

Structures spéciales et problème de Zilber-Pink.

Emmanuel Ullmo

Abstract

Les conjectures de Manin-Mumford, André-Oort ainsi que celle de Zilber-Pink portent sur des variétés algébriques (tores algébriques, variétés abéliennes ou semi-abéliennes, variétés de Shimura pures ou mixtes) qui possèdent un sous ensemble naturel de points spéciaux et de sous-variétés spéciales. Le texte propose une axiomatisation, dans l'esprit de la théorie des modèles, des variétés algébriques possédant un ensemble de points spéciaux et de sous-variétés spéciales vérifiant des propriétés naturels en insistant sur les aspects bi-algébriques de la question. Dans un deuxième temps l'article fait le point sur les résultats récents sur cet ensemble de conjectures.

Abstract

The Manin-Mumford and the André-Oort conjectures as well as the one formulated by Zilber and Pink concern algebraic varieties (algebraic tori, Abelian or semi-Abelian varieties, pure or mixed Shimura varieties) endowed with a natural set of special points and special subvarieties. An axiomatisation, in the spirit of model theory, is presented for a description of algebraic varieties endowed with a natural set of special points and special subvarieties with an emphasis on the bi-algebraic nature of the question. The text also reviews recent results on these conjectures.

Table des matières

1 Introduction

2

2	Une version abstraite de la conjecture de Zilber-Pink.	3
2.1	Variétés algébriques munies d’une structure spéciale	3
2.1.1	Structures spéciales fortes et correspondances modulaires	6
2.2	Structures spéciales bi-algébriques.	9
2.2.1	Structures spéciales bi-algébriques sur les tores.	9
2.2.2	Structures spéciales bi-algébriques sur les variétés abéliennes.	11
2.2.3	Réalisations semi-algébriques des espaces symétriques hermitiens.	16
2.2.4	Sous-variétés faiblement spéciales des variétés de Shi- mura et structures bi-algébriques	18
2.2.5	Structures spéciales bi-algébriques et conjecture de Kollar- Pardon	21
2.3	Manin-Mumford -André-Oort et Zilber-Pink abstrait.	24
3	La conjecture de Zilber-Pink	26
3.1	Manin-Mumford.	27
3.2	André-Oort.	27
3.3	Intersections atypiques et conjecture de Zilber-Pink.	31

1 Introduction

Au cours des dernières années une activité intense s’est développée autour des propriétés arithmétiques et géométriques des sous-variétés spéciales des tores algébriques, des variétés abéliennes et des variétés de Shimura. Boris Zilber [91] et Richard Pink ([59], [60]), avec des motivations très éloignées, ont dégagé l’énoncé d’une conjecture ”d’intersections atypiques” pour les variétés de Shimura mixtes ou les variétés semi-abéliennes qui généralise la conjecture de Manin-Mumford pour les variétés abéliennes et la conjecture d’André-Oort pour les variétés de Shimura. Les premiers résultats dans la direction de ces énoncés au delà des questions de type Manin-Mumford ou André-Oort sont dus à Bombieri, Masser et Zannier [8]. Une session des ”États de la recherche” de la Société Mathématique de France (SMF) consacrée à ces problèmes a été organisée au CIRM en mai 2011 et les textes qui composent cet ouvrage se proposent de faire le point sur les progrès récents concernant ces questions et de tracer quelques perspectives d’avenir.

Dans la première partie de cette introduction nous essayons d'expliquer dans quelle situation une variété algébrique possède un ensemble de points spéciaux et un ensemble de sous-variétés spéciales de dimension positive pour lesquels les problèmes de type Manin-Mumford-André-Oort ou Zilber-Pink sont à la fois vraisemblables et intéressants. On développe une approche inspirée de la théorie des modèles et on insiste tout particulièrement sur l'interprétation **bi-algébrique** des sous-variétés spéciales et des points spéciaux. On fait ensuite le point sur les résultats récents sur la conjecture d'André-Oort par la méthode de Pila-Zannier et l'on conclut par une discussion rapide sur quelques résultats dans la direction de Zilber-Pink.

Remerciements. C'est un plaisir de remercier Yves André, Daniel Bertrand, Jean-Benoît Bost, Marc Hindry, Ehud Hrushovski, Bruno Klingler, Michel Waldschmidt et Andrei Yafaev pour des discussions éclairantes et des remarques mathématiques et typographiques.

L'un des rapporteurs de cet article m'a donné des indications bibliographiques précieuses concernant le théorème 2.8 et m'a fourni l'énoncé et la preuve du théorème 2.9 ainsi que celle du théorème 2.10. Sa lecture détaillée m'a aussi permis d'améliorer plusieurs points du texte et je lui adresse tous mes remerciements.

2 Une version abstraite de la conjecture de Zilber-Pink.

2.1 Variétés algébriques munies d'une structure spéciale

Le but de cette partie est d'abstraire les propriétés essentielles des sous-variétés spéciales d'une variété abélienne, d'une variété de Shimura ou plus généralement d'une variété de Shimura mixte et de formuler le problème de Zilber-Pink dans ce cadre. Nous essayons dans un premier temps de dégager le cadre naturel des variétés algébriques intéressantes ayant des sous-variétés spéciales naturelles pour lesquelles les problèmes de type Manin-Mumford-André Oort ou Zilber-Pink soient à la fois conjecturalement vrais et non triviaux. Le lecteur est encouragé à regarder le texte de Boris Zilber [92] qui explore une thématique similaire du point de vue de la théorie des modèles et du principe de trichotomie de Zilber.

Soit V une variété quasi-projective sur $\mathbb{C}$ de dimension n . On dit que V est munie d'une **pré-structure spéciale** si l'on dispose d'un ensemble

dénombrable $\Sigma(V)$ de sous-variétés irréductibles de V appelé sous-variétés spéciales de V ayant les propriétés suivantes.

- (i) V est spéciale.
- (ii) Une composante irréductible d'une intersection de sous-variété spéciales est une sous-variété spéciale.
- (iii) Soit $\Sigma_i(V)$ l'ensemble des sous-variétés spéciales de dimension i . Les éléments de $\Sigma_0(V)$ sont appelés points spéciaux de V . Pour tout $Z \in \Sigma(V)$, les points spéciaux de Z sont Zariski denses dans Z .

