Table des matières

Chapitre 14

Le *Calcul des Probabilités* de Poincaré

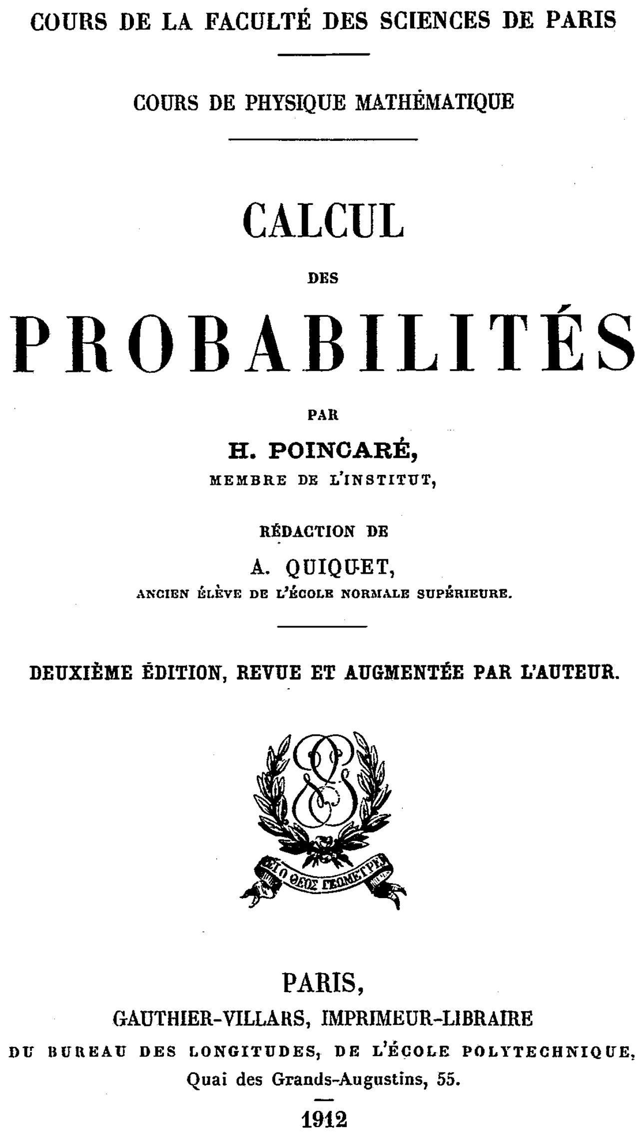
Par ***Pierre Cartier***

14.1 La composition du livre

Les probabilités occupent une place assez mineure dans l'œuvre de Poincaré. Je m'occuperai ici de son livre *Calcul des Probabilités* [14]. Comme on le sait, Poincaré occupa longtemps la chaire de physique mathématique de la Faculté des Sciences de Paris. Il y donnait un cours nouveau presque chaque année, et la plupart ont été rédigés. Il y traitait de questions fort diverses (mécanique des fluides, mécanique céleste, etc.) et son traité des probabilités est l'un de ces cours. La première édition est de 1896, elle est rédigée par Albert Quiquet, « ancien élève de l'École Normale Supérieure ». Le *Supplément historique 2005* de l'annuaire de l'École Normale Supérieure [20] mentionne un Jules Théaub (sic !) Quiquet, de la promotion 1883, décédé en 1934, actuaire-conseil à la compagnie d'assurances La Nationale. Ce n'est donc ni un étudiant, ni un élève de Poincaré (il n'y en eut guère) mais un praticien de la statistique venu s'instruire auprès du grand maître, qui a prêté sa plume à Poincaré.

14.2 L'ouvrage d'un physicien

Ce livre est un livre-charnière. La première édition en fait sans ambages un ouvrage du 19-ième siècle, dans le sillage d'une longue tradition de manuels, dont celui de Joseph Bertrand [2], classique à l'époque et que cite Poincaré. Un travail d'historien des sciences fort intéressant serait la comparaison détaillée du manuel de Bertrand et des deux versions successives (1896 et 1912) de celui de Poincaré. Ma thèse sera qu'il faut lire Poincaré comme *physicien*, vu les références constantes à la théorie cinétique des gaz. Or, entre 1896 et 1912, l'histoire s'est accélérée : il y a l'œuvre de Gibbs, complétant celles de Maxwell et Boltzmann, il y a les recherches de Planck en thermodynamique, et la loi du



COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

COURS DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

CALCUL

DES

PROBABILITÉS

PAR

H. POINCARÉ,

MEMBRE DE L'INSTITUT,

RÉDACTION DE

A. QUIQUET,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

DEUXIÈME ÉDITION, REVUE ET AUGMENTÉE PAR L'AUTEUR.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1912

FIG. 14.1 – Première page du *Calcul des probabilités* de Poincaré, édition de 1912

rayonnement du corps noir (1900). Il y a surtout le travail d'Einstein et de Smoluchowski sur le mouvement brownien, travail théorique qui se prolonge par les expériences de Jean Perrin. La détermination du nombre d'Avogadro-Loschmidt qui en découle donne une base empirique solide aux vues encore théoriques de la physique statistique. De tout cela, il n'y a pas d'écho dans le livre de Poincaré de 1912. On peut imaginer que pressé par le temps (il meurt en 1912), aux prises avec de multiples projets, il n'a pas eu l'ambition d'écrire un *Traité des Probabilités* comme il y eut de nombreux « Traités d'Analyse ».

