

« Ars combinatoria » chez GIAN-CARLO ROTA ou le triomphe du symbolisme

par Pierre CARTIER

1. Introduction : la vision de Rota

Croiser Gian-Carlo Rota était rencontrer un gentleman, et qui plus est, un gentleman italien. Sa prestance, sa culture, sa finesse, sa séduction paisible, étaient remarquables. Il est vraiment l'inventeur d'une nouvelle science : la combinatoire, et plus précisément la combinatoire algébrique. Jusque-là, la combinatoire n'était essentiellement qu'une collection de questions disparates, dont la solution, parfois très ingénieuse, ne laissait pas apparaître de méthode. La partie la plus élaborée était reléguée dans l'enseignement élémentaire, et concernait surtout les coefficients binomiaux, avec une motivation provenant du calcul des probabilités (l'« ars conjectandi » de J. Bernoulli).

Il fut bien sûr de ceux qui introduisirent le langage ensembliste dans l'exposé (ensembles finis, pour l'essentiel), ce qui apporte clarté et précision. Mais surtout, il comprit le bénéfice que pouvaient apporter les méthodes de l'algèbre « moderne », surtout l'algèbre universelle, c'est-à-dire les constructions par générateurs et relations. Il s'arrête avant le pas suivant vers l'abstraction fourni par les catégories, mais il sait reconnaître l'intérêt de l'algèbre homologique, la première étape. On trouvera une vue synthétique de son œuvre mathématique dans la synthèse¹ publiée de son vivant. Dans cet exposé, je décrirai certains des thèmes étudiés, où l'algèbre homologique apparaît en filigrane, et en particulier les méthodes d'additivité (en parallèle avec l'introduction par Grothendieck de ses fameux groupes), la formule d'inversion de Möbius-Rota, et les matroïdes en géométrie. Je décrirai la *stratégie* mise en œuvre sous sa forme mathématique, étant trop béotien pour faire une analyse philosophique (n'oublions pas que Rota fut tout autant philosophe que mathématicien). Dans cette stratégie très structurée, je vois quatre moments :

1) Déceler une *idée simple*, par exemple la notion d'additivité que je décrirai plus loin.

2) En voir le *caractère universel*, la capacité de déceler un grand nombre d'applications où cette idée apparaisse *naturellement*.

3) Trouver une *expression algébrique* adéquate : une formule simple, mais permettant de multiples variations.

4) Une *représentation géométrique* adéquate.

¹ Gian-Carlo Rota on combinatorics (introductory papers and commentaries), par J.P.S. King (éditeur) Birkhäuser, 1995.

Idéalement, on devrait pouvoir, à chaque étape, mettre face à face une formule algébrique et une figure géométrique. De cette sorte, le développement algébrique ne ferait que calquer très fidèlement une série de constructions géométriques, et celles-ci donneraient une évidence visuelle, un contenu intuitif, « anschaulich » disait Hilbert.

2. L'additivité

Ce thème fédérateur est développé dans ses Leçons, un petit fascicule où il est question de probabilité, distinct du cours magistral qui leur est consacré.

L'additivité est une idée très simple, traduction ensembliste de la notion d'addition. Qu'est-ce que l'addition ? Additionner 3 (pommes) et 4 (pommes) c'est les réunir pour avoir $3 + 4 = 7$ (pommes). Plus abstraitement, on part de deux collections finies, disons A et B que l'on réunit. Le problème est le calcul du nombre d'éléments, appelé plus savamment le *cardinal*, d'un ensemble X , noté ici $|X|$ pour garder l'analogie avec d'autres exemples.

La règle est simple : si A et B ne se rencontrent pas (n'ont pas de partie commune), le cardinal de la réunion de A et B est la somme des cardinaux de A et B . De manière formelle, on a l'assertion :

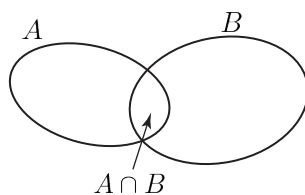
$$\text{Si } A \text{ et } B \text{ ne se rencontrent pas, on a } |A \cup B| = |A| + |B|.$$

Le défaut de cette formulation est qu'elle mélange une clause : si A et B ... et une formule. Pour avoir une pure formule, on peut s'inspirer de G. Boole et écrire

$$(1) \quad |A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|.$$

Pour avoir un système complet, il faut introduire le zéro sous la forme $|\emptyset| = 0$: un ensemble vide, sans élément, a 0 éléments (invention du zéro).

Pour établir la formule (1), on remarque d'abord que si A et B ne se rencontrent pas, on a $A \cap B = \emptyset$ et le terme $|A \cap B|$ disparaît, de sorte que l'on retrouve $|A \cup B| = |A| + |B|$. Pour prouver le cas général, il y a deux cas à considérer : si un élément appartient à A et à B , il est compté une fois dans chacun des termes de (1), et l'on a bien $1 + 1 = 1 + 1 = 2$. Sinon, supposons qu'on ait un élément de A qui n'appartient pas à B ; il comptera une fois dans $|A \cup B|$ et dans $|A|$ et ne contribue rien à $|A \cap B|$ et à $|B|$; on a bien $1 + 0 = 1 + 0 = 1$. Le cas d'un élément de B qui n'est pas dans A est similaire. Ce calcul correspond à la représentation géométrique donnée par les diagrammes de Venn



Cette figure montre bien que certains éléments comptent deux fois, et d'autres une seule fois.

3. Trois exemples

Voyons de plus près les incarnations de la formule (1) :

3.1. Calcul des probabilités

La plus simple, considérée déjà chez G. Boole, concerne le *calcul des probabilités*. Dans ce cas, A et B représentent des événements, ou des relations, des possibilités, et $|A|$ désigne la probabilité de A (le fait que cette probabilité soit comprise entre 0 et 1 ne joue aucun rôle dans le calcul algébrique). Boole sait parfaitement que le signe $\cup$ correspond au « ou » non exclusif, et le signe $\cap$ correspond au « et » logique. Passer du calcul ensembliste aux probabilités est donc une transformation purement syntaxique.

Commençons par remarquer que la préoccupation fondamentale pour G. Boole n'est pas la logique, mais le *calcul des opérateurs*. Pour lui, un prédicat est un opérateur de sélection : le prédicat « vert » par exemple sélectionne les objets verts dans l'univers du discours. Remarque analogue pour le prédicat « rouge », et le prédicat « vert » et « rouge » correspond à l'application successive de la sélection des verts, puis des rouges dans le résultat. Pour lui, l'opération d'intersection correspond à un produit d'opérateurs $A \cdot B$. Mais il n'est pas évident que ce produit soit symétrique, c'est-à-dire que l'on ait $A \cdot B = B \cdot A$ (autrement dit, $A \cap B$ est égal à $B \cap A$).

