

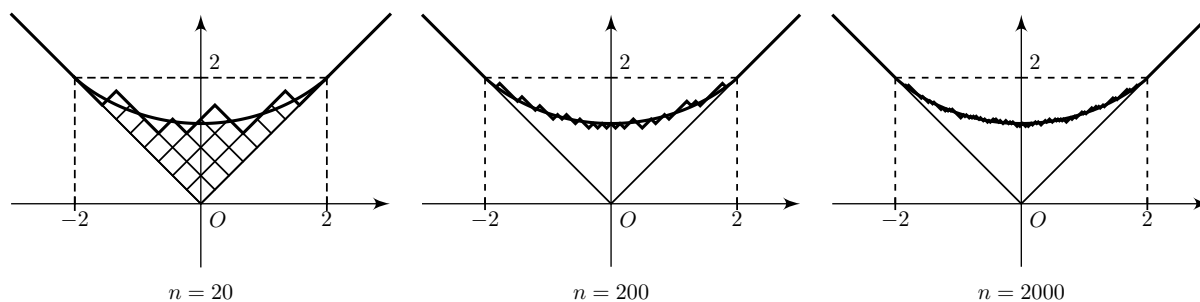
NOUVEAUX DÉVELOPPEMENTS SUR LES VALEURS DES CARACTÈRES DES GROUPES SYMÉTRIQUES ; MÉTHODES COMBINATOIRES [d'après V. Féray]

par **Pierre CARTIER**

INTRODUCTION

Il est difficile d'innover dans un sujet aussi vénérable que l'étude des caractères des groupes symétriques. L'ouverture a été faite dans l'article fondateur de Frobenius [A2] en 1900, suivi par Schur [A11] en 1901, et par Young [A13] en 1928. On dispose aujourd'hui d'un bon nombre d'excellents exposés d'ensemble [A5, A6, A8, A9, A10, A12].

Les travaux dont nous allons parler ont leur origine dans l'École de Saint-Petersbourg (autrefois Leningrad) : Kerov, Vershik, Olshanski, Ivanov, Okunkov . . . Leur motivation initiale était l'étude des *représentations factorielles du groupe symétrique* S_∞ , réunion de la suite des groupes symétriques $S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_n \subset S_{n+1} \subset \dots$. Il s'agissait d'un exemple emblématique des méthodes d'algèbres d'opérateurs dans les espaces de Hilbert. En un sens convenable, il faut passer à la limite sur les diagrammes de Young de taille croissante. Il apparut vite que cela revenait à étudier la forme limite de diagrammes de Young aléatoires ; voici une illustration d'une simulation numérique sur des tableaux de taille 20, 200, puis 2000. La courbe limite se dessine très nettement.



Une autre source d'inspiration est venue des *probabilités non commutatives*. Le cadre est le suivant :

- un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$;
- une algèbre de von Neumann A d'opérateurs bornés dans $\mathcal{H}$ (stable par l'adjonction $x \mapsto x^*$ et fermée pour la topologie faible de la dualité entre $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ et l'espace $\mathcal{L}_1(\mathcal{H})$ des opérateurs à trace) ;
- un état $\mathbb{E}$ sur A (forme linéaire faiblement continue, et positive $\mathbb{E}(x^*x) \geq 0$).

Lorsque l'algèbre A est *commutative*, on est ramené au cas probabiliste usuel : un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, avec $A = L^\infty(\Omega, \mathbb{P})$ agissant par multiplication sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathbb{P})$, et $\mathbb{E}[f] = \int_\Omega f d\mathbb{P}$ pour f dans A .

Vers 1970, Voiculescu a entrepris l'étude du cas fourni par l'algèbre de von Neumann engendrée par un *groupe libre* G agissant par la représentation régulière dans l'espace $\ell^2(G)$. Voiculescu a découvert que les générateurs du groupe libre satisfont à une propriété qui se réduit dans le cas des probabilités commutatives à l'indépendance stochastique. Ce nouveau domaine fut baptisé : “*probabilités libres*”. Les moments et les cumulants classiques des variables aléatoires se généralisent en “*cumulants libres*” qui font intervenir la combinatoire des “*partitions non-croisées*”. Le petit miracle est que ces partitions non-croisées correspondent aux factorisations minimales $\gamma_k = \tau\sigma$ d'une permutation circulaire γ_k dans le groupe symétrique S_k (cf. Section 2.3.4). Ces factorisations minimales vont à leur tour se décrire au moyen des cartes biparties unicellulaires (cf. section 2.1.2). *Ces cartes seront le thème central des méthodes combinatoires décrites à la section 2.*

Si λ est une partition de n , et χ^λ le caractère de S_n correspondant à λ , on considère les valeurs normalisées des caractères

$$\text{Ch}_k(\lambda) := \frac{n!}{(n-k)!} \frac{\chi^\lambda(\gamma_k)}{\chi^\lambda(1)}$$

pour $n \geq k$. Utilisant les méthodes de probabilités libres, Biane [C1] a étudié le comportement asymptotique de $\text{Ch}_k(\lambda)$ quand n croît, et que le nombre de lignes et de colonnes de λ est d'ordre $O(\sqrt{n})$. La clé est fournie par les homothéties : identifiant λ à une région D_λ du plan $\mathbb{R}^2$, l'homothétie de rapport t ($t \geq 1$ entier) transforme D_λ en $D_{h_t(\lambda)}$ pour une partition $h_t(\lambda)$ de nt^2 . Biane prouve que la limite

$$R_{k+1}(\lambda) = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Ch}_k(h_t \lambda) / t^{k+1}$$

existe, et il l'interprète en termes de cumulants libres. En particulier $R_2(\lambda)$ est la taille $|\lambda|$ de λ .

Il est remarquable que les quantités $\text{Ch}_k(\lambda)$ et $R_k(\lambda)$ sont *polynomiales* : introduisant les coordonnées multirectangulaires $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ (cf. section 1.1.5) de λ , on a des expressions polynomiales en $\mathbf{p}, \mathbf{q}$. De plus, il existe des formules universelles liant les Ch_k et les R_k : voici un échantillon

$$\begin{aligned} \text{Ch}_1 &= R_2 \\ \text{Ch}_2 &= R_3 \\ \text{Ch}_3 &= R_4 + R_2 \\ \text{Ch}_4 &= R_5 + 5 R_3 \\ \text{Ch}_5 &= R_6 + 15 R_4 + 5 R_2^2 + 8 R_2 \\ \text{Ch}_6 &= R_7 + 35 R_5 + 35 R_2 R_3 + 84 R_3. \end{aligned}$$

Dans [C1], p. 199, Biane⁽¹⁾ donne les valeurs de Ch_7 à Ch_{11} . Il y a une graduation naturelle par le degré total en les variables $p_1, p_2, \dots; q_1, q_2, \dots$. Alors R_k est homogène de degré k , et le terme de plus haut degré de Ch_k est R_{k+1} , de degré $k+1$ (*cf.* section 2.3.3). L'estimation asymptotique de Biane [C1], p. 127 résulte facilement des relations entre les R_k et les Ch_k .

D'une manière générale, Kerov écrit Ch_k sous la forme d'un polynôme (de Kerov)

$$K_k(R_2, R_3, \dots, R_{k+1}),$$

et la table ci-dessus suggère la *conjecture de Kerov* : les coefficients de K_k sont des entiers positifs. Cela a été prouvé récemment par V. Féray [B2] par utilisation de méthodes combinatoires de la théorie des graphes et des cartes. C'est ce que nous allons essayer d'expliquer en suivant ses exposés du cours Peccot 2013 au Collège de France.

1. LE GROUPE SYMÉTRIQUE

1.1. Notations et préliminaires

1.1.1. — Le groupe symétrique S_n est le groupe des permutations de l'ensemble $[n]$ des entiers $1, 2, \dots, n$. On fait la convention $[0] = \emptyset$, d'où $S_0 = (1)$. L'élément unité d'un groupe est toujours noté 1. Pour $1 \leq k \leq n$, on identifie S_k à un sous-groupe de S_n , en faisant correspondre à la permutation σ de $[k]$ la permutation de $[n]$ qui fixe tous les éléments de $[n] \setminus [k]$. On note γ_k le cycle $(12 \dots k)$, vu comme élément de S_k , donc aussi de S_n pour $n \geq k$.

1.1.2. — Une *composition* $\mathbf{c}$ d'un entier $n \geq 1$ est une suite $(c_1, \dots, c_k)$ d'entiers strictement positifs de somme $c_1 + \dots + c_k$ égale à n . Une *partition* λ de n est une composition à l'ordre près des éléments, et on peut toujours la normaliser de sorte que

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0.$$

La *longueur* de λ , notée $\ell(\lambda)$, est k ; la *taille* de λ , notée $|\lambda|$, est la somme $\lambda_1 + \dots + \lambda_k$. La relation $|\lambda| = n$ s'écrit aussi souvent $\lambda \vdash n$. On est parfois amené à compléter une partition par une suite infinie de zéros. Une *composition* d'un ensemble X est une suite $(C_1, \dots, C_k)$ de sous-ensembles non vides, deux à deux disjoints, de X , de réunion X . Une *partition* Π de X est un ensemble de parties non vides de X , deux à deux disjointes, de réunion X .