Dans tous les cas que nous avons en vue on dispose d'une pré-structure spéciale sur V^r pour tout entier positif r telle que :

- (a) $\Sigma_0(V^r) = \Sigma_0(V)^r$.
- (b) Pour tout r -uplets d'entiers $(a_1, \dots, a_r)$ tels que $a = \sum_{i=1}^r a_i$, on a

$$\prod_{i=1}^r \Sigma_{a_i}(V) \subset \Sigma_a(V^r).$$

- (c) L'ensemble $\Sigma_n(V^2)$ contient une infinité dénombrable de correspondances algébriques de V .

Dans ce texte une correspondance algébrique de V est une sous-variété algébrique W de V^2 telle que les projections de W sur les facteurs sont finies et surjectives.

Définition 2.1 Une variété algébrique V quasi-projective sur $\mathbb{C}$, de dimension positive n , est dite munie d'une **structure spéciale** si on dispose pour tout entier positif r d'une pré-structure spéciale sur V^r vérifiant les propriétés (a), (b) et (c) précédentes telle que pour toute sous-variété spéciale W de V , de dimension positive, les sous-variétés spéciales de $W^r \subset V^r$ vérifient aussi les propriétés (a), (b) et (c).

D'après la propriété (ii), si W est une sous-variété irréductible de V , il existe une unique plus petite sous-variété spéciale $Sp(W)$ de V qui contient W . On dit que W est Hodge générique si $Sp(W) = V$. En particulier un point P de V est dit Hodge générique si il n'est contenu dans aucune sous-variété spéciale propre de V .

Les exemples principaux de variétés algébriques sur $\mathbb{C}$, munies d'une structure spéciale sont

- (i) Un tore algébrique T . Les points spéciaux sont alors les points d'ordre fini et les sous-variétés spéciales sont les sous-variétés de torsion zT' , produit d'un point d'ordre fini z par un sous-tore T' de T .

(ii) Une variété abélienne A . Les points spéciaux sont alors les points de torsion et les sous-variétés spéciales sont les sous-variétés de torsion $P + B$, translatées d'une sous-variété abélienne B de A par un point de torsion P .

(iii) Une variété semi-abélienne W extension d'une variété abélienne A par un tore T . Les points spéciaux sont alors les points d'ordre fini et les sous-variétés spéciales sont les translatées par un point spécial d'un sous-groupe algébrique. Cet exemple généralise les cas (i) et (ii).

(iv) Une variété de Shimura pure ou mixte S . Le cas pur est détaillé dans le texte [75] de ce volume et nous renvoyons à la thèse de Pink [58], ou aux travaux de Gao [28] pour des définitions plus précises dans le cas mixte. Le cas central de la variété abélienne universelle $\mathcal{U}_g$ au dessus de l'espace de modules grossiers $\mathcal{A}_g$ des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g est discuté dans la section 2.2.5. Les sous-variétés spéciales sont alors les composantes irréductibles des translatées par un opérateur de Hecke d'une sous-variété de Shimura.

On peut montrer que toute variété semi-abélienne se réalise comme sous-variété d'une variété de Shimura mixte [59] remarque 2.13.

Comme un produit fini de variétés semi-abéliennes est une variété semi-abélienne et un produit fini de variété de Shimura mixtes est une variété de Shimura mixte on vérifie sans peine que ce sont des exemples de variétés algébriques munies d'une structure spéciale. Seule la condition (c) sur les correspondances méritent une explication. Explicitons le cas d'une variété abélienne et le cas des variétés de Shimura pures.

Soit A une variété abélienne et soit α un endomorphisme de A . En prenant pour α la multiplication par un entier n on voit que l'on dispose d'un ensemble dénombrable de tels endomorphismes. Soit

$$A_\alpha \subset A \times A$$

le graphe de α . Alors A_α est une correspondance algébrique de $A \times A$ qui est une sous-variété spéciale de $A \times A$.

Soit S une variété de Shimura pure. Les correspondances de Hecke fournissent un ensemble dénombrable infini de correspondances de S qui sont des sous-variétés spéciales de $S \times S$.

Remarque 2.2 • *Je ne sais pas si la condition portant sur les sous-variétés spéciales W de V est automatique. Seule la propriété (c) ne l'est pas de manière évidente.*

- *Il est très naturel du point de vue de la théorie des modèles ou des géométries de Zariski de considérer des structures spéciales sur V^r pour tout entier r . Les sous-variétés spéciales se comportent alors comme les ensembles définissables de la théorie. La condition sur les correspondances assure que V est muni de structures supplémentaires (endomorphismes, correspondances de Hecke) et les sous-variétés spéciales sont, au moins dans les exemples que nous avons en vue, celles qui héritent de cette structure supplémentaire.*
- *Dans l'esprit de la théorie des catégories, on peut définir les morphismes entre sous-variétés spéciales. Soit Y une sous-variété de V^r et Z une sous-variété de V^s . On dit qu'un morphisme algébrique $\phi : Y \rightarrow Z$ est spécial si le graphe de ϕ est spécial dans V^{r+s} . Il serait intéressant de rédiger une preuve que l'on retrouve bien pour les variétés de Shimura et les variétés semi-abéliennes la notion usuelle de morphismes.*
- *Dans les exemples que nous avons en tête, les variétés munies de structures spéciales admettent des revêtements finies de degrés arbitrairement grands non ramifiés en dehors d'un ouvert fixe par des variétés qui sont elles mêmes munies d'une structure spéciale. Si $f_N : V_N \rightarrow V$ est un tel revêtement, l'image par f_N d'une sous-variété spéciale de V_N est spéciale et une composante de l'image inverse par f_N d'une sous-variété spéciale de V est spéciale dans V_N . Dans les situations classiques (variétés semi-abéliennes, variétés de Shimura mixtes) $V_N \times V$ est aussi une variété semi-abélienne ou une variétés de Shimura mixte selon le cas et possède donc une structure spéciale naturelle. Dans cette situation le graphe de f_N , ou celui de la restriction de f_N à une sous-variété spéciale est une sous variété spéciale de $V_N \times V$.*

2.1.1 Structures spéciales fortes et correspondances modulaires

On peut remarquer que si V est une variété algébrique sur $\overline{\mathbb{Q}}$, on peut munir $V_{\mathbb{C}}$ d'une structure spéciale en disant que les sous-variétés spéciales de $V_{\mathbb{C}}$ sont les sous-variétés de $V_{\mathbb{C}}$ qui sont définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Une telle structure est dite triviale. Les énoncés que l'on a en vue ne sont pas intéressants dans ce cas. Une manière d'exclure ce cas est d'introduire une notion plus forte de structure spéciale qui contient le cas des variétés semi-abéliennes et des variétés de Shimura mixtes.

