x}, \vec{y}} \theta$$

sont démontrables dans la théorie \mathbb{T} .

□

La catégorie syntactique régulière $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$ de la théorie régulière \mathbb{T} de la représentation $T : D \rightarrow R\text{-mod}$ vérifie les propriétés suivantes :

Lemme I.7. –

La catégorie $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$ est additive et R -linéaire.

De plus, elle est régulière au sens que :

- (1) *Elle est cartésienne c'est-à-dire possède des limites (projectives) finies arbitraires.*
- (2) *Toute flèche $f : a \rightarrow b$ de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$ admet une image, c'est-à-dire un plus petit sous-objet de son but b à travers lequel f se factorise, et la formation des images commute aux changements de base b .*

□

Remarque :

Si R n'est pas commutatif, une catégorie R -linéaire est pour nous une catégorie additive dont chaque objet est muni d'une action de R . Ses morphismes R -linéaires sont alors ceux de ses morphismes qui sont compatibles avec ces actions de R .

Étape 3 (qui est une construction générale de théorie des catégories) :

Ayant associé à $T : D \rightarrow R\text{-mod}$ une théorie régulière \mathbb{T} puis la catégorie syntactique régulière $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$ de celle-ci, on associe à la catégorie régulière $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$ son "effectivisation" au sens suivant :

Définition I.8 (Carboni et Vitale, [REC]). –

L'effectivisation \mathcal{C}^{eff} d'une catégorie régulière \mathcal{C} est définie ainsi :

- (1) *Ses objets sont les paires (X, E) constituées d'un objet X de \mathcal{C} et d'une relation d'équivalence $E \rightrightarrows X \times X$.*
- (2) *Les flèches d'un objet (X, E) dans un objet (Y, F) sont les relations $R \rightrightarrows X \times Y$ telles que*

$$RE = R = FR,$$

$$E \leq R^0 R,$$

$$RR^0 \leq F,$$

si l'on note

- $SR \rightrightarrows X \times Z$ le composé de deux relations $R \rightrightarrows X \times Y$ et $S \rightrightarrows Y \times Z$,
- $R^0 \rightrightarrows Y \times X$ l'opposée d'une relation $R \rightrightarrows X \times Y$,
- \leq la relation d'ordre naturelle sur les relations d'une même paire d'objets.

□

On vérifie d'abord :

Lemme I.9. –

Soit \mathcal{C}_T l'effectivisation de la catégorie syntactique régulière $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$ de la théorie régulière \mathbb{T} de la représentation $T : D \rightarrow R\text{-mod}$. Alors :

- (i) *La catégorie \mathcal{C}_T est abélienne et R -linéaire.*

Théorème I.11 (Caramello, [SCNM], §2.4). –

- (i) *Considérons deux représentations de deux carquois D et D' dans les catégories abéliennes des modules sur deux anneaux R et R'*

$$T : D \rightarrow R\text{-mod} \quad \text{et} \quad T' : D' \rightarrow R'\text{-mod}.$$

Alors \mathcal{C}_T et $\mathcal{C}_{T'}$ sont équivalentes en tant que catégories abéliennes si et seulement si les théories régulières \mathbb{T} et \mathbb{T}' de T et T' sont “équivalentes au sens de Morita” c’est-à-dire si leurs “topos classifiants” $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ et $\mathcal{E}_{\mathbb{T}'}$ sont équivalents en tant que catégories.

- (ii) *Considérons deux représentations d’un même carquois D dans la catégorie des modules sur un même anneau R*

$$T : D \rightarrow R\text{-mod} \quad \text{et} \quad T' : D \rightarrow R\text{-mod}.$$

Alors les deux catégories \mathcal{C}_T et $\mathcal{C}_{T'}$ munies des deux représentations

$$\tilde{T} : D \rightarrow \mathcal{C}_T \quad \text{et} \quad \tilde{T}' : D \rightarrow \mathcal{C}_{T'}$$

et de leurs structures R -linéaires sont équivalentes si et seulement si les théories régulières \mathbb{T} et \mathbb{T}' de T et T' sont identiques.

Remarques :

- (i) La notion de “topos classifiant” $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ d’une théorie géométrique du premier ordre \mathbb{T} sera rappelée au paragraphe 2 du chapitre II.
- (ii) L’identité des théories régulières \mathbb{T} et \mathbb{T}' de T et T' signifie concrètement que pour toutes familles de combinaisons R -linéaires de composées de flèches de D

$$\langle s_1, \dots, s_k \rangle : d_1, \dots, d_n, e_1, \dots, e_m \rightarrow c_1, \dots, c_k$$

et

$$\langle s'_1, \dots, s'_{k'} \rangle : d_1, \dots, d_n, e_1, \dots, e_m \rightarrow c'_1, \dots, c'_{k'},$$

qui définissent des sous-modules

$$\text{Ker}(T\langle s_1, \dots, s_k \rangle) \quad \text{et} \quad \text{Ker}(T\langle s'_1, \dots, s'_{k'} \rangle)$$

de

$$T(d_1) \times \dots \times T(d_n) \times T(e_1) \times \dots \times T(e_m)$$

et des sous-modules

$$\text{Ker}(T'\langle s_1, \dots, s_k \rangle) \quad \text{et} \quad \text{Ker}(T'\langle s'_1, \dots, s'_{k'} \rangle)$$

de

$$T'(d_1) \times \dots \times T'(d_n) \times T'(e_1) \times \dots \times T'(e_m)$$

puis les projections de ces sous-modules

$$K_T, K'_T \subseteq T(d_1) \times \dots \times T(d_n)$$

et

$$K_{T'}, K'_{T'} \subseteq T'(d_1) \times \dots \times T'(d_n),$$

alors on a

$$K_T \subseteq K'_T$$

si et seulement si

$$K_{T'} \subseteq K'_{T'}.$$

□

3 Application aux motifs

On se place sur un corps de base K de caractéristique arbitraire.

On prend pour anneau de coefficients $R = \mathbb{Q}$ ou éventuellement \mathbb{Z} .

On prend pour D un carquois déduit de la catégorie des schémas séparés de type fini sur K et pour représentation

$$T : D \rightarrow \mathbb{Q}\text{-vect} \quad \text{ou} \quad \mathbb{Z}\text{-mod}$$

un foncteur cohomologique ou homologique à coefficients de caractéristique 0 (y compris dans des corps beaucoup plus gros que \mathbb{Q} tels que les corps ℓ -adiques).

Concrètement, les objets du carquois D sont constitués d'une partie géométrique et d'un indice :

- La partie géométrique d'un objet de D est un élément d'un ensemble de représentants des schémas X séparés de type fini sur K (éventuellement soumis à des conditions telles que : lisses, projectifs, ...), ou des paires de tels schémas emboîtés

$$Y \hookrightarrow X$$

comme dans la définition I.2, ou éventuellement de diagrammes plus complexes à valeurs dans la catégorie des schémas séparés de type fini sur K .

- L'indice qui complète la partie géométrique d'un objet de D consiste au moins en un entier $i \geq 0$ qui sera le degré de l'espace d'homologie ou de cohomologie associé à l'objet. Il peut éventuellement être complété par un autre entier $j \in \mathbb{Z}$ qui permettrait une torsion à la Tate des coefficients des espaces de cohomologie (en associant par exemple à un schéma X complété par un double indice (i, j) l'espace de cohomologie ℓ -adique $H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(j))$ ou bien le groupe de Chow supérieur de Bloch $\text{CH}^j(X, 2j - i)_{\mathbb{Q}}$). Il peut aussi être complété par un indice binaire qui servirait à associer à l'objet un espace de cohomologie lorsque l'indice prend la première valeur et un espace d'homologie (ou de cohomologie à support compact) lorsque l'indice prend l'autre valeur : cela permettrait de considérer simultanément cohomologie et homologie.
- Les flèches du carquois D sont associées à des morphismes de schémas (ou de diagrammes de schémas), ou éventuellement à des correspondances, dont on sait qu'ils induisent des homomorphismes entre les espaces de cohomologie ou d'homologie associés par la représentation T aux objets de D . Les flèches de D peuvent comprendre des "flèches de bord" comme dans le cas de la définition I.2. Lorsque les flèches de D sont associées à des correspondances, on n'a pas besoin de se préoccuper de leur composition puisque D est seulement un carquois.

Enfin, la représentation

$$T : D \rightarrow \mathbb{Q}\text{-vect} \quad (\text{ou} \quad \mathbb{Z}\text{-mod})$$

peut être

- l'homologie ou la cohomologie de Betti si K est un sous-corps de \mathbb{C} ,
- la cohomologie de De Rham si $\text{car}(K) = 0$,
- la cohomologie ℓ -adique si $\ell \neq \text{car}(K)$,
- la cohomologie p -adique (cristalline ou rigide) si $p = \text{car}(K)$,
- la cohomologie motivique définie par les groupes de Chow supérieurs de Bloch.

Appliquant le théorème I.10, on obtient :

Définition I.12. –

Soit K un corps de base arbitraire et soit $R = \mathbb{Q}$ ou éventuellement \mathbb{Z} .

On choisit un carquois D et une représentation T comme ci-dessus.

Alors la construction de Caramello leur associe une catégorie abélienne \mathbb{Q} -linéaire (ou \mathbb{Z} -linéaire) universelle \mathcal{C}_T munie d'une représentation

$$\tilde{T} : D \rightarrow \mathcal{C}_T$$

et d'un foncteur exact et fidèle

$$F_T : \mathcal{C}_T \rightarrow \mathbb{Q}\text{-vect} \quad (\text{ou } \mathbb{Z}\text{-mod}).$$

Cette catégorie est un candidat pour être la catégorie des motifs sur K .

Remarques :

- (i) Comme on l'a déjà dit, le fait que les représentations cohomologiques T considérées prennent leurs valeurs dans des espaces de dimension infinie sur \mathbb{Q} n'a pas d'importance.
- (ii) Si T est une représentation $D \rightarrow \mathbb{Z}\text{-mod}$ telle que la multiplication par un nombre premier p est inversible dans les modules images par T de tous les objets de D , alors la multiplication par p sera automatiquement inversible dans la catégorie \mathcal{C}_T .

Par exemple, si T est défini par la cohomologie ℓ -adique à coefficients dans \mathbb{Z}_ℓ , la multiplication par tout nombre premier $p \neq \ell$ est automatiquement inversible dans \mathcal{C}_T .

□

Chaque choix de D et T définit maintenant un candidat \mathcal{C}_T pour être la catégorie des motifs sur K . C'est évidemment trop! Cependant, le théorème I.11 dit à quelles conditions ces candidats seraient identiques :

Corollaire I.13. –

Soient K un corps de base arbitraire et $R = \mathbb{Q}$ ou \mathbb{Z} comme ci-dessus.

Fixons un carquois D construit comme plus haut à partir de la catégorie des schémas sur K .

Et considérons une famille $\{T\}$ de représentations

$$T : D \rightarrow \mathbb{Q}\text{-vect} \quad (\text{ou } \mathbb{Z}\text{-mod})$$

définies par des “bons” foncteurs cohomologiques tels que ceux cités plus haut.

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) Les foncteurs cohomologiques $T \in \{T\}$ se factorisent à travers une catégorie de motifs au sens où on l'entend habituellement.

Cela signifie qu'existe une catégorie abélienne \mathbb{Q} -linéaire (ou \mathbb{Z} -linéaire) \mathcal{M} munie d'une représentation

$$D \rightarrow \mathcal{M}$$

telle que chaque $T \in \{T\}$ se factorise comme le composé de $D \rightarrow \mathcal{M}$ et d'un foncteur exact et fidèle

$$\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{Q}\text{-vect} \quad (\text{ou } \mathbb{Z}\text{-mod}).$$

- (ii) Les catégories abéliennes \mathcal{C}_T associées aux $T \in \{T\}$, munies chacune de la représentation $D \rightarrow \mathcal{C}_T$, sont équivalentes.
- (iii) Les “théories régulières” \mathbb{T}_T des $T \in \{T\}$ sont identiques.

Démonstration :

L'équivalence de (ii) et (iii) résulte du théorème I.11.

L'implication (ii) \Rightarrow (i) est évidente.

L'implication (i) \Rightarrow (iii) résulte de ce que, pour tout foncteur exact et fidèle

$$\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{Q}\text{-vect} \quad (\text{ou } \mathbb{Z}\text{-mod})$$

deux sous-objets V et V' d'un produit d'objets

$$V_1 \times \dots \times V_n$$

dans \mathcal{M} vérifient la relation

$$V \subseteq V'$$

si et seulement si il en est ainsi de leurs images dans $\mathbb{Q}\text{-vect}$ (ou $\mathbb{Z}\text{-mod}$).

□

On peut résumer le corollaire I.13 ci-dessus en disant que si effectivement les motifs (mixtes) existent, ils sont de nature logique : ce que les divers foncteurs cohomologiques doivent avoir en commun pour que les motifs existent, c'est leurs syntaxes, plus précisément leurs théories régulières associées. S'il en est ainsi, la catégorie des motifs peut être construite à partir de n'importe lequel de ces foncteurs cohomologiques considéré isolément.

On remarque que l'identité des théories régulières associées à deux représentations T et T' de D implique :

- l'identité des conditions d'annulation des espaces associés par T et T' à un objet de D ,
- plus généralement, l'identité des conditions d'annulation des sous-espaces définis comme les noyaux des homomorphismes associés par T et T' à une combinaison linéaire de composés de flèches de D , par exemple les sous-espaces $\text{Ker}(T(P(u)))$ et $\text{Ker}(T'(P(u)))$ associés à un endomorphisme u et à un polynôme P à coefficients dans \mathbb{Q} .