Boole a écrit deux livres, l'un sur les *équations différentielles*, l'autre sur les *équations aux différences* (finies). Le point de vue des opérateurs y est prédominant. Avec un brin de prémonition, on peut dire qu'il voyait ce que sont les notions modernes d'*algèbre de Weyl* et de *D-modules*. Ici le *point de vue symbolique* (bien dans la tradition de l'algèbre britannique) domine, et inspirera Rota. Voici un commentaire très audacieux et éclairant de Boole. Il s'occupe de résoudre une équation différentielle du type hypergéométrique, et introduit pour ceci deux opérateurs² x et δ satisfaisant à la relation $\delta x = x(\delta + 1)$. Son calcul le conduit à une équation symbolique entre x et δ , dont il doit chercher la solution. Il remarque alors que dans son ouvrage précédent sur les équations aux différences, il a rencontré la même équation symbolique avec des interprétations

² L'opérateur x est la multiplication par x transformant la fonction $f(x)$ en $xf(x)$ et δ est défini par $\delta(f(x)) = x \frac{df(x)}{dx}$.

différentes des opérateurs $\mathfrak{x}$ et δ . L'algèbre étant la même, on peut transférer la solution connue dans le nouveau cadre, sans recommencer. Voici le commentaire final, très typique de l'esprit symbolique, et reproduit librement ici.

« Je sais bien que Monsieur de Laplace a des transformations qui effectuent la traduction³, mais il est inutile de les appliquer, puisque le format algébrique est le même des deux côtés. »

3.2. Aires et volumes

Passons du discret au continu. Au lieu de considérer des ensembles finis et de compter un à un les éléments, passons à l'étude de l'aire dans le plan, et du volume dans l'espace. Nous désignerons donc par la même notation l'aire $|A|$ d'un ensemble plan, et le volume $|A|$ d'un ensemble à trois dimensions. La formule de base est encore la formule d'additivité (1), mais la démonstration doit être aménagée. Montrons que la formule (1) est conséquence du cas particulier $|A \cup B| = |A| + |B|$ si A et B sont disjoints. Avec A et B généraux

A se décompose en $A \cap B$ et C , d'où $|A| = |A \cap B| + |C|$

B se décompose en $A \cap B$ et D , d'où $|B| = |A \cap B| + |D|$

donc $A \cup B$ se décompose en $A \cap B, C, D$ d'où

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A \cap B| + |C| + |D| \\ &= |A \cap B| + (|A| - |A \cap B|) + (|B| - |A \cap B|) \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| \end{aligned}$$

Q.E.D.

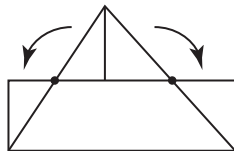
Le premier problème est la délimitation de la classe des ensembles à mesurer. La classe la plus élémentaire est constituée des aires polygonales dans le plan, et des volumes polyédraux dans l'espace. Mais très tôt, on s'est intéressé au cercle, à la sphère, aux cylindres, aux cônes, et la première percée est due à Archimède, qui invente pour l'occasion l'axiome d'Archimède, un fondement du calcul des limites. C'est vers la fin du 19^e siècle que sera définie la classe des ensembles mesurables, à la suite des efforts de Otto Stolz, Gustav von Harnack, Giuseppe Peano, Camille Jordan, et enfin Emile Borel, et au prix d'une sophistication croissante des méthodes d'Analyse et de Topologie ensembliste. Les ensembles mesurables au sens de Jordan (1893) sont dits aujourd'hui quarrables ; dans le plan leur mesure est obtenue au moyen d'une suite de quadrillages de plus en plus fins (chacun d'eux est obtenu à partir du précédent en découpant chaque carré en 4). Pourvu que la frontière de l'ensemble A soit négligeable⁴, il suffit de prendre

³ La transformation de Laplace.

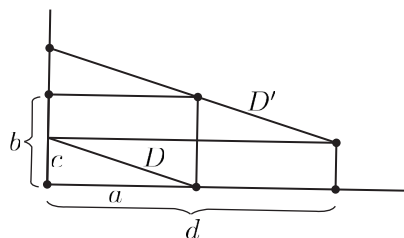
⁴ Cette notion a été introduite par Poincaré dans ses recherches sur la théorie ergodique : un ensemble qu'on peut enfermer dans une réunion finie (ou dénombrable) de carrés dont la somme des aires est arbitrairement petite.

la limite des sommes des aires des carrés contenus dans A , appartenant au n -ième quadrillage.

L'aire ainsi définie est additive, et aussi invariante par déplacements. Tant qu'on se restreint aux ensembles polygonaux, on construit par des moyens purement algébriques l'aire supposée additive et invariante par déplacements. Deux constructions sont cruciales : ramener un triangle à un rectangle (figure)



puis comparer deux rectangles par une application du théorème de Thalès, mentionnée par Descartes,



$$a \cdot b = c \cdot d \text{ si les droites } D \text{ et } D' \text{ sont parallèles.}$$

Les figures précédentes sont compréhensibles à un enfant de moins de 10 ans (comme dirait Groucho Marx : « Amenez-moi un enfant de 10 ans »).

Venons-en au 3^e problème de Hilbert (1900). Peut-on faire pour les volumes en dimension 3 ce qui vient d'être décrit pour les aires planes. Le défi est le calcul du volume de la pyramide calculé par Archimède, égal à $\frac{1}{3} A \times h$ où A est l'aire de la base et h la hauteur ; on peut comparer cela à l'aire du triangle $\frac{1}{2} b \times h$ où b est la longueur de la base. Si l'on connaît les rudiments du calcul différentiel et intégral, on dispose de la formule de Dupin, le volume est l'intégrale $\int_0^h A(x) dx$, où $A(x)$ est l'aire de la section à la hauteur x . Dans une pyramide $A(x)$ est l'aire d'un triangle homothétique de la base, donc proportionnel à x^2 et l'intégrale $\int_0^h x^2 dx$ vaut $h^3/3$. De la même manière, dans l'aire du triangle le facteur $\frac{1}{2}$ est égal à l'intégrale $\int_0^1 x dx$.

La réponse au problème de Hilbert est la suivante : cherchons les fonctions $v(P)$ définies pour les polyèdres P et satisfaisant aux hypothèses d'additivité, invariance par déplacements, et nulles sur les polyèdres dégénérés (sans épaisseur). Si l'on y ajoute la loi d'échelle : $v(t \cdot P) = t^3 v(P)$ où $t \cdot P$ est le polyèdre P dilaté dans le rapport t , alors (à normalisation près, choix de l'unité de volume), il y a unicité $v(P)$ est le volume de P .