Soit V une variété algébrique quasi-projective. Une correspondance algébrique $T \subset V \times V$ de V est dite modulaire si les deux projections de T vers V sont des morphismes étales. On vérifie que si V est une variété semi-abélienne ou une variété de Shimura mixte définie par un réseau sans torsion, les correspondances W de V qui sont spéciales dans $V \times V$ sont les correspondances modulaires. De manière générale si V est une variété de Shimura arbitraire, il existe un ouvert de Zariski U de V tel que pour toute correspondance de Hecke $T \subset V \times V$, les deux projections de T vers V sont non ramifiées au dessus de U . Si $V = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H} \simeq \mathbb{C}$, on peut prendre $U = \mathbb{C} - \{0, 1728\}$.

Cela suggère la définition suivante.

Définition 2.3 *Une variété algébrique lisse quasi-projective V est munie d'une **structure spéciale forte** si elle est munie d'une structure spéciale et d'un ouvert de Zariski U de V tel que l'ensemble (infini dénombrable) des correspondances algébriques T qui sont spéciales dans $V \times V$ sont les correspondances de V dont les deux projections sur V sont non ramifiées au dessus de U .*

Dans l'esprit de la dernière partie de la remarque 2.2, on aurait pu définir la notion de structure spéciale forte sur une variété quasi-projective V de la manière proche suivante. On demande qu'il existe un ouvert de Zariski U de V et des revêtement finis de degrés arbitrairement grands $f_N : V_N \rightarrow V$ non ramifiés au dessus de U tels que V_N soit muni d'une structure spéciale tels que les sous-variétés spéciales de V^n et de V_N^n se correspondent via f_N^n pour tout N , et tout entier positif n . La notion de sous-variété spéciale forte donnée dans la définition 2.3 nous semble plus géométrique.

L'autre justification de la définition 2.3 provient d'un théorème de Kazhdan et Margulis que l'on décrit de la manière suivante. Le lecteur peut consulter la section 9 du livre de Margulis [44] pour des précisions, des preuves et bien plus.

Soit S une variété de Shimura. Alors S est associée à une donnée de Shimura (G, X) où G est un $\mathbb{Q}$ -groupe algébrique réductif et X une $G(\mathbb{R})$ -classe de conjugaison de morphisme du tore de Deligne $\mathbb{S}$ vers $G_{\mathbb{R}}$ vérifiant les conditions de Deligne. Une composante connexe X^+ de X est un espace symétrique hermitien.

On fixe une représentation fidèle de dimension finie $G \subset \mathrm{GL}_{n, \mathbb{Q}}$ dans un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de dimension n . On définit

$$G(\mathbb{Z}) := G(\mathbb{Q}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}).$$

Un sous-groupe Γ de $G(\mathbb{Q})$ est commensurable à $G(\mathbb{Z})$ si $\Gamma \cap G(\mathbb{Z})$ est d'indice fini dans $G(\mathbb{Z})$ et dans Γ . La notion de commensurabilité est indépendante du choix du plongement choisi $G \subset \mathrm{GL}_{n,\mathbb{Q}}$. Un sous-groupe Γ de $G(\mathbb{Q})$ est dit arithmétique si il est commensurable à $G(\mathbb{Z})$.

Soit X^+ un espace symétrique hermitien. On note $\mathrm{Aut}(X^+)$ le groupe des automorphismes holomorphes de X^+ . On peut alors munir X^+ d'une métrique Riemannienne invariante par l'action de $\mathrm{Aut}(X^+)$ et $\mathrm{Aut}(X^+)$ agit sur X^+ par isométries. Un réseau de X^+ est un groupe discret Λ agissant sur X^+ par automorphismes holomorphes de X^+ tel que tout domaine fondamental de X^+ sous l'action de Λ soit de volume fini pour la mesure $\mathrm{Aut}(X^+)$ -invariante.

D'après un théorème de Borel ([10], lemme 12.5 p. 87), l'image d'un sous-groupe arithmétique Γ de $G(\mathbb{Q})$ dans $\mathrm{Aut}(X^+)$ est un réseau de X^+ . De manière générale, soit Λ un réseau de X^+ . On dit que Λ est un réseau arithmétique de X^+ si il est obtenu de la manière suivante. Il existe un groupe algébrique G_1 sur $\mathbb{Q}$, semi-simple tel que si K_∞ est un sous-groupe compact maximal de $G_1(\mathbb{R})$, alors $X^+ \simeq G_1(\mathbb{R})/K_\infty$ et tel que Λ est commensurable à $G_1(\mathbb{Z})$.

Notons qu'il existe en général une infinité de groupes semi-simples G_1 sur $\mathbb{Q}$ qui ne sont pas isomorphes sur $\mathbb{Q}$ tels que $X^+ \simeq G_1(\mathbb{R})/K_\infty$. Explicitons le cas des réseaux arithmétiques du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$ en notant que toute surface de Riemann projective lisse de genre au moins 2 est un quotient de $\mathbb{H}$ par un réseau.

Exemple 2.4 *Soit F un corps de nombres totalement réel de degré d . Soit B une algèbre de quaternions B sur F déployée en une unique place archimédienne de F . Soit $G := \mathbb{F}^* \backslash \mathbb{B}^*$ le groupe algébrique adjoint dont les points sur $\mathbb{Q}$ sont $F^* \backslash B^*$. On a alors*

$$G(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}_3^{r-1},$$

de sorte que pour tout sous-groupe compact maximal K_∞ de $G(\mathbb{R})$ on a $G(\mathbb{R})/K_\infty \simeq \mathbb{H}$. Si $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ est un réseau arithmétique de $G(\mathbb{Q})$, alors l'image de Γ dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$ est un réseau arithmétique de $\mathbb{H}$.

Réciproquement tout réseau arithmétique de $\mathbb{H}$ est obtenu par une telle construction. Deux réseaux arithmétiques de $\mathbb{H}$ associés à des algèbres de quaternions distinctes ne sont pas commensurables.

La justification de la notion de structures spéciales fortes sur une variété provient de l'énoncé suivant dû à Kazhdan et Margulis [44] prop 7.7.