14.3 Méthodes mathématiques des probabilités

Sur le plan mathématique aussi, le début du vingtième siècle voit un bouleversement profond du calcul des probabilités. La thèse de Louis Bachelier [1](1) inaugure la longue lignée des travaux sur le mouvement brownien, qui se poursuivra avec Norbert Wiener [22] en 1923 et Paul Lévy en 1925 [11]. Mais le travail peut-être le plus profond de cette époque est celui d'Émile Borel en 1909 [3] sur les probabilités dénombrables. C'est là où, pour la première fois, les nouvelles méthodes de Borel et Lebesgue sur la mesure et l'intégration trouvent leur application au calcul des probabilités. Direction suivie par Hugo Steinhaus [19] en 1923, et qui aboutira à la célèbre axiomatique(2) de Kolmogorov [10] en 1933. Mais ce qui aura le plus d'influence (tout au moins en France), c'est la longue série de *Monographies sur le Calcul des Probabilités* publiée sous la direction d'Émile Borel.

Sur ce plan, Poincaré n'innove guère. Pas de mention de la théorie de la mesure, et quand il doit introduire une fonction qui serve de densité de probabilité, il la suppose « en général continue » ([14], page(3) 148). En fait, il raisonne le plus souvent « comme un physicien » et ne s'embarrasse pas pour intégrer par parties ou développer en série de Taylor convergente. Il ne fait même pas de différence entre la transformée de Fourier, qui existe toujours, et la transformée de Laplace, qui suppose des hypothèses fortes sur les moments d'une variable aléatoire. Rien de tous ces raisonnements ne résisterait à l'œil critique des analystes allemands(4) de l'époque (que Poincaré connaît bien par ailleurs). Mais

---

[1] Dont Henri Poincaré était rapporteur. (N.d.É.)

[2] La position de Bourbaki sur les probabilités est assez remarquable. Dans son entreprise d'axiomatisation de *toutes* les mathématiques, il est étonnant qu'il n'ait pas songé à incorporer les probabilités. Pourtant, après Kolmogorov, elles ont quitté les limbes des mathématiques appliquées et de la physique mathématique pour accéder au statut glorieux de théorie mathématique « pure et axiomatique ». Toutefois, nous avons un texte très intéressant d'André Weil [21] en 1940 où il se réfère aux probabilités ; selon Weil, Bourbaki devait inclure « les premiers principes du calcul des probabilités » dans un fascicule sur l'intégration. Il ne l'a pas fait, mais il aura un remords tardif et publiera en 1969 un volume supplémentaire [5] à sa théorie de l'intégration. Il y récupère le mouvement brownien au prix d'un exercice de corde raide, mais, heureusement, il inclut une étude historique fort intéressante et fort pertinente sur les problèmes analytiques liés au calcul des probabilités.

[3] Les numéros des pages pour les citations de [14] sont ceux de l'édition de 1912.

[4] Ces traits ne contribueront pas peu au discrédit relatif dont souffrit Poincaré dans la communauté mathématique française des années 1940 à 1960. La critique des « analystes allemands » sera amplement relayée par les fidèles de Bourbaki, avant que Dieudonné ne réhabilite Poincaré à la manière tonitruante qui était la sienne !

ces remarques confortent ma thèse *qu'il faut lire le livre de Poincaré comme l'ouvrage d'un physicien, et non d'un mathématicien.*

14.4 Réfutation des thèses classiques sur le hasard

Que reste-t-il dans ce livre ? Beaucoup, mais il faut chercher les perles, parfois cachées. Commençons par l'*analyse conceptuelle* et n'oublions pas que Poincaré est loué (en France) comme un des grands philosophes des sciences[(5)].

L'introduction à l'édition de 1912 est reprise d'un article [16] de 1907 (amputé de trois courts passages), déjà repris dans l'ouvrage *Science et Méthode* [17] en 1908. Il s'agit d'analyser la notion de hasard et la possibilité de « lois du hasard ». Tout d'abord, Poincaré se place au point de vue des probabilités *objectives* et se refuse à réduire le hasard à une simple ignorance. Peut-être s'agit-il là d'une incursion dans le domaine idéologique d'un savant par ailleurs prudent. J'y verrais la confirmation dans cette remarque :

« ... *bien des gens trouvent tout naturel de prier pour avoir la pluie ou le beau temps, alors qu'ils jugeraient ridicule de demander une éclipse par une prière* ... » (Poincaré [14], page 5).