Par contre, sans la loi d'échelle, M. Dehn a défini un invariant $d(P)$ tel que $d(t \cdot P) = td(P)$. Il est construit à partir des arêtes et des angles entre les deux faces contenant une arête donnée.

On ne peut donc se dispenser de passage à la limite, parfois difficile à faire comprendre à des élèves de lycée. Archimède formule cette limite à l'intérieur du cadre d'Eudoxe, par le calcul eudoxien. Hilbert pensait, à juste titre, qu'on ne peut se passer du passage à la limite. Ce qu'il ignorait, c'est que Bricard, un professeur de lycée, en 1897, avait prouvé qu'on ne peut passer d'un cube à un tétraèdre régulier de même volume par découpage et réassemblage (par utilisation prémonitoire de l'invariant de Dehn).

Naturellement, on peut aussi considérer des polyèdres à plus de 3 dimensions, appelés *polytopes* et se poser le même genre de problème. La dimension 4 se ramène à la dimension 3 par utilisation des quaternions de Hamilton, on sait généraliser l'invariant de Dehn, mais la solution finale n'est pas connue.

3.3. Caractéristiques d'Euler-Poincaré

L'histoire démarre avec Euler vers 1740, même si l'on a retrouvé un texte de Descartes vers 1660, qui contient déjà l'essentiel. Euler considère un polyèdre régulier, avec S_0 sommets, S_1 arêtes et S_2 faces. Il démontre la formule

$$(2) \quad S_0 - S_1 + S_2 = 2.$$

Les deux invariants d'un polyèdre régulier sont le nombre p de côtés de chaque face et le nombre q d'arêtes issues d'un sommet. De la formule (2), par un comptage facile, on déduit l'inégalité $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$ et de là la liste des 5 cas possibles, correspondant aux cinq polyèdres platoniques, se déduit facilement. En fait, la démonstration d'Euler vaut pour tous les polyèdres convexes, et contient en germe la démonstration du théorème de Gauss-Bonnet ; quant à Descartes, il donne deux formules pour des sommes d'angles, mais ne fait pas la comparaison qui donne la formule (2).

Vers 1900, H. Poincaré invente l'*Analysis Situs*, appelée depuis topologie (combinatoire). Il définit des invariants d'un espace X , notés $b_p(X)$ ou b_p , appelés *nombres de Betti*, puis définit la *caractéristique* (d'Euler-Poincaré), par la formule

$$(3) \quad \chi(X) = b_0(X) - b_1(X) + b_2(X) \dots = \sum_{p \geq 0} (-1)^p b_p(X).$$

Rota présente les choses dans sa stratégie de l'additivité, comme suit :

A chaque espace⁵ X , on associe un entier $\chi(X)$, positif ou négatif, satisfaisant aux règles suivantes :

⁵ Je n'entre pas ici dans la définition détaillée de la sorte d'espace envisagé, certains diraient qu'il faut d'abord définir une catégorie adéquate d'espaces.

a) Additivité :

$$(4) \quad \chi(A) + \chi(B) = \chi(A \cup B) + \chi(A \cap B)$$

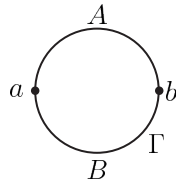
b) Normalisation :

$$(5) \quad \chi(\emptyset) = 0, \quad \chi(C_n) = 1$$

où C_n est un cube (fermé) à n dimensions.

c) Invariance : Deux espaces homéomorphes ont même caractéristique.

Montrons comment calculer la caractéristique d'un cercle. Sur la figure suivante, le cercle Γ (noté aussi $\mathbb{S}^1$) est découpé en deux demi-cercles (fermés) A et B et l'intersection $A \cap B$ se compose de deux points a et b .



Le demi-cercle est homéomorphe à un cube C_1 de dimension 1, et un point est un cube C_0 , d'où

$$\chi(A) = \chi(B) = \chi(a) = \chi(b) = 1.$$

On a donc $\chi(A \cap B) = \chi(a) + \chi(b) = 2$ d'où

$$\chi(\mathbb{S}^1) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B) = 1 + 1 - 2 = 0.$$

On a prouvé que la caractéristique d'un cercle Γ vaut 0. De la même manière, en découpant une sphère $\mathbb{S}^2$ de dimension 2 en deux hémisphères (de caractéristique 1) dont l'intersection est l'équateur du type $\mathbb{S}^1$, donc de caractéristique 0, on a

$$\chi(\mathbb{S}^2) = 1 + 1 - 0 = 2.$$

Notons que la sphère $\mathbb{S}^0$ est définie par l'équation $x^2 = 1$ dans la droite de coordonnée x , donc se compose de deux points : on a $\chi(\mathbb{S}^0) = 2$. En continuant on a le tableau suivant

n	0	1	2	3	4	5
$\chi(\mathbb{S}^n)$	2	0	2	0	2	0

soit la formule

$$(6) \quad \chi(\mathbb{S}^n) = 1 + (-1)^n.$$

On peut raisonner de manière analogue pour un cylindre. On peut aussi remarquer qu'un cylindre est le produit cartésien $C_1 \times \mathbb{S}^1$ d'un « cube » à une dimension par une « sphère » à une dimension. Mais, à notre formulaire, il convient d'ajouter la relation

$$(7) \quad \chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y),$$

donc la caractéristique d'un cylindre est 0. Un cas intéressant, est celui des surfaces de Riemann fermées. Une telle surface s'appelle une sphère à g anses, où l'entier $g = 0, 1, 2 \dots$ s'appelle le *genre* de la surface. Pour ajouter une anse, on commence par faire 2 trous, ce qui retranche 2 à la caractéristique. Ensuite, on recolle un cylindre de caractéristique 0, le recollage ayant lieu le long de deux cercles de caractéristique 0. Par la formule d'additivité, on a diminué la caractéristique de 2. Comme, au départ, la sphère à 0 anse est de caractéristique 2, on conclut qu'une *surface de Riemann de genre g a la caractéristique $2 - 2g$* .