Théorème 2.5 *Soit V une variété algébrique complexe lisse admettant une infinité de correspondances modulaires. On suppose que le revêtement universel de V est un espace symétrique hermitien X^+ et que $\pi_1(V)$ est un réseau de X^+ . Alors $\pi_1(V)$ est un réseau arithmétique de X^+ .*

Dans cette situation, il existe une variété de Shimura $S = \Gamma \backslash X^+$ avec Γ commensurable à $\pi_1(V)$. Soit

$$\pi : X^+ \longrightarrow V = \pi_1(V) \backslash X^+.$$

On note

$$C = \text{Comm}_{\text{Aut}(X^+)}(\pi_1(V))$$

le commensurateur de $\pi_1(V)$ dans $\text{Aut}(X^+)$. Un point c de C est un point de $\text{Aut}(X^+)$ tels que $c\pi_1(V)c^{-1} \cap \pi_1(V)$ est d'indice fini dans $\pi_1(V)$ et dans $c\pi_1(V)c^{-1}$. Pour tout $c \in C$,

$$T_c := \{(\pi(x), \pi(c.x)), x \in X^+\} \subset V \times V$$

est une correspondance modulaire de V et toute correspondance modulaire de V est de cette forme. Il y a donc une infinité de correspondances modulaires sur X^+ si et seulement si $\pi_1(V)$ est d'indice infini dans C .

Ces propriétés montrent par exemple qu'une courbe algébrique lisse projective de genre au moins 2 qui admet une structure spéciale forte est de la forme $C = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ pour un réseau Γ commensurable à un réseau Γ_1 tel que $S = \Gamma_1 \backslash \mathbb{H}$ soit une courbe de Shimura.

2.2 Structures spéciales bi-algébriques.

Il est probable que l'on puisse construire des structures spéciales fortes sur certaines variétés qui ne se ramènent pas aux cas des variétés semi-abéliennes ou à celui des variétés de Shimura mixtes.

On peut encore préciser le cadre en ne regardant que les variétés V munies d'une structure **spéciale bi-algébrique**.

2.2.1 Structures spéciales bi-algébriques sur les tores.

Le paradigme du monde bi-algébrique est la fonction $\pi(z) := \exp(2i\pi z)$ qui est une fonction transcendante entre deux variétés algébriques complexes

$$\pi : \mathbb{C} = \text{Lie}(\mathbb{G}_m) \longrightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{G}_m(\mathbb{C}).$$

On dit qu'un élément α de $\mathbb{C}^*$ est bi-algébrique au sens arithmétique si $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ et si il existe $\beta \in \overline{\mathbb{Q}}$ tel que $\pi(\beta) = \alpha$. Dans cette situation $\pi^{-1}(\alpha) = \beta + \mathbb{Z} \subset \overline{\mathbb{Q}}$. C'est la justification pour le choix de la fonction $\exp(2i\pi z)$ plutôt que de celui de $\exp(z)$. La bi-algébricité d'un élément $\alpha \in \mathbb{G}_m(\overline{\mathbb{Q}})$ ne dépend pas ainsi d'un relevé de α par l'application d'uniformisation. Une autre présentation possible est de prendre $\pi = \exp(z)$ mais de choisir $H_1(\mathbb{G}_m, \mathbb{Q}) = 2i\pi\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$ comme structure rationnelle sur $\mathbb{C}$.

Le théorème de Gel'fond-Schneider ([83] thm 1.4, p.3) dit que si λ et β sont deux nombres complexes avec $\lambda \neq 0$ et si les trois nombres e^λ , β et $e^{\beta\lambda}$ sont algébriques alors $\beta \in \mathbb{Q}$.

En prenant $\lambda = 2i\pi$ dans cet énoncé, on voit qu'un nombre algébrique $\alpha \in \mathbb{G}_m$ est bi-algébrique (au sens arithmétique) si et seulement si il est de la forme $\alpha = e^{2i\pi\beta}$ avec $\beta \in \mathbb{Q}$. Ceci est équivalent à dire que α est un point de torsion de $\mathbb{G}_m$ ou que α est spécial dans le sens précédent pour le tore algébrique $\mathbb{G}_m$. L'importance de la notion du point de vue de la théorie de Galois provient du fait qu'alors $\mathbb{Q}[\alpha]$ est une extension abélienne de $\mathbb{Q}$ et que l'on engendre ainsi toutes les extensions abéliennes de $\mathbb{Q}$ d'après le théorème de Kronecker-Weber.

On peut remarquer que si l'on avait choisit $\pi(z) = \exp(z)$ et la structure rationnelle usuelle sur $\mathbb{C}$, seule l'origine de $\mathbb{G}_m$ serait bi-algébrique (au sens arithmétique) par le théorème d'Hermite-Lindemann ([83] thm 1.2, p. 2).

Analysons alors la structure spéciale sur le tore $\mathbb{G}_m^r$. On dispose de l'application d'uniformisation

$$\Pi := (\pi, \dots, \pi) : \mathbb{C}^r \longrightarrow \mathbb{G}_m^r(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^*)^r.$$

On dispose alors de la notion de points bi-algébriques (au sens arithmétique) qui correspond donc à la notion de points spéciaux.

Par ailleurs si V est une sous-variété algébrique de $\mathbb{G}_m^r$, on dit que V est bi-algébrique (au sens géométrique) si une composante analytique de $\Pi^{-1}(V)$ est une sous-variété algébrique de $\mathbb{C}^r$. Comme l'action de $\mathbb{Z}^r$ sur $\mathbb{C}^r$ est algébrique, si V est bi-algébrique alors toute composante analytique de $\Pi^{-1}(V)$ est algébrique. Une conséquence simple du théorème d'Ax [6] est que les sous-variétés bi-algébriques sont les translatés de sous-tores $V = zT$ pour un sous-tore T de $\mathbb{G}_m^r$ et un point arbitraire z de $\mathbb{G}_m^r$. Pour les variétés de dimension positive, la notion de bi-algébricité ne dépend pas du choix de l'application d'uniformisation (on pourrait prendre $\Pi = (\exp(z), \dots, \exp(z))$). Pour les points, on a donc deux notions de bi-algébricité une arithmétique

et une géométrie qui est toujours réalisée. Quand le contexte est clair, en particulier quand la discussion porte uniquement sur des points on ne précisera pas toujours que l'on parle du sens arithmétique.

On remarque cependant, qu'avec nos conventions, les sous-variétés spéciales sont les sous-variétés bi-algébriques contenant un point bi-algébrique. De manière équivalente ce sont les sous-variétés algébriques de $\mathbb{G}_m^r$ définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$ telle qu'une composante analytique de $\pi^{-1}(V)$ soit algébrique et défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

Nous dirons dans la suite que les sous-variétés bi-algébriques sont les sous-variétés **faiblement spéciales**, de sorte qu'une sous-variété spéciale est une sous-variété faiblement spéciale ayant un point spécial. Du point de vue de la géométrie riemannienne les sous-variétés faiblement spéciales de $\mathbb{G}_m^r$ apparaissent de manière naturelle. Ce sont les sous-variétés totalement géodésiques.