Bien que ne réfutant pas catégoriquement la thèse, chère à Cournot, des séries temporelles qui se télescopent, il en réduit la portée :

« *Notre faiblesse ne nous permet pas d'embrasser l'univers tout entier, et nous oblige à le décomposer en tranches. Nous cherchons à le faire aussi peu artificiellement que possible, et néanmoins, il arrive, de temps en temps, que deux de ces tranches réagissent l'une sur l'autre. Les effets de cette action mutuelle nous* paraissent[(6)] *alors dus au hasard. Est-ce là une troisième manière de concevoir le hasard ? Pas toujours* ... » (Poincaré [14], page 11).

La prière pour la pluie, et la tuile tombée du toit, étant écartées, examinons les deux grandes caractéristiques du hasard selon notre auteur.

14.5 Première caractéristique du hasard

Je cite Poincaré ([14], pages 4 et 5) :

« *Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard* ... *il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales*

[5] Effet de traditions didactiques différentes, le scientifique allemand « de base » est beaucoup plus versé dans la *Naturphilosophie*, dans Spinoza et Kant, que le polytechnicien moyen dont la seule ouverture philosophique est souvent le *positivisme* d'Auguste Comte. (Poincaré est, ici aussi, une exception.) Pourtant, il y avait à Paris un philosophe comme Henri Bergson, qui dialogua avec Einstein ; et la *Revue du mois*, publiée par Émile Borel et son épouse Marguerite Appell (Camille Marbo), fut le lieu de nombreux débats idéologiques et philosophiques. De son côté, Poincaré publia plutôt dans la *Revue de métaphysique et de morale*. Toutefois, c'est dans la *Revue du mois* qu'il publia en 1907 l'article sur le hasard [16] qui allait servir d'introduction à l'édition de 1912 de son *Calcul des Probabilités*.

[6] Souligné par Pierre Cartier.

en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux ... La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit. »

Le point philosophique important est que le déterminisme n'est pas contredit. Le hasard ne procède point de l'ignorance proprement dite, mais d'une insuffisante précision des données. Dans l'analyse classique du déterminisme par Laplace, il est affirmé qu'une intelligence qui appréhenderait l'état complet de l'Univers à un instant donné, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ses données à l'analyse, pourrait prédire exactement le futur[7]. Mais il faut plutôt raisonner en termes économiques : collecter les données a un coût, et l'état complet de l'Univers à un instant donné a un coût prohibitif. Une bonne prévision engendre un profit, que l'on peut parfois quantifier ; une bonne théorie physique doit avoir un rapport prédictions/données (du type bénéfice/investissement ou qualité/prix) satisfaisant.

Laplace pouvait encore penser que pour des systèmes comme celui des trois corps en astronomie, une connaissance approximative des données initiales permettrait, pour un coût raisonnable, une prévision convenable sur des temps extrêmement longs. Or, Poincaré découvre que ce système a déjà un comportement chaotique[8]. Aujourd'hui, nous sommes sensibilisés à l'*effet papillon*, à la dépendance sensible aux conditions initiales, aux attracteurs étranges. Après l'exemple du problème des trois corps sont venus, dans les années 1960, les attracteurs de Lorenz et Hénon, le système de Moser [12]... Dans le domaine purement mathématique, peu après la disparition de Poincaré, il y a eu l'analyse par Pierre Fatou et (indépendamment) Gaston Julia de l'itération des transformations rationnelles (du type $z \mapsto z^2 + c$, où z est un nombre complexe).

14.6 Deuxième caractéristique du hasard

« *...les causes sont complexes et elles sont multiples ...* » (Poincaré [14], page 9)

Cette deuxième dimension du hasard a trait aux régularités statistiques qui proviennent de la moyennisation sur de grands ensembles. Poincaré s'appuie sur la théorie cinétique des gaz, où l'on a affaire à un très grand nombre de molécules. Les lois de la thermodynamique sont interprétées statistiquement, elles dépendent peu ou pas du mécanisme moléculaire en jeu, ou de la répartition initiale à l'intérieur du gaz. Les chocs — ou interactions — multiples gomment les inégalités de départ et aboutissent à des répartitions homogènes. Même chose pour un mélange[9] de deux poudres après un mixage assez long.

[7] *Recherches sur l'intégration des équations différentielles aux différences finies et sur leur usage dans la théorie des hasards* (1773) et *Essai philosophique sur les probabilités* (1814). Laplace précise : « *L'esprit humain offre, dans la perfection qu'il a su donner à l'Astronomie, une faible esquisse de cette intelligence* [...] *dont il restera toujours infiniment éloigné* ». Et il se réjouit de ce que nous devions ainsi « *à la faiblesse de l'esprit humain une des théories les plus délicates et les plus ingénieuses des Mathématiques, savoir la science des hasards ou des probabilités.* » (N.d.É.)

[8] Voir le chapitre **??**. (N.d.É.)

[9] Une théorie mathématique du mélange, permettant de comprendre par exemple ce qui

Du point de vue mathématique, il s'agit de la *physique statistique des systèmes en équilibre*. Il n'est donc pas encore question des fluctuations[(10)] ou de l'évolution vers un équilibre. Seules les caractéristiques de l'équilibre, et les moyennes correspondantes, sont prises en compte. Il y a là le germe de la théorie des lois limites pour les sommes d'un grand nombre de variables aléatoires, des théorèmes ergodiques, et des processus markoviens : tout ce qui permettra de dépasser la loi des erreurs de Gauss (loi normale de Laplace-Gauss), ou de la transfigurer dans le mouvement brownien.