Pour systématiser ces constructions, on remarque d'abord que pour le segment ouvert $I_1 =]0,1[$, on a une partition $C_1 = I_1 \cup \{0\} \cup \{1\}$ et par la formule $\chi(C_1) = 1 = \chi(0) = \chi(1)$, on a $\chi(I_1) = -1$. Comme l'intérieur I_n du cube C_n est le produit cartésien $I_1 \times \dots \times I_1$ (n facteurs), on a $\chi(I_n) = (-1)^n$ (remarquer qu'on a une partition de C_n en I_n et son bord homéomorphe à $\mathbb{S}^{n-1}$, d'où $\chi(C_n) = \chi(I_n) + \chi(\mathbb{S}^{n-1})$ et l'on retrouve la formule (6)). La stratégie générale est de rechercher une partition d'un espace X en cellules, c'est-à-dire en sous-espaces homéomorphes à l'un des I_n . Par l'additivité, s'il y a c_n cellules de dimension n , chacune ayant la caractéristique $(-1)^n$, on a

$$(8) \quad \chi(X) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n c_n.$$

Cas particulier : X est le bord d'un polyèdre, régulier ou non, homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^2$ de caractéristique 2, avec S_n cellules de dimension n et l'on retrouve la formule d'Euler

$$S_0 - S_1 + S_2 = 2 .$$

4. La stratégie « universelle »

L'adjectif « universel » est pris au sens de l'algèbre universelle, ou des problèmes universels. Commençons par l'exemple des probabilités. Si Ω est un ensemble, fini pour fixer les idées, une loi de probabilité sur Ω est une loi qui associe à toute partie A de Ω un nombre $P(A)$ satisfaisant aux propriétés

$$(9) \quad P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B)$$

$$(10) \quad P(\emptyset) = 0$$

$$(11) \quad P(A) \geq 0 \text{ et } P(\Omega) = 1.$$

Une variable aléatoire est une application $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$; elles forment un espace vectoriel $\mathcal{V}$ sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. On définit l'espérance $E[f]$ d'une variable aléatoire par la formule

$$(12) \quad E[f] = \sum_{i=1}^n c_i P(A_i)$$

où $c_1, \dots, c_n$ sont les valeurs prises par f , et A_i l'ensemble des points de Ω où f prend la valeur c_i . Notons I_A la fonction indicatrice de A qui prend la valeur 1 sur A et 0 en dehors de A . L'espérance est une forme linéaire sur $\mathcal{V}$, c'est-à-dire une application linéaire de $\mathcal{V}$ dans $\mathbb{R}$, caractérisée par la formule

$$(13) \quad E[I_A] = P(A) \text{ pour toute partie } A \text{ de } \Omega.$$

Mais il y a mieux : si V est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et si P est une application qui à toute partie A de Ω associe un élément de V en satisfaisant aux relations (9) et (10), alors il existe une unique application linéaire $E : \mathcal{V} \rightarrow V$ telle que $P(A) = E[I_A]$. C'est la propriété « universelle » mentionnée. Autrement dit, on peut décrire ainsi l'espace $\mathcal{V}$: on considère d'abord un espace vectoriel $\mathcal{V}_0$ ayant une base de la forme $\{I_A\}$ indexée par les parties A de Ω , puis le sous-espace $\mathcal{R}$ de $\mathcal{V}_0$ engendré par les « relations »

$$(14) \quad I_A + I_B - I_{A \cup B} - I_{A \cap B} \text{ et } I_\emptyset.$$

Alors $\mathcal{V}$ est l'espace quotient $\mathcal{V}_0 / \mathcal{R}$, défini par les *générateurs* I_A et les *relations* (14).

Cette stratégie s'adapte au cas des aires et des volumes. Appelons polytope dans l'espace à d dimensions la généralisation des polygones ($d = 2$) et polyèdres ($d = 3$). On définit donc un espace vectoriel (sur le corps $\mathbb{R}$) avec des générateurs I_C indexés par les polytopes. Pour les relations, on prend (14) qui exprime l'additivité, mais aussi $I_C - I_{C'}$ s'il existe un déplacement g transformant C ou C' (« invariance par déplacements »). Une variante est obtenue si l'on considère des polytopes munis d'une grandeur *extensive* (masse, énergie, charge électrique), c'est-à-dire respectant la loi d'additivité. On obtient

ainsi un espace vectoriel $\mathcal{P}_d$. Sur cet espace, opèrent naturellement les homothéties h_t de centre 0 et rapport t . On peut prouver que l'espace $\mathcal{P}_d$ est la somme directe

$$\mathcal{P}_d = \mathcal{P}_d^0 \oplus \mathcal{P}_d^1 \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_d^d$$

(décomposition en *poids*) telle que h_t opère par multiplication par t^w sur $\mathcal{P}_d^w$. On peut prouver que $\mathcal{P}_d^d$ est de dimension 1 : ceci signifie que le volume des polytopes est caractérisé par les propriétés suivantes :

- a) Additivité.
- b) Invariance par déplacement $vol(g \cdot C) = vol(C)$.
- c) Homogénéité $vol(h_t C) = t^d vol(C)$.

Pour les petites dimensions, $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_2^0 \oplus \mathcal{P}_2^2$ est entièrement de poids pair, mais $\mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_3^0 \oplus \mathcal{P}_3^1 \oplus \mathcal{P}_3^3$. Bien entendu, $\mathcal{P}_3^0$ et $\mathcal{P}_3^3$ sont de dimension 1 sur $\mathbb{R}$, mais l'existence de l'invariant de Dehn permet de prouver (difficilement) que $\mathcal{P}_3^1$ est le *monstre* $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ (i.e. qu'il est engendré par des symboles $a \otimes b$, avec a, b dans $\mathbb{R}$ et les relations

$$\begin{aligned} (a + a') \otimes b &= a \otimes b + a' \otimes b \\ a \otimes (b + b') &= a \otimes b + a \otimes b' \end{aligned}$$

(c'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ayant une base avec la puissance du continu). On sait aussi que $\mathcal{P}_4 = \mathcal{P}_4^0 \oplus \mathcal{P}_4^2 \oplus \mathcal{P}_4^4$, et peu de chose est connu lorsque $d \geq 5$.

Revenons au 3^e exemple : la caractéristique $\chi(X)$ d'un espace X . Au début de la topologie, d'Euler à Poincaré, on identifie des invariants numériques, qu'on calcule par des méthodes combinatoires. C'est ainsi que Poincaré identifie les nombres de Betti $b_0(X), b_1(X), \dots$ et démontre la formule

$$(15) \quad \chi(X) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k b_k(X)$$

qu'on peut comparer à la formule (8), avec une différence : les nombres c_k dépendent d'une décomposition de l'espace, mais les nombres $b_k(X)$ sont des invariants. Aussi, le nombre $\chi(X)$ défini par (15) est un invariant : le même pour deux espaces homéomorphes, alors que cela n'est pas évident sur la formule (8).

Il faut noter plusieurs va-et-vient dans l'histoire de la Topologie. Si elle fut indéniablement combinatoire à ses débuts, Emmy Noether, dans le grand courant de l'algébrisation des années 1920 (grâce à l'Ecole de Artin, Noether, Hasse, ...), la rend « algébrique » : un *nombre* de Betti $b_k(X)$ n'est autre que la dimension d'un *groupe* $H_k(X)$, dit aussi de Betti. Les identités numériques ne sont que des fantômes de « vraies » relations qui mettent en jeu groupes, anneaux, complexes ... C'est ainsi que j'ai appris la Topologie dans les années 1950, sous la férule de Cartan et Eilenberg. L'étape suivante sera l'utilisation intensive des catégories, dans une montée sans fin vers l'abstraction.