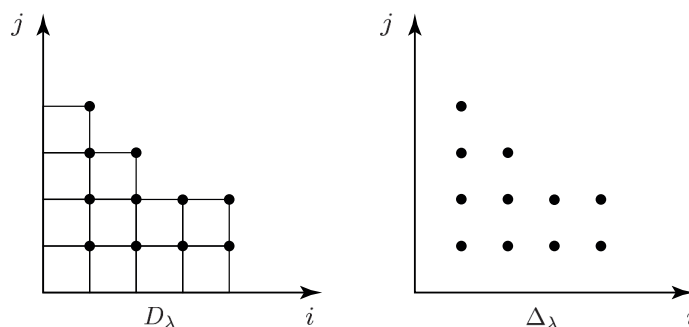
1. Ce que nous notons Ch_k est désigné par Σ_k dans Biane, *loc. cit.*

1.1.3. — Les partitions de n paramétrisent les classes de conjugaison des éléments π de S_n ; le *type cyclique* de π est la partition λ de n , soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, telle que π se compose de cycles de longueurs $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Les partitions paramétrisent aussi les représentations irréductibles de S_n (c.f. Section 1.2). Pour une partition λ de n , on note ρ^λ la représentation irréductible correspondante de S_n , χ^λ son *caractère*, et $\psi^\lambda := \chi^\lambda / \chi^\lambda(1)$ le *caractère normalisé*. Le *degré* $d_\lambda = \chi^\lambda(1)$ est la dimension de l'espace de la représentation ρ^λ .

1.1.4. — Décrivons les *diagrammes de Young*. Si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ est une partition de n , on note Δ_λ l'ensemble des couples (i, j) d'entiers tels

$$1 \leq j \leq k, \quad 1 \leq i \leq \lambda_j.$$

A tout couple (i, j) on associe le carré $D_{i,j} = [i-1, i] \times [j-1, j]$ de côté 1 dans $\mathbb{R}^2$, dont le sommet nord-est est (i, j) ; on note aussi D_λ la réunion des carrés $D_{i,j}$ pour (i, j) dans Δ_λ (voir les figures dans le cas de la partition $\lambda = (4, 4, 2, 1)$ de taille 11).

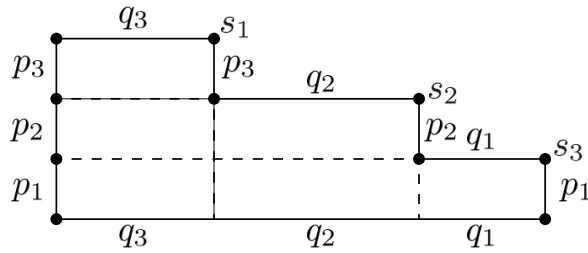


Le cardinal $|\Delta_\lambda|$ de Δ_λ et l'aire $|D_\lambda|$ de D_λ sont égaux à $|\lambda|$. Sur le dessin de Δ_λ , les lignes et les colonnes sont évidentes. Les longueurs des lignes sont $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$; celles des colonnes forment une partition $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_\ell)$ de n , dite *duale* de λ .

1.1.5. — Si p, q sont des entiers strictement positifs, on note $p \times q$ le diagramme rectangulaire formé de p lignes de longueur q , et de q colonnes de longueur p . Plus généralement, si $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ sont des compositions de même longueur $m \geq 1$, le diagramme $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ se compose de p_j lignes de longueur $q_j + q_{j+1} + \dots + q_m$ pour $1 \leq j \leq m$, et de q_j colonnes de longueur $p_1 + \dots + p_j$. Il y a en tout $p_1 + \dots + p_m$ lignes et $q_1 + \dots + q_m$ colonnes. Toute partition λ de n s'écrit de manière unique sous la forme $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$; le diagramme Δ_λ est alors la réunion de rectangles $p_i \times q_j$ pour $1 \leq i \leq j \leq m$. La taille de la partition λ (ou du diagramme correspondant) est alors $|\lambda| = \sum_{i \leq j} p_i q_j$.

Notre stratégie sera d'exprimer divers invariants associés à un tableau de Young comme

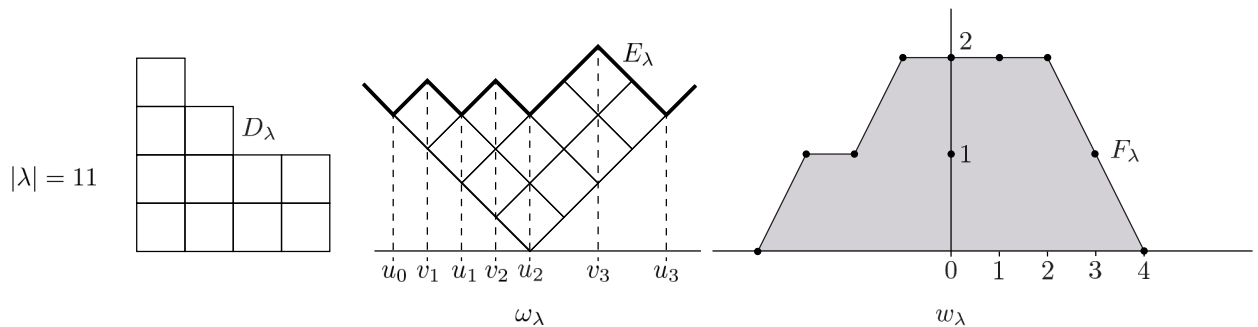
polynômes en les *coordonnées multi-rectangulaires* $\mathbf{p}, \mathbf{q}$.



1.1.6. — Venons-en à la *notation russe*⁽²⁾. Le domaine polygonal E_λ est déduit de D_λ par la transformation linéaire $(x, y) \mapsto (x - y, x + y)$ dans $\mathbb{R}^2$. Il existe une unique application continue ω_λ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui a les propriétés suivantes :

- on a $\omega_\lambda(x) = |x|$ pour $|x|$ assez grand ;
- la fonction ω_λ est linéaire par morceaux, et sa pente est égale à $+1$ ou -1 ;
- le domaine E_λ est défini par les inégalités

$$|x| \leq y \leq \omega_\lambda(x).$$



1.1.7. — Si λ correspond aux compositions $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ de même longueur m , il existe une suite de nombres réels de la forme

$$u_0 < v_1 < u_1 < \dots < u_{m-1} < v_m < u_m$$

qui sont les abscisses des points anguleux de la fonction ω_λ . La suite $u_0, u_1, \dots, u_m$ décrit les minima locaux de la fonction ω_λ , et $v_1, \dots, v_m$ les maxima locaux. Ce sont les *coordonnées entrelacées* de λ , et l'on a les lois de transformation

$$u_0 = -(p_1 + \dots + p_m), \quad u_j = v_j + p_{m-j+1}, \quad v_j = u_{j-1} + q_{m-j+1} \quad (1 \leq j \leq m)$$

d'où l'on déduit $u_0 + \dots + u_m = v_1 + \dots + v_m$.

2. Ce que nous venons de décrire est la notation “française”. La notation “anglo-saxonne” utilise le symétrique de D_λ par rapport à l'axe horizontal.

1.1.8. — Au lieu de la fonction ω_λ , on peut introduire la fonction $w_\lambda(x) = \frac{1}{2}(\omega_\lambda(x) - |x|)$, et le domaine F_λ défini par les inégalités

$$0 \leq y \leq w_\lambda(x)$$

dans $\mathbb{R}^2$. L'aire de F_λ est définie par l'intégrale

$$|F_\lambda| = \int_{-\infty}^{+\infty} w_\lambda(x) dx = \int_{F_\lambda} dx dy;$$

elle est égale à $|\lambda|$. Il nous sera utile d'introduire des “moments”

$$\begin{aligned} t_k(\lambda) &= k(k-1) \int_{-\infty}^{+\infty} x^{k-2} w_\lambda(x) dx \\ &= k(k-1) \int_{F_\lambda} x^{k-2} dx dy \\ &= \frac{k(k-1)}{2} \int_{E_\lambda} x^{k-2} dx dy, \end{aligned}$$

d'où $t_2(\lambda) = 2|\lambda|$. Dans les coordonnées entrelacées, on a

$$t_k(\lambda) = u_0^k + \dots + u_m^k - v_1^k - \dots - v_m^k.$$

1.1.9. — On a déjà introduit les homothéties h_t de rapport $t > 0$ entier. On a aussitôt les relations

$$\begin{aligned} D_{h_t \lambda} &= h_t(D_\lambda) \\ \omega_{h_t \lambda}(x) &= t \omega_\lambda(x/t) \\ w_{h_t \lambda}(x) &= t w_\lambda(x/t), \end{aligned}$$

et la relation d'homogénéité pour les moments

$$t_k(h_t \lambda) = t^k t_k(\lambda).$$

Enfin, l'homothétie h_t transforme $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ en $t\mathbf{p} \times t\mathbf{q}$, donc les coordonnées entrelacées de $h_t \lambda$ sont $tu_0 < tv_1 < tu_1 < \dots$

1.2. Représentations irréductibles du groupe symétrique

1.2.1. *Symétriseur de Young.* — Soient $n \geq 1$ un entier et λ une partition de n . L'ensemble Δ_λ de sommets est de taille n ; nous noterons $S(\lambda)$ le groupe des permutations de Δ_λ . Un tableau de Young est une bijection T de $[n]$ sur Δ_λ ; autrement dit, une numérotation des éléments de Δ_λ , ou des carrés correspondants de D_λ (voir la figure) :

9			
5	10		
3	7	8	11
1	2	4	6

Le tableau est *standard* lorsque les nombres dans les carrés vont en croissant de gauche à droite dans chaque ligne et de bas en haut dans chaque colonne, ce qui est le cas dans la figure ci-dessus. Le choix d'un tableau T définit un isomorphisme φ_T de S_n sur $S(\lambda)$.