2.2.2 Structures spéciales bi-algébriques sur les variétés abéliennes.

Soit A une variété abélienne de dimension g sur $\mathbb{C}$, on dispose donc d'une application d'uniformisation

$$\pi : \mathbb{C}^g \rightarrow A \simeq \mathbb{C}^g / \Gamma$$

pour un réseau Γ de $\mathbb{C}^g$. L'application π est une application transcendante entre deux variétés algébriques. On dit alors comme précédemment qu'une sous-variété V de A est **faiblement spéciale** si les composantes analytiques complexes de $\pi^{-1}(V)$ sont des sous-variétés algébriques de $\mathbb{C}^n$. On vérifie que V est faiblement spéciale si et seulement si $V = P + B$ pour une sous-variété abélienne B de A et un point $P \in A(\mathbb{C})$ ([79] prop 5.1). On remarque que tout point de A est faiblement spécial, que les sous-variétés spéciales de A sont faiblement spéciales et qu'une sous-variété faiblement spéciale est spéciale si et seulement si elle contient un point spécial donc est de la forme $P + B$ avec P de torsion. Notons encore une fois que la notion de bi-algébricité pour les sous-variétés de dimension positive ne dépend pas du choix de l'application d'uniformisation.

Les variétés abéliennes complexes ne sont pas toutes définissables sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Si on fait l'hypothèse supplémentaire que A est défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$, on écrit de manière canonique

$$\pi := \exp_A : \text{Lie}(A_{\mathbb{C}}) \longrightarrow A(\mathbb{C}).$$

Dans cette situation $\text{Lie}(A_{\overline{\mathbb{Q}}})$ est un $\overline{\mathbb{Q}}$ -vectoriel de dimension n tel que $\text{Lie}(A_{\overline{\mathbb{Q}}}) \otimes \mathbb{C} = \text{Lie}(A_{\mathbb{C}})$. Ce choix naturel ne donne cependant pas lieu à une structure bi-algébrique intéressante. On dispose en effet du résultat suivant (thm. 3 p. 28 [41]) .

Proposition 2.6 *Soit $z \in \text{Lie}(A_{\overline{\mathbb{Q}}})$ tel que $\pi(z) \in A(\overline{\mathbb{Q}})$. Alors $z = 0$ et $\pi(z) = 0$ est l'élément neutre de $A(\mathbb{C})$.*

On rappelle tout d'abord l'énoncé du théorème du sous-groupe analytique de Wüstholz ([84] thm 1) qui est valable plus généralement pour un groupe algébrique commutatif $G_{\overline{\mathbb{Q}}}$ défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ arbitraire d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{Q}}}$. Si $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ désigne l'algèbre de Lie de $G(\mathbb{C})$ et

$$\exp_G : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{Q}}} \otimes \mathbb{C} \rightarrow G(\mathbb{C})$$

l'application exponentielle de $G(\mathbb{C})$, on a :

Théorème 2.7 (Wüstholz) *(i) Soit $\mathfrak{b}$ un sous- $\overline{\mathbb{Q}}$ -vectoriel de $\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{Q}}}$ de dimension positive. Soit $B = \exp_G(\mathfrak{b} \otimes \mathbb{C})$. On suppose que $B \cap G(\overline{\mathbb{Q}}) \neq \{0\}$. Il existe alors un $\overline{\mathbb{Q}}$ -sous-groupe algébrique $H_{\overline{\mathbb{Q}}}$ de $G_{\overline{\mathbb{Q}}}$ de dimension positive d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}_{\overline{\mathbb{Q}}}$ tel que $\mathfrak{h}_{\overline{\mathbb{Q}}} \subset \mathfrak{b}$.*

De façon équivalente :

(ii) Soit $u \in \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ tel que $\exp_G(u) \in G(\overline{\mathbb{Q}})$. Soit $\mathfrak{h}$ le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et tel que $u \in \mathfrak{h}(\mathbb{C})$. Alors $\mathfrak{h}$ est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe algébrique H de G défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

La preuve de Lang de la proposition 2.6 n'utilise pas le théorème de Wüstholz. On peut cependant le déduire simplement du théorème 2.7 de la manière suivante. On peut supposer que $z \in \text{Lie}(A_{\overline{\mathbb{Q}}})$ est non nul. On prend $G_{\overline{\mathbb{Q}}} = \text{Lie}(A_{\overline{\mathbb{Q}}}) \times A_{\overline{\mathbb{Q}}}$ de sorte que l'application exponentielle de $G(\mathbb{C})$,

$$\exp_G : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \text{Lie}(A_{\mathbb{C}}) \times \text{Lie}(A_{\mathbb{C}}) \longrightarrow \text{Lie}(A_{\mathbb{C}}) \times A_{\mathbb{C}}$$

est simplement $\exp_G = (Id, \pi)$. Soit $\mathfrak{b} = \overline{\mathbb{Q}}(z, z)$ c'est une $\overline{\mathbb{Q}}$ -sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{Q}}}$. Par hypothèse $B \cap G(\overline{\mathbb{Q}}) = \exp_G(\mathfrak{b} \otimes \mathbb{C}) \cap G(\overline{\mathbb{Q}})$ contient le point $(z, \pi(z))$ donc est non nul. D'après le théorème de Wüstholz, il existe un sous-groupe algébrique $H_{\overline{\mathbb{Q}}}$ de $G_{\overline{\mathbb{Q}}}$, de dimension positive, tel que $\mathfrak{h}_{\overline{\mathbb{Q}}} \subset \mathfrak{b} = \overline{\mathbb{Q}}(z, z)$. On a donc $\mathfrak{h}_{\overline{\mathbb{Q}}} = \overline{\mathbb{Q}}(z, z)$ et

$$H_{\mathbb{C}} := \{(zt, \pi(zt)), t \in \mathbb{C}\}$$

serait un groupe algébrique. Ceci contredirait le fait que les seuls sous-groupes algébriques connexes de $\mathbb{G}_a \times A$, de dimension 1, sont $\mathbb{G}_a$ et les courbes elliptiques contenues dans A .