En revanche, les théories régulières des représentations T ne disent rien des dimensions des espaces et sous-espaces.

Pour prendre en compte les dimensions, il faut une syntaxe plus fine : celle des "théories géométriques du premier ordre" et non pas seulement de leur "fragment régulier".

II. Les démonstrations

1 Logique : syntaxe et sémantique

On commence par la syntaxe, c'est-à-dire ici par la notion de théorie géométrique du premier ordre. Il faut d'abord introduire ce qu'on entend par langage ou signature d'une telle théorie :

Définition II.1. –

Une “signature” (ou langage) du premier ordre consiste en :

- des “sortes” (= noms d'objets),
- des “symboles de fonctions” (= noms de flèches d'un produit fini d'objets dans un objet),
- des symboles de relations (= noms de sous-objets dans des produits finis d'objets).

Remarque :

La source d'un symbole de fonction consiste en une suite finie A_1, \dots, A_n de sortes. Si cette suite est vide, c'est-à-dire si $n = 0$, on parle de “symbole de constante”.

□

Introduisant des variables libres, on peut former divers types de formules dans un langage donné :

Définition II.2. –

Étant donnée une signature (du premier ordre), on forme :

- les “termes” de Σ qui sont constitués de familles finies \vec{x} de variables associées chacune à une sorte et de symboles de fonctions, ou de composés de tels symboles, portant sur ces variables,
- les “formules atomiques” de Σ qui sont constituées à partir des termes en s'autorisant à substituer ceux-ci dans les “symboles de relations” de Σ ou dans la relation d'égalité entre variables associées aux mêmes sortes,
- les “formules régulières” de Σ déduites des précédentes en ajoutant la formule du vrai \top (sans variable libre) et en autorisant des conjonctions finitaires \wedge ainsi que le quantificateur universel \forall portant sur une partie des variables,
- les “formules géométriques” de Σ déduites des précédentes en ajoutant encore la formule du faux \perp et en autorisant aussi des disjonctions infinitaires \vee ,
- les “formules du premier ordre (avec disjonctions infinitaires)” de Σ déduites des formules atomiques en ajoutant les formules du vrai \top et du faux \perp et en autorisant les implications \Rightarrow entre formules, le passage aux négations $\neg\varphi$ de formules φ , les conjonctions finitaires et disjonctions infinitaires ainsi que les quantificateurs existentiel \exists et universel \forall portant sur une partie des variables.

Enfin, on appelle “contextes” pour de telles formules des familles finies \vec{x} de variables qui comprennent les variables libres de ces formules.

□

Ayant défini la notion de formules d'une signature, on peut définir celles de séquents et de théorie dans cette signature :

Définition II.3. –

Soit Σ une signature du premier ordre.

(i) Un séquent de Σ est une implication

$$\varphi \xrightarrow{\vec{x}} \psi$$

entre deux formules du premier ordre φ et ψ de Σ dans le contexte d'une même famille finie \vec{x} de variables.

Un tel séquent est dit régulier [resp. géométrique] si les formules qui le composent sont régulières [resp. géométriques].

(ii) Une théorie du premier ordre [resp. régulière, resp. géométrique] dans la signature Σ est un ensemble \mathbb{T} de séquents [resp. réguliers, resp. géométriques] de Σ qui sont appelés les axiomes de \mathbb{T} .

Les séquents démontrables d'une théorie \mathbb{T} sont les séquents qui se déduisent des axiomes de \mathbb{T} suivant les règles d'inférence standard (voir le paragraphe 4.2 de "Topos-theoretic background").

□

Ayant défini la syntaxe à travers la notion de théorie [resp. régulière, resp. géométrique] du premier ordre, on peut introduire la sémantique catégorique, c'est-à-dire la notion de modèle d'une telle théorie dans une catégorie qui possède suffisamment de structures.

On commence par la notion de Σ -structure dans une catégorie :

Définition II.4. –

Soit Σ une signature du premier ordre.

Soit \mathcal{C} une catégorie qui possède des produits finis (et donc en particulier un objet final).

Une Σ -structure M dans \mathcal{C} consiste en :

- une fonction qui associe à toute sorte A de Σ un objet MA de \mathcal{C} ,
- une fonction qui associe à tout symbole de fonction $f : A_1 \dots A_n \rightarrow B$ de Σ une flèche

$$MA_1 \times \dots \times MA_n \rightarrow MB \quad \text{de } \mathcal{C}$$

(où $MA_1 \times \dots \times MA_n$ est l'objet final de \mathcal{C} si $n = 0$),

- une fonction qui associe à tout symbole de relation $R \mapsto A_1 \dots A_n$ de Σ un sous-objet

$$MR \mapsto MA_1 \times \dots \times MA_n \quad \text{dans } \mathcal{C}.$$

Remarques :

- (i) Les Σ -structures d'une telle catégorie \mathcal{C} forment une catégorie notée $\Sigma\text{-Str}(\mathcal{C})$.
- (ii) Tout foncteur entre deux telles catégories $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ qui préserve les produits finis et les monomorphismes définit un foncteur

$$\Sigma\text{-Str}(\mathcal{C}) \rightarrow \Sigma\text{-Str}(\mathcal{D}).$$

□

Si Σ est une signature et M une Σ -structure dans une catégorie \mathcal{C} qui possède des produits, les termes de Σ s'interprètent dans M par simple composition de flèches.

Pour interpréter les divers types de formules de Σ dans les Σ -structures d'une telle catégorie \mathcal{C} , il faut demander que \mathcal{C} ait des structures supplémentaires :

Définition II.5. –

Considérons les Σ -structures M de signature Σ dans une catégorie \mathcal{C} qui possède des produits.

Alors, chaque fois que c'est possible, on interprète :

- les substitutions de termes dans des relations comme des images réciproques de sous-objets,
- la formule du vrai \top dans le contexte de variables \vec{x} associées à des sortes $A_1 \dots A_n$ comme le sous-objet $MA_1 \times \dots \times MA_n$ de $MA_1 \times \dots \times MA_n$,
- la formule du faux \perp comme le sous-objet initial \emptyset ,
- les conjonctions finitaires [resp. infinitaires] comme des intersections finies [resp. infinies] de sous-objets,
- les disjonctions finitaires [resp. infinitaires] comme des réunions finies [resp. infinies] de sous-objets,
- le quantificateur existentiel \exists comme image par le morphisme de projection d'un produit fini de facteurs sur le sous-produit formé d'une partie de ces facteurs,
- le quantificateur universel \forall comme image par un foncteur adjoint à droite du foncteur d'image réciproque des sous-objets d'un sous-produit d'un produit vers les sous-objets de ce produit,
- l'implication \Rightarrow comme le foncteur qui associe à deux sous-objets a_1 et a_2 d'un objet a le plus grand sous-objet ($a_1 \Rightarrow a_2$) de a tel que $(a_1 \Rightarrow a_2) \cap a_1 \leq a_2$,
- la négation \neg comme le foncteur qui associe à un sous-objet a d'un objet b le plus grand sous-objet $\neg a$ de b tel que $a \cap \neg a = \emptyset$.

□

On déduit de cette définition :

Proposition II.6. –

On considère une signature Σ et les Σ -structures M dans une catégorie \mathcal{C} qui possède des produits.

Alors :

- (i) Les formules régulières de Σ s'interprètent dans les Σ -structures M si \mathcal{C} est une catégorie régulière au sens que
 - \mathcal{C} est cartésienne c'est-à-dire possède des limites (projectives) finies arbitraires,
 - tout morphisme de \mathcal{C} possède une image, et la formation des images commute aux changements de base.
- (ii) Les formules géométriques de Σ s'interprètent dans les Σ -structures M si \mathcal{C} est une catégorie géométrique au sens que
 - \mathcal{C} est régulière,
 - \mathcal{C} possède des réunions arbitraires de sous-objets, et leur formation commute aux changements de base.
- (iii) Les formules du premier ordre (infinitaires) de Σ s'interprètent dans les Σ -structures M si \mathcal{C} est un topos (de Grothendieck), c'est-à-dire équivalente à la catégorie des faisceaux d'ensembles sur un site.

□

On peut maintenant définir la notion de modèle d'une théorie \mathbb{T} dans une catégorie adéquate :

Définition II.7. –

Soit \mathbb{T} une théorie régulière [resp. géométrique, resp. du premier ordre (infinitaire)] de signature Σ .

Et soit \mathcal{C} une catégorie régulière [resp. géométrique, resp. un topos].

Un modèle M de \mathbb{T} dans \mathcal{C} est une Σ -structure telle que, pour tout axiome de \mathbb{T}

$$\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi,$$

le sous-objet (d'un objet produit correspondant aux variables \vec{x}) qui interprète la formule φ est contenu dans le sous-objet (du même objet produit) qui interprète la formule ψ .

Remarque :

Dans cette situation, les modèles de \mathbb{T} dans \mathcal{C} forment une catégorie notée $\mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{C})$. □

On a encore :

Lemme II.8. –

Soit \mathbb{T} une théorie régulière [resp. géométrique].

Alors tout foncteur entre catégories régulières [resp. géométriques]

$$\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$$

qui est régulier [resp. géométrique] c'est-à-dire préserve les limites finies et les images [resp. ainsi que les réunions arbitraires de sous-objets] induit un foncteur

$$\mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{C}').$$

□

On rappelle qu'un morphisme géométrique de topos

$$(f^*, f_*) : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$$

consiste par définition en une paire de foncteurs

$$f^* : \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}$$

$$f_* : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$$

tels que f^* est adjoint à gauche de f_* (donc préserve les colimites arbitraires) et exact (c'est-à-dire préserve aussi les limites finies). Ainsi, f^* est un foncteur géométrique au sens du lemme II.8 et on a :

Corollaire II.9. –

Pour toute théorie géométrique du premier ordre \mathbb{T} , tout morphisme géométrique de topos

$$\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$$

induit un foncteur

$$\mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E}') \rightarrow \mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E}).$$

Remarque :

En revanche, si \mathbb{T} est une théorie du premier ordre, on dispose bien pour tout topos \mathcal{E} de la catégorie

$$\mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E})$$

mais un morphisme géométrique de topos

$$\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$$

n'induit pas en général de foncteur

$$\mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E}') \rightarrow \mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E}).$$

□

2 Catégories syntactiques et topos classifiants

On peut maintenant introduire les catégories syntactiques et topologies syntactiques qui permettent de représenter les 2-foncteurs de modèles

$$\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{C})$$

ou

$$\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E}).$$

Définition II.10. –

Soit \mathbb{T} une théorie géométrique [resp. régulière] de signature Σ .

(i) On appelle catégorie syntactique [resp. syntactique régulière] de \mathbb{T} et on note $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ [resp. $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$] la catégorie définie comme suit :

- Ses objets sont les classes d'équivalence de formules géométriques [resp. régulières]

$$\varphi(\vec{x})$$

de la signature Σ dans des contextes \vec{x} (en considérant deux telles formules comme équivalentes lorsque l'on peut passer de l'une à l'autre en renommant les variables).

- Ses morphismes entre telles formules

$$\varphi(\vec{x}) \rightarrow \psi(\vec{y})$$

(écrite dans les contextes de familles de variables \vec{x} et \vec{y} supposées disjointes) sont les classes d'équivalence de formules géométriques [resp. régulières] dans des contextes \vec{x} et \vec{y}

$$\theta(\vec{x}, \vec{y})$$

qui sont démontrablement fonctionnelles au sens que les séquents

$$\theta \vdash_{\vec{x}, \vec{y}} \varphi \wedge \psi,$$

$$\varphi \vdash_{\vec{x}} (\exists \vec{y}) \theta,$$

$$\theta(\vec{x}, \vec{y}) \wedge \theta(\vec{x}, \vec{y}') \vdash_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{y}'} \vec{y} = \vec{y}'$$

sont démontrables dans la théorie \mathbb{T} (en considérant deux telles formules $\theta(\vec{x}, \vec{y})$ et $\theta'(\vec{x}, \vec{y})$ comme équivalentes si les séquents $\theta \vdash_{\vec{x}, \vec{y}} \theta'$ et $\theta' \vdash_{\vec{x}, \vec{y}} \theta$ sont démontrables dans la théorie \mathbb{T}).

- (ii) On appelle topologie syntactique de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ [resp. $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$] et on note $J_{\mathbb{T}}$ [resp. $J_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$] la topologie de Grothendieck pour laquelle une famille de morphismes de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ [resp. $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$] de même but

$$\varphi_i(\vec{x}_i) \xrightarrow{\theta_i(\vec{x}_i, \vec{y})} \psi(\vec{y}), \quad i \in I,$$

est couvrante si le séquent

$$\psi \vdash_{\vec{y}} \bigvee_{i \in I} (\exists \vec{x}_i) \theta_i$$

est démontrable dans la théorie \mathbb{T} [resp. s'il existe un indice $i \in I$ tel que le séquent

$$\psi \vdash_{\vec{y}} (\exists \vec{x}_i) \theta_i$$

soit démontrable dans la théorie \mathbb{T}].

□

On a :

Théorème II.11. –

- (i) Si \mathbb{T} est une théorie géométrique [resp. régulière], la catégorie syntactique [resp. régulière]

$$\mathcal{C}_{\mathbb{T}} \quad [\text{resp. } \mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}]$$

est géométrique [resp. régulière] et elle représente le 2-foncteur covariant des modèles

$$\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{C})$$

sur la 2-catégorie des catégories géométriques [resp. régulières].