On introduit deux sous-groupes $C(\lambda)$ et $L(\lambda)$ de $S(\lambda)$, formés des permutations de Δ_λ qui transforment chaque colonne (ligne) en elle-même. Notons $\varepsilon(\sigma)$ la signature d'une permutation $\sigma \in S(\lambda)$, et e_σ l'élément de base correspondant dans l'algèbre du groupe $\mathbb{C}(S(\lambda))$. On définit deux éléments a_λ et b_λ de $\mathbb{C}(S(\lambda))$ par les formules

$$a_\lambda = \sum_{\sigma \in L(\lambda)} e_\sigma, \quad b_\lambda = \sum_{\sigma \in C(\lambda)} \varepsilon(\sigma) e_\sigma,$$

et le *symétriseur de Young* est $C_\lambda = a_\lambda b_\lambda$.

1.2.2. — On note I_λ l'idéal à gauche de $\mathbb{C}(S(\lambda))$ engendré par C_λ , et $\rho^\lambda(\sigma)$ la restriction à I_λ de la multiplication à gauche par e_σ dans $\mathbb{C}(S(\lambda))$. On a remarqué qu'un tableau T de forme λ définit un isomorphisme φ_T de S_n sur $S(\lambda)$, qui permet de transporter $C(\lambda)$, $L(\lambda)$, a_λ , b_λ , C_λ , I_λ , ρ^λ sur des objets $C(T)$, $L(T)$, a_T , b_T , C_T , I_T , ρ^T associés à S_n . La représentation (ρ^T, I_T) de S_n ne dépend à isomorphisme près que de λ .

THÉORÈME 1.1 (Frobenius-Schur). — a) *Pour tout tableau de Young T de taille n , la représentation (ρ^T, I_T) de S_n est irréductible.*

b) *Toute représentation irréductible de S_n est isomorphe à l'une des représentations (ρ^T, I_T) .*

c) *Deux représentations (ρ^T, I_T) et $(\rho^{T'}, I_{T'})$ sont isomorphes si et seulement si les tableaux T et T' correspondent à la même partition λ de n .*

Pour chaque partition λ , on choisira une fois pour toutes un tableau standard de forme λ , par exemple celui où la première ligne comporte les nombres 1 à λ_1 , la seconde les nombres $\lambda_1 + 1$ à $\lambda_1 + \lambda_2$, etc. . . et l'on paramétrisera les représentations de S_n par les partitions λ de n .

1.2.3. — Soit P l'ensemble des couples (i, j) d'entiers strictement positifs, muni de la relation d'ordre produit

$$(i, j) \geq (k, \ell) \Leftrightarrow i \geq k \text{ et } j \geq \ell.$$

Une partie H de P est dite *héréditaire* si avec tout élément (i, j) elle contient tous les éléments (k, ℓ) tels que $(i, j) \geq (k, \ell)$. L'application $\lambda \mapsto \Delta_\lambda$ est une bijection de l'ensemble des partitions de n sur l'ensemble des parties héréditaires à n éléments de P .

Si λ et μ sont deux partitions, on écrit $\lambda \leq \mu$ si Δ_λ est contenu dans Δ_μ . Si l'on prolonge toute partition par une suite infinie de 0, la relation $\lambda \leq \mu$ signifie que l'on a $\lambda_k \leq \mu_k$ pour tout entier $k \geq 1$.

Un tableau de Young standard T de taille n peut être vu comme une application *injective* $\varphi : [n] \rightarrow P$. Les applications en question sont caractérisées par le fait que

l'ensemble $\varphi([k]) = \{\varphi(1), \dots, \varphi(k)\}$ est héréditaire pour $1 \leq k \leq n$. D'après la remarque précédente, un *tableau standard* T de forme λ correspond à une suite croissante de partitions

$$\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)} \leq \dots \leq \lambda^{(n)} = \lambda$$

avec $n = |\lambda|$ et $k = |\lambda^{(k)}|$.

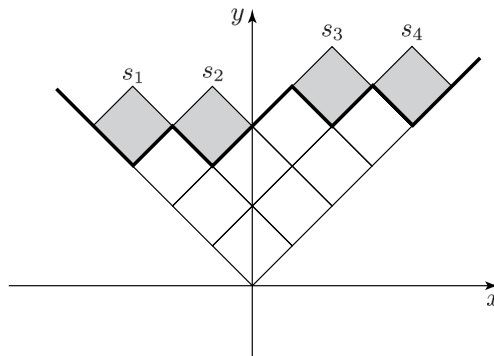
1.2.4. — Venons-en à la règle de branchement. Soit λ une partition de n . La restriction à S_{n-1} de la représentation ρ^λ de S_n est canoniquement isomorphe à la somme directe des représentations ρ^μ de S_{n-1} , où μ parcourt l'ensemble des partitions de $n-1$ telles que $\mu \leq \lambda$.

Par une itération facile, on voit que l'espace I_λ a une base indexée par les suites croissantes $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)} \leq \dots \leq \lambda^{(n)} = \lambda$ de partitions, c'est-à-dire par les tableaux de Young standard de forme λ (cf. section 1.2.3).

Pour décrire les partitions μ de $n-1$ telles que $\mu \leq \lambda$, le plus commode est d'utiliser les coordonnées multi-rectangulaires $p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_m$. Il y a m possibilités, obtenues en supprimant de Δ_λ l'un des m points $s_1, \dots, s_m$ définis par

$$s_j = (q_{m-j+1} + q_{m-j+2} + \dots + q_m, p_1 + p_2 + \dots + p_{m-j+1})$$

pour $1 \leq j \leq m$ (ou le carré correspondant de D_λ). Dans la représentation russe, ceci correspond aux m maxima locaux d'abscisses $v_1, \dots, v_m$.



1.2.5. — Nous allons donner une autre description des représentations de S_n , à l'aide des éléments J_k introduits par Jucys et Murphy en 1974. Rappelons qu'on plonge les groupes symétriques les uns dans les autres

$$S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_n \subset S_{n+1} \subset \dots ;$$

on nomme S_∞ la réunion (ou limite inductive) de ces groupes, d'où une situation analogue pour les algèbres de groupes

$$\mathbb{Q}(S_1) \subset \mathbb{Q}(S_2) \subset \dots \subset \mathbb{Q}(S_n) \subset \mathbb{Q}(S_{n+1}) \subset \dots \subset \mathbb{Q}(S_\infty).$$

Voici la définition des J_k

$$J_1 := 0, \quad J_2 := (12), \quad J_3 := (13) + (23), \dots, \quad J_k := \sum_{i=1}^{k-1} (ik), \dots$$

où (ij) est la transposition de i et j . On voit que J_k appartient à $\mathbb{Q}S_k$ et commute aux éléments de $\mathbb{Q}S_{k-1}$; par suite, *les J_k commutent deux à deux*.

Il est immédiat que, dans toute représentation unitaire (ρ, V) de S_n , les opérateurs $\rho(J_1), \dots, \rho(J_n)$ sont hermitiens et commutent deux à deux, donc se diagonalisent simultanément. De plus, l'algèbre engendrée par $J_1, \dots, J_n$ dans $\mathbb{Q}(S_n)$ est assez grosse pour qu'on ait le résultat suivant : *si ρ est irréductible, le sous-espace de V défini par les relations $\rho(J_k)v = c_kv$ pour $1 \leq k \leq n$ est de dimension ≤ 1* . On peut donc indexer une base de V par des systèmes de valeurs propres $c_1, \dots, c_n$: c'est la stratégie bien connue des “nombres quantiques” en physique quantique.

Explicitement, pour la représentation ρ^λ de S_n associée à la partition λ de n , on a la base (e_T) de l'espace I_λ indexée par les tableaux standard T de forme λ , et l'on a

$$\rho^\lambda(J_k) e_T = c(T(k)) e_T \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n.$$

Rappelons que le tableau T est une suite $T(1), \dots, T(n)$ d'éléments de P et c est l'application $(i, j) \mapsto i - j$ de P dans $\mathbb{Z}$: $c(i, j)$ est le *contenu* de la boîte (i, j) . On peut donc paramétrer la base de I_λ , sous la forme $e(c_1, \dots, c_n)$, au moyen des suites $c_1 = c(T(1)), \dots, c_n = c(T(n))$ vérifiant la condition suivante :

(TS) *Soit $k \in [n]$. Soit α_i le nombre de fois que i apparaît dans la suite $c_1, \dots, c_k$. On a alors*

$$\alpha_0 \geq \alpha_{-1} \geq \alpha_{-2} \geq \alpha_{-3} \geq \dots, \quad \alpha_0 \geq \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \dots$$

Rappelons que le groupe S_n est engendré par les transpositions $s_k = (k, k+1)$ pour $1 \leq k < n$. L'action de ces générateurs dans la représentation ρ^λ se décrit ainsi ⁽³⁾ :

- si $c_{k+1} = c_k \pm 1$, on a $\rho^\lambda(s_k) e(c_1, \dots, c_n) = \pm e(c_1, \dots, c_n)$;
- si $|c_{k+1} - c_k| \geq 2$, $\rho^\lambda(s_k)$ laisse fixe le plan ayant pour base le vecteur $e = e(c_1, \dots, c_n)$ et le vecteur e' déduit de e par échange de c_k et c_{k+1} ; il y agit par la matrice $\begin{pmatrix} u & 1+u \\ 1-u & u \end{pmatrix}$ avec $u = (c_{k+1} - c_k)^{-1}$.