Soit $A_{\mathbb{C}}$ une variété abélienne sur $\mathbb{C}$, de dimension g , qui est définissable sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et $\pi : \text{Lie}(A_{\mathbb{C}}) \rightarrow A(\mathbb{C})$ comme précédemment. Pour pouvoir espérer caractériser les points de torsion de A par une propriété de bi-algèbricité, on cherche une base $(e_1, \dots, e_g)$ de $\text{Lie}(A_{\mathbb{C}})$ tel que l'on puisse caractériser les points de torsion de $A(\mathbb{C})$ comme les images des

$$x \in \text{Vect}_{\overline{\mathbb{Q}}}(e_1, \dots, e_g) := \overline{\mathbb{Q}}e_1 \oplus \dots \oplus \overline{\mathbb{Q}}e_g \subset \text{Lie}(A_{\mathbb{C}})$$

tels que $\pi(x) \in A(\overline{\mathbb{Q}})$. Une condition nécessaire pour cela est que le réseau des périodes $\Gamma = \text{Ker}(\pi)$ soit contenu dans un $\overline{\mathbb{Q}}$ -vectoriel de dimension g . Si on suppose que A est muni d'une polarisation principale ϕ pour simplifier la discussion, alors

$$(A, \phi) \simeq (A_{\tau}, \phi_{\tau}) := (\mathbb{C}^g / (\mathbb{Z}^g + \tau \mathbb{Z}^g), \phi_{\tau})$$

avec τ dans le demi-espace de Siegel $\mathbb{H}_g$ formé des matrices symétriques d'ordre g de partie imaginaire définie positive et ϕ_{τ} la forme symplectique standard sur $\Gamma = \mathbb{Z}^g + \tau \mathbb{Z}^g$. Pour que Γ soit contenu dans un $\overline{\mathbb{Q}}$ -vectoriel de dimension g il faut et il suffit que les entrées de la matrice τ soient dans $\overline{\mathbb{Q}}$. Soit

$$J_g : \mathbb{H}_g \rightarrow \mathcal{A}_g(\mathbb{C}) \simeq \text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}_g$$

l'application modulaire telle que $J_g(\tau)$ soit le point modulaire de $(A_{\tau}, \phi_{\tau}) := (\mathbb{C}^g / (\mathbb{Z}^g + \tau \mathbb{Z}^g), \psi)$. Comme A est défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$, $J_g(\tau)$ est défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$. D'après le résultat de Cohen et de Shiga-Wolfart discuté plus loin dans ce texte (thm. 2.16), on trouve que A est à multiplication complexe. Le résultat suivant est obtenu par Masser [45]. Un énoncé proche est aussi donné par Lang [42].

Théorème 2.8 *Soit A une variété abélienne à multiplication complexe de dimension g . On sait alors que A est défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Soit*

$$\pi = \exp_A : \text{Lie}(A_{\mathbb{C}}) \rightarrow A(\mathbb{C}) = \Gamma \backslash \mathbb{C}^g$$

l'application d'uniformisation. Soit $V_{\overline{\mathbb{Q}}} \subset \text{Lie}(A)$ le $\overline{\mathbb{Q}}$ -vectoriel de dimension g engendré par le réseau Γ . Soit $x \in V_{\overline{\mathbb{Q}}}$ tel que $\pi(x) \in A(\overline{\mathbb{Q}})$. Alors $\pi(x)$ est de torsion dans A et $x \in \Gamma \otimes \overline{\mathbb{Q}}$.

La preuve initiale de cet énoncé ne nécessite pas le théorème de Wüstholz. Le rapporteur de ce texte m'a suggéré l'énoncé suivant qui généralise le théorème 2.8 et m'a expliqué la preuve qui repose elle sur le théorème de Wüstholz (2.7).

Théorème 2.9 *Soit A une variété abélienne définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Soient $D = \text{End}(A) \otimes \mathbb{Q}$ son algèbre d'endomorphismes et $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \dots + \mathbb{Z}\omega_r$ un sous-groupe de $H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$. Soit $x = \sum_{i=1}^r \alpha_i \omega_i$ un point de $\Lambda \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ tel que $\exp_A(x) \in A(\overline{\mathbb{Q}})$. Alors $x \in D \otimes \Gamma$ et $\exp_A(x)$ est un point de torsion de A .*

Preuve. Comme la décomposition de Poincaré respecte les $\overline{\mathbb{Q}}$ -structures, on peut se ramener, sans perte de généralité, au cas où A est une variété abélienne simple; donc où D est un corps. On suppose dans un premier temps que les ω_i sont linéairement indépendants sur D . On applique alors le théorème de Wüstholz à $G = A^{r+1}$ avec

$$\mathfrak{b} := \{(z_0, z_1, \dots, z_r) \in \text{Lie}(A), z_0 = \sum_{i=1}^r \alpha_i z_i\}.$$

Comme les α_i sont algébriques, $\mathfrak{b}$ est défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Le point $u := (x, \omega_1, \dots, \omega_r)$ de $\mathfrak{b} \otimes \mathbb{C}$ est tel que $\exp_G(u) \in G(\overline{\mathbb{Q}})$. Il existe donc une sous-variété abélienne H de $G = A^{r+1}$ telle que $\mathfrak{h} = \text{Lie}(H) \subset \mathfrak{b}$ et $u \in \mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}$. Comme A est simple, H est contenu dans le noyau d'une surjection $\kappa : A^{r+1} \rightarrow A$, dont la différentielle s'écrit

$$d\kappa : (z_0, z_1, \dots, z_r) \mapsto \sum_{i=0}^r \gamma_i z_i,$$

où les γ_i sont des éléments de D non tous nuls. Comme $u \in \mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}$, on a

$$\gamma_0 x + \gamma_1 \omega_1 + \dots + \gamma_r \omega_r = 0.$$

Mais $\gamma_0 \neq 0$ car les ω_i sont linéairement indépendants sur D . On obtient ainsi que $x \in D \otimes \Lambda$.

Le cas général s'obtient de manière analogue en considérant une base $w_1, \dots, w_s$ de $\mathbb{Q} \otimes \Lambda$ sur D et en décomposant les ω_i dans cette base. Dans la situation CM du théorème 2.8, on prend $\Lambda = H_1(A, \mathbb{Z})$ et on a $s = 1$.