- (ii) De plus, si $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ [resp. $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$] désigne le topos des faisceaux sur la catégorie $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ [resp. $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$] munie de la topologie $J_{\mathbb{T}}$ [resp. $J_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$], alors $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ représente le 2-foncteur contravariant des modèles

$$\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E})$$

sur la 2-catégorie des topos et de leurs morphismes géométriques.

En particulier, si \mathbb{T} est une théorie régulière, les deux topos $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ et $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$ sont équivalents.

Esquisse de démonstration :

- (i) Il faut d'abord prouver que la catégorie syntactique $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ [resp. $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$] est géométrique [resp. régulière] dès lors que \mathbb{T} est une théorie géométrique [resp. régulière].

Cela résulte du lemme suivant qui montre que la structure des treillis de sous-objets des objets des catégories syntactiques $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ ou $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$ reflète la structure des formules géométriques [resp. régulières] de la signature Σ de \mathbb{T} :

Lemme II.12. –

Soit \mathbb{T} une théorie géométrique [resp. régulière] de signature Σ .

Soit $\varphi(\vec{x})$ une formule géométrique [resp. régulière] de Σ dans un contexte \vec{x} qui définit donc un objet de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ [resp. $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$].

Alors tout sous-objet de $\varphi(\vec{x})$ dans $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ [resp. $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$] est isomorphe à un sous-objet de la forme

$$\psi(\vec{x}') \xrightarrow{\psi \wedge \vec{x}' = \vec{x}} \varphi(\vec{x})$$

où

- $\psi(\vec{x})$ est une formule géométrique [resp. régulière] de Σ dans le contexte de la même famille de variables \vec{x} telle que le séquent

$$\psi \vdash_{\vec{x}} \varphi$$

est démontrable dans \mathbb{T} ,

- $\psi(\vec{x}')$ est la formule déduite de $\psi(\vec{x})$ par substitution à la famille de variables \vec{x} d'une autre famille \vec{x}' de variables de mêmes sortes disjointe de \vec{x} .

Suite de la démonstration du théorème II.11 :

- (i) La catégorie $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ [resp. $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$] est géométrique [resp. régulière] car, d'après le lemme II.12 ci-dessus :
- les intersections finitaires de sous-objets dans $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ ou $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$ correspondent aux conjonctions finitaires de formules,
 - la formation des images des morphismes de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ ou $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$

$$\varphi(\vec{x}) \xrightarrow{\theta(\vec{x}, \vec{y})} \psi(\vec{y})$$

correspond à la quantification existentielle par la factorisation

$$\varphi(\vec{x}) \rightarrow (\exists \vec{x}) \theta(\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow \psi(\vec{y}),$$

- les réunions infinitaires de sous-objets dans $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ correspondent aux disjonctions infinitaires de formules géométriques.

Le fait que la formation des images dans $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ ou $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$ commute aux changements de base, ainsi que celle des réunions infinitaires dans $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$, résulte des règles d'inférence entre séquents géométriques ou réguliers.

Il faut ensuite démontrer que $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ [resp. $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$] représente le 2-foncteur des modèles qui associe à toute catégorie géométrique [resp. régulière] \mathcal{C} la catégorie $\mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{C})$.

On a plus précisément la proposition suivante dont la démonstration est tautologique :

Proposition II.13. –

Soit \mathbb{T} une théorie géométrique [resp. régulière] de signature Σ .

Associions

- à toute sorte A de Σ l'objet de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ [resp. $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$] défini par une variable x^A de sorte A ,
- à tout symbole de fonction $f : A_1 \dots A_n \rightarrow B$ de Σ le morphisme entre formules du vrai

$$\top(x_1^{A_1}, \dots, x_n^{A_n}) \xrightarrow{y^B = f(x_1^{A_1}, \dots, x_n^{A_n})} \top(y^B)$$

- à tout symbole de relation $R \rightsquigarrow A_1 \dots A_n$ le sous-objet

$$R(x_1^{A_1}, \dots, x_n^{A_n}) \xrightarrow{R(x_1^{A_1}, \dots, x_n^{A_n})} \top(x_1^{A_1}, \dots, x_n^{A_n}).$$

Alors :

- (i) Ceci définit un modèle $M_{\mathbb{T}}$ de la théorie géométrique [resp. régulière] \mathbb{T} dans $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ [resp. $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$].
Toute formule géométrique [resp. régulière] $\varphi(\vec{x})$ de Σ dans un contexte \vec{x} s'interprète dans ce modèle $M_{\mathbb{T}}$ comme le sous-objet

$$\varphi(\vec{x}) \xrightarrow{\varphi(\vec{x})} \top(\vec{x}).$$

- (ii) Ce modèle est universel. □

Esquisse de démonstration du théorème II.11(ii) :

Il faut montrer que, pour tout topos \mathcal{E} , la catégorie $\mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E})$ des modèles de \mathbb{T} dans \mathcal{E} est équivalente à celle des morphismes géométriques

$$(f^*, f_*) : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{T}} \quad [\text{resp. } (f^*, f_*) : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}].$$

On sait déjà qu'elle est équivalente à la catégorie des morphismes géométriques [resp. réguliers]

$$\mathcal{C}_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathcal{E} \quad [\text{resp. } \mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}} \rightarrow \mathcal{E}].$$

Le topos $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ [resp. $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$] est par définition le topos des faisceaux sur la catégorie $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ [resp. $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$] munie de la topologie de Grothendieck $J_{\mathbb{T}}$ [resp. $J_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$].

La conclusion résulte de la proposition suivante puisque toute catégorie régulière (et a fortiori géométrique) est cartésienne et que tout foncteur régulier (et a fortiori géométrique) est cartésien :

Proposition II.14. –

Soit \mathcal{E} un topos.

Soit \mathcal{C} une catégorie cartésienne (c'est-à-dire qui admet des limites finies) munie d'un foncteur cartésien (c'est-à-dire qui commute aux limites finies)

$$\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}.$$

Soient enfin J une topologie de Grothendieck sur \mathcal{C} , \mathcal{E}_J le topos associé et le foncteur canonique

$$\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}_J$$

composé du foncteur de Yoneda et du foncteur de faisceautisation.

Alors le foncteur

$$\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$$

se factorise en le composé de $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}_J$ et de l'image réciproque f^ d'un morphisme géométrique*

$$(f^*, f_*) : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_J$$

si et seulement si l'image par $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ de tout crible couvrant de J est une famille couvrante de \mathcal{E} (c'est-à-dire dont la réunion des images est égale à tout).

□

3 Démonstration des propriétés des catégories \mathcal{C}_T

Nous devons parcourir à nouveau les étapes successives de la construction des catégories \mathcal{C}_T au paragraphe I.2.

Rappelons que son point de départ consiste en la donnée d'un carquois D , d'un anneau (unitaire) R et d'une représentation

$$T : D \rightarrow R\text{-mod}$$

de D dans la catégorie des R -modules.

Étape 1 :

On associe à T sa théorie régulière \mathbb{T} de signature Σ .

La signature Σ consiste en

- des sortes associées à chaque objet d de D ,

- des symboles de fonctions $d \xrightarrow{f} d'$ associés à chaque flèche f de D , $dd \rightarrow d$ et $\emptyset \rightarrow d$ associés à chaque objet d de D (qui désigneront les lois d'addition et les éléments 0) et $d \rightarrow d$ associés à chaque d et à chaque scalaire $a \in R$ (qui désigneront les lois de multiplication par les scalaires),
- aucun symbole de relation.

Les axiomes de la théorie \mathbb{T} sont par définition les séquents réguliers de la signature Σ

$$\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi$$

qui sont vérifiés par la représentation T .

Étape 2 :

On associe à \mathbb{T} sa catégorie syntactique régulière $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$.

On sait d'après le théorème II.11(i) que $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$ est une catégorie régulière. Elle est munie d'une structure additive et R -linéaire définie par les symboles de fonctions $dd \rightarrow d$ pour l'addition, $\emptyset \rightarrow d$ pour les éléments 0 et $d \rightarrow d$ pour la multiplication par les scalaires $a \in R$. Les axiomes de commutativité, associativité, distributivité et d'éléments neutres sont vérifiés puisqu'ils le sont dans la catégorie des R -modules et que tout séquent régulier vérifié par T est un axiome de \mathbb{T} .

Ainsi, le lemme I.7 est démontré.

On sait aussi d'après le théorème II.11(i) que la catégorie $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$ représente le 2-foncteur covariant des modèles

$$\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{C})$$

sur la 2-catégorie des catégories régulières et des foncteurs réguliers.

Plus précisément, on a :

Proposition II.15. –

- (i) *Un modèle universel de \mathbb{T} dans la catégorie syntactique régulière $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$ est défini en associant*
- à chaque objet d de D l'objet x^d de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$ (où x^d désigne une variable de sorte d) muni de sa loi d'addition, de son élément neutre et de ses lois de multiplication par les scalaires,
 - à chaque flèche $f : d \rightarrow d'$ de D le symbole de fonction correspondant écrit comme un terme $x^d \xrightarrow{f(x^d) = y^{d'}} y^{d'}$.
- (ii) *Pour tout modèle M de \mathbb{T} dans une catégorie régulière \mathcal{C} , il existe un unique foncteur régulier, additif et R -linéaire*

$$\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}} \rightarrow \mathcal{C}$$

qui transforme le modèle universel de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$ en le modèle M de \mathbb{T} dans \mathcal{C} .

Ce foncteur envoie toute formule régulière φ sur son interprétation dans M .

□

Le modèle universel de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$ peut être vu comme une représentation

$$D \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}.$$

D'autre part, la représentation

$$T : D \rightarrow R\text{-mod}$$

peut être vue comme un modèle de \mathbb{T} dans $R\text{-mod}$.

D'après la proposition II.15 ci-dessus, il existe donc un unique foncteur régulier, additif et R -linéaire

$$\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}} \rightarrow R\text{-mod}$$

qui rende commutatif le triangle :

$$\begin{array}{ccc} D & & \\ \downarrow & \searrow & \\ & & \mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}} \\ & \swarrow & \\ & & R\text{-mod} \end{array}$$

Étape 3 :

Ayant construit la catégorie syntactique régulière $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$, on lui associe son effectivisation \mathcal{C}_T au sens de la définition I.8 :

Pour toute catégorie régulière \mathcal{C} , son effectivisation \mathcal{C}^{eff} est la catégorie dont

- les objets sont les paires (X, E) constituées d'un objet X de \mathcal{C} et d'une relation d'équivalence $E \rightrightarrows X \times X$,
- les flèches $(X, E) \rightarrow (Y, F)$ sont les relations $R \rightrightarrows X \times Y$ telles que $RE = R = FR$, $E \leq R^0R$ et $RR^0 \leq F$.

Voici les propriétés principales de ce procédé de construction :

Proposition II.16. –

Soient \mathcal{C} une catégorie régulière et \mathcal{C}^{eff} son effectivisation.

Alors :

- (i) La catégorie \mathcal{C}^{eff} est régulière. Elle est aussi effective au sens que toute relation d'équivalence y possède un quotient.
- (ii) Le foncteur canonique

$$\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{eff}}$$

est régulier.

De plus, il est universel au sens que tout foncteur régulier

$$\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$$

vers une catégorie régulière effective \mathcal{C}' se factorise en un unique foncteur

$$\mathcal{C}^{\text{eff}} \rightarrow \mathcal{C}'$$

régulier et effectif au sens qu'il préserve les quotients des relations d'équivalence.

□

Étape 4 :

Il s'agit de vérifier les propriétés de la catégorie \mathcal{C}_T .

Elles vont résulter des propriétés déjà connues de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$ et du corollaire suivant de la proposition II.16 :

Corollaire II.17. –

Soit \mathcal{C} une catégorie additive, R -linéaire et régulière. Alors :

- (i) La catégorie \mathcal{C}^{eff} est abélienne et R -linéaire.
(ii) Le foncteur canonique

$$\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{eff}}$$

est additif, R -linéaire et régulier.

Il est universel au sens que tout foncteur R -linéaire régulier

$$\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$$

vers une catégorie abélienne R -linéaire \mathcal{C}' se factorise en un unique foncteur R -linéaire exact

$$\mathcal{C}^{\text{eff}} \rightarrow \mathcal{C}' .$$

□

D'après ce corollaire, l'effectivisation \mathcal{C}_T de $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$ est une catégorie abélienne R -linéaire.

Le foncteur

$$\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}} \rightarrow R\text{-mod}$$

construit à l'étape 2 est R -linéaire et régulier donc se factorise en un unique foncteur R -linéaire exact

$$\mathcal{C}_T \rightarrow R\text{-mod} .$$

Par conséquent, la représentation

$$T : D \rightarrow R\text{-mod}$$

se factorise comme le composé de

$$D \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}} \rightarrow \mathcal{C}_T$$

et de

$$\mathcal{C}_T \rightarrow R\text{-mod} .$$

Considérons une autre factorisation de T en

$$D \xrightarrow{S} \mathcal{C} \xrightarrow{F} R\text{-mod}$$

où \mathcal{C} est une catégorie abélienne R -linéaire et F un foncteur R -linéaire, exact et fidèle.