Utilisant la présentation bien connue du groupe S_n par les relations

$$\begin{cases} s_k^2 = 1 \\ s_k s_\ell = s_\ell s_k & \text{si } |k - \ell| \geq 2 \\ s_k s_{k+1} s_k = s_{k+1} s_k s_{k+1}, \end{cases}$$

on peut vérifier que les opérateurs $\rho^\lambda(s_k)$, définis comme ci-dessus sur un espace ayant pour base les vecteurs $e(c_1, \dots, c_n)$, correspondant à la relation (TS), définissent bien une représentation du groupe S_n (pour tout corps de coefficients de caractéristique 0). L'avantage de cette construction est qu'elle s'applique presque telle quelle aux représentations de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_q(S_n)$.

3. Vu les conditions imposées, on a toujours $c_k \neq c_{k+1}$.

1.2.6. — Les éléments de Jucys-Murphy permettent de donner une description particulièrement attrayante de la *règle de branchement*. Soient λ une partition de n , ρ^λ la représentation de S_n correspondante, et $u_0 < v_1 < u_1 < \dots < v_m < u_m$ les coordonnées entrelacées de λ . L'opérateur $\rho^\lambda(J_n)$ a pour valeurs propres $v_1, \dots, v_m$; notons $V_1, \dots, V_m$ les sous-espaces propres correspondants. Alors, pour $1 \leq j \leq m$, l'espace V_j est stable pour S_{n-1} , et correspond à la représentation irréductible $\rho^{\mu(j)}$ de S_{n-1} , où $\mu(j)$ est la partition de $n-1$ obtenue en supprimant le point s_j de Δ_λ (cf. section 1.2.4). Noter aussi que v_j est le contenu du point s_j .

2. MÉTHODES COMBINATOIRES

2.1. Graphes et cartes bipartis

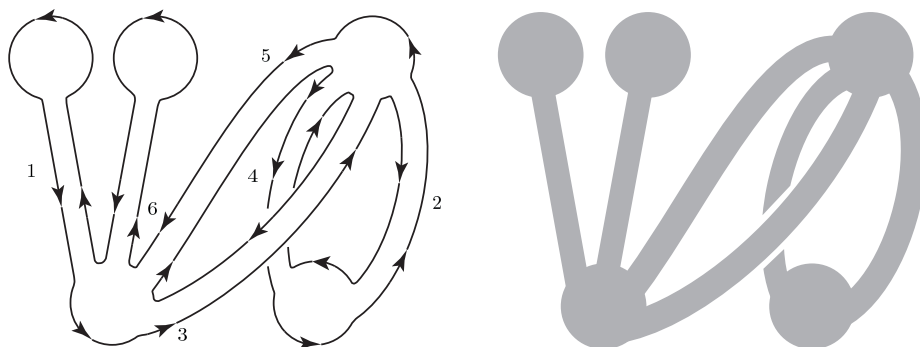
2.1.1. — Un *graphe biparti* G se compose d'un ensemble V de sommets, muni d'une composition $(V_\circ, V_\bullet)$ (les éléments de $V_\circ$ sont de couleur blanche, et ceux de $V_\bullet$ de couleur noire), d'un ensemble E d'arêtes, et de deux applications $s : E \rightarrow V_\circ$, $b : E \rightarrow V_\bullet$. On dit que l'arête e joint le sommet blanc $s(e)$ au sommet noir $b(e)$. Il est commode d'introduire pour chaque arête e , une arête opposée $\bar{e}$, obtenue en échangeant les deux extrémités de e . On note $\bar{E}$ l'ensemble de ces arêtes $\bar{e}$. Par exemple, si λ est une partition de n , on définit un graphe biparti G_λ dont Δ_λ est l'ensemble des arêtes, les sommets blancs (noirs) correspondant aux lignes (colonnes), et l'arête $(i, j) \in \Delta_\lambda$ joignant la ligne j à la colonne i . Tous les graphes considérés seront finis, c'est-à-dire que les ensembles V et E sont finis.

2.1.2. — Une *carte bipartie* M est un graphe biparti G sans sommet isolé⁽⁴⁾ et muni, pour chaque sommet v , d'un ordre cyclique sur l'ensemble E_v des arêtes adjacentes à v ; un tel ordre cyclique définit sur E_v une permutation circulaire γ_v (et réciproquement). La donnée de la partition $(E_v)_{v \in V_\circ}$ et des permutations circulaires γ_v équivaut, via la décomposition en cycles, à la donnée d'une permutation σ de E . De même, au moyen des sommets noirs, on décrit une autre permutation τ de E . Autrement dit, une carte bipartie est la représentation combinatoire d'une paire de permutations σ, τ d'un ensemble fini E ; on la notera $M_{\sigma, \tau}$.

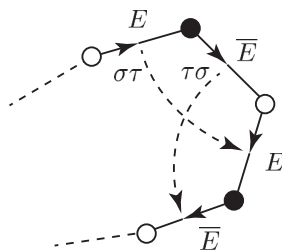
Il est bon d'introduire une représentation géométrique. A chaque sommet v nous associons un disque orienté D_v dont le bord ∂D_v est disséqué en une famille d'arcs de mêmes longueurs, indexée par E_v , de sorte que γ_v corresponde à une rotation d'angle $2\pi/|E_v|$ dans le sens positif. A chaque arête e , on associe un rectangle orienté R_e dont le bord est composé des arêtes e (orientée du blanc vers le noir), $\bar{e}$ orientée en sens inverse et les deux arcs orientés correspondent aux disques $D_{s(e)}$ et $D_{b(e)}$ associés à ses extrémités. On recolle ensuite les disques D_v et les rectangles R_e , de manière compatible

4. Autrement dit, les applications $s : E \rightarrow V_\circ$ et $b : E \rightarrow V_\bullet$ sont *surjectives*.

avec les orientations, et l'on obtient une surface $S(M)$ (voir figure).



Le bord $\partial S(M)$ de cette surface se compose d'arcs orientés indexés par $E \sqcup \bar{E}$, de sorte que deux arcs adjacents ne soient pas tous deux dans E , ou tous deux dans $\bar{E}$. La décomposition de ce bord en composantes connexes Γ_α correspond à la décomposition en cycles de $\sigma\tau$: dans Γ_α , un arc sur deux est dans E et la permutation circulaire associée à $\sigma\tau$ fait passer d'un arc dans E au suivant dans E dans le sens de l'orientation.



En échangeant E et $\bar{E}$, on a la décomposition en cycles de $\tau\sigma$.

Il revient au même de supposer que le graphe $G(M)$ sous-jacent à M et la surface $S(M)$ soient connexes. Le bord $\partial S(M)$ n'est pas toujours connexe, mais on le supposera désormais connexe. Ceci revient à supposer que $\sigma\tau$ et $\tau\sigma$ ont un seul cycle. On dit dans ce cas que la carte est *unicellulaire*. Si l'on choisit de plus une arête e_1 (la racine), et qu'il y ait k arêtes, il existe une numérotation $e_1, \dots, e_k$ des arêtes et une seule, telle que $\tau\sigma$ soit égal au cycle $\gamma_k = (12 \dots k)$.

En résumé, les factorisations $\gamma_k = \tau\sigma$ dans S_k correspondent bijectivement aux cartes biparties unicellulaires enracinées à k arêtes.

2.1.3. — Il est bien connu que dans un graphe connexe à k arêtes, le nombre des sommets est au plus égal à $k + 1$, et les arbres sont les graphes connexes à k arêtes et $k + 1$ sommets. Si l'on note $C(\sigma)$ l'ensemble des cycles d'une permutation σ , dans la carte associée à une factorisation $\gamma_k = \tau\sigma$ il y a $|C(\sigma)|$ sommets blancs et $|C(\tau)|$ sommets noirs, d'où l'inégalité

$$|C(\sigma)| + |C(\tau)| \leq k + 1,$$

sur laquelle nous reviendrons à la section 2.3.3. Nous dirons que la *factorisation* $\gamma_k = \tau\sigma$ est *minimale* si l'on a égalité dans la relation précédente. Noter aussi que dans un arbre à racine noire, les sommets noirs sont ceux qui sont à distance paire de la racine ; de la sorte, le coloriage des sommets est automatique.

On a donc un corollaire du résultat ci-dessus : *les factorisations minimales $\gamma_k = \tau\sigma$ correspondent aux arbres plans enracinés à k arêtes et $k + 1$ sommets*⁽⁵⁾. La surface associée à un tel arbre est homéomorphe à un disque.