C'est à Grothendieck que l'on doit le retour du balancier. En géométrie algébrique, on utilise les cycles algébriques : par exemple dans le plan projectif, un cycle (de dimension 0 ou 1) est une somme formelle de (points ou courbes). Il faut introduire divers types d'équivalences, mais dans le cas des courbes dans le plan, le seul invariant est le degré (de l'équation définissant la courbe), ou le degré des 0-cycles (somme des coefficients $\sum b_k$ pour $Z = \sum b_k \cdot p_k$, où les p_k sont des points. Le fait que deux courbes distinctes se coupent en un nombre fini de points, et le *théorème de Bézout* qui se traduit par $\deg(Z \cdot Z') = \deg(Z) \times \deg(Z')$ indiquent la nécessité de considérer un produit à côté de la somme. Après des étapes laborieuses, on parvient à associer à toute variété algébrique X son anneau de Chow $Ch(X)$.

Grothendieck définira de nombreux groupes ou anneaux ($K_0(X)$, puis les cohomologies de de Rham, étale, cristalline ...) associés à un espace X , d'où des nombres de Betti qu'il faut comparer. C'est là que Grothendieck monte le dernier échelon de l'échelle de Jacob. Il invente une généralisation de ces théories, dite *cohomologie motivique*. L'idée de Grothendieck est d'associer à tout espace un « motif », avec une propriété qui nous renvoie aux polyèdres : on peut casser un motif en morceaux et réassembler les morceaux. Il s'agit d'une espèce de chimie, où l'on casse les molécules en atomes pour les réassembler en molécules d'une autre espèce. Même si on ne peut pas prendre ceci à la lettre, c'est encore la bonne manière d'enseigner la chimie élémentaire. Grothendieck, influencé par la mystique bouddhiste, emploie une autre métaphore : celle de la transmigration des âmes : prenez l'âme d'un cheval, ou un morceau, à transférer sur un bodhisattva !

Malgré les efforts soutenus de mathématiciens de premier plan, on n'est pas parvenu aujourd'hui à construire une théorie des motifs satisfaisant à toutes les exigences de Grothendieck. On dispose de deux constructions importantes, celle de Nori et celle de Voevodsky, mais le lien entre les deux⁶ reste à établir. Ceci n'empêche pas un certain snobisme qui attribue l'adjectif « motivique » à toutes sortes de constructions.

Belle envolée vers l'unité dans la diversité, l'éternel et l'invariant derrière les apparences fluctuantes. Sous un style moins mystique, il y a bien là l'ambition permanente de Rota.

5. La fonction de Möbius-Rota

Nous en venons maintenant à l'une des découvertes capitales de Rota : la fonction de Möbius-Rota. Ceci sera l'occasion d'admirer le talent symphonique de Rota : un petit motif à la flûte, d'apparence innocente, qui va se répercuter dans tout l'orchestre, en suscitant des réponses palpitantes, créant une grande harmonie.

⁶ Sous la forme : le « cœur » de la catégorie de Voevodsky est équivalente à la catégorie de Nori.

Le point de départ est la formule d'inversion de Möbius, classique en arithmétique. Donnons-nous deux fonctions $f(n)$ et $g(n)$ où la variable n prend les valeurs 1, 2, 3, ... Supposons que g se déduise de f par sommation

$$(16) \quad g(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

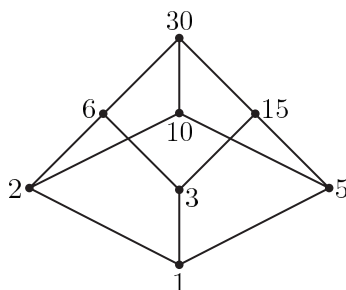
où la somme est étendue aux entiers d divisant n , y compris 1 et n . La fonction de Möbius $\mu(n)$ est définie par $\mu(n) = (-1)^k$ si n est le produit $p_1 \dots p_k$ de nombres premiers distincts (ceci inclut $\mu(1) = 1$) et $\mu(n) = 0$ dans le cas contraire. Il est facile de prouver la relation⁷

$$(17) \quad \sum_{d|n} \mu(d) = 0 \quad \text{si } n \geq 2.$$

Par un calcul facile, on en déduit l'inversion

$$(18) \quad f(n) = \sum_{d|n} \mu(n/d) g(d) .$$

Rota donne une nouvelle interprétation : il considère l'ensemble $L_{n,d}$ de tous les entiers δ divisant n et divisibles par d . Pour tous δ et δ' dans $L_{n,d}$, on écrit $\delta \leq \delta'$ lorsque δ divise δ' . On peut représenter la situation par un graphe dont les sommets sont les éléments de $L_{n,d}$, où l'on joint δ à δ' si δ divise δ' sans aucun intermédiaire ε tel que $\delta < \varepsilon < \delta'$, *i.e.* si δ'/δ est premier. Voir la figure pour le cas $d = 1$, $n = 30$.



Si l'on pose $L_n = L_{n,1}$ on a $L_{n,d} = L_{n/d}$.

L'idée de Rota est la suivante : soit L un ensemble *fini* muni d'une relation d'ordre partiel⁸ notée $x \leq y$. On suppose aussi que L possède un plus grand élément 1, et un plus petit 0, de sorte qu'on a toujours $0 \leq x \leq 1$. On va associer à L un espace géométrique E dont la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(E)$ sera aussi notée $\mu(L)$ et appelée

⁷ Rappelons la définition de la fonction zêta de Riemann $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$ (produit sur tous les nombres premiers p). La formule (17) s'écrit $1/\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \mu(n) n^{-s}$ d'où $\sum_{n \geq 1} \mu(n) n^{-s} = \prod_p (1 - p^{-s})$ et en développant, on retrouve la définition de $\mu(n)$.

⁸ En anglais mathématique, L est qualifié de *poset*.

l'invariant de Möbius-Rota de L . Pour revenir à l'exemple précédent, on a $\mu(n) = \mu(L_n)$, d'où $\mu(n/d) = \mu(L_{n,d})$.