Comme F est R -linéaire, exact et fidèle, S définit un modèle de \mathbb{T} dans \mathcal{C} . D'après la proposition II.15, S se factorise comme le composé de

$$D \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$$

et d'un foncteur R -linéaire régulier

$$\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}} \rightarrow \mathcal{C}$$

qui, d'après le corollaire II.17(ii), se factorise lui-même en un unique foncteur R -linéaire exact

$$\mathcal{C}_T \rightarrow \mathcal{C} .$$

Il ne reste plus qu'à démontrer que le foncteur R -linéaire exact

$$\mathcal{C}_T \rightarrow R\text{-mod}$$

est fidèle. Comme il est exact, il suffit de démontrer qu'il est conservatif au sens qu'un monomorphisme de \mathcal{C}_T est un isomorphisme s'il en est ainsi de son image dans $R\text{-mod}$.

Or on a le lemme général suivant :

Lemme II.18 ([SCNM], §1.3). –

Soient \mathcal{C} une catégorie régulière, \mathcal{C}^{eff} son effectivisation et

$$F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$$

un foncteur régulier vers une catégorie régulière effective \mathcal{C}' , factorisé en le foncteur régulier effectif

$$\tilde{F} : \mathcal{C}^{\text{eff}} \rightarrow \mathcal{C}' .$$

Alors, si le foncteur F est conservatif au sens ci-dessus, il en est de même de \tilde{F} . □

D'après ce lemme, on est réduit à prouver que le foncteur R -linéaire régulier

$$\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}} \rightarrow R\text{-mod}$$

est conservatif. Cela résulte de ce que son composé avec le modèle universel $D \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$ de \mathbb{T} , qui est $T : D \rightarrow R\text{-mod}$, est un modèle conservatif de \mathbb{T} au sens qu'un séquent régulier de Σ est démontrable dans \mathbb{T} si et seulement si il est vérifié par T .

4 Les critères d'équivalence entre catégories \mathcal{C}_T

On considère deux représentations

$$T : D \rightarrow R\text{-mod} \quad \text{et} \quad T' : D' \rightarrow R'\text{-mod}$$

de deux carquois D et D' dans les catégories des modules sur deux anneaux R et R' .

On associe à T et T' leurs théories régulières \mathbb{T} et \mathbb{T}' , puis les catégories syntactiques régulières $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$ et $\mathcal{C}_{\mathbb{T}'}^{\text{reg}}$, et enfin leurs effectivisations \mathcal{C}_T et $\mathcal{C}_{T'}$.

On associe d'autre part à \mathbb{T} et \mathbb{T}' leurs topos classifiants $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ et $\mathcal{E}_{\mathbb{T}'}$, définis comme les catégories des faisceaux d'ensembles sur les catégories $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$ et $\mathcal{C}_{\mathbb{T}'}^{\text{reg}}$ munies des topologies de Grothendieck $J_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$ et $J_{\mathbb{T}'}^{\text{reg}}$.

Les définitions de $J_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$ et $J_{\mathbb{T}'}^{\text{reg}}$ rentrent dans le cadre de la définition générale suivante :

Définition II.19. –

Soit \mathcal{C} une catégorie régulière.

- (i) On dit qu'un morphisme $a \rightarrow b$ de \mathcal{C} est couvrant si son image est le sous-objet total b de b .
- (ii) On appelle topologie régulière de \mathcal{C} , et on note $J_{\mathcal{C}}^{\text{reg}}$, la topologie de Grothendieck pour laquelle un crible est couvrant si et seulement si il contient au moins un morphisme couvrant. □

Or on a le lemme général :

Lemme II.20 (Johnstone, [SE], remarque D3.3.10). –

Soient \mathcal{C} une catégorie régulière et \mathcal{C}^{eff} son effectivisation.

Alors le topos des faisceaux sur \mathcal{C}^{eff} muni de sa topologie régulière est équivalent à celui des faisceaux sur \mathcal{C} muni de sa topologie régulière. □

Il résulte de ce lemme que si les catégories \mathcal{C}_T et $\mathcal{C}_{T'}$ sont équivalentes, il en est de même des topos $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ et $\mathcal{E}_{\mathbb{T}'}$.

D'autre part, on a aussi le lemme général :

Lemme II.21(Johnstone, [SE], remarque D3.3.10). –

Soient \mathcal{C} une catégorie régulière, $J_{\mathbb{T}}^{\text{reg}}$ sa topologie régulière et $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}^{\text{reg}}$ son topos associé.

Alors :

(i) La topologie $J_{\mathcal{C}}^{\text{reg}}$ est “sous-canonique”. Autrement dit, le foncteur canonique

$$\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{C}}^{\text{reg}}$$

(composé du foncteur de Yoneda et du foncteur de faisceautisation) est pleinement fidèle.

(ii) De plus, ce foncteur $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{C}}^{\text{reg}}$ définit une équivalence de l'effectivisation

$$\mathcal{C}^{\text{eff}}$$

sur la sous-catégorie pleine du topos $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}^{\text{reg}}$ constituée des objets “supercohérents”.

Explication du terme “supercohérent” :

- Un objet a d'un topos \mathcal{E} est dit “supercompact” si toute famille de morphismes $f_i : a_i \rightarrow a$ telle que $a = \bigcup_i \text{Im}(f_i)$ contient au moins un morphisme f_i tel que $a = \text{Im}(f_i)$.
- Un tel objet a est dit “supercohérent” s'il est supercompact et si, pour tout morphisme $b \rightarrow a$ d'un objet supercompact b de \mathcal{E} vers a , le produit fibré $b \times_a b$ est encore supercompact.

□

Il résulte de ce lemme que toute équivalence entre les topos classifiants $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ et $\mathcal{E}_{\mathbb{T}'}$ induit une équivalence entre les catégories $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ et $\mathcal{C}_{\mathbb{T}'}$. Cette dernière est nécessairement une équivalence de catégories abéliennes puisque la structure additive d'une catégorie abélienne est entièrement induite par sa structure catégorique.

Considérons enfin le cas où $D = D'$ et $R = R'$.

Il est évident que si les deux théories \mathbb{T} et \mathbb{T}' sont identiques, les deux catégories abéliennes R -linéaires $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ et $\mathcal{C}_{\mathbb{T}'}$ s'identifient ainsi que leurs représentations $D \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ et $D \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{T}'}$.

Réciproquement, si $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ et $\mathcal{C}_{\mathbb{T}'}$ sont équivalentes avec leurs structures R -linéaires et leurs représentations de D , les théories \mathbb{T} et \mathbb{T}' sont identiques puisque deux sous-objets quelconques V et V' d'un produit d'objets

$$V_1 \times \dots \times V_n$$

dans $\mathcal{C}_{\mathbb{T}} \cong \mathcal{C}_{\mathbb{T}'}$ vérifient la relation

$$V \subseteq V'$$

si et seulement si il en est ainsi de leurs images dans $R\text{-mod}$ par les foncteurs exacts et fidèles

$$F_{\mathbb{T}} : \mathcal{C}_{\mathbb{T}} \rightarrow R\text{-mod} \quad \text{ou} \quad F_{\mathbb{T}'} : \mathcal{C}_{\mathbb{T}'} \rightarrow R\text{-mod}.$$

III. Quelques questions

1 Une question sur les catégories triangulées de Vœvodsky

Fixons un anneau R de coefficients, supposé commutatif et unitaire.

On considère d'abord en toute généralité une petite catégorie additive et R -linéaire A .

La catégorie additive R -linéaire $C^b(A)$ des complexes de chaînes bornés de A a pour objets les complexes bornés X_\bullet de A

$$\dots \rightarrow X_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} X_n \xrightarrow{\partial_n} X_{n-1} \rightarrow \dots$$

et pour morphismes $X_\bullet \xrightarrow{h_\bullet} Y_\bullet$ les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & X_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & X_n & \xrightarrow{\partial_n} & X_{n-1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow h_{n+1} & & \downarrow h_n & & \downarrow h_{n-1} & & \\ \dots & \longrightarrow & Y_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & Y_n & \xrightarrow{\partial_n} & Y_{n-1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Tout morphisme $X_\bullet \xrightarrow{h_\bullet} Y_\bullet$ de $C^b(A)$ a un cône

$$\text{Cône}(X_\bullet \rightarrow Y_\bullet)$$

qui est défini comme le complexe borné

$$\dots \longrightarrow X_n \oplus Y_{n+1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\partial_n & 0 \\ h_n & \partial_{n+1} \end{pmatrix}} X_{n-1} \oplus Y_n \longrightarrow \dots$$

et qui définit un triangle

$$X_\bullet \rightarrow Y_\bullet \rightarrow \text{Cône}(X_\bullet \rightarrow Y_\bullet) \rightarrow X_\bullet[1].$$

On dit qu'un morphisme $X_\bullet \xrightarrow{h_\bullet} Y_\bullet$ de $C^b(A)$ est homotope à 0 s'il existe une suite de morphismes de A

$$h'_n : X_n \rightarrow Y_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

telle que

$$h_n = h'_{n-1} \circ \partial_n + \partial_{n+1} \circ h'_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

On dit que deux morphismes $X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ de $C^b(A)$ sont homotopes si leur différence est homotope à 0.

Cela permet de définir la catégorie triangulée R -linéaire $K^b(A)$ des complexes bornés de A à homotopie près : ses objets sont ceux de $C^b(A)$, ses morphismes sont les classes d'équivalence de morphismes de $C^b(A)$ pour la relation d'homotopie et ses triangles distingués sont ceux isomorphes aux triangles de $C^b(A)$ de la forme

$$X_\bullet \rightarrow Y_\bullet \rightarrow \text{Cône}(X_\bullet \rightarrow Y_\bullet) \rightarrow X_\bullet[1].$$

On connaît la construction générale suivante :

Lemme III.1. –

Soit D_1 une catégorie triangulée R -linéaire.

Soit Q une sous-catégorie “épaisse” de D_1 c’est-à-dire une sous-catégorie pleine de D_1 telle que

- l’objet 0 est dans Q ,
- tout facteur direct d’un objet de Q est dans Q ,
- pour tout triangle distingué de D_1

$$X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$$
dont deux des trois sommets X, Y, Z sont dans Q , le troisième est aussi dans Q .

Soit $D_2 = D_1/Q$ la catégorie dont les objets sont ceux de D_1 et les morphismes sont définis par la formule

$$\mathrm{Hom}_{D_2}(X, Y) = \varinjlim_{X' \rightarrow X} \mathrm{Hom}_{D_1}(X', Y)$$

où $X' \rightarrow X$ parcourt la catégorie des morphismes de D_1 de but X qui s’inscrivent dans un triangle distingué

$$X' \rightarrow X \rightarrow Z \rightarrow X'[1]$$

tel que Z soit dans Q .

Alors la catégorie $D_2 = D_1/Q$ est une catégorie triangulée R -linéaire appelée la catégorie quotient de D_1 par Q .

Le foncteur canonique

$$D_1 \rightarrow D_2 = D_1/Q$$

est un foncteur triangulé R -linéaire. Il envoie un objet X de D_1 sur l’objet 0 de D_2 si et seulement si X est dans Q . □

En particulier, toute sous-catégorie épaisse Q de $K^b(A)$ définit une catégorie triangulée R -linéaire

$$D = K^b(A)/Q$$

quotient de $K^b(A)$ par Q .

Dans cette situation, nous allons maintenant nous servir du théorème I.10 pour construire une catégorie abélienne R -linéaire \mathcal{C} munie d’un foncteur triangulé R -linéaire

$$D \rightarrow D(\mathcal{C})$$

de la catégorie triangulée quotient $D = K^b(A)/Q$ vers la catégorie dérivée (non bornée) de \mathcal{C} .

Pour cela, définissons un carquois E de la manière suivante :

Les objets de E sont les paires (X_\bullet, p) constituées d’un objet X_\bullet de $C^b(A)$ et d’un entier $p \in \mathbb{Z}$. Ces objets sont les éléments d’un ensemble puisque la catégorie A a été supposée petite.

Les flèches de E sont

- d’une part une flèche $(X_\bullet, p) \rightarrow (Y_\bullet, p)$ pour chaque morphisme $X_\bullet \rightarrow Y_\bullet$ de $C^b(A)$ et chaque entier $p \in \mathbb{Z}$,

- d'autre part une flèche $(X_\bullet, p) \rightarrow (X_\bullet, p-1)$ pour chaque objet X_\bullet de $C^b(A)$ et chaque entier $p \in \mathbb{Z}$.

Puis définissons une représentation de ce carquois

$$T : E \rightarrow R\text{-mod}$$

de la manière suivante :

Pour tout objet (X_\bullet, p) de E , on pose

$$T(X_\bullet, p) = T_p(X_\bullet) = \bigoplus_{Y_\bullet} \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_A(Y_n, X_{n+p})$$

où Y_\bullet décrit l'ensemble des objets de $C^b(A)$.

Pour tout morphisme $X_\bullet \rightarrow X'_\bullet$ de $C^b(A)$ et tout $p \in \mathbb{Z}$, l'image par T de la flèche $(X_\bullet, p) \rightarrow (X'_\bullet, p)$ de E est la somme sur Y_\bullet et $n \in \mathbb{Z}$ des homomorphismes

$$\text{Hom}_A(Y_n, X_{n+p}) \rightarrow \text{Hom}_A(Y_n, X'_{n+p})$$

définis par la composition avec $X_{n+p} \rightarrow X'_{n+p}$.