2.2. Calcul des caractères

2.2.1. — Précisons d'abord ce qu'on entend par *série formelle à une infinité de variables* x_i ($i \in I$). Un monôme $x^\alpha = \prod_{i \in I} x_i^{\alpha_i}$ correspond à une application $\alpha : I \rightarrow \mathbb{N}$ telle que l'ensemble des i avec $\alpha_i \neq 0$ soit fini. Une série formelle est une combinaison linéaire de la forme $\sum_{\alpha \in M} c_\alpha x^\alpha$, où les c_α appartiennent à l'anneau de base K , et où M est l'ensemble des monômes (“une infinité de monômes dont chacun ne dépend que d'un nombre fini de variables”).

2.2.2. — Soit G un graphe biparti, avec l'ensemble des sommets $V = V_\circ \sqcup V_\bullet$. À toute application⁽⁶⁾ $\varphi : V \rightarrow \mathbb{N}^*$ on associe le monôme m_φ

$$m_\varphi = \prod_{v \in V_\circ} p_{\varphi(v)} \prod_{w \in V_\bullet} q_{\varphi(w)}$$

en les variables $p_1, p_2, \dots, q_1, q_2, \dots$. On désigne par N_G la série formelle dans $\mathbb{Z}[[p_1, p_2, \dots, q_1, q_2, \dots]]$ somme des monômes m_φ pour toutes les applications φ *croissantes* au sens suivant : s'il existe une arête allant du sommet blanc v au sommet noir w , on a $\varphi(v) \leq \varphi(w)$. Cette série N_G ne dépend que du *graphe réduit* G_{red} obtenu en identifiant deux arêtes ayant les mêmes extrémités.

2.2.3. — Soient G un graphe biparti, et λ une partition de taille $|\lambda| = n$. On a défini le graphe biparti G_λ à la section 2.1.1. La notion de *morphisme de graphes bipartis* est évidente : un morphisme Φ du graphe biparti $G = (V_\circ, V_\bullet, E)$ dans le graphe biparti $G' = (V'_\circ, V'_\bullet, E')$ se compose de trois applications

$$\Phi_\circ : V_\circ \rightarrow V'_\circ, \quad \Phi_\bullet : V_\bullet \rightarrow V'_\bullet, \quad \Phi_e : E \rightarrow E'$$

rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} V_\circ & \xleftarrow{s} & E & \xrightarrow{b} & V_\bullet \\ \Phi_\circ \downarrow & & \Phi_e \downarrow & & \Phi_\bullet \downarrow \\ V'_\circ & \xleftarrow{s'} & E' & \xrightarrow{b'} & V'_\bullet \end{array}$$

5. On a choisi plus haut pour racine d'une carte une des arêtes. Ceci est conforme aux conventions pour les arbres plans, si l'on prend pour arête privilégiée e_1 la plus à gauche pointant vers le sommet racine supposé noir.

6. Rappelons que $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers $n \geq 0$, et que $\mathbb{N}^*$ celui des entiers $n \geq 1$.

On note alors $N_G(\lambda)$ le nombre de morphismes de G dans G_λ . Ce nombre ne dépend que du graphe réduit G_{red} associé à G .

2.2.4. — Voici le lien entre ces deux définitions : si le diagramme de Young Δ_λ est de la forme $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$, avec deux compositions $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)$ et $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_m)$, on a

$$N_G(\lambda) = N_G(p_1, p_2, \dots, p_m, 0, 0, \dots; q_1, q_2, \dots, q_m, 0, 0, \dots).$$

Exemples :

- on a $N_G(\mathbf{p} \times \mathbf{q}) = p^{|\mathbf{V}_\circ|} q^{|\mathbf{V}_\bullet|}$ pour tout graphe biparti G ;
- si $\lambda = \mathbf{p} \times \mathbf{q}$, on a

$$N_{\bullet}(\lambda) = \sum_{i \leq j} p_i q_j = |\lambda|;$$

- on a $N_{\text{graph}} = \sum p_i p_j q_k q_\ell$, la somme étant étendue aux systèmes tels que $i \leq k$, $j \leq \ell$.

2.2.5. — Fixons un entier $k \geq 1$. Si λ est une partition d'un entier $n \geq k$, on considère S_k comme un sous-groupe de S_n , et donc la valeur $\chi^\lambda(\pi)$ du caractère irréductible χ^λ de S_n en l'élément π de S_k est bien définie. On utilise la normalisation suivante, due à Kerov et Olshanski [B5]

$$\text{Ch}_\pi(\lambda) = \frac{n!}{(n-k)!} \chi^\lambda(\pi) / \chi^\lambda(1).$$

Comme la valeur des caractères en un élément π ne dépend que de la partition μ décrivant la décomposition en cycles de π , on écrira $\text{Ch}_\mu(\lambda)$ pour $\text{Ch}_\pi(\lambda)$; on a pour paramètres la partition μ de k , fixée, et la partition λ de n , variable. La normalisation ci-dessus a pour effet que $\text{Ch}_\mu(\mathbf{p} \times \mathbf{q})$ va être représenté comme un polynôme en $p_1, \dots, p_m; q_1, \dots, q_m$. Le point de départ est la formule de Stanley [B7]

$$\text{Ch}_\pi(\mathbf{p} \times \mathbf{q}) = \sum_{\sigma\tau=\pi} \varepsilon(\tau) p^{|C(\sigma)|} q^{|C(\tau)|},$$

qu'il s'agit de généraliser.

2.2.6. — Soient σ et τ dans S_k . D'après la construction de la section 2.1.2, on associe à σ, τ une carte bipartie $M_{\sigma, \tau}$ décrite ainsi :

- l'ensemble $V_\circ$ des sommets blancs est l'ensemble $C(\sigma)$ des cycles de σ ;
- de même, on a $V_\bullet = C(\tau)$;
- l'ensemble des arêtes est donné par $E = [k]$;
- la source $s(i)$ d'une arête $i \in [k]$ est le cycle de σ contenant i , et de même $b(i)$ est le cycle de τ contenant i .

On note $G_{\sigma, \tau}$ le graphe biparti réduit associé à $M_{\sigma, \tau}$. Les sommets blancs (resp. noirs) sont les cycles de σ (resp. τ), et il y a une arête joignant $c_1 \in C(\sigma)$ à $c_2 \in C(\tau)$ si et seulement si $c_1 \cap c_2$ est non-vide. On écrit $N_{\sigma, \tau}$ pour $N_{G_{\sigma, \tau}}$; c'est une série formelle à coefficients entiers en les variables $p_1, p_2, \dots; q_1, q_2, \dots$.

2.2.7. — Voici maintenant le résultat central de V. Féray [B3], conjecturé préalablement par R. Stanley [B7].

THÉORÈME 2.1. — Soient π un élément de S_k et λ une partition d'un entier $n \geq k$. On a

$$\text{Ch}_\pi(\lambda) = \sum_{\tau\sigma=\pi} \varepsilon(\tau) N_{\sigma,\tau}(\lambda)$$

(somme sur σ, τ dans S_k).

La démonstration comporte plusieurs étapes.

1) Rappelons la définition du symétriseur de Young

$$C_\lambda = \sum \varepsilon(\tau) e_{\sigma\tau};$$

on a choisi un tableau T de forme λ , σ parcourt le groupe $L(T)$ et τ le groupe $C(T)$. Si l'on pose $\alpha_\lambda := n!/d_\lambda$ (où d_λ est le degré de la représentation ρ^λ de S_n associée à λ), on a $C_\lambda^2 = \alpha_\lambda C_\lambda$, donc $p_\lambda := \alpha_\lambda^{-1} C_\lambda$ est un idempotent, et l'espace de la représentation ρ^λ est $\mathbb{C}(S_n) \cdot p_\lambda$. Il en résulte que la valeur $\chi^\lambda(\pi)$ du caractère χ^λ de ρ^λ est la trace de l'opérateur $x \mapsto e_\pi x p_\lambda$ dans $\mathbb{C}(S_n)$. Un calcul facile donne

$$n! \chi^\lambda(\sigma)/d_\lambda = \sum_{\tau\sigma=\pi} \varepsilon(\tau) \tilde{N}_{\sigma,\tau}(\lambda)$$

pour tout π dans S_n . La sommation est étendue aux factorisations de π dans S_n , et $\tilde{N}_{\sigma,\tau}(\lambda)$ est le nombre de tableaux T de forme λ tels que $\sigma \in L(T)$ et $\tau \in C(T)$. Autrement dit, on compte les bijections de $[n]$ sur Δ_λ qui se déduisent d'un isomorphisme du graphe biparti $G_{\sigma,\tau}$ sur le graphe biparti G_λ associé à λ .

2) Il y a deux restrictions dans la formule précédente : tout d'abord $k = n$, et $N_{\sigma,\tau}(\lambda)$ est remplacé par $\tilde{N}_{\sigma,\tau}(\lambda)$. Pour traiter le cas $k < n$, on note que $\frac{n!}{(n-k)!}$ est le nombre d'applications injectives $\theta : [k] \rightarrow [n]$, que toute application de ce type transforme un élément σ de S_k en une permutation de $\theta([k])$ que l'on prolonge en un élément σ_θ de S_n qui fixe les éléments de $[n] \setminus \theta([k])$. La somme $\sum_\theta e_{\sigma_\theta}$ appartient au centre de l'algèbre de groupe $\mathbb{C}(S_n)$, et donne un scalaire dans toute représentation irréductible de S_n ("lemme de Schur")⁽⁷⁾.