L'espace E est ce qu'on appelle un *complexe simplicial* ; c'est un type d'espace qui se découpe en simplexes, généralisations à toutes les dimensions d du segment ($d = 1$), triangle ($d = 2$), tétraèdre ($d = 3$). D'une manière générale, si S est un ensemble (fini) de sommets, le simplexe fermé (resp. ouvert) construit sur S se compose des fonctions $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\sum_{s \in S} f(s) = 1$ et $f(s) \geq 0$ (resp. $f(s) > 0$). Les nombres $f(s)$ sont les coordonnées barycentriques du point du simplexe correspondant à f . La dimension de Σ est égale à $|S| - 1$. Revenons au poset L . On construit d'abord le simplexe fermé Σ ayant L pour ensemble de sommets. Une chaîne dans Σ , de longueur p , et joignant 0 à 1, est une suite γ d'éléments $x_0, \dots, x_p$ de L tels que

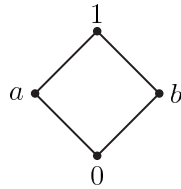
$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{p-1} < x_p = 1.$$

A chaque chaîne γ , on associe le simplexe ouvert Σ_γ de dimension p , dont les sommets sont les points $x_0, x_1, \dots, x_p$. L'espace E cherché sera le sous-espace de Σ , réunion des Σ_γ pour toutes les chaînes γ . On a défini $\mu(L)$ comme la caractéristique de E . Chaque chaîne de longueur p définit une cellule de dimension p . Par la formule (8), la caractéristique de E est égale à $\sum_{p \geq 0} (-1)^p c_p(L)$, où $c_p(L)$ est le nombre de chaînes dans L de longueur p . Conclusion⁹

$$(19) \quad \mu(L) = \sum_{p \geq 0} (-1)^p c_p(L) .$$

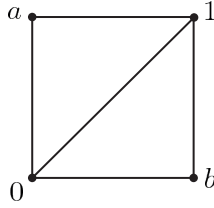
C'est un exercice amusant d'examiner quelques exemples :

- a) $\mu(L \times L') = \mu(L) \times \mu(L')$.
- b) Si L est une chaîne de longueur ℓ , on a $\mu(L) = -1$ si $\ell = 1$, et $\mu(L) = 0$ si $\ell > 1$.
- c) Si L est l'ensemble des parties d'un ensemble à n éléments, on a $\mu(L) = (-1)^n$.
- d) Si L est figuré comme suit avec $0 < a < 1$, $0 < b < 1$.



On a alors 2 chaînes de longueur 2, à savoir $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$ et une chaîne de longueur 1, à savoir $0 < 1$, d'où $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ et $\mu(L) = 2 - 1 = 1$. L'espace E est la réunion des triangles ouverts $0a1$ et $0b1$ et du segment ouvert 01 . C'est donc la cellule de dimension 2, de caractéristique $(-1)^2 = 1$ (on retrouve $\mu(L) = 1$).

⁹ Le seul cas où il y aurait une chaîne de longueur 0 est celui où L est réduit à un point, i.e. si $0 = 1$, et l'on pose $\mu(L) = 1$ dans ce cas.



(e) Pour retrouver l'exemple initial de Möbius, il suffit de remarquer que le poset L_n des diviseurs de n est isomorphe au produit de chaînes de longueur $\ell_1, \dots, \ell_r$ correspondant à la décomposition $n = p_1^{\ell_1} \dots p_r^{\ell_r}$ en facteurs premiers.

Venons-en à la formule de Möbius-Rota : si L est un poset fini, considérons deux fonctions f et g sur L à valeurs réelles. Supposons g définie par sommation à partir de f

$$(20) \quad g(x) = \sum_{y \leq x} f(y).$$

Alors on retrouve f par la formule

$$(21) \quad f(x) = \sum_{y \leq x} \mu_L(x, y) g(y)$$

où $\mu_L(x, y)$ représente l'invariant de Rota du poset $L_{x,y}$ formé des éléments z de L tels que $y \leq z \leq x$, en gardant l'ordre défini par L . Autrement dit, on a

$$(22) \quad \mu_L(x, y) = \sum_{p \geq 0} (-1)^p c_p(x, y),$$

où $c_p(x, y)$ est le nombre de chaînes de longueur p joignant y à x . On a bien sûr $\mu_L(x, y) = c_p(x, y) = 0$ si l'on n'a pas $y \leq x$.

La méthode de démonstration de (21) utilisée par Rota est une variante du calcul matriciel. Appelons noyau une fonction $F(x, y)$ définie pour $x \geq y$. Un tel noyau agit sur les fonctions $f : L \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$(23) \quad Ff(x) = \sum_{x \geq y} F(x, y) f(y).$$

Le produit des opérateurs correspond au produit matriciel

$$(24) \quad (FG)(x, z) = \sum_{x \geq y \geq z} F(x, y) G(y, z)$$

et l'opérateur identique correspond au noyau I défini par

$$(25) \quad I(x, x) = 1, \quad I(x, y) = 0 \text{ si } y < x.$$

La formule (20) s'écrit $g = Jf$ avec $J(x, y) = 1$ si $y \leq x$. Le noyau $C = J - I$ satisfait à $C(x, x) = 0$, $C(x, y) = 1$ si $y < x$; on en déduit¹⁰ que $c_p(x, y)$ est la puissance p -ième de C , et la formule (22) s'écrit

$$(26) \quad \mu_L = \sum_{p \geq 0} (-1)^p C^p.$$

Donc μ_L est l'inverse de la matrice $I + C = J$, et les formules (20) et (21) sont équivalentes.

6. Quelques excursions

Choisissons un ensemble N à n éléments, et notons B_n l'ensemble des parties de N , ordonné par inclusion. Comme poset, B_n est isomorphe au produit de n intervalles de longueur 1, d'où

$$(27) \quad \mu(B_n) = (-1)^n.$$

Si A et B sont deux parties de N , avec $A \subset B$, l'intervalle $(B_n)_{A,B}$ se compose des parties C de N telles que $A \subset C \subset B$, et en associant à C la partie $C \setminus A$ de $B \setminus A$, on définit un isomorphisme de cet intervalle avec l'algèbre de Boole B_p où $p = |B \setminus A| = |B| - |A|$. On en déduit la *relation d'exclusion-inclusion* : la relation $f(A) = \sum_{B \subset A} g(B)$ équivaut à

$$g(A) = \sum_{B \subset A} (-1)^{|A|-|B|} f(B).$$

Une partition de l'ensemble N est une collection Π de *blocs* (parties de N), telle que tout élément de N appartienne à un bloc et un seul. La partition Π' est dite plus fine que Π si tout bloc de Π' est contenu dans un bloc de Π (notation $\Pi < \Pi'$). La plus fine partition est celle constituée des parties à 1 élément de N , la moins fine a le seul bloc N . Rota a montré que le poset P_n des partitions de n a un invariant égal à

$$(28) \quad \mu(P_n) = (-1)^{n-1} (n-1)!$$

Noter aussi, avant d'écrire la formule d'inversion de Möbius-Rota, que tout intervalle du poset P_n est isomorphe à un produit de posets du type P_k .