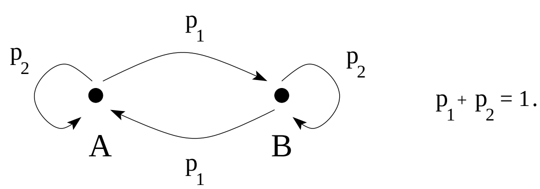
14.7 Le mécanisme du hasard

« ... *pour que nous puissions prévoir, sinon quels en sont les effets* dans chaque cas*, mais au moins ce que seront ces effets* en moyenne ... »[(11)] (Poincaré [14], page 11)

Poincaré a mis en lumière le principe exponentiel de deux manières :

« ... *si le premier choc a multiplié la déviation par un très grand nombre A, après n chocs elle sera multipliée par A^n ; elle sera donc devenue très grande, non seulement parce que A est grand ... mais parce que l'exposant n est grand* ... » ([14], page 8).

C'est là ce qui deviendra le critère de stabilité à la Lyapounov, et qui sert de base à la définition des variétés stables et instables dans les systèmes dynamiques. Pour la première fois, nous voyons apparaître l'importance des valeurs propres, c'est-à-dire les multiplicateurs tels que A ci-dessus. Cela apparaît de manière encore plus frappante dans un deuxième exemple, un système à deux états symbolisé comme ci-dessous :



Si l'on mise 1 euro qu'après n transitions, on se retrouve dans l'état initial, l'espérance mathématique du gain sera $G_n = (p_1 - p_2)^n$. Pour n assez grand, et p_1 ou p_2 pas trop voisin de 1, G_n sera petit et *le jeu sera équitable quelles que soient les valeurs de p_1 et p_2* (conclusion de Poincaré). Il s'agit d'une des premières manifestations des théorèmes ergodiques pour les chaînes de Markov. Nous reviendrons sur ce sujet au n° 14.13.

distingue le *gris* du mélange *blanc-noir*, représente encore aujourd'hui un défi valable. Je m'y suis essayé [8] en utilisant les méthodes de l'Analyse non standard, qui permet de formaliser l'idée de moyennisation à deux échelles différentes, ce qui est le nœud du problème.

[10]La théorie des fluctuations ne sera comprise mathématiquement que dans les années 1950, grâce aux travaux de Feller et Spitzer en particulier [9, 18]. En physique statistique, les fluctuations à grande échelle des états critiques restent un sujet d'actualité. Noter cependant que la thèse de Bachelier [1] (en 1900) est le premier exemple d'analyse d'une série temporelle.

[11]Les mots « dans chaque cas » et « en moyenne » sont soulignés par Poincaré.

14.8 Définition des probabilités

Selon Poincaré, il n'y en a pas. Il commence par réfuter sur des exemples simples (suivant en cela ses prédécesseurs, dont Joseph Bertrand) la « définition » de Laplace :

$$\text{probabilité} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles, favorables ou non}}.$$

La pétition de principe est que les divers cas possibles sont supposés *équiprobables*, ce qui demande à être justifié. Aujourd'hui tout étudiant du niveau du baccalauréat a rencontré la *définition moderne* :

- on décrit l'ensemble Ω des cas possibles ;
- on associe à chaque élément i de Ω un nombre $p_i \geq 0$, de sorte que la somme des p_i soit égale à 1

$$\sum_{i \in \Omega} p_i = 1\ ; \tag{14.1}$$

- un événement est associé à l'ensemble des cas qui le réalisent, qui est une partie A de Ω, et la probabilité correspondante est

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i \in A} p_i. \tag{14.2}$$

Lorsque les p_i sont tous égaux entre eux, on retrouve la formule de Laplace pour la probabilité. Lorsque les p_i sont des *nombres rationnels*, on peut se ramener à la « définition » de Laplace par des artifices simples. Pour Poincaré, les cas où les p_i sont irrationnels n'apparaissent qu'après des passages à la limite (jeu joué un très grand nombre de coups, par exemple).

Conformément à sa philosophie générale[(12)], Poincaré considère que nous devons faire des *conventions*, que l'on peut légitimer de diverses manières, puis faire le travail du mathématicien « *qui applique à ces conventions les règles du calcul* » ([14], page 29). Dans les philosophies dominantes, cela peut se traduire par la *vue axiomatique* : seules importent les règles d'emploi logiques des notions de base du calcul des probabilités. L'alternative est le *point de vue modélisateur* : faisons les calculs, puis ajustons les paramètres libres pour coller au mieux avec les données de l'expérience ou de l'observation. L'axiomaticien se préoccupe peu de l'adéquation au réel, mais dans ce domaine probabiliste, la signification de cette adéquation est délicate. La réponse la plus subtile est ce qu'Émile Borel appelle la *loi unique du hasard* :

Tout événement dont la probabilité est négligeable[(13)] *ne se produit pas, ou plutôt il est raisonnable de se comporter comme s'il ne devait pas se produire.*

---

[12] Voir le chapitre **??**. (N.d.É.)