Jean-Benoît Bost m'a suggéré la question bi-algébrique suivante qui a le mérite de s'appliquer à toutes les variétés abéliennes définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Soit A

une variété abélienne complexe qui est définissable sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Soit E_A l'extension vectorielle universelle de A . Alors E_A est défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et on a une suite exacte de la forme

$$0 \rightarrow V_A \longrightarrow E_A \longrightarrow A \rightarrow 0$$

avec V_A un $\overline{\mathbb{Q}}$ -vectoriel de dimension g . Sur $\mathbb{C}$ on obtient la suite exacte

$$0 \rightarrow V_A \otimes \mathbb{C} \longrightarrow E_A(\mathbb{C}) \longrightarrow A(\mathbb{C}) \rightarrow 0$$

La suite exacte associée des espaces tangents à l'origine s'interprète canoniquement en terme de structures de Hodge sous la forme :

$$0 \rightarrow V_A \otimes \mathbb{C} \simeq H^{0,-1}(A(\mathbb{C})) \rightarrow T_0(E_A) \simeq H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \rightarrow T_0(A) \simeq H^{-1,0}(A(\mathbb{C})) \rightarrow 0.$$

Soit $\Gamma := H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \subset H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{C})$. On a des morphismes d'uniformisation

$$\pi_E : H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \longrightarrow E_A(\mathbb{C}) \simeq \Gamma \backslash H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{C})$$

et

$$\pi_A : T_0(A) \longrightarrow A(\mathbb{C}) \simeq \Gamma \backslash T_0(A).$$

Un point $x \in E_A(\overline{\mathbb{Q}})$ est dit bi-algébrique si il existe $y \in H_1(A, \mathbb{Z}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ tel que $\pi(y) = x$.

La preuve de l'énoncé suivant suggéré par Bost m'a été communiqué par le rapporteur de ce texte.

Théorème 2.10 *Soit A une variété abélienne définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Soient E_A son extension vectorielle universelle et Γ le groupe $H_1(E_A, \mathbb{Z}) = \text{Ker}(\exp_{E_A})$. Soit*

$$U \in \Gamma \otimes \overline{\mathbb{Q}} \subset T_0(E_A)(\mathbb{C})$$

tel que $\exp_{E_A}(U) \in E_A(\overline{\mathbb{Q}})$. Alors $U \in \Gamma \otimes \mathbb{Q}$ et de façon équivalente $\exp_{E_A}(U)$ est un point de torsion de E_A .

On peut remarquer que cet énoncé caractérise de manière bi-algébrique les points de torsion de $A(\mathbb{C})$ car le groupe des points de torsion de $A(\mathbb{C})$ est canoniquement isomorphe à celui de $E_A(\mathbb{C})$.

Preuve. Soit u l'image de U par la projection $T_0(E_A) \rightarrow T_0(A)$. Alors $u \in H_1(A, \mathbb{Z}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ et $\exp_A(u) \in A(\overline{\mathbb{Q}})$. D'après le théorème 2.9, $u \in H_1(A, \mathbb{Q})$. Soit U' le relèvement de u dans $H_1(E_A, \mathbb{Q})$. Alors $\tilde{U} := U - U'$ vérifie les

mêmes hypothèses que U et $\tilde{U} \in V_A(\mathbb{C})$. Comme la restriction de $\exp_{E_A}$ à V_A est l'identité, on voit que

$$\tilde{U} \in V_A(\overline{\mathbb{Q}}) \cap (\Gamma \otimes \mathbb{Q}).$$

Plusieurs approches utilisant le théorème de Wüstholz permettent de montrer que $V_A(\overline{\mathbb{Q}}) \cap (\Gamma \otimes \mathbb{Q})$ est réduit à 0, donc que $\tilde{U} = 0$ et que

$$U = U' \in H_1(E_A, \mathbb{Q}).$$

Cela se déduit en particulier d'un autre énoncé de Wüstholz ([84] thm. 2) qui assure que les périodes de deuxième espèce d'une variété abélienne sont nulles ou transcendentes.

2.2.3 Réalisations semi-algébriques des espaces symétriques hermitiens.

Soit $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z) > 0\}$ le demi-plan de Poincaré. C'est une variété analytique complexe qui est aussi semi-algébrique réelle une fois $\mathbb{C}$ identifié à $\mathbb{R}^2$. Le but de cette section est de vérifier que c'est un fait général pour toutes les réalisations usuelles des espaces symétriques hermitiens. On dispose donc d'une structure de variété semi-algébrique réelle pour les variétés analytiques complexes uniformisant les variétés de Shimura. Cela permet finalement de donner une notion naturelle et canonique de sous-variétés algébriques pour les sous-ensembles des espaces symétriques hermitiens.

Soit $G_{\mathbb{R}}$ un groupe semi-simple sur $\mathbb{R}$ et soit K_{∞} un sous-groupe compact maximal de $G(\mathbb{R})$. On suppose que l'espace symétrique

$$X = X_G = G(\mathbb{R})/K_{\infty}$$

est hermitien. On dispose de plusieurs réalisations de X comme sous-ensemble analytique complexe d'une variété algébrique.

- La réalisation d'Harish-Chandra ([48] ch. 4 et ch. 5) comme un domaine hermitien borné $\mathcal{D} = \mathcal{D}_G$ dans l'espace tangent holomorphe $\mathfrak{p}^+$ en un point base x_0 . La description explicite des domaines hermitiens bornés de type classique donnée par exemple dans ([48] ch. 4.2) montre qu'ils sont toujours semi-algébriques réels.
- Via le plongement de Borel on dispose d'une réalisation $X_{B,G}$ comme sous-variété analytique complexe du dual compact $X^{\vee}$ de X ([48], thm 1 p.52).

- Quand $G = \mathrm{Sp}_{2g, \mathbb{R}}$ la réalisation d'Harish-Chandra de l'espace symétrique $X_{\mathrm{Sp}_{2g}} = G(\mathbb{R})/K_\infty$ de G est

$$\mathcal{D}_g = \{z \in M_g(\mathbb{C}) \mid {}^t z = z, {}^t \bar{z} z - I_g < 0\}$$

et on dispose aussi de la réalisation de Siegel de $X_{\mathrm{Sp}_{2g}}$ donnée par

$$\mathbb{H}_g := \{z \in M_g(\mathbb{C}), {}^t Z = Z, \mathrm{Im}(Z) > 0\}.$$

- Plus généralement une réalisation $\mathcal{X} = \mathcal{X}_G$ de X est un sous-ensemble analytique $\mathcal{X}$ d'une variété algébrique complexe $\tilde{\mathcal{X}}$ telle que $\mathcal{X}$ est muni d'une action transitive de $G(\mathbb{R})$ telle que pour tout $x_0 \in \mathcal{X}$ l'application

$$\psi_{x_0} : G(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{X}$$

$$g \mapsto g.x_0$$

est semi-algébrique et qui fait de $\mathcal{X}$ un espace symétrique hermitien associé à $G(\mathbb{R})$. Soient $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$ deux réalisations de X_G un isomorphisme de réalisations est la donnée d'un biholomorphisme $\psi : \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_2$ qui est $G(\mathbb{R})$ -équivariant.