Tout ceci trouve à s'appliquer en probabilités. La formule d'inclusion-exclusion sert à calculer une probabilité du type $P(A \cup B \cup C \cup \dots)$ lorsque les événements A, B, C ne

¹⁰ Pour $x = y$, l'intervalle $L_{x,y}$ de L se réduit à un point, et l'on a $\mu_L(x, x) = 1$ par la convention $\mu(\Lambda) = 1$ si Λ a un seul élément.

sont pas exclusifs (i.e. $A \cap B$ par exemple n'est pas vide) au moyen de probabilités du type $P(A \cap B \cap C \cap \dots)$ qui sous l'hypothèse d'indépendance se ramène à un produit $P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \dots$

Le poset des partitions joue un rôle important dans l'étude des moments et des cumulants. Par définition, le n -ième moment de la variable aléatoire T est la valeur moyenne $m_n(T) = E[T^n]$ de la puissance n -ième. Pour la somme de variables indépendantes T et T' , on a

$$(29) \quad m_n(T + T') = \sum_{n'=0}^n \binom{n}{n'} m_{n-n'}(T) m_{n'}(T').$$

Cette formule se simplifie notablement si l'on considère les cumulants $c_n(T)$ car on a

$$(30) \quad c_n(T + T') = c_n(T) + c_n(T')$$

sous l'hypothèse d'indépendance. Donnons le début de la table des relations (en omettant T dans $m_n(T)$ et $c_n(T)$)

$$c_1 = m_1$$

$$\begin{cases} c_2 = m_2 - m_1^2 \\ m_2 = c_2 + c_1^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3 \\ m_3 = c_3 + 3c_1c_2 + c_1^3 \end{cases}$$

Notons aussi que pour une variable gaussienne d'écart type σ , on a $m_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!} \sigma^{2n}$ et $m_{2n+1} = 0$, tandis qu'on a $c_2 = \sigma^2$ et que les autres cumulants sont nuls¹¹.

Disons simplement que les formules de passage des moments aux cumulants peuvent s'interpréter comme la formule de Möbius-Rota appliquée au poset des partitions.

Notons aussi que Voiculescu a développé un nouveau chapitre des probabilités, dites *libres*, en liaison avec la géométrie non-commutative (c'est-à-dire avec la mécanique quantique). Ceci introduit une nouvelle définition d'indépendance, qui entraîne avec elle une nouvelle notion de cumulant. Les relations entre cumulants « libres » et moments fait intervenir une fonction de Möbius-Rota appliquée au poset des « partitions non-croisées », une classe spéciale de partitions. Le potentiel de la méthode n'est donc pas épuisé, et il s'agit non d'archéologie, mais de la science du 21^e siècle. Non, Rota n'est pas mort !

¹¹ Ceci facilite beaucoup la preuve du théorème central-limite.

7. La géométrie finie et les matroïdes

La géométrie chez Euclide s'occupe des figures, composées de points, de droites, de cercles, de plans, etc. ... en nombre usuellement fini. Le livre d'Euclide offre le premier exemple de présentation purement logique et axiomatique, contrairement à d'autres traditions : la preuve en Chine (au 8^e siècle) consiste en une construction soignée suivie de l'injonction : « vois ! ».

Tout au long de ce développement, se sont affinées les mesures, peut-être sous l'influence de l'astronomie, qui a inspiré la création de la trigonométrie, plane et sphérique. La réduction à l'algèbre est due essentiellement à Viète et surtout Descartes, qui a introduit la méthode des coordonnées. Celle-ci, en parallèle avec le développement du calcul différentiel et intégral, a irrigué la recherche au 18^e siècle. Mais cette méthode choquait les puristes en ce qu'elle nécessitait d'introduire un élément étranger sous la forme d'un système de coordonnées (ou repère). Divers auteurs, Grassmann, Möbius (avec son calcul barycentrique), puis Hamilton et Gibbs (avec le calcul vectoriel) ont cherché à créer une algèbre directement interprétable en termes géométriques. Ce fut le long combat entre les méthodes synthétiques et les méthodes analytiques, qui laisse indifférents nos contemporains, prompts qu'ils sont à utiliser l'une ou l'autre méthode selon les circonstances. Ceci n'est pas sans rappeler la dispute au sujet des tenseurs, avec ou sans les indices et la convention d'Einstein.

Beaucoup de travaux sont motivés par le désir d'incorporer et de comprendre la géométrie non-euclidienne (hyperbolique et sphérique). Hilbert, dans son ouvrage classique¹², donnera un exposé axiomatique pur, débarrassé des scories découvertes au cours de 23 siècles de commentaires d'Euclide. Au départ, on a trois sortes d'objets : points, droites, plans liés par des relations telles que « la droite passe par le point », « la droite est contenue dans le plan » ... et des axiomes tels que « par deux points distincts passe une droite et une seule », « deux plans non parallèles ont une droite en commun ». Les propriétés géométriques sont classées en « linéaires » (ou « affines »), en « métriques » (distances, angles, trigonométrie), qui peuvent s'interpréter en diverses classes d'espaces : vectoriel, affine, euclidien. Mais deux remarques s'imposent. Aujourd'hui, totalement endoctrinés par la théorie des ensembles, nous, mais pas nos prédécesseurs, voyons l'espace comme un ensemble de points dans lequel sont privilégiés certains sous-ensembles qui seraient les droites (ou les plans, ou les cercles ...), la relation d'incidence se ramène à celle d'appartenance ($A \in D$ signifie que le point A est sur la droite D) et d'inclusion ($D \subset P$, D droite, P plan). D'autre part, la notion d'infini peut être évacuée en introduisant la géométrie projective : par exemple, dans un plan projectif Π , on a des points et des droites avec deux axiomes :

a) Etant donnés deux points distincts A et A' il existe une droite D unique passant par ces points.

¹² D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, traduction française publiée en 1902.

b) Etant données deux droites distinctes D et D' , il existe un point n unique appartenant à ces deux droites.

Si l'on convient de choisir une droite D_∞ , appelée droite à l'infini, et d'introduire la partie finie Π_f de Π , obtenue en excluant D_∞ , on retrouve une géométrie affine au sens usuel. Maintenant, toute droite dans Π_f possède un unique point à l'infini, et deux droites parallèles sont des droites admettant le même point à l'infini. De manière analogue, les objets de la géométrie de Laguerre : droites isotropes, points cycliques, ombilic, s'interprètent si l'on sait réaliser la *complexification de l'espace* (remplacer les coordonnées réelles par des coordonnées complexes).