[13] Le point délicat est de préciser ce qu'est une probabilité négligeable.

14.9 Le cas des probabilités continues

Lorsque le nombre des cas possibles *a priori* est fini, la description donnée au n° précédent suffit, si on lui adjoint la notion d'*indépendance* : lorsque A et B sont indépendants, on a

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \,.\, \mathbf{P}(B) \tag{14.3}$$

(et réciproquement). Après, il ne reste plus (!) qu'à faire de la *combinatoire* pour calculer des sommes finies compliquées, puis du *calcul asymptotique* pour obtenir les probabilités limites. Le travail peut être difficile, mais le cadre est élémentaire et sans chausse-trape. Une bonne partie du calcul des probabilités, et de la physique statistique, peut se jouer sur cette scène.

Mais Poincaré connaît les pièges des probabilités « continues », et les « paradoxes » découverts par ses prédécesseurs, dont Joseph Bertrand. S'il n'innove pas complètement, du moins son analyse des difficultés s'est imposée, et il a mis fin à une discussion récurrente. La Vulgate moderne dit ceci[14] :

- à une expérience (ou une observation) donnée correspond son espace des échantillons[15] ; les points de cet espace, noté Ω, correspondent aux diverses possibilités *a priori* ;
- dans la plupart des cas, Ω est un espace métrique séparable et complet (un espace *polonais* selon Bourbaki) et l'on peut y définir la notion de partie borélienne B ;
- à chaque partie borélienne B de Ω est associée sa probabilité $\mathbf{P}(B)$ satisfaisant aux règles d'additivité dénombrable, de positivité $\mathbf{P}(B) \geq 0$, de normalisation $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

Le modèle mathématique est ainsi caractérisé sans ambiguïté, mais la construction explicite de la « mesure de probabilité » $\mathbf{P}$ sur l'espace Ω est délicate. Grâce aux travaux de l'École Russe (Kolmogorov, Prokhorov, Minlos, Sinai) dans les années 1960, on dispose maintenant de techniques analytiques puissantes[16].

14.10 La réponse de Poincaré

Les méthodes analytiques qui précèdent sont très postérieures à Poincaré, et requièrent tout l'arsenal de l'intégration à la Lebesgue, qu'il n'a pas eu l'occasion d'étudier. Mais son analyse conceptuelle est la bonne.

La notion de variable aléatoire X *uniformément répartie* sur un intervalle $I = [a, b]$ est classique. Si l'on subdivise l'intervalle en m sous-intervalles de même longueur $I_1, \ldots, I_m$, on obtient des événements $X \in I_1, \ldots, X \in I_m$ qui sont équiprobables. La probabilité qu'on ait

$$c \leq X \leq d$$

[14] Une présentation rapide « pour les physiciens » de ce point de vue est donnée dans mon livre à paraître [7].

[15] Je ne dis pas *sample space* pour ne pas me faire jeter dans la fosse aux lions de l'arène francophone de mon collègue Laurent Lafforgue.

[16] Voir l'exposé synthétique donné par Bourbaki [5] et en particulier l'étude du mouvement brownien par ces méthodes.

(avec $a \leq c \leq d \leq b$) est égale à $(d-c)/(b-a)$. Il est facile de passer au cas de deux variables X, Y indépendantes et uniformément réparties. En introduisant l'intervalle J de variation de Y, subdivisé en n sous-intervalles $J_1, \ldots, J_n$ de longueur égale, les mn événements $\{X \in I_i,\ Y \in J_j\}$ sont équiprobables. Il revient au même de définir la probabilité qu'un point P de coordonnées aléatoires X, Y se trouve dans la sous-région A de son domaine de variation *a priori*, Ω, comme le quotient $|A|/|\Omega|$, où $|A|$ désigne l'aire de A.[17]

La définition est analogue à trois dimensions ou plus.

La difficulté est que la notion d'aire n'est pas invariante par changement non linéaire de coordonnées : ce qui s'écrit $\iint dx\, dy$ en coordonnées cartésiennes s'écrit $\iint r\, dr\, d\theta$ en coordonnées polaires ! Les exemples paradoxaux proviennent de ce que l'on veut définir la même probabilité au moyen de deux systèmes de coordonnées différents. Par contre, si l'on introduit une densité de probabilité dans le plan, c'est-à-dire une fonction positive $\varphi(x, y)$, la probabilité définie plus haut s'écrit plus généralement

$$\mathbf{P}(A/\Omega) = \frac{\iint_A \varphi(x, y)\, dx\, dy}{\iint_\Omega \varphi(x, y)\, dx\, dy}. \tag{14.4}$$

On peut normaliser en imposant la valeur 1 au dénominateur. Lors d'un changement de coordonnées, $\varphi(x, y)$ se multiplie par un déterminant jacobien (Poincaré [14], page 121). De manière invariante, la loi de probabilité correspond au choix d'une forme différentielle extérieure ω qui s'écrit[18]

$$\omega = \varphi(x, y)\, dx \wedge dy \tag{14.5}$$

dans les coordonnées x, y (qui sont maintenant arbitraires).