3) On obtient alors la relation

$$(4) \quad \text{Ch}_\pi(\lambda) = \sum_{\pi=\tau\sigma} \varepsilon(\tau) \tilde{N}_{\sigma,\tau}(\lambda)$$

où $\tilde{N}_{\sigma,\tau}(\lambda)$ compte les applications injectives f de $[k]$ dans Δ_λ qui définissent un morphisme de graphes bipartis de $G_{\sigma,\tau}$ dans G_λ . Il faut se débarrasser de l'hypothèse que f est injective. Or la somme qui nous intéresse $\sum_{\pi=\tau\sigma} \varepsilon(\tau) N_{\sigma,\tau}(\lambda)$ peut aussi s'écrire

$$\sum_{f,\sigma,\tau} \varepsilon(\tau)$$

7. Voir à la section 2.3.2 un raisonnement analogue.

avec les conditions

- $\sigma \in S_k, \tau \in S_k, \tau\sigma = \pi$;
- f est une application de $[k]$ dans Δ_λ ;
- $f(i)$ et $f(\sigma(i))$ sont dans la même ligne pour tout i ;
- $f(i)$ et $f(\tau(i))$ sont dans la même colonne pour tout i .

Montrons que la contribution pour une fonction f non injective fixée est nulle : en effet, si l'on a $a \neq b$ et $f(a) = f(b)$, à toute factorisation $\pi = \tau\sigma$ comme ci-dessus, on en fait correspondre une autre $\pi = \tau'\sigma'$ avec $\sigma' = (ab) \cdot \sigma$, $\tau' = \tau \cdot (ab)$ et comme (ab) est une transposition, on a $\varepsilon(\tau') = -\varepsilon(\tau)$, et les termes de la somme sur σ, τ s'annulent par paires.

2.3. L'algèbre Λ et les polynômes de Kerov

2.3.1. — Nous définissons le degré d'un polynôme ou d'une série formelle en les p_i et les q_i en donnant le degré 1 à p_i et à q_i . Ayant choisi un anneau commutatif K de coefficients, nous noterons Φ_s (ou $\Phi_s(K)$) le module des séries formelles en les p_i et les q_i homogènes de degré s . La somme directe des Φ_s (pour s entier ≥ 0) sera notée Φ ou $\Phi(K)$.

Pour tout graphe biparti G à s sommets, la série N_G est somme de monômes de degré s , donc appartient à $\Phi_s(\mathbb{Z})$. Le théorème de Féray, décrit à la section 2.2.7, s'écrit $\text{Ch}_\mu = \sum_{\tau\sigma=\pi} \varepsilon(\tau) N_{G_{\sigma,\tau}}$ (μ partition de k , correspondant à la décomposition en cycles de $\pi \in S_k$, avec σ, τ parcourant S_k) ; il montre que les Ch_μ appartiennent à Φ . Nous noterons $\Lambda(K)$ (ou Λ) le sous- K -module de $\Phi(K)$ engendré par les “caractères” Ch_μ pour toutes les partitions μ .

2.3.2. — Il est immédiat que si un graphe biparti G est réunion disjointe de deux sous-graphes bipartis G' et G'' on aura $N_G = N_{G'} \cdot N_{G''}$. On peut aussi montrer que le produit de deux Ch_μ appartient encore à $\Lambda(K)$, donc que $\Lambda(K)$ est une K -algèbre commutative. Féray le démontre dans l'exemple $\text{Ch}_2 \cdot \text{Ch}_2$; vu sa définition, on a

$$\begin{aligned} \text{Ch}_2(\lambda) &= n(n-1) \psi^\lambda((12)) \\ &= \sum \psi^\lambda((ij)) = \psi^\lambda \left(\sum_{i \neq j} (ij) \right) \end{aligned}$$

la somme portant sur les couples i, j avec $i \neq j$ dans $[n]$. L'élément $\sum_{i \neq j} (ij)$ appartient au centre de l'algèbre $K(S_n)$. De plus ψ^λ est multiplicatif sur ce centre. Par un calcul dans ce centre, on trouve l'identité

$$\text{Ch}_2 \cdot \text{Ch}_2 = \text{Ch}_{22} + 4 \text{Ch}_3 + 2 \text{Ch}_{11}.$$

Noter que Ch_μ n'est pas un élément homogène de Φ car le terme $N_{\sigma,\tau}$ correspondant à une factorisation $\pi = \tau\sigma$ est homogène de degré $|C(\sigma)| + |C(\tau)|$.

2.3.3. — Examinons ce point de plus près. Pour toute permutation σ de S_k , posons $|\sigma| = k - |C(\sigma)|$ où $|C(\sigma)|$ représente le nombre de cycles de σ . On sait que l'on a $|\sigma| = 1$ pour une transposition (ij) , qu'on a $|1| = 0$ et plus généralement que $|\sigma|$ est le nombre minimal de facteurs dans une décomposition $\sigma = t_1 \dots t_\ell$ en produit de transpositions. On en déduit aussitôt $|\pi| \leq |\sigma| + |\tau|$ si $\pi = \tau\sigma$, d'où

$$|C(\sigma)| + |C(\tau)| \leq |C(\pi)| + k.$$

Si μ est le type cyclique de π , on a $k = |\mu|$ et $|C(\pi)|$ est le nombre de parts (ou longueur) $\ell(\mu)$ de μ . *Conclusion* : Ch_μ est somme de termes homogènes de degrés $\leq |\mu| + \ell(\mu)$. De plus, les relations $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{|\sigma|}$, $\varepsilon(\tau) = (-1)^{|\tau|}$, $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$ montrent que tous les termes du développement de Ch_μ sont homogènes de degré $|\mu| + \ell(\mu) - 2\ell$ avec $\ell \geq 0$ entier. Lorsque $\mu = k$ a une seule part, cela correspond au cas où π est conjugué à la permutation circulaire γ_k , et l'on a $\text{Ch}_k(\lambda) = \frac{n!}{(n-k)!} \chi^\lambda(\gamma_k) / \chi^\lambda(1)$ pour toute partition λ de taille $n \geq k$. D'après ce qui précède, Ch_k est somme de termes homogènes de degrés $\leq k + 1$. On notera R_{k+1} le terme homogène de plus haut degré $k + 1$ de Ch_k .

2.3.4. — D'après ce qu'on a vu en 2.3.2, R_{k+1} est la somme des termes $\varepsilon(\tau) N_{\sigma,\tau}$ correspondant aux factorisations $\tau\sigma = \gamma_k$ pour lesquelles $|C(\sigma)| + |C(\tau)| = k + 1$; autrement dit le graphe connexe $\tilde{G}_{\sigma,\tau}$ sous-jacent à la carte $M_{\sigma,\tau}$ possède k arêtes et $k + 1$ sommets; il est donc réduit (sans arête multiple) et c'est un arbre, enraciné, plan, comme on l'a vu à la section 2.1.3. En conclusion, on a (avec une détermination facile du signe)

$$R_\ell = \sum_T (-1)^{n_0(T)+1} N_T,$$

où la somme est étendue à tous les arbres plans enracinés T à ℓ sommets, $\ell - 1$ arêtes et $n_0(T)$ sommets blancs.

Exemples :

$$R_2 = N_{\bullet}$$

$$R_3 = N_{\bullet\bullet} - N_{\bullet\circ}$$

$$R_4 = N_{\circ\circ} + N_{\bullet\bullet\bullet} - N_{\bullet\bullet\circ}$$

Notons aussi qu'on a

$$\text{Ch}_1 = R_2, \quad \text{Ch}_2 = R_3, \quad \text{Ch}_3 = R_4 + R_2.$$

De manière générale, pour obtenir les termes de plus haut degré de Ch_μ , pour une partition $(\mu_1, \dots, \mu_\ell)$ de k , on doit s'intéresser aux décompositions $\pi = \tau\sigma$ minimales, c'est-à-dire pour lesquelles $|C(\sigma)| + |C(\tau)| = |C(\pi)| + k$. On les obtient comme suit : si π est décomposé en cycles $\gamma_1, \dots, \gamma_\ell$ de longueurs respectives $k_1, \dots, k_\ell$ (avec $k_1 + \dots + k_\ell = k$) on choisit des *décompositions minimales* $\gamma_i = \tau_i \sigma_i$ dans S_{k_i} , et l'on pose $\tau = \tau_1 \dots \tau_\ell$,

$\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_\ell$. Ceci prouve que le terme de plus haut degré de Ch_μ est $\prod_{i=1}^{\ell} R_{\mu_i+1}$ (et ce degré est $|\mu| + \ell(\mu)$). En plus, ces deux polynômes ont même parité (comme on l’a vu à la section 2.3.3), donc leur différence est de degré $\leq |\mu| + \ell(\mu) - 2$.

2.3.5. — Il résulte des travaux de Kerov, Olshanski, Ivanov et Biane que Λ est l’algèbre des polynômes en $R_2, R_3, \dots$. Par suite, on peut écrire

$$\text{Ch}_k = K_k(R_2, R_3, \dots)$$

où l’on a introduit le polynôme de Kerov K_k à coefficients entiers. Le résultat suivant a été conjecturé par Kerov en 2000, prouvé par Féray en 2009.

THÉORÈME 2.2. — *Le polynôme de Kerov a des coefficients entiers positifs.*

Nous allons donner un aperçu de la démonstration.