Enfin, pour tout objet X_\bullet de $C^b(A)$ et tout $p \in \mathbb{Z}$, l'image par T de la flèche $(X_\bullet, p) \rightarrow (X_\bullet, p-1)$ de E est la somme sur Y_\bullet des homomorphismes

$$\begin{aligned} \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_A(Y_n, X_{n+p}) &\rightarrow \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_A(Y_n, X_{n+p-1}) \\ (h_n)_{n \in \mathbb{Z}} &\mapsto (\partial_{n+p} \circ h_n - (-1)^p h_{n-1} \circ \partial_n)_{n \in \mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

On observe que, pour tout objet X_\bullet de $C^b(A)$, la suite $T_\bullet(X_\bullet)$ constituée des $T_p(X_\bullet)$, $p \in \mathbb{Z}$, reliés par les flèches $T_p(X_\bullet) \rightarrow T_{p-1}(X_\bullet)$ est un complexe non borné de chaînes de R -modules dont les sous-quotients d'homologie s'identifient aux

$$\bigoplus_{Y_\bullet} \text{Hom}_{K^b(A)}(Y_\bullet, X_\bullet[-p]), \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Le théorème I.10 de Caramello appliqué à la représentation

$$T : E \rightarrow R\text{-mod}$$

permet de factoriser celle-ci en une représentation

$$\tilde{T} : E \rightarrow \mathcal{C}_T$$

dans une catégorie abélienne R -linéaire universelle \mathcal{C}_T munie d'un foncteur exact et fidèle

$$F_T : \mathcal{C}_T \rightarrow R\text{-mod}.$$

La représentation \tilde{T} associe à tout objet X_\bullet de $C^b(A)$ une suite d'objets $\tilde{T}_p(X_\bullet)$ de \mathcal{C}_T reliés par des flèches $\tilde{T}_p(X_\bullet) \rightarrow \tilde{T}_{p-1}(X_\bullet)$ qui en font un complexe de chaînes non borné $\tilde{T}_\bullet(X_\bullet)$ dans \mathcal{C}_T . De plus, elle définit un foncteur R -linéaire qui transforme le cône de tout morphisme en le cône du morphisme image

$$\begin{aligned} \tilde{T} : C^b(A) &\rightarrow C(\mathcal{C}_T) \\ X_\bullet &\mapsto \tilde{T}_\bullet(X_\bullet). \end{aligned}$$

Si deux flèches de $C^b(A)$ sont homotopes, il en est de même de leurs images dans $C(\mathcal{C}_T)$ donc on a encore un foncteur triangulé R -linéaire

$$\tilde{T} : K^b(A) \rightarrow K(\mathcal{C}_T)$$

vers la catégorie $K(\mathcal{C}_T)$ des complexes non bornés de \mathcal{C}_T à homotopie près.

Si Q est une sous-catégorie épaisse de $K^b(A)$ et $D = K^b(A)/Q$ la catégorie triangulée quotient, on voudrait quotienter la catégorie abélienne \mathcal{C}_T en une catégorie abélienne quotient \mathcal{C}_Q telle que le foncteur composé

$$K^b(A) \rightarrow K(\mathcal{C}_T) \rightarrow K(\mathcal{C}_Q) \rightarrow D(\mathcal{C}_Q)$$

se factorise en

$$D \rightarrow D(\mathcal{C}_Q).$$

Or on connaît la construction générale suivante qui est parallèle à celle du lemme III.1 :

Lemme III.2. –

Soit \mathcal{C}_1 une catégorie abélienne R -linéaire.

Soit Q une sous-catégorie “épaisse” de \mathcal{C}_1 c’est-à-dire une sous-catégorie pleine de \mathcal{C}_1 telle que

- $$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ l'objet } 0 \text{ est dans } Q, \\ \bullet \text{ pour toute suite exacte courte de } \mathcal{C}_1 \\ \qquad \qquad \qquad 0 \rightarrow M_1 \rightarrow M \rightarrow M_2 \rightarrow 0, \\ \bullet \text{ l'objet } M \text{ est dans } Q \text{ si et seulement si les objets } M_1 \text{ et } M_2 \text{ le sont.} \end{array} \right.$$

Soit $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1/Q$ la catégorie dont les objets sont ceux de \mathcal{C}_1 et les morphismes sont définis par les formules

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(M, N) = \varinjlim_{M', N'} \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(M', N/N')$$

où la limite inductive est prise sur les sous-objets

$$M' \hookrightarrow M, \quad N' \hookrightarrow N,$$

tels que M/M' et N/N' soient des objets de Q .

Alors la catégorie $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1/Q$ est une catégorie abélienne R -linéaire appelée la catégorie quotient de \mathcal{C}_1 par Q .

Le foncteur R -linéaire canonique

$$\mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1/Q$$

est exact. Il envoie un objet M de \mathcal{C}_1 sur l'objet 0 de \mathcal{C}_2 si et seulement si M est dans Q .

□

Revenons au foncteur R -linéaire triangulé canonique

$$K^b(A) \rightarrow K(\mathcal{C}_T).$$

Si Q est une sous-catégorie épaisse de $K^b(A)$, on peut considérer la sous-catégorie épaisse Q' de \mathcal{C}_T engendrée par les sous-quotients d'homologie des complexes de $K(\mathcal{C}_T)$ qui sont les images des objets de Q .

Puis on peut considérer la catégorie abélienne R -linéaire quotient

$$\mathcal{C}_Q = \mathcal{C}_T/Q'.$$

Le foncteur R -linéaire exact canonique

$$\mathcal{C}_T \rightarrow \mathcal{C}_Q$$

induit un foncteur

$$K(\mathcal{C}_T) \rightarrow K(\mathcal{C}_Q) \rightarrow D(\mathcal{C}_Q)$$

vers la catégorie dérivée $D(\mathcal{C}_Q)$.

Comme $D(\mathcal{C}_Q)$ est la catégorie triangulée quotient de $K(\mathcal{C}_Q)$ par la sous-catégorie épaisse formée des complexes dont tous les sous-quotients d'homologie sont 0, on a un foncteur triangulé R -linéaire induit

$$D = K^b(A)/Q \rightarrow D(\mathcal{C}_Q).$$

On peut poser la question générale suivante :

Question III.3. –

Soient A une petite catégorie additive R -linéaire et Q une sous-catégorie épaisse de la catégorie triangulée R -linéaire $K^b(A)$.

Considérons la catégorie abélienne R -linéaire \mathcal{C}_T canoniquement associée à $C^b(A)$ selon le procédé ci-dessus, et son quotient \mathcal{C}_Q associé à Q , avec les foncteurs triangulés R -linéaires canoniques :

$$\begin{array}{ccc} K^b(A) & \longrightarrow & K(\mathcal{C}_T) \\ \downarrow & & \downarrow \\ & & K(\mathcal{C}_Q) \\ \downarrow & & \downarrow \\ D = K^b(A)/Q & \longrightarrow & D(\mathcal{C}_Q) \end{array}$$

Alors on peut demander :

- (1) Sous quelles conditions le foncteur

$$D = K^b(A)/Q \rightarrow D(\mathcal{C}_Q)$$

est-il pleinement fidèle ?

- (2) Peut-on caractériser son image ?

□

Nous nous intéressons à cette question car elle s'applique à la catégorie triangulée $D = DM_{\text{gm}}^{\text{eff}}(K)$ des "motifs mixtes géométriques effectifs" à coefficients dans R sur un corps de base K .

Voevodsky a en effet construit $DM_{\text{gm}}^{\text{eff}}(K)$ comme un quotient $K^b(A)/Q$ de la catégorie $K^b(A)$ des complexes bornés à homotopie près de la catégorie additive $A = c\mathcal{L}(K)$ des correspondances finies à coefficients dans R entre schémas lisses de type fini sur K .

Celle-ci est définie comme suit :

Définition III.4. –

Soient K un corps de base et $\mathcal{L}(K)$ la catégorie des schémas séparés lisses de type fini sur K .

Ayant choisi une fois pour toutes un anneau R de coefficients, on note $A = c\mathcal{L}(K)$ la catégorie additive R -linéaire dont :

- (1) Les objets sont ceux de $\mathcal{L}(K)$, c'est-à-dire les schémas séparés lisses de type fini sur K .

(2) Les morphismes $X \rightarrow Y$ sont les éléments du R -module libre

$$c(X, Y)$$

engendré par les sous-schémas intègres

$$W \hookrightarrow X \times_K Y$$

tels que

- la projection $W \rightarrow X$ est un morphisme fini,
- l'image de W dans X est une composante connexe de X .

Remarque :

En associant à tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ de $\mathcal{L}(K)$ la somme des composantes connexes de son graphe $\Gamma_f \hookrightarrow X \times_K Y$, on définit un foncteur

$$\mathcal{L}(K) \rightarrow c\mathcal{L}(K) = A.$$

□

Partant de la catégorie additive R -linéaire $A = c\mathcal{L}(K)$, on construit les catégories triangulées R -linéaires $C^b(A)$ et $K^b(A)$. Puis on construit le quotient suivant de $K^b(A)$:

Définition III.5 (Vœvodsky). –

Prenant $A = c\mathcal{L}(K)$, soit Q la sous-catégorie épaisse de la catégorie triangulée $K^b(A)$ engendrée par

- les “complexes d’homotopie” définis comme les complexes de longueur 2

$$X \times_K \mathbb{A}^1 \rightarrow X$$

associés à tout schéma X lisse de type fini sur K et au morphisme de structure $\mathbb{A}^1 \rightarrow \text{Spec}(K)$ de la droite affine \mathbb{A}^1 ,

- les “complexes de Mayer-Vietoris” définis comme les complexes de longueur 3

$$U \cap V \xrightarrow{(i_U, -i_V)} U \oplus V \xrightarrow{(j_U, j_V)} X$$

associés aux recouvrements de tout schéma X lisse de type fini sur K par deux ouverts U, V et aux carrés cartésiens induits :

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \xrightarrow{i_U} & U \\ i_V \downarrow & & \downarrow j_U \\ V & \xrightarrow{j_V} & X \end{array}$$

Alors la catégorie quotient

$$DM_{\text{gm}}^{\text{eff}}(K) = K^b(A)/Q$$

est appelée la catégorie triangulée R -linéaire des “motifs mixtes géométriques effectifs” sur K .

La question III.3 se pose en particulier dans le cas de $A = c\mathcal{L}(K)$ et $D = DM_{\text{gm}}^{\text{eff}}(K)$:

Question III.6. –

Soient $A = c\mathcal{L}(K)$ et Q la sous-catégorie épaisse de $K^b(A)$ engendrée comme ci-dessus par les complexes d'homotopie et les complexes de Mayer-Vietoris.

Considérons la catégorie abélienne R -linéaire \mathcal{C}_T canoniquement associée à $C^b(A)$ et son quotient \mathcal{C}_Q associé à Q , avec les foncteurs triangulés R -linéaires canoniques :

$$\begin{array}{ccc} K^b(A) & \longrightarrow & K(\mathcal{C}_T) \\ \downarrow & & \downarrow \\ & & K(\mathcal{C}_Q) \\ \downarrow & & \downarrow \\ DM_{\text{gm}}^{\text{eff}}(K) = D = K^b(A)/Q & \longrightarrow & D(\mathcal{C}_Q) \end{array}$$

Alors on peut demander :

(1) Le foncteur

$$D = K^b(A)/Q \rightarrow D(\mathcal{C}_Q)$$

est-il pleinement fidèle ?

(2) Peut-on caractériser son image ?

Le produit $(X, X') \mapsto X \times_K X'$ des schémas lisses de type fini sur K et celui

$$(W, W') \mapsto W \times_K W'$$

des correspondances finies munit $A = c\mathcal{L}(K)$ d'une structure tensorielle notée \otimes . Cette structure comprend des familles d'isomorphismes compatibles

$$X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X \quad (\text{commutativité})$$

et

$$(X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{\sim} X \otimes (Y \otimes Z) \quad (\text{associativité}).$$

Elle admet pour objet unité $1 = \text{Spec}(K)$ au sens que celui-ci est muni d'une famille d'isomorphismes compatibles

$$X \otimes 1 \xrightarrow{\sim} X \xrightarrow{\sim} 1 \otimes X.$$

Le morphisme de structure $X \rightarrow \text{Spec}(K)$ de tout objet X peut donc s'écrire

$$X \rightarrow 1.$$

On observe que la structure tensorielle \otimes de $A = c\mathcal{L}(K)$ induit des structures tensorielles \otimes sur les catégories triangulées $C^b(A)$, $K^b(A)$ et $D = K^b(A)/Q = DM_{\text{gm}}^{\text{eff}}(K)$ respectées par les foncteurs

$$C^b(A) \rightarrow K^b(A) \rightarrow D.$$

Les structures tensorielles de $C^b(A)$, $K^b(A)$ et D permettent de définir les “motifs de Tate” comme les puissances tensorielles du “motif de Lefschetz” :

Définition III.7. –

- (i) Si $A = c\mathcal{L}(K)$, on appelle “motif de Lefschetz” et on note

$$\mathbb{Z}(1)$$

l’objet de $C^b(A)$, $K^b(A)$ ou $D = DM_{\text{gm}}^{\text{eff}}(K) = K^b(A)/Q$ défini par le complexe

$$\mathbb{P}^1 \rightarrow 1 = \text{Spec}(K)$$

concentré en degrés -2 et -3 .

- (ii) On appelle “motifs de Tate” les puissances tensorielles

$$\mathbb{Z}(n) = \mathbb{Z}(1)^{\otimes n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

du motif de Lefschetz dans $C^b(A)$, $K^b(A)$ ou D .