14.11 Description d'un modèle probabiliste selon Poincaré

De toute cette discussion, qui occupe une partie du chapitre 1 et l'essentiel des chapitres 7 et 8, on retiendra ceci :

- le modèle mathématique est défini par le choix, sur une variété convenable M de dimension d (l'espace des configurations), d'une forme différentielle extérieure ω de degré d ;
- il ne suffit donc pas de fixer quelques paramètres, mais le choix de ω dans un espace fonctionnel dépend *a priori* d'une infinité de paramètres ;
- le choix de ω est *a priori* arbitraire, mais une fois fait, il faut s'y tenir ;
- ω doit satisfaire à certains principes de symétrie, qui s'expriment sous forme de l'invariance de ω sous un groupe G de transformations de M.

Dans certains cas, la dernière condition suffit à déterminer complètement ω : ce sont les cas intéressant les *probabilités géométriques*, pour lesquelles je renvoie

[17] Je suis ici les conventions de Michel Mendès France (voir sa note de la p. **??**).

[18] Rappelons que l'invention du calcul des formes différentielles extérieures est dû à Élie Cartan et Henri Poincaré. (Voir le chapitre **??**, N.d.É.)

le lecteur au chapitre de Michel Mendès France (chapitre ??). Poincaré insiste aussi sur le fait que, dans certaines situations, le résultat final est indépendant de la loi ω choisie *a priori*; ce sont les cas où un théorème ergodique s'applique (« méthode des fonctions arbitraires »).

Limitations : les cas mixtes où l'on mélange le modèle discret du nº 14.8 et le modèle continu du nº 14.10 ne peuvent être traités directement. On a aussi vu que Poincaré suppose la continuité, et même l'analyticité, de la densité de probabilité $\varphi(x, y)$. Le cas de fonctions régulières par morceaux se traite aussi facilement et couvre la plupart des besoins, mais les mesures singulières au sens de Lebesgue sont écartées par l'exigence de Poincaré : pour un domaine infiniment petit, la probabilité est proportionnelle au volume. Ceci écarte les lois autosimilaires(19). Pas d'intégrale de Stieltjes non plus !

14.12 La loi des erreurs de Gauss

Tous les ouvrages de probabilités de la fin du 19-ième siècle discutent la portée de la loi de Gauss. Aujourd'hui, les recherches analytiques sur ce sujet s'appellent : « théorème limite central » (ou « théorème central-limite »)(20) ; les résultats les plus importants ont été obtenus vers 1930. Poincaré discute aussi de cette loi avec beaucoup de détails dans son chapitre 11, mais il reste loin de la rigueur analytique moderne. Cependant, comme l'a relevé Paul Lévy, il introduit — pour la première fois, semble-t-il, dans un cours de probabilités — l'outil de la *fonction caractéristique* ([14], page 206). Il l'écrit sous l'une des formes

$$f(\alpha) = \sum p e^{\alpha x} \qquad \text{cas discret,} \tag{14.6}$$

$$f(\alpha) = \int \varphi(x) e^{\alpha x} dx \qquad \text{cas continu,} \tag{14.7}$$

là où nous notons aujourd'hui $f(\alpha) = \mathbf{E}[e^{\alpha X}]$. Il semble croire qu'elle a toujours un sens pour α complexe (transformation de Laplace) alors qu'il faut se restreindre au cas $\alpha = it$ avec t réel (transformation de Fourier). Nous adopterons la définition à la Fourier

$$\phi_X(\alpha) = \mathbf{E}[e^{i\alpha X}]. \tag{14.8}$$

19 Et pourtant, elles existent. Lorsque Paul-André Meyer et moi-même étions au service de la Marine Nationale (en compagnie du frère de Michel Mendès France), nous nous étions amusés à prouver que les procédures recommandées pour la lutte anti-sous-marine (copiées d'instructions à la US Navy de J. von Neumann, Mark Kac, ...) conduisaient à de telles lois de probabilité.

20 Théorème découvert par Laplace (1810). Il a longtemps porté son nom. En 1920, Pólya l'a appelé *Zentraler Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, c'est-à-dire « Théorème limite central du calcul des probabilités » ; le sens est clair : c'est un théorème (de) limite, et il est central dans le calcul des probabilités. La traduction anglaise de *Zentraler Grenzwertsatz*, qui est *Central limit theorem*, est ambiguë car on ne voit pas si *Central* se rapporte à *limit* ou à *theorem*. Le charabia « Théorème central-limite » (malheureusement consacré par l'usage) et le contresens « Théorème de la limite centrale » en sont les conséquences. (N.d.É.)