2.3.6. — Commençons par énoncer le *principe d’inclusion-exclusion cyclique*. Soit G un graphe biparti réduit (sans arête double), et soit E l’ensemble de ses arêtes. Soit C un cycle orienté dans G , et soit E_C l’ensemble des arêtes de C orientées d’un sommet blanc vers un sommet noir ; cela constitue la moitié des arêtes. On a alors la relation

$$(IE) \quad \sum_{F \subset E_C} (-1)^{|F|} N_{G \setminus F} = 0,$$

où $G \setminus F$ désigne le graphe G dont on a supprimé les arêtes appartenant à F . Pour faire la démonstration, on peut oublier le reste du graphe, et se ramener au cas où G est un cycle biparti (c’est-à-dire de longueur paire avec un coloriage adapté). Illustrons l’exemple typique d’un cycle de longueur 4 ; on a la relation

$$N_{G_0} - N_{G_1} - N_{G_2} + N_{G_3} = 0$$

pour les graphes

$$G_0 = \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} \quad G_1 = \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \\ \bullet \end{array} \quad G_2 = \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \bullet \end{array} \quad G_3 = \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array}$$

On a à considérer des sommes de monômes $p_i p_j q_k q_\ell$ (où on a numéroté les sommets blancs par i, j et les noirs par k, ℓ). Chacun des graphes correspond à un système d’inégalités, et l’analyse est facile. Le cas général est analogue.

En corollaire, on a un algorithme pour réduire toute série de la forme N_G , donc aussi les Ch_μ , en polynômes à coefficients entiers en les N_T , où T est un arbre plan, enraciné.

En fait, on peut faire mieux. Considérons un graphe biparti $G = (V_\circ, V_\bullet, E)$ muni d’une composition $(V_\circ^1, \dots, V_\circ^\ell)$ de $V_\circ$, et d’une composition $(V_\bullet^1, \dots, V_\bullet^\ell)$ de $V_\bullet$, de sorte que l’ensemble des arêtes est la partie E de $V_\circ \times V_\bullet$ réunion des $V_\circ^i \times V_\bullet^j$ pour $1 \leq i \leq j \leq \ell$. Si l’on pose $c_\circ(i) = |V_\circ^i|$ et $c_\bullet(i) = |V_\bullet^i|$, le graphe est défini à isomorphisme près par les deux compositions $\mathbf{c}_\circ = (c_\circ(1), \dots, c_\circ(\ell))$ et $\mathbf{c}_\bullet = (c_\bullet(1), \dots, c_\bullet(\ell))$. Ce n’est autre que le graphe G_λ associé à la partition $\lambda = \mathbf{c}_\circ \times \mathbf{c}_\bullet$ (cf. section 2.1.1). On notera $N(\mathbf{c}_\circ, \mathbf{c}_\bullet)$ la série N_G correspondante.

On montre alors sur la définition explicite des séries $N_G(p_1, p_2, \dots; q_1, q_2, \dots)$ que les séries $N(\mathbf{c}_\circ, \mathbf{c}_\bullet)$ sont linéairement indépendantes. De plus, par utilisation de la relation (IE) pour les cycles de longueur 4, on peut exprimer les séries N_G (donc aussi $\text{Ch}_\mu, \text{Ch}_k, R_k$) dans la base formée des $N(\mathbf{c}_\circ, \mathbf{c}_\bullet)$ avec des coordonnées entières.

2.3.7. — Pour achever la démonstration, nous aurons besoin de la notion de *graphe expenseur de type ν* , où $\nu = (\nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots \geq \nu_r)$ est une partition. Soit donc G un graphe biparti, et h une fonction définie sur l'ensemble $V_\circ$ à valeurs entières ≥ 2 . On suppose que le multi-ensemble $h(V_\circ)$ (*i.e.* la famille de ces entiers avec répétition éventuelle) se réarrange en la partition ν .

On dira que le graphe décoré (G, h) est *expenseur* si la propriété suivante est vérifiée :

Pour toute partie V de $V_\circ$, non vide, contenue dans une composante connexe de G , et distincte d'elle, on a $|V| + n(V) > \sum_{v \in V} h(v)$, où $n(V)$ est le nombre de sommets noirs connectés à un sommet blanc dans V .

Dolega, Féray et Śniady montrent dans [B1] que le coefficient du monôme $R_{\nu_1} \dots R_{\nu_r}$ dans le polynôme de Kerov $K_k(R_2, R_3, \dots)$ est égal au nombre de cartes biparties, unicellulaires, enracinées, avec k arêtes, munies d'une décoration h de type ν sur les sommets blancs, qui en fasse un graphe expenseur. Ce coefficient est donc un entier positif.

La notion de graphe expenseur n'est pas nouvelle (voir [B4] pour une revue). La démonstration suppose un bon soin dans le contrôle des signes.

2.3.8. — En conclusion, on peut formuler le théorème 2.1 de la manière suivante. Pour tout entier $k \geq 1$, notons $\mathcal{M}_k$ l'ensemble des cartes biparties, avec k arêtes dont une marquée, unicellulaires⁽⁸⁾. On note $\mathcal{T}_k$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_k$ constitué des arbres planaires, enracinés, avec k arêtes (donc $k + 1$ sommets). On a alors

$$\text{Ch}_k = (-1)^k \sum_{M \in \mathcal{M}_k} (-1)^{|V_\circ(M)|} N_{G(M)}$$

$$R_{k+1} = (-1)^k \sum_{T \in \mathcal{T}_k} (-1)^{|V_\circ(T)|} N_{G(T)}$$

en notant $G(M)$ le graphe réduit associé à M , et de même pour $G(T)$.

Comme Ch_k a R_{k+1} pour terme de plus haut degré, l'algèbre Λ est aussi l'algèbre de polynômes $K[\text{Ch}_1, \text{Ch}_2, \dots]$, mais la graduation n'est pas compatible. Comme $R_{\mu_1+1} \dots R_{\mu_\ell+1}$ est le terme de plus haut degré de Ch_μ pour $\mu = (\mu_1 \geq \dots \geq \mu_\ell)$, on voit aussi que les séries Ch_μ forment une base de l'algèbre Λ .

2.4. Évaluations asymptotiques

Les formules exactes données pour les valeurs des caractères redonnent facilement les formules asymptotiques sur les diagrammes de Young, telles qu'elles ont été découvertes en 1977 par Kerov et Vershik dans [C5] et par Logan et Schepp dans [C6].

8. C'est-à-dire avec un bord connexe.

2.4.1. — Notons $\mathcal{Y}_n$ l'ensemble des partitions de n (ou des diagrammes de Young de taille n). Rappelons la formule bien connue en théorie des groupes

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{Y}_n} d_\lambda \chi^\lambda(\pi) = \begin{cases} |S_n| = n! & \text{si } \pi = 1 \\ 0 & \text{si } \pi \neq 1. \end{cases}$$

Faisant $\pi = 1$, on a donc $\sum_{\lambda} d_\lambda^2 = n!$, d'où une mesure de probabilité $\mathcal{P}_n$ sur $\mathcal{Y}_n$ attribuant la probabilité $\mathcal{P}_n(\lambda) := d_\lambda^2/n!$ au point λ (“mesure de Plancherel”). De plus, la moyenne sur $\mathcal{Y}_n$ de la fonction $\lambda \mapsto \psi^\lambda(\pi) = \chi^\lambda(\pi)/d_\lambda$ est égale à $\delta_{\pi,1}$.

2.4.2. — Introduisons l'espace fonctionnel $\mathcal{L}$ formé des applications $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfont aux deux conditions :

- il existe $A > 0$ tel que $\omega(x) = |x|$ pour $|x| > A$;
- ω est 1-lipschitzienne, c'est-à-dire qu'on a l'inégalité $|\omega(x) - \omega(y)| \leq |x - y|$ pour x, y réels.

On le munit de la distance

$$d(\omega, \omega') = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\omega(x) - \omega'(x)|.$$

Cette formule a un sens car $\mathcal{L}$ se compose de fonctions continues et bornées. Noter aussi que toute fonction $\omega \in \mathcal{L}$ a presque partout une dérivée ω' et qu'on a $-1 \leq \omega'(x) \leq 1$ pour presque tout x .

D'après le théorème d'Ascoli, pour tout $A > 0$, le sous-espace $\mathcal{L}_A$ de $\mathcal{L}$, formé des fonctions ω telles que $\omega(x) = |x|$ lorsque $|x| > A$, est compact ; par suite, l'espace métrique $\mathcal{L}$ est réunion des sous-espaces métriques compacts $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_3 \subset \dots$. Autrement dit, l'intégration à la Lebesgue fonctionne parfaitement dans l'espace $\mathcal{L}$.

2.4.3. — Nous allons d'abord *recalibrer* les fonctions ω_λ introduites à la section 1.1.6. Pour toute partition λ de n , posons⁽⁹⁾

$$\bar{\omega}_\lambda(x) = n^{-1/2} \omega_\lambda(n^{1/2} x).$$

Alors l'aire de la région de $\mathbb{R}^2$ définie par les inégalités

$$|x| \leq y \leq \bar{\omega}_\lambda(x)$$

est égale à 1, *indépendamment de n* . Il est clair aussi que la fonction $\bar{\omega}_\lambda$ appartient à $\mathcal{L}$. L'image par l'application $\bar{\omega}^{(n)} : \lambda \mapsto \bar{\omega}_\lambda$ de $\mathcal{Y}_n$ dans $\mathcal{L}$ de la loi de probabilité $\mathcal{P}_n$ sur $\mathcal{Y}_n$ est une loi de probabilité Π_n sur $\mathcal{L}$.