Remarque :

Comme le morphisme de structure

$$\mathbb{P}^1 \rightarrow 1 = \text{Spec}(K)$$

possède une section, on a dans $C^b(A)$, $K^b(A)$ ou D

$$\mathbb{P}^1 = 1 \oplus \mathbb{Z}(1)[2] = \mathbb{Z}(0) \oplus \mathbb{Z}(1)[2].$$

□

On a :

Théorème III.8 (Vœvodsky). –

Supposons que le corps de base K est parfait.

- (i) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le foncteur

$$X \mapsto X \otimes \mathbb{Z}(n) = X(n)$$

de tensorisation par $\mathbb{Z}(n)$ dans $D = DM_{\text{gm}}^{\text{eff}}(K)$ est pleinement fidèle.

- (ii) Par conséquent, si $D^\# = DM_{\text{gm}}(K)$ désigne la catégorie triangulée R -linéaire tensorielle déduite de D en inversant formellement les foncteurs

$$X \mapsto X(n), \quad n \in \mathbb{N},$$

alors le foncteur canonique

$$DM_{\text{gm}}^{\text{eff}}(K) = D \rightarrow D^\# = DM_{\text{gm}}(K)$$

est pleinement fidèle.

Remarques :

- (i) La catégorie $D^\# = DM_{\text{gm}}(K)$ est appelée catégorie triangulée des motifs mixtes géométriques sur K .
(ii) On note $X \mapsto X(-n) = X \otimes \mathbb{Z}(-n)$, $n \in \mathbb{N}$, les inverses des foncteurs $X \mapsto X(n)$ dans $D^\#$.

□

On peut maintenant énoncer le résultat fondamental qui relie les catégories $D = DM_{\text{gm}}^{\text{eff}}(K)$ et $D^\# = DM_{\text{gm}}(K)$ à la cohomologie motivique :

Théorème III.9 (Vœvodsky). –

Supposons toujours que K est parfait.

Alors, pour tout objet X de $\mathcal{L}(K)$ et tous entiers $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, le R -module

$$\begin{aligned} \text{Hom}_D(X, \mathbb{Z}(q)[p]) &= \text{Hom}_{D^\#}(X, \mathbb{Z}(q)[p]) \\ &= \text{Hom}_{D^\#}(X(-q)[-p], 1) \end{aligned}$$

s'identifie au groupe de Chow supérieur de Bloch

$$\text{CH}^q(X, 2q - p)_R.$$

En particulier, il ne peut être non nul que si

$$p \leq 2q.$$

□

Si donc la réponse à la question III.6(i) était affirmative, les foncteurs de cohomologie motivique

$$X \mapsto \text{CH}^q(X, 2q - p)_R, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N},$$

se calculeraient aussi comme des groupes de morphismes

$$\text{Hom}_{D(\mathcal{C}_Q)}(X, \mathbb{Z}(q)[p])$$

dans la catégorie dérivée $D(\mathcal{C}_Q)$.

D'autre part, L. Barbieri-Viale et O. Gabber m'ont indépendamment fait remarquer ce qui suit :

Si K est un sous-corps de \mathbb{C} , on peut considérer la catégorie abélienne \mathbb{Q} -linéaire \mathcal{M} des “motifs mixtes de Nori”, telle qu'elle est construite dans la définition I.2 à partir du carquois de Nori des triplets (X, Y, i) et de sa représentation de Betti.

Nori lui-même a montré qu'il existe un foncteur \mathbb{Q} -linéaire triangulé canonique de $DM_{\text{gm}}^{\text{eff}}(K)$ vers la catégorie dérivée $D^b(\mathcal{M})$ et conjecturé que c'est une équivalence.

Cela pose la question du rapport entre les catégories dérivées $D^b(\mathcal{M})$ et $D(\mathcal{C}_Q)$, voire entre les catégories abéliennes \mathbb{Q} -linéaires \mathcal{M} et \mathcal{C}_Q .

2 À la recherche de topos motiviques

Comme au paragraphe I.3, on se place sur un corps de base K de caractéristique arbitraire et on considère un carquois D construit à partir de la catégorie des schémas séparés de type fini sur K .

En général, les objets de D sont constitués d'une partie géométrique et d'un indice. La partie géométrique consiste en un schéma ou un diagramme de schémas d'un certain type. L'indice comprend un entier qui sert à désigner le degré du groupe de cohomologie ou d'homologie que l'on veut associer à cet objet.

Le carquois D peut être en particulier celui de Nori, c'est-à-dire consister en les triplets

$$(Y \hookrightarrow X, i)$$

constitués d'un schéma X séparé de type fini sur K , d'un sous-schéma fermé Y de X et d'un entier $i \in \mathbb{N}$. Ainsi, le carquois de Nori permet d'indexer les groupes d'homologie ou de cohomologie des schémas X ainsi que ceux des cônes associés aux homomorphismes induits par les immersions fermées $Y \hookrightarrow X$.

Il est un peu arbitraire de ne considérer que les cônes associés à de tels morphismes. Il serait plus naturel, partant de la catégorie des schémas de type fini sur K , de la compléter de telle façon que toute flèche définisse un cône. C'est ce que réalisent les catégories triangulées $DM_{\text{gm}}^{\text{eff}}(K)$ ou $DM_{\text{gm}}(K)$ à coefficients dans un corps fixé tel que \mathbb{Q} .

Pour permettre de faire varier le corps des coefficients, O. Caramello propose la construction inductive suivante :

Théorème III.10 ([MT], §7). –

On part de la catégorie des schémas séparés de type fini sur K .

(i) *On définit d'abord la signature Σ_0 qui consiste en*

- *une sorte pour formaliser le corps k des coefficients,*
- *une sorte pour chaque paire (X, n) constituée d'un objet X de la catégorie de départ et d'un entier $n \in \mathbb{Z}$,*
- *des symboles de fonctions pour formaliser la structure d'anneau de k et la structure k -linéaire de chaque sorte (X, n) ,*
- *un symbole de fonction $(X, n) \rightarrow (Y, n)$ associé à tout morphisme de schémas $Y \rightarrow X$ et tout entier $n \in \mathbb{Z}$.*

Puis on définit la théorie géométrique \mathbb{T}_0 de signature Σ_0 dont les axiomes sont

- *les séquents qui assurent que la sorte k est un corps de caractéristique 0, les sortes (X, n) des espaces vectoriels sur k , et les symboles de fonctions $(X, n) \rightarrow (Y, n)$ des homomorphismes k -linéaires,*
- *les séquents de functorialité.*

Soit alors \mathcal{C}_0 la "catégorie syntactique algébrique" de \mathbb{T}_0 , dont les objets sont les formules de la forme

$$\top \quad \text{ou} \quad \vec{x} = 0 \quad (\text{dans n'importe quel contexte } \vec{x})$$

et les flèches sont les formules démontrablement fonctionnelles de la forme

$$\varphi(\vec{x}) = \vec{y} \quad (\text{où } \varphi \text{ est un terme de } \Sigma_0 \text{ dans un contexte } \vec{x}).$$

La catégorie \mathcal{C}_0 est munie du foncteur de translation $a \mapsto a[1]$ qui envoie chaque (X, n) sur $(X, n + 1)$, de son inverse $a \mapsto a[-1]$ et de la famille de triangles distingués

$$a \xrightarrow{\text{id}_a} a \longrightarrow 0 \longrightarrow a[1].$$

(ii) *Pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, supposons construites inductivement une théorie géométrique \mathbb{T}_ℓ de signature Σ_ℓ et sa "catégorie syntactique algébrique" \mathcal{C}_ℓ munie d'un foncteur de translation $a \mapsto a[1]$, de l'inverse $a \mapsto a[-1]$ de celui-ci et d'une famille de triangles distingués*

$$a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow a[1].$$

On définit une nouvelle signature $\Sigma_{\ell+1}$ en ajoutant à la signature Σ_ℓ

- une sorte $[a \rightarrow b]$ pour chaque flèche $a \rightarrow b$ de \mathcal{C}_ℓ , qui servira à désigner le cône de cette flèche,
 - deux symboles de fonctions $b \rightarrow [a \rightarrow b]$ et $[a \rightarrow b] \rightarrow a[1]$ qui définiront un triangle distingué

$$a \longrightarrow b \longrightarrow [a \rightarrow b] \longrightarrow a[1]$$
 - des symboles de fonctions pour définir la structure k -linéaire de chaque nouvelle sorte $[a \rightarrow b]$,
 - un symbole de fonction

$$[a \rightarrow b] \longrightarrow [a' \rightarrow b']$$
- pour chaque carré de \mathcal{C}_ℓ
- $$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & b \\ \downarrow & & \downarrow \\ a' & \longrightarrow & b' \end{array}$$
- démontrablement commutatif dans \mathbb{T}_ℓ .

Puis on définit $\mathbb{T}_{\ell+1}$ comme la théorie géométrique de signature $\Sigma_{\ell+1}$ dont les axiomes sont ceux de \mathbb{T}_ℓ plus

- les séquents de k -linéarité des nouvelles sortes et des nouveaux symboles de fonctions,
- les séquents qui assurent que la construction des nouveaux cônes et des nouveaux triangles distingués est fonctorielle.

Enfin, on définit $\mathcal{C}_{\ell+1}$ comme la “catégorie syntactique algébrique” de \mathbb{T}_ℓ .

(iii) On définit la théorie géométrique $\mathbb{T}_\infty = \varinjlim_{\ell \in \mathbb{N}} \mathbb{T}_\ell$ de signature $\Sigma_\infty = \varinjlim_{\ell \in \mathbb{N}} \Sigma_\ell$ et sa “catégorie syntactique algébrique”

$$\mathcal{C}_\infty = \varinjlim_{\ell \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_\ell$$

qui est une catégorie triangulée intérieurement k -linéaire.

On appelle \mathcal{C}_∞ la “catégorie triangulée syntactique” des schémas de type fini sur K .

(iv) Si $D = \mathcal{C}_\infty$, on appelle représentation de D à coefficients dans un corps k , notée abusivement

$$T : D \rightarrow k\text{-vect},$$

tout modèle ensembliste de la théorie \mathbb{T}_∞ dont le corps associé est k et qui transforme tout triangle distingué de D en une suite exacte longue de k -espaces vectoriels.

Remarque :

On vérifie que tous les foncteurs cohomologiques “classiques” (Betti, ℓ -adiques, p -adique, ...) définissent des représentations de \mathcal{C}_∞ au sens de (iv). □

Fixons donc un carquois D construit à partir de la catégorie des schémas de type fini sur K . Par exemple le carquois de Nori, l’une des deux catégories triangulées $DM_{\text{gm}}^{\text{eff}}(K)$ ou $DM_{\text{gm}}(K)$ à coefficients dans \mathbb{Q} ou la catégorie triangulée syntactique \mathcal{C}_∞ .

On voudrait classifier les représentations à coefficients dans des corps k de caractéristique 0

$$T : D \rightarrow k\text{-vect}$$

qui sont “cohomologiques” en un sens qu’il s’agit de préciser.

Autrement dit, on voudrait définir et étudier :

- une théorie géométrique (du premier ordre) \mathbb{T} dont les axiomes soient les propriétés communes aux foncteurs cohomologiques, avec donc la première contrainte que les foncteurs cohomologiques classiques (Betti, ℓ -adiques, p -adique, ...) doivent satisfaire ces axiomes,
- son topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ ou, ce qui revient au même, son 2-foncteur des modèles

$$\mathcal{E} \mapsto \mathbb{T}\text{-mod}(\mathcal{E}) \cong \text{Mor}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_{\mathbb{T}}),$$

- en particulier la catégorie de ses modèles ensemblistes

$$\mathbb{T}\text{-mod}(\text{Ens})$$

équivalente à celle des points de $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ c’est-à-dire des morphismes géométriques

$$\text{Ens} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{T}}.$$

On pourrait appeler “topos motivique” un topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ qui admet comme points les foncteurs cohomologiques classiques et qui possède des propriétés assez fortes pour imposer à ses points de partager les propriétés communes attendues dans le cadre de la théorie conjecturale des motifs.

Comme un même topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ peut être associé à des théories \mathbb{T} différentes – c’est le phénomène des équivalences de Morita entre théories –, on note que différentes manières \mathbb{T} d’axiomatiser la notion de foncteur cohomologique pourraient définir des “topos motiviques” $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ équivalents.

Les théorèmes I.10 et I.11 et leur corollaire I.13 offrent une première possibilité de définition conjecturale :

Définition conjecturale III.11. –

Ayant fixé le corps de base K et le carquois D de schémas de type fini sur K , supposons que l’on sache que tous les foncteurs cohomologiques classiques (Betti, ℓ -adiques, p -adique, ...)

$$T : D \rightarrow \mathbb{Q}\text{-vect}$$

ont la même théorie régulière associée \mathbb{T} .

Alors le topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ de \mathbb{T} peut être appelé un “topos motivique”.

Sa sous-catégorie pleine \mathcal{M} constituée des objets “supercohérents” est abélienne et \mathbb{Q} -linéaire et peut-être appelée catégorie des motifs.

Les foncteurs cohomologiques classiques $T : D \rightarrow \mathbb{Q}\text{-vect}$ s’interprètent en effet comme des points de $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ dont les foncteurs fibres associés induisent les foncteurs exacts et fidèles de factorisation

$$F_T : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{Q}\text{-vect}.$$

Remarque :

Lorsque K est de caractéristique 0, les hypothèses de cette définition sont connues : elles résultent des théorèmes de comparaison d’Artin. □

Cependant, cette définition conjecturale a en particulier le défaut de ne pas prendre en compte la variété des corps de coefficients naturels des différents foncteurs cohomologiques classiques.