Le théorème limite central peut se formuler ainsi : soit X une variable aléatoire ayant un second moment fini, de moyenne $m = \mathbf{E}[X]$ et d'écart-type $\sigma = \mathbf{E}[(X-m)^2]^{1/2}$. Prenons un échantillon $(X_1, \ldots, X_N)$ formé de N variables aléatoires indépendantes, toutes de mêmes lois que X ; introduisons la variable aléatoire Θ_N (l'erreur relative normalisée) par la formule

$$X_1 + \cdots + X_N = m\,N + \sigma\,\sqrt{N}\,\Theta_N. \tag{14.9}$$

Alors, *pour N grand, Θ_N suit approximativement la loi de Gauss normalisée*, c'est-à-dire la loi de probabilité de densité $\gamma(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$.

Pour faire la démonstration, on peut supposer $m = 0$, $\sigma = 1$. Alors la fonction caractéristique ϕ de X est de classe C^2, avec

$$\phi(0) = 1, \qquad \phi'(0) = 0, \qquad \phi''(0) = -1. \tag{14.10}$$

La fonction caractéristique de Θ_N est alors $\phi(\alpha/\sqrt{N})^N$. C'est un exercice facile de déduire de (14.10) la relation

$$\lim_{N\to\infty} \phi(\alpha/\sqrt{N})^N = e^{-\alpha^2/2}, \tag{14.11}$$

et de remarquer que la fonction caractéristique $e^{-\alpha^2/2}$ correspond à la densité de probabilité $\gamma(x)$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x}\, e^{-x^2/2}\, dx = e^{-\alpha^2/2}. \tag{14.12}$$

Ce raisonnement[21] est essentiellement celui de Poincaré[22] ([14], page 208).

Pour arriver à l'exposé « moderne », il faut préciser ce qu'on entend par « suivre approximativement une loi de probabilité ». Il faut pour cela introduire une convergence dans l'ensemble des mesures de probabilité sur $\mathbf{R}$, la topologie *vague*[23]. Il faut aussi prouver un théorème de continuité de la transformation de Fourier :

$$\mu \mapsto \phi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} d\mu(x) \qquad (\alpha \text{ est réel}), \tag{14.13}$$

qui transforme la topologie vague des mesures de probabilité en la convergence simple (ou uniforme) des fonctions caractéristiques. C'est le classique théorème de Paul Lévy, démontré en 1922 et exposé dans son livre de 1925 sur les probabilités [11]. Cette deuxième partie du raisonnement, absente chez Poincaré, nécessite l'arsenal de l'analyse fonctionnelle d'après Lebesgue.

---

[21] Dont le principe remonte à Laplace et dont la présentation avait déjà été simplifiée par plusieurs auteurs (notamment Poisson et Cauchy). (N.d.É.)

[22] Mais Poincaré utilise la finitude de tous les moments $\mathbf{E}[X^n]$ et fait des développements en série de Taylor, alors qu'un développement limité suffit pour passer de (14.10) à (14.11).

[23] Ainsi dénommée par Henri Cartan qui la définit en 1941 dans un cadre plus général [6].

14.13 Un joyau de théorie des groupes

Le dernier chapitre du livre, intitulé modestement « Questions diverses » est sans doute le plus imaginatif. La dernière section (du n° 237 à la fin) sur le mélange des liquides est une étude d'un système physique et du principe ergodique qui reste très lisible aujourd'hui et montre à quel point Poincaré le mécanicien a assimilé les idées de Hamilton(24). Mais je voudrais m'arrêter un instant sur le problème du battage des cartes (nos 225 à 232).

Poincaré envisage un groupe fini G dont il note S_0, S_1, …, S_r les éléments (avec l'unité S_0). Ce groupe peut être considéré comme agissant par permutations sur un ensemble de cartes, et l'on considère une permutation aléatoire correspondant au schéma probabiliste

$$\begin{pmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_r \\ p_0 & p_1 & \dots & p_r \end{pmatrix}$$

avec $p_i \geq 0$, $p_0+p_1+\cdots+p_r = 1$. Il introduit l'algèbre du groupe en ces termes (Poincaré [14], page 302) :

« *On sait que l'on a inauguré des nombres complexes de la forme*

$$\mathbf{X} = x_0e_0 + x_1e_1 + \cdots + x_re_r, \tag{14.14}$$

où les x sont des quantités ordinaires et les e des unités complexes. »

Il explique ensuite que les e_i se multiplient comme les éléments S_i correspondants du groupe, puis conclut (Poincaré [14], page 303) :

« *Nous pourrons alors représenter symboliquement la loi de probabilité envisagée par le nombre complexe*

$$\mathbf{P} = p_0e_0 + p_1e_1 + \cdots + p_re_r. \text{ »} \tag{14.15}$$

Il explique ensuite que l'enjeu est de prouver un théorème limite du type

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \frac{1}{r+1}\,(e_0+e_1+\cdots+e_r). \tag{14.16}$$

Poincaré vient d'inventer les cheminements aléatoires sur un groupe, de formuler et de démontrer un théorème ergodique. La démonstration se fait par l'intermédiaire du spectre de $\mathbf{P}$ et prouve essentiellement le théorème de Perron-Frobenius sur les matrices à éléments positifs.

Poincaré a apporté lui-même beaucoup d'améliorations dans la théorie des groupes de Lie(25), il connaissait les résultats d'Élie Cartan sur le sujet, et parmi les mathématiciens français, il était un des connaisseurs des travaux allemands. Néanmoins, qu'un analyste ou qu'un mécanicien cite Frobenius sur les algèbres de groupes n'était pas banal.