Par ailleurs, on définit un élément Ω de $\mathcal{L}$ par la formule

$$\Omega(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } |x| \geq 2 \\ \frac{2}{\pi} \left[x \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + (4 - x^2)^{1/2} \right] & \text{si } |x| \leq 2. \end{cases}$$

Soit aussi δ_Ω la masse unité au point Ω de $\mathcal{L}$.

9. Intuitivement, cela revient à dessiner le diagramme de Young (en version russe) avec des petits carrés de côté $\frac{1}{\sqrt{n}}$, d'où n carrés d'aire $1/n$.

2.4.4. — Voici maintenant le théorème asymptotique de Kerov, Vershik, Logan et Schepp :

THÉORÈME 2.3. — Dans l'espace métrique $\mathcal{L}$, la suite des mesures de probabilité Π_n tend vers δ_Ω .

Employons un langage plus pittoresque : considérons pour $n \geq 1$ une partition aléatoire $\lambda^{(n)}$ de taille n , choisie selon la loi de probabilité $\mathcal{P}_n$ sur $\mathcal{Y}_n$. Faisons subir à la courbe aléatoire $C_n : y = \omega_{\lambda^{(n)}}(x)$ dans $\mathbb{R}^2$ une homothétie de rapport $n^{-1/2}$ (qui la ramène dans une région finie). Soit $\bar{C}_n$ la courbe aléatoire obtenue. Alors en probabilité, la courbe $\bar{C}_n$ tend vers la courbe C_∞ définie par $y = \Omega(x)$ (voir la figure donnée dans l'introduction).

2.4.5. — Voici quelques points saillants de la démonstration. Il faut d'abord s'assurer que la suite des mesures Π_n est “tendue” (*tight* en anglais international !). Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte de la forme $\mathcal{L}_A$ telle que $\Pi_n(\mathcal{L}_A) \geq 1 - \varepsilon$ pour tout $n \geq 1$. Il faut ensuite s'assurer que pour tout $A > 0$ et toute fonction continue F sur $\mathcal{L}_A$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{L}_A} F \cdot d\Pi_n = F(\Omega).$$

Pour cela, on peut utiliser le théorème de Stone-Weierstrass qui exprime toute fonction continue F sur l'espace compact $\mathcal{L}_A$ comme limite uniforme de polynômes en une suite séparante de fonctions continues sur $\mathcal{L}_A$.

C'est le moment d'introduire les moments t_k (pour $k \geq 2$) de la section 1.1.8 ; la théorie des moments montre que c'est une suite séparante. On utilise alors les faits suivants :

a) Une relation algébrique

$$t_k = \frac{1}{k} \sum_{r=1}^k \binom{k}{r} \sum_{\ell_1 + \dots + \ell_r = k} R_{\ell_1} R_{\ell_2} \dots R_{\ell_r}$$

qui permet de naviguer de la suite $(R_2, R_3, \dots)$ à la suite $(t_2, t_3, \dots)$ et vice-versa.

b) L'homogénéité des R_k permet de montrer que l'on a (avec l'abus de notation $h_{1/n}$ pour les homothéties)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_2(h_{1/n} \lambda) = 1 \quad (\text{calcul d'aire})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_k(h_{1/n} \lambda) = 0 \quad \text{pour } k \geq 3.$$

c) Les moments de la fonction Ω étant définis par

$$t_k(\Omega) = \int_{-2}^2 \frac{1}{2} (\Omega(x) - |x|) x^{k-2} dx,$$

la fonction Ω est caractérisée par les valeurs

$$\begin{cases} t_{2k}(\Omega) = (2k-1)!/(k!)^2 \\ t_{2k+1}(\Omega) = 0. \end{cases}$$

Ces relations équivalent à $R_2(\Omega) = 1$, $R_k(\Omega) = 0$ pour $k \geq 3$, en utilisant la formule de a) pour définir $R_k(\Omega)$.

Remerciements. Tout d'abord à Valentin Féray, qui m'a communiqué ses notes de cours, et Victor Rabiet pour le prêt de ses fichiers, en particulier ceux des figures. Les auditeurs du Séminaire Chevalley à Paris-Diderot ont servi de cobayes. Enfin, une fois encore, l'assistance experte et souriante de Cécile Gourgues, pour la saisie, ne m'a pas fait défaut.

RÉFÉRENCES

- A. *Représentations des groupes finis, et en particulier symétriques*
- [A0] – *Combinatoire et représentations du groupe symétrique*, (Colloque de Strasbourg 1976), Lecture Notes in Math., Vol. **579** (1977), Springer-Verlag.
 - [A1] N. BOURBAKI – *Algèbre, chapitre 8*, 2^e édition, (2012), Springer-Verlag.
 - [A2] F.G. FROBENIUS – *Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe*, Sitzungsberichte Akad. zu Berlin, (1900), 516–534.
 - [A3] W. FULTON et J. HARRIS – *Representation theory : a first course*, (1991), Springer-Verlag.
 - [A4] W. FULTON – *Young tableaux*, (1997), Cambridge University Press.
 - [A5] G.D. JAMES – *The representation theory of the symmetric groups*, Lecture Notes in Math., Vol. **682** (1978), Springer-Verlag.
 - [A6] G.D. JAMES et A. KERBER – *The representation theory of the symmetric group*, Encycl. Maths. and Appl., Vol. **16** (1981), Addison-Wesley.
 - [A7] D. KNUTSON – *λ -rings and the representation theory of the symmetric group*, Lecture Notes in Math., Vol. **308** (1973), Springer-Verlag.
 - [A8] I.G. MACDONALD – *Symmetric functions and Hall polynomials*, 2^e édition, (1995), Oxford University Press.
 - [A9] G. de B. ROBINSON – *Representation theory of the symmetric group*, (1961), University of Toronto Press.
 - [A10] B.E. SAGAN – *The symmetric group*, (1991), Wadsworth.
 - [A11] I. SCHUR – *Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen*, in *Gesammelte Abhandlungen*, (1973), Springer-Verlag, Band 1, 1–72.

- [A12] H. WEYL – *The classical groups, their invariants and representations*, (1939), Princeton University Press.
- [A13] A. YOUNG – *On quantitative substitutional analysis III*, Proc. Math. London Society (2), **28** (1928), 255–292.

B. *Méthodes combinatoires pour les caractères*

- [B1] M. DOLEGA, V. FÉRAY et P. ŠNIADY – *Explicit combinatorial interpretation of Kerov character polynomials as number of permutation factorizations*, Adv. Math., **225** (2010), 81–120.
- [B2] V. FÉRAY – *Combinatorial interpretation and positivity of Kerov’s character polynomials*, J. Alg. Comb., **29** (2009), 473–507.
- [B3] V. FÉRAY – *Stanley’s formula for characters of the symmetric group*, Annals of Combinatorics, **13** (2010), 453–461.
- [B4] S. HOORY, N. LINIAL et A. WIGDERSON, *Expander graphs and their applications*, Bull. Amer. Math. Soc., **43** (2006), 439–562.
- [B5] S.V. KEROV et G.I. OLSHANSKI – *Polynomial functions on the set of Young diagrams*, C.R. Acad. Sci. Paris **319**, série I (1994), 121–126.
- [B6] P. RATTAN – *Stanley’s character polynomials and coloured factorizations in the symmetric group*, J. Comb. Theory, Ser. A, **114** (2008), 535–546.
- [B7] R.P. STANLEY – *A conjectured combinatorial interpretation and irreducible character values of the symmetric group*, (2006), arXiv :math.CO/0606467.

C. *Diagrammes de grande taille*

- [C1] P. BIANE – *Representations of symmetric groups and free probability*, Adv. Math., **138** (1998), 126–181.
- [C2] V. FÉRAY et P. ŠNIADY – *Asymptotics of characters of symmetric groups related to Stanley character formula*, Ann. Math., **173** (2011), 887–906.
- [C3] V. IVANOV et G. OLSHANSKI – *Kerov’s central limit theorem for the Plancherel measure on Young diagrams*, in *Symmetric functions* (2001), *Survey of developments and perspectives*, (2002), Kluwer Acad. Publ.
- [C4] S. KEROV – *The asymptotics of interlacing sequences and the growth of continual Young diagrams*, POMI (Saint-Petersbourg), **205** (1993), 21–29.
- [C5] S. KEROV et A. VERSHIK – *Asymptotics of the Plancherel measure of the symmetric group and the limiting form of Young tableaux*, Sov. Math. Doklady, **18** (1977), 527–531.
- [C6] B.F. LOGAN et L.A. SCHEPP – *A variational problem for random Young tableaux*, Adv. Math., **26** (1977), 206–222.
- [C7] A. OKUNKOV – *Random matrices and random permutations*, Int. Math. Res. Notices, **2000** (2000), 1043–1095.

Pierre CARTIER
CNRS
Institut Mathématique
de Jussieu (Paris)
et
I.H.É.S.
35, route de Chartres
91440 Bures-sur-Yvette
E-mail : `cartier@ihes.fr`