De ce fait, elle ignore complètement les questions de dimension, que la logique régulière n'est d'ailleurs pas assez fine pour formuler. Or on s'attend à ce que les espaces de cohomologie et leurs sous-espaces définis géométriquement via les représentations cohomologiques classiques $T : D \rightarrow k\text{-vect}$ aient toujours mêmes dimensions sur leurs corps de coefficients naturels k .

On s'attend aussi à ce que la catégorie \mathcal{M} des motifs soit munie d'une structure de catégorie tannakienne rigide respectée par les foncteurs de réalisation vers les représentations cohomologiques T .

On voudrait donc pouvoir définir des topos motiviques dont les points vérifient automatiquement les propriétés suivantes :

- les dimensions sur les corps de coefficients des points de tous les espaces et sous-espaces définis géométriquement ne dépendent pas des points,
- les foncteurs fibres associés aux différents points sont fidèles et ils commutent à la formation du produit tensoriel \otimes ainsi qu'à celle des espaces duaux.

Pour ces raisons, O. Caramello propose de rechercher des topos motiviques $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ qui soient "atomiques" et "à deux valeurs" aux sens suivants :

Définition III.12. –

- (i) (Barr, Diaconescu) *Un topos est dit "atomique" si chacun de ses objets est somme disjointe d'atomes, c'est-à-dire d'objets non vides qui ne possèdent aucun sous-objet propre.*
- (ii) *Un topos est dit "à deux valeurs" si son objet final est un atome.*

Remarques :

- (i) Une théorie géométrique [resp. du premier ordre] \mathbb{T} est dite "complète" si elle est non contradictoire et si toute formule géométrique [resp. du premier ordre] φ dans sa signature qui est "fermée" (c'est-à-dire sans variable libre) est démontrablement vraie ($\mathbb{T} \vdash \varphi$) ou démontrablement fausse ($\varphi \vdash \perp$) dans \mathbb{T} .

On prouve qu'une théorie géométrique \mathbb{T} est complète si et seulement si son topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ est à deux valeurs.

De plus, si $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ est atomique, la complétude géométrique de \mathbb{T} équivaut à sa complétude au premier ordre tout entière.

Or la notion de dimension des espaces (et sous-espaces définis géométriquement) est exprimable par des formules fermées du premier ordre mais pas par des formules fermées géométriques.

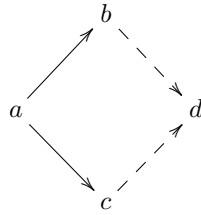
- (ii) Si $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ est un topos atomique à deux valeurs, le foncteur fibre associé à tout point de $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ est conservatif et il commute aux limites finies et aux colimites arbitraires. En particulier, sa restriction aux objets \mathbb{Q} -linéaires de $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ est exacte et fidèle, et elle respecte le produit tensoriel \otimes . La commutation avec le passage au dual de sa restriction à la catégorie des motifs n'est a priori pas automatique et devrait résulter de propriétés de finitude des objets de cette catégorie.
- (iii) Si $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ est atomique à deux valeurs, la théorie \mathbb{T} est maximale au sens qu'il n'est possible de lui ajouter aucun axiome non démontrable dans \mathbb{T} sans introduire de contradiction.
- (iv) Pour tout groupe topologique G , le topos "galoisien" $\text{Cont}(G)$ des ensembles discrets munis d'une action continue de G est atomique à deux valeurs. Le cadre des topos atomiques à deux valeurs contient donc celui des catégories galoisiennes de Grothendieck.
- (v) Tout topos atomique à deux valeurs peut être reconstruit à partir de n'importe lequel de ses points.

□

Voici un procédé général de construction de topos atomiques :

Proposition III.13 (Barr, Diaconescu). –

Soit \mathcal{C} une catégorie qui satisfait la “propriété d’amalgamation” (PA) au sens que toute paire de flèches d’un objet a de \mathcal{C} vers deux objets b et c se complète en un carré commutatif :



Si \mathcal{C}^{op} est munie de la topologie “atomique” J^{at} pour laquelle tout crible non vide est couvrant, le topos associé $\text{Sh}(\mathcal{C}^{\text{op}}, J^{\text{at}})$ est atomique. □

Et voici un procédé général de construction de topos atomiques à deux valeurs :

Théorème III.14 (Caramello, [FC] et [TGT]). –

Soit \mathbb{S} une théorie géométrique du premier ordre qui est “de type préfaisceau”, c’est-à-dire dont le topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{S}}$ est équivalent à un topos de préfaisceaux.

Soit \mathcal{C} la catégorie des modèles ensemblistes M de \mathbb{S} qui sont “finiment présentables” (c’est-à-dire tels que le foncteur $\text{Hom}(M, \bullet)$ commute aux colimites filtrées arbitraires).

Alors :

- (i) Le topos $\mathcal{E}_{\mathbb{S}}$ est équivalent au topos $[\mathcal{C}, \text{Ens}]$ des préfaisceaux sur \mathcal{C} .
- (ii) Si \mathcal{C} satisfait (PA), le topos $\text{Sh}(\mathcal{C}^{\text{op}}, J^{\text{at}})$ est atomique.
- (iii) Dans ces conditions, le topos atomique

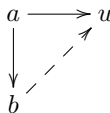
$$\text{Sh}(\mathcal{C}^{\text{op}}, J^{\text{at}})$$

est à deux valeurs si et seulement si \mathcal{C} vérifie la propriété de plongement conjoint (PPC) au sens que deux objets arbitraires a et b de \mathcal{C} s’envoient vers un troisième

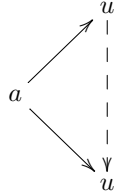


(ce qui résulte de (PA) si \mathcal{C} a un objet initial).

- (iv) Si \mathcal{C} satisfait (PA), les points de $\text{Sh}(\mathcal{C}^{\text{op}}, J^{\text{at}})$ s’identifient aux modèles ensemblistes u de \mathbb{S} qui sont “ \mathcal{C} -homogènes” au sens que, pour $a, b \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, toute paire de flèches de a vers b et u se complète en un triangle commutatif :



- (v) Si \mathcal{C} satisfait (PA) et (PPC), et si u est un point de $\text{Sh}(\mathcal{C}^{\text{op}}, J^{\text{at}})$ qui est \mathcal{C} -ultrahomogène au sens que toute paire de flèches $a \rightrightarrows u$ de source $a \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ est échangée par un automorphisme de u



et \mathcal{C} -universel au sens que tout objet $a \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ s'envoie dans u

$$a \dashrightarrow u$$

(ce qui résulte de l'homogénéité si \mathcal{C} a un objet initial), alors on a

$$\text{Sh}(\mathcal{C}^{\text{op}}, J^{\text{at}}) \cong \text{Cont}(G)$$

où G désigne le groupe topologique des automorphismes de u .

Remarques :

- (i) Réciproquement, tout topos atomique à deux valeurs peut être construit de cette manière-là.
- (ii) On voit que si \mathbb{T} est une théorie géométrique du premier ordre telle que

$$\mathcal{E}_{\mathbb{T}} \cong \text{Sh}(\mathcal{C}^{\text{op}}, J^{\text{at}}),$$

alors la théorie \mathbb{T} est complète si et seulement si la catégorie \mathcal{C} satisfait (PPC).

C'est un exemple de "pont topos-théorique", c'est-à-dire de mise en relation de deux propriétés totalement différentes à travers une équivalence de topos.

Le phénomène des "ponts topos-théoriques" en ce sens-là est très général et O. Caramello le place au centre de ses travaux de développement et d'application de la théorie des topos classifiants, comme elle l'explique dans son texte programmatique [UMTT].

- (iii) La théorie \mathbb{S} des extensions algébriques d'un corps K rentre dans le cadre de ce théorème : elle est de type préfaisceau, ses modèles finiment présentables sont les extensions finies de K et ses modèles homogènes sont les clôtures algébriques de K .
- (iv) Un autre exemple est fourni par la théorie \mathbb{S} des "objets décidables" constituée d'une unique sorte et de la relation $x \neq y$: elle est de type préfaisceau, la catégorie de ses modèles finiment présentables est celle des ensembles finis et de leurs injections, et ses modèles homogènes sont les ensembles infinis. Ceux-ci sont également ultrahomogènes et universels. Contrairement à l'exemple précédent, ils ne sont pas isomorphes entre eux et leurs groupes d'automorphismes G ne sont pas isomorphes, mais ils définissent tous des représentations $\text{Cont}(G)$ du même topos, appelé topos de Schanuel.
- (v) La notion de modèle homogène est intéressante (presque) seulement si toutes les flèches de \mathcal{C} sont des monomorphismes, comme d'ailleurs dans les deux exemples précédents.

□

On cherche donc à dessiner un cadre de cette forme pour classer les représentations cohomologiques T de D .

Cela signifie rechercher non pas seulement une mais deux théories \mathbb{S} et \mathbb{T} :

Question III.15. –

On cherche :

- (i) Une théorie \mathbb{S} de type préfaisceau dont les modèles finiment présentables sont les sous-objets finiment engendrés des représentations cohomologiques classiques

$$T : D \rightarrow k\text{-vect}.$$

Concrètement, ces sous-objets finiment engendrés consistent en les collections de sous-espaces vectoriels

$$S(d) \subset T(d), \quad d \in \text{Ob}(D),$$

sur un sous-corps de k finiment engendré sur \mathbb{Q} , qui sont envoyés les uns dans les autres par les flèches de D , et qui sont globalement engendrés par un nombre fini d'éléments.

Les flèches de la catégorie \mathcal{C} formée de ces sous-objets sont les collections de flèches injectives

$$S(d) \hookrightarrow S'(d), \quad d \in \text{Ob}(D),$$

compatibles avec toutes les structures.

On attend que la catégorie \mathcal{C} , qui a un objet initial, possède la propriété (PA) et donc aussi (PPC).

- (ii) Une théorie \mathbb{T} déduite de \mathbb{S} comme théorie de ses modèles homogènes.

Cela signifie que le topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ de \mathbb{T} doit être équivalent au topos atomique à deux valeurs

$$\text{Sh}(\mathcal{C}^{\text{op}}, J^{\text{at}}).$$

On attend que les représentations cohomologiques classiques

$$T : D \rightarrow k\text{-vect}$$

soient des points de $\mathcal{E}_{\mathbb{T}} \cong \text{Sh}(\mathcal{C}^{\text{op}}, J^{\text{at}})$, autrement dit des modèles ensemblistes de \mathbb{T} ou des modèles homogènes de \mathbb{S} .

Remarques :

- (i) Les sous-objets d'une représentation cohomologique classique

$$T : D \rightarrow k\text{-vect}$$

héritent de leurs propriétés algébriques, en particulier de leurs propriétés de complexes de la forme $g \circ f = 0$, mais pas de leurs propriétés d'exactitude.

- (ii) Si les représentations cohomologiques classiques

$$T : D \rightarrow k\text{-vect}$$

pouvaient en effet être interprétées comme des modèles homogènes d'une même théorie \mathbb{S} de type préfaisceau, l'ensemble des sous-objets finiment engendrés de chaque T serait nécessairement indépendant de T et la catégorie \mathcal{C} pourrait être définie à partir de n'importe quelle T .

- (iii) Le corps k des coefficients de n'importe quel modèle homogène

$$T : D \rightarrow k\text{-vect}$$

est nécessairement un modèle homogène de la théorie des corps de caractéristique 0, c'est-à-dire un corps algébriquement clos de degré de transcendance infini sur \mathbb{Q} .

Cela impose de considérer les foncteurs cohomologiques classiques comme à coefficients dans $\mathbb{C}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell, \overline{\mathbb{Q}}_p, \dots$

□

Nous allons passer des modèles finiment présentables d'une théorie à leurs présentations au sens suivant :

Définition III.16. –

Un modèle ensembliste M d'une théorie \mathbb{S} est dit *présenté* par une formule $\varphi(\vec{x})$ de contexte $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ si et seulement si se donner une flèche de M dans un autre modèle ensembliste N équivaut à se donner n éléments y_1, \dots, y_n de N tels que la formule

$$\varphi(y_1, \dots, y_n)$$

soit valide dans N . □

Cette définition étant posée, on a :

Théorème III.17 (Caramello, [SC]). –

Soit \mathbb{S} une théorie de type préfaisceau.

Dans la catégorie syntactique $\mathcal{C}_{\mathbb{S}}$ de \mathbb{S} , appelons objets “irréductibles” les objets dont les seuls cribles couvrants sont ceux qui comprennent l'identité.

Alors la catégorie \mathcal{C} des modèles finiment présentables de \mathbb{S} est équivalente à l'opposée de la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}_{\mathbb{S}}$ constituée des objets irréductibles.

Cette équivalence consiste à présenter chaque objet de \mathcal{C} au moyen d'une formule irréductible, et à associer à chaque telle formule un objet de \mathcal{C} qu'elle présente. □

On propose une définition de théorie \mathbb{S} susceptible de répondre à la question III.15(i) :

Définition de travail III.18 ([MT], §5.1 et 5.2). –

Partons d'une représentation cohomologique classique

$$T_0 : D \rightarrow k\text{-vect.}$$

(i) Soit $\Sigma_{\mathbb{I}}$ la “signature de base” qui a

- une sorte pour le corps de coefficients k et pour chaque objet d de D ,
- des symboles de fonctions pour la structure d'anneau de k et la structure k -linéaire de chaque autre sorte,
- un symbole de fonction pour chaque flèche de D ,
- des symboles de relation $= 0$ et $\neq 0$ dans chaque sorte.