On dispose alors de la proposition suivante ([77] Lemme 2.1)

Lemme 2.11 *Soit $\mathcal{X}$ une réalisation de X_G . Alors $\mathcal{X}$ est semi-algébrique.*

Soit $\psi : \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_2$ un isomorphisme de réalisations de X_G . Alors ψ est une application semi-algébrique.

Toutes les réalisations mentionnées dans cette section sont isomorphes de sorte qu'elles sont toutes semi-algébriques.

Définition 2.12 *Soit $\mathcal{X} \subset \tilde{\mathcal{X}}$ une réalisation de X . Un sous-ensemble Y de $\mathcal{X}$ est dit algébrique irréductible si Y est une composante analytique complexe d'une intersection $\mathcal{X} \cap \tilde{\mathcal{Y}}$ pour une sous-variété algébrique $\tilde{\mathcal{Y}}$ de $\tilde{\mathcal{X}}$. Un sous-ensemble de $\mathcal{X}$ est dit algébrique si il est une union finie d'algébriques irréductibles.*

On montre qu'une intersection $\mathcal{X} \cap \tilde{\mathcal{Y}}$ du type précédent n'a qu'un nombre fini de composantes analytiques complexes et que ces composantes sont semi-algébriques. Finalement on dispose de la proposition suivante [38] appendice B.

Proposition 2.13 (i) Soit $\mathcal{X}$ une réalisation de X . Un sous-ensemble Y de $\mathcal{X}$ est algébrique si et seulement si Y est une sous-variété analytique complexe fermé de $\mathcal{X}$ qui est semi-algébrique dans $\mathcal{X}$.

(ii) Soit $\phi : \mathcal{X}_1 \longrightarrow \mathcal{X}$ un isomorphisme de réalisation. Un sous-ensemble Y_1 de $\mathcal{X}_1$ est algébrique si et seulement si son image $Y_2 = \phi(Y_1)$ est algébrique dans $\mathcal{X}_2$.

On voit donc que la notion d'algébricité pour un sous-ensemble de $\mathcal{X}$ ne dépend pas du choix de la réalisation.

2.2.4 Sous-variétés faiblement spéciales des variétés de Shimura et structures bi-algébriques

Soient (G, X) une donnée de Shimura et K un sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbb{A}_f)$. Soit X^+ une composante de X et $G(\mathbb{Q})_+$ le sous-groupe de $G(\mathbb{Q})$ fixant X^+ . Soient $\Gamma = G(\mathbb{Q})_+ \cap K$ et $S = \Gamma \backslash X^+$ la variété de Shimura sur $\mathbb{C}$ associée. Ben Moonen a donné une caractérisation des sous-variétés totalement géodésiques de S en termes de données de Shimura. Une telle sous-variété est dite faiblement spéciale dans S . Le résultat principal de Moonen [49] est alors le théorème suivant.

Théorème 2.14 (Moonen) Soit (H, X_H) une sous-donnée de Shimura de (G, X) . On suppose que la donnée de Shimura adjointe (H^{ad}, X_H^{ad}) de (H, X_H) se décompose sous la forme d'un produit de données de Shimura

$$(H^{ad}, X_H^{ad}) = (H_1, X_1) \times (H_2, X_2).$$

Soit y_2 un point de X_2 et Z l'image de $X_1^+ \times \{y_2\}$ dans S . Alors Z est faiblement spéciale. Dans cette situation Z est spéciale si et seulement si y_2 est un point spécial de X_2 . Réciproquement toute sous-variété faiblement spéciale est soit spéciale soit obtenue par une construction du type précédent. En particulier une sous-variété faiblement spéciale est spéciale si et seulement si elle contient un point spécial.

Soit $\mathcal{X}$ une réalisation de X^+ . Soit $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow S = \Gamma \backslash \mathcal{X}$ l'application d'uniformisation. On dit qu'une sous-variété algébrique V de S est bi-algébrique si une composantes analytique de $\pi^{-1}(V)$ est algébrique. Comme l'action de Γ sur $\mathcal{X}$ est algébrique et que les composantes de $\pi^{-1}(V)$ sont permutés par Γ , si V est bi-algébrique alors toute composante de $\pi^{-1}(V)$

est algébrique. Au vu de la discussion de la section précédente, on voit que la bi-algèbricité de V ne dépend pas du choix d'une réalisation de X^+ . Le résultat suivant est obtenu dans [79] par des arguments de monodromie.

Proposition 2.15 *Une sous-variété algébrique V de S est faiblement spéciale si et seulement si elle est bi-algébrique.*

Un résultat fondamental de la théorie des variétés de Shimura est que toute variété de Shimura S associée à une donnée de Shimura (G, X) est une composante géométrique d'une variété $\mathrm{Sh}_K(G, X)$ qui est définissable canoniquement sur un corps de nombres $E(G, X)$ – le corps reflex – qui ne dépend que de (G, X) ([75] 3.3.5). Dans cette situation S est définie sur une extension abélienne de $E(G, X)$.

Pour donner une caractérisation convenable des points spéciaux en terme de bi-algèbricité il est crucial de normaliser les réalisations de X^+ et les morphismes donnant l'uniformisation des variétés de Shimura.

L'exemple le plus simple concerne la courbe modulaire et la fonction

$$j : \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(z) > 0\} \longrightarrow S = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H} = \mathbb{C}.$$

Le modèle canonique $\mathbf{S}$ de S est dans ce cas défini sur $\mathbb{Q}$, c'est l'espace affine $\mathbf{S} = A_{\mathbb{Q}}^1$ que l'on interprète comme l'espace de module des courbes elliptiques sur $\mathbb{Q}$. Un point x de $S(\overline{\mathbb{Q}})$ est dit bi-algébrique si il existe $\tau \in \mathbb{H}(\overline{\mathbb{Q}}) := \mathbb{H} \cap \overline{\mathbb{Q}}$ tel que $j(\tau) = x$. Comme $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ agissant sur $\mathbb{H}$ préserve $\mathbb{H}(\overline{\mathbb{Q}})$, si x est bi-algébrique tout point de $j^{-1}(x)$ est dans $\mathbb{H}(\overline{\mathbb{Q}})$. Dans cette situation le théorème de Schneider ([69] 1937) assure que x est bi-algébrique si et seulement si x est un point à multiplication complexe. Dans cette situation $