Une autre source d'infini est le calcul des limites qui repose essentiellement sur l'axiome d'Archimède, via la théorie des proportions du 5^e livre d'Euclide. Hilbert prend bien soin d'isoler l'axiome d'Archimède. Par des constructions soigneuses, il développe un calcul finitaire des proportions, qui reconstruit un corps de nombres servant de coordonnées par des méthodes géométriques finitaires. Nombre de démonstrations classiques se font désormais sans l'axiome d'Archimède¹³.

Pour en venir à Rota et ses « matroïdes », il nous faut décrire la présentation de la géométrie projective par Birkhoff. Dans l'espace projectif Π nous avons certains ensembles de points, appelés droites. Une variété (linéaire) est un ensemble de points V tel que si A et B sont deux points distincts de V , toute la droite passant par A et B est dans V . Les variétés forment un ensemble ordonné $\mathcal{P}$, $V \leq V'$ signifie que V est contenue dans V' . De plus, étant données deux variétés V et V' , leur intersection $V \wedge V'$ est la plus grande des variétés contenues dans V et V' à la fois. Dualelement, $V \vee V'$ (distincte de la réunion $V \cup V'$) est la plus petite des variétés contenant à la fois V et V' . On l'appelle le *joint* de V et V' . L'existence de l'intersection $V \wedge V'$ et du joint se traduit en disant que $\mathcal{P}$ est un *lattice*. Dans ce lattice, le plus petit élément est l'ensemble vide (par convention) et le plus grand est l'espace Π lui-même. On introduit ensuite la notion de *rang* : le rang $rg(\emptyset)$ est 0, le rang d'un point $rg(A) = 1$, et en général le rang¹⁴ de V est le nombre minimum de points qu'il faut se donner pour déterminer la variété V (2 points pour une droite, 3 points pour un plan). On peut aussi définir le rang de V comme le maximum de la longueur d'une chaîne joignant $\emptyset$ à V . Le rang satisfait à la formule d'additivité

$$(31) \quad rg(V \vee V') + rg(V \wedge V') = rg(V) + rg(V')$$

que nous avons souvent rencontrée.

Examinons maintenant la géométrie « finie »¹⁵. Considérons une partie finie M d'un espace projectif Π ; quelle est la trace sur M de la géométrie de l'espace ambiant ? Par exemple, cela a un sens de dire que trois points de M sont alignés. Nous prendrons pour

¹³ Voir à ce sujet le livre d'E. Artin, « Geometric Algebra », traduction française de M. Lazard.

¹⁴ Le rang de V est égal à la dimension de V augmentée de 1. Ce décalage provient du fait qu'on peut construire un espace projectif en prenant pour points les droites vectorielles d'un espace vectoriel.

¹⁵ C'était le titre d'un ouvrage connu dans ma jeunesse, et publié par un Monsieur Juvet.

point de départ la notion de rang : si A est une partie de M , notons $v(A)$ la plus petite variété contenant A , et appelons rang de A celui de $v(A)$. On a évidemment les relations

$$(32) \quad v(A \cup B) = v(A) \vee v(B)$$

$$(33) \quad v(A \cap B) \leq v(A) \wedge v(B) .$$

On en déduit les propriétés suivantes du rang :

$$(34) \quad 0 \leq rg(A) \leq |A|$$

$$(35) \quad rg(A \cup B) + rg(A \cap B) \leq rg(A) + rg(B)$$

$$(36) \quad rg(A) \leq rg(B) \text{ si } A \subset B .$$

Notons que l'additivité (31) est devenue une sous-additivité (35).

En fait, Choquet a développé une *théorie des capacités*, sous forme d'une fonctionnelle à *valeurs réelles positives* définie sur l'ensemble des parties compactes d'un espace X . L'un de ses théorèmes est l'interprétation probabiliste des capacités : si l'espace X est compact, une capacité $c(A)$ normalisée par $c(X) = 1$ provient d'une loi de probabilité P sur l'ensemble des parties compactes de X , de sorte que $c(A)$ soit la probabilité qu'une partie aléatoire K (au sens de la loi P) rencontre A . C'est un résultat-clé dans l'interprétation de la théorie du potentiel au moyen du mouvement brownien.

Un des points de départ de la théorie des matroïdes de Rota est la donnée d'un ensemble fini M et d'une fonctionnelle $rg(A)$ définie sur les parties de M , et à valeurs entières positives¹⁶. Rota parle d'une « prégéométrie », mais le mot « matroïde » s'est imposé ; il est laid, mais des terminologies voisines se sont imposées en géométrie différentielle : groupoïdes, algébroïdes, ... Dans un matroïde on peut introduire toutes sortes de relations géométriques : une partie génératrice est une partie A dont le rang est égal à celui de M , une partie libre est définie par l'égalité $rg(A) = |A|$, une base est une partie libre et génératrice, un circuit C est défini par l'égalité $rg(C) + 1 = |C|$. Rota examine¹⁷ toutes les présentations axiomatiques en partant des bases, des circuits, etc. ...

Ce qui fait la richesse de la notion de matroïde c'est la diversité des interprétations. Whitney en 1938, a réalisé l'une des premières études : motivé par le problème des 4 couleurs, il utilise ces méthodes pour l'étude des graphes (la notion de circuit vient de là). A la même époque, dans la première édition de son *Algèbre*, Bourbaki introduit la notion de « relation primordiale » équivalente à celle de circuit, dans l'intention d'établir le « théorème de Jacobson-Bourbaki », une version très générale de la correspondance de

¹⁶ Gelfand a généralisé cela en prenant $rg(A)$ réel. Voir son ouvrage avec Gindikin et Karpelevich.

¹⁷ Voir son livre avec Crapo.

Galois ; depuis il est revenu à une présentation moins ambitieuse, influencée par la vision de Grothendieck.

8. Coronidis loco

Nous n'avons donné qu'un aperçu de l'œuvre de Rota. Il y a bien d'autres aspects : séries génératrices, résurrection du calcul « ombral », utilisation des algèbres de Hopf, relation de Baxter, ...

L'ambition est toujours la même : faire sortir la combinatoire de son ghetto, et symétriquement, répandre une version « visuelle » en direction de l'algèbre.

Références

Artin Emil, 1957, *Geometric Algebra*, Londres, New York, Interscience Publishers, [trad. fr. M. Lazard], Paris, Gauthier Villars, 1962.

Crapo (Henri H.), Rota (Gian-Carlo), 1970, *On the foundations of combinatorial theory: combinatorial geometries*, Cambridge, MIT Press.

Hilbert (David), 1899, *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig, B.G. Teubner, *Les fondements de la géométrie* [trad. fr. Paul Rossier], Paris, Dunod, 1971.

Rota (Gian-Carlo), 1995, *Gian-Carlo Rota on Combinatorics, Introductory papers and commentaries*, Joseph P.S. Kung « Contemporary Mathematicians », Boston, Bâle, Berlin, Birkhäuser.