[24] Ce qui n'était pas le cas des maîtres de Sorbonne qui prétendirent m'enseigner la Mécanique dans les années 1950 !

[25] Voir le chapitre ??. (N.d.É.)

14.14 En guise de conclusion

Évidemment, ce livre de Poincaré sur les probabilités n'a ni la profondeur ni la nouveauté des *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste* [15] ou de l'*Analysis Situs* [13]. C'est encore un ouvrage du 19-ième siècle pour les méthodes analytiques, mais c'est un des premiers ouvrages à faire percevoir les enjeux de la physique statistique, bien au-delà des habituels exercices de combinatoire liés aux jeux de hasard. En ce sens, ce livre appartient déjà au vingtième siècle, frayant la voie à Einstein, Ehrenfest, Wiener, Landau, et tant d'autres ... Enfin, le lecteur persévérant découvrira dans [14] de jolies perles, telle l'utilisation de l'approximation de Padé (alors toute récente) au chapitre 15. Voir aussi, à la fin du chapitre 12, une définition très claire de l'*ellipse de dispersion*, c'est-à-dire le fait que la loi de Gauss à plusieurs dimensions dépend du choix d'une forme quadratique définie positive sur l'espace de configurations.

Bibliographie

[1] L. Bachelier, *Théorie de la spéculation*, Ann. Sci. École Norm. Sup. Paris (3) **17** (1900), p. 21-86. Réimpression aux Éditions J. Gabay (Paris), 1995.

[2] J. Bertrand, *Calcul des Probabilités*, Gauthier-Villars (Paris), 1889.

[3] É. Borel, *Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques*, Rend. Circ. Mat. Palermo **27** (1909), p. 247-271. Reproduit dans : *Œuvres* d'Émile Borel, vol. 2, Éd. du CNRS (Paris), 1972, p. 1055-1079.

[4] N. Bourbaki, *Éléments d'Histoire des Mathématiques*, Hermann (Paris), 1974. Réimpression : Masson (Paris), 1984.

[5] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique. Intégration, chap. 9 : Intégration sur les Espaces topologiques séparés. Livre VI. Fasc. XXXV*, Hermann (Paris), 1969. (Actualités scientifiques et industrielles, vol. 1343.)

[6] H. Cartan, *Sur les fondements de la théorie du potentiel*, Bull. Soc. Math. France **69** (1941), p. 71-96. Reproduit dans : *Œuvres* d'Henri Cartan, volume 3, Springer (Berlin), 1979, p. 1023-1048.

[7] P. Cartier et C. DeWitt-Morette, *Functional Integration. Action and Symmetries*, Cambridge University Press, 2006.

[8] P. Cartier et Y. Perrin, *Integration over finite sets*, p. 185-204 de : *Nonstandard Analysis in Practice*, éd. par Francine Diener et Marc Diener, Universitext, Springer-Verlag (Berlin), 1995.

[9] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, 2 tomes, Wiley, 1966, 1971.

[10] A. N. Kolmogorov, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Springer (Berlin), 1933. Trad. anglaise : *Foundations of the Theory of Probability*, Chelsea, 1950.

[11] P. Lévy, *Calcul des Probabilités*, Gauthier-Villars (Paris), 1925.

[12] J. Moser, *Stable and random motions in dynamical systems*, Princeton University Press, 1973.

[13] H. Poincaré, *Analysis Situs* et ses compléments : *Œuvres*, tome 6, Gauthier-Villars (Paris), 1953.

[14] H. Poincaré, *Calcul des Probabilités*, Gauthier-Villars (Paris), 1896. Seconde édition : *ibid.*, 1912. Réimpression de l'édition de 1912 aux Éditions J. Gabay (Paris), 1987.

[15] H. Poincaré, *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste* (3 tomes), Gauthier-Villars (Paris), 1892-1899. Réimpressions : Dover Publications Inc. (New-York), 1957, et Blanchard (Paris), 1987.

[16] H. Poincaré, *Le hasard*, Revue du mois **3** (1907), p. 257-276.

[17] H. Poincaré, *Science et Méthode*, Flammarion (Paris), 1908. Réédition aux Éditions Kimé (Paris), 1999.

[18] F. Spitzer, *Principles of Random Walks*, D. Van Nostrand C° (Princeton N.J.), 1964.

[19] H. Steinhaus, *Les probabilités dénombrables et leur rapport à la théorie de la mesure*, Fund. Math. **4** (1923), p. 286-310.

[20] Supplément historique de l'annuaire de l'École normale supérieure (2005).

[21] A. Weil, *Calcul des probabilités, méthode axiomatique, intégration*, Revue Scient. **78** (1940), p. 201-208. Réédité dans les *Œuvres scientifiques* d'André Weil, vol. 1, p. 260-272, Springer (Berlin), 1979.

[22] N. Wiener, *Differential space*, J. Math. and Phys. **2** (1923), p. 131-174.