(ii) Soit \mathbb{I} la “théorie de base” de signature $\Sigma_{\mathbb{I}}$ qui a pour axiomes

- les séquents qui assurent que k est un corps de caractéristique 0 et les autres sortes des k -espaces vectoriels,
- les séquents qui définissent les relations $\neq 0$

$$\top \vdash_x x = 0 \vee x \neq 0, \quad x = 0 \wedge x \neq 0 \vdash_x \perp,$$

- les séquents entre formules φ, ψ de conjonctions finitaires d'égalités entre termes

$$\varphi \vdash_{\vec{x}} \psi$$

qui sont vérifiés dans T_0 .

(iii) Soit $\Sigma_{\mathbb{S}}$ la signature déduite de $\Sigma_{\mathbb{I}}$ en ajoutant un symbole de relation

$$R_S$$

pour tout contexte \vec{x} (modulo renommation des variables) et tout sous-ensemble S de l'ensemble des termes en \vec{x} .

(iv) Soit \mathbb{S} la théorie de signature $\Sigma_{\mathbb{S}}$ déduite de \mathbb{I} en ajoutant

- les axiomes qui donnent à chaque relation R_S le sens que les termes dans S sont 0 et les termes dans le complémentaire de S sont $\neq 0$

$$\begin{cases} R_S \vdash_{\vec{x}} s(\vec{x}) = 0 & \text{et} & \top \vdash_{\vec{x}} R_S \vee s(\vec{x}) \neq 0 & \text{pour tout } s \in S, \\ R_S \vdash_{\vec{x}} s(\vec{x}) \neq 0 & \text{et} & \top \vdash_{\vec{x}} R_S \vee s(\vec{x}) = 0 & \text{pour tout } s \notin S, \end{cases}$$

- les axiomes dans tous les contextes \vec{x}

$$\top \vdash_{\vec{x}} \bigvee_S R_S(\vec{x}).$$

Remarques :

- Les théories \mathbb{I} et \mathbb{S} ne devraient pas dépendre du choix de la représentation cohomologique classique $T_0 : D \rightarrow k_0\text{-vect}$.
- Si l'on veut que la théorie \mathbb{S} puisse être de type préfaisceau, il est nécessaire d'ajouter à la signature de base $\Sigma_{\mathbb{I}}$ les symboles de relation R_S . En effet, il y a en général une infinité de termes si bien que les formules R_S équivalent à des conjonctions infinitaires. Celles-ci ne sont pas admises dans la logique géométrique et doivent donc être ajoutées à la signature.

□

On a alors :

Proposition III.19 ([MT], §5.2 et 5.3). –

- La théorie \mathbb{S} définie ci-dessus est de type préfaisceau.
- La catégorie \mathcal{C} de ses modèles finiment présentables a un objet initial et possède la propriété (PA) donc aussi la propriété (PPC).
Ses flèches sont des monomorphismes.
- Pour toutes formules irréductibles R_S et $R_{S'}$ de \mathbb{S} , les flèches

$$R_S(\vec{x}) \rightarrow R_{S'}(\vec{y})$$

sont définies par des uplets de termes $\vec{w}(\vec{x}) = \vec{y}$.

De plus, S' est alors uniquement déterminé par S et \vec{w} de la manière suivante

$$\begin{aligned} S' &= \left\{ s \mid R_S(\vec{x}) \vdash_{\vec{x}} s(\vec{w}(\vec{x})) = 0 \text{ est démontrable dans } \mathbb{S} \right\} \\ &= \{ s \mid s(\vec{w}(\vec{x})) \in S \}. \end{aligned}$$

Remarques :

- (i) La représentation T_0 qui a servi à définir \mathbb{S} est un modèle ensembliste de \mathbb{S} . Ses sous-objets finiment engendrés sont des objets de \mathcal{C} , mais il n'est pas sûr a priori que tout objet de \mathcal{C} s'envoie dans T_0 , autrement dit que T_0 soit \mathcal{C} -universel.
- (ii) Dans la situation de (iii), il est naturel de noter

$$S' = \vec{w}_*(S).$$

□

On peut alors exhiber une théorie \mathbb{T} dont les modèles sont les modèles homogènes de \mathbb{S} :

Théorème III.20 ([MT], §6, théorème 6.1). –

Avec les notations de la définition III.18 et de la proposition III.19 ci-dessus, le topos atomique à deux valeurs $\text{Sh}(\mathcal{C}^{\text{op}}, J^{\text{at}})$ est équivalent au topos classifiant $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ de la théorie \mathbb{T} ainsi définie :

- \mathbb{T} a la même signature que \mathbb{S} ,
- \mathbb{T} a pour axiomes ceux de \mathbb{S} plus les séquents

$$R_{\vec{w}_*(S)}(\vec{y}) \vdash_{\vec{y}} (\exists \vec{x}) R_S(\vec{x}) \wedge \vec{y} = \vec{w}(\vec{x})$$

associés à toute formule irréductible R_S (autrement dit, à tout sous-ensemble S tel que $R_S(\vec{x}) \vdash_{\vec{x}} \perp$ n'est pas démontrable dans \mathbb{S}) et à tout uplet de termes $\vec{w}(\vec{x})$ de but \vec{y} .

□

Répondre à la question III.15 signifierait montrer que toutes les représentations cohomologiques classiques

$$T : D \rightarrow k\text{-vect}$$

sont des modèles \mathcal{C} -homogènes de \mathbb{S} , c'est-à-dire satisfont les axiomes de la théorie \mathbb{T} du théorème III.20.

Or ce n'est même pas connu a priori pour la représentation cohomologique

$$T_0 : D \rightarrow k_0\text{-vect}$$

qui a servi à définir \mathbb{S} et \mathcal{C} .

On doit donc s'intéresser d'abord à la question suivante sur les foncteurs cohomologiques considérés isolément :

Question III.21. –

Considérons une représentation cohomologique classique

$$T_0 : D \rightarrow k_0\text{-vect}.$$

Soit \mathbb{S} la théorie de type préfaisceau déduite de T_0 .

Soit \mathcal{C} la catégorie des modèles finiment présentables de \mathbb{S} .

Alors est-il vrai ou faux que T_0 soit un modèle \mathcal{C} -homogène de \mathbb{S} , autrement dit qu'il vérifie les axiomes de la théorie \mathbb{T} du théorème III.20 ?

□

Le corollaire suivant du théorème III.20 montre que les modèles homogènes de \mathbb{S} vérifient en particulier toutes les propriétés de suites exactes que vérifie la représentation cohomologique T_0 . Autrement dit, les axiomes de la théorie \mathbb{T} sont plus forts que les propriétés usuelles d'exactitude des foncteurs cohomologiques. Ainsi, la question III.21 revient à demander si les foncteurs cohomologiques classiques vérifient en fait des propriétés d'exactitude plus fines que les propriétés usuelles.

Corollaire III.22 ([MT], §6.2, théorème 6.4). –

Soient f et g deux flèches de D (ou plus généralement des termes dans la signature de \mathbb{S}) telles que le composé

$$g \circ f$$

a un sens et est démontrablement égal à 0 dans \mathbb{S} .

(i) Supposons que pour tous termes w_1, \dots, w_n et t de même source que g et tels que le séquent

$$w_1(f(x)) = 0 \wedge \dots \wedge w_n(f(x)) = 0 \vdash_x t(f(x)) = 0$$

soit démontrable dans \mathbb{S} , le séquent

$$g(y) = 0 \wedge w_1(y) = 0 \wedge \dots \wedge w_n(y) = 0 \vdash_y t(y) = 0$$

est aussi démontrable dans \mathbb{S} .

Alors le séquent

$$g(y) = 0 \vdash_y (\exists x) f(x) = y$$

est démontrable dans la théorie \mathbb{T} des modèles homogènes de \mathbb{S} .

(ii) L'hypothèse et donc aussi la conclusion de (i) sont vérifiées si la représentation $T_0 : D \rightarrow k_0\text{-vect}$ qui a servi à définir \mathbb{S} et \mathcal{C} satisfait la propriété d'exactitude

$$\text{Im}(T_0(f)) = \text{Ker}(T_0(g)).$$

Remarque :

La propriété de (ii) est automatique si D est le carquois de Nori [resp. une catégorie triangulée], que f et g sont deux morphismes qui se suivent dans un triangle distingué de D , et que T est un foncteur cohomologique classique sur D .

Esquisse de démonstration :

On part de la formule $g(y) = 0$.

On la recouvre par toutes les formules irréductibles de la forme

$$R_T(y)$$

où T décrit les sous-ensembles de termes en y qui contiennent g et tels que R_T soit non contradictoire dans la théorie \mathbb{S} . (Sémantiquement, cela correspond à considérer tous les éléments du noyau de g et à présenter par une formule irréductible le sous-objet engendré par chacun d'eux.)

Étant donné un tel T , on note S l'ensemble des termes w de même source que f tels qu'il existe dans \mathbb{S} un séquent démontrable de la forme

$$w_1(f(x)) = 0 \wedge \dots \wedge w_n(f(x)) = 0 \vdash_x w(x) = 0 \quad \text{avec} \quad w_1, \dots, w_n \in T.$$

On vérifie que R_S n'est pas contradictoire dans la théorie \mathbb{S} et que

$$T = f_*(S).$$

On conclut en appliquant le théorème III.20. □

Terminons par une remarque de conclusion qui illustre la puissance du théorème III.14.

Supposons que l'on sache démontrer que :

- | | |
|---|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| { | <ul style="list-style-type: none"> • toute représentation cohomologique classique |
| | $T_0 : D \rightarrow k_0\text{-vect}$ |
| | est un modèle homogène de la théorie \mathbb{S} de type préfaisceau qu'elle définit à la manière de III.18, |
| | <ul style="list-style-type: none"> • cette théorie \mathbb{S} est indépendante du choix de T_0. |

Alors toutes ces représentations cohomologiques classiques apparaîtraient comme des points d'un même topos atomique à deux valeurs.

Par conséquent, toute formule fermée du premier ordre vérifiée par l'une de ces représentations serait automatiquement vérifiée par toutes les autres.

En particulier, les dimensions sur leurs corps de coefficients respectifs des espaces de cohomologie (et des sous-espaces propres définissables géométriquement) qui composent ces représentations T_0 seraient indépendantes de T_0 .

C'est d'autant plus frappant que la définition de \mathbb{S} à partir de T_0 est purement algébrique et ignore totalement les questions de dimension : ses axiomes dépendant de T_0 sont en effet des séquents

$$\varphi \xrightarrow{\vec{x}} \psi$$

entre formules φ, ψ qui sont des conjonctions finitaires d'égalités entre termes.

Références bibliographiques principales :

- [SCNM] L. BARBIERI-VIALE, O. CARMELLO et L. LAFFORGUE, “Syntactic categories for Nori motives”, arXiv:1506.06113
- [TTB] O. CARMELLO, “Topos-theoretic background”, Prépublication IHES/M/14/27 (à paraître comme chapitres I et II d’une monographie de recherche intitulée “Lattices of theories”, Oxford University Press).
- [MT] O. CARMELLO, “Motivic toposes : a research programme”, arXiv:1507.06271
- [LMM] M. NORI, “Lectures on mixed motives”, notes prises par N. Fakhruddin, TIFR, Bombay (2000).
- [TTN] A. Bruguières, “On a tannakian theorem due to Nori”, Prépublication disponible à : <http://www.math.univ-montp2.fr/~bruguieres/recherche.html> (2004).
- [NMKP] A. HUBER et S. MÜLLER-STACH, “On the relation between Nori Motives and Kontsevich periods”, arXiv:1105.0865
- [N1M] J. AYOUB et L. BARBIERI-VIALE, “Nori 1-motives”, Math. Annalen 361, n° 1-2, p. 367-402 (2015), arXiv:1206.5923

Références bibliographiques complémentaires :

- [OMDQ] M. KONTSEVICH, “Operads and motives in deformation quantization”, Letters in Math. Physics, vol. 48, p. 35-72 (1999).
- [IM] Yves André, “Une introduction aux motifs”, Panoramas et synthèses 17, SMF (2004).
- [FC] O. CARMELLO, “Fraissé’s construction from a topos-theoretic perspective”, Logica Universalis 8(2), p. 261-281 (2014).
- [TGT] O. CARMELLO, “Topological Galois theory”, arXiv:1301.0300
- [EFFPT] O. CARMELLO, “Extension of flat functors and presheaf type theories”, arXiv:1404.4610, (à paraître comme partie de la monographie “Lattices of theories”, Oxford University Press).
- [UMTT] O. CARMELLO, “The unification of mathematics via topos-theory”, arXiv:1006.3930
- [SC] O. CARMELLO, “Syntactic characterizations of properties of classifying toposes”, Theory and Applications of Categories, vol. 26, N° 6, p. 176-193 (2012).
- [SE] P.T. JOHNSTONE, “Sketches of an elephant : a topos theory compendium”, volumes 1 et 2, Oxford University Press (2002).
- [REC] A. CARBONI et E. VITALE, “Regular and exact completions”, Journal of Pure and Applied Algebra 125, 1-3, p. 79-116 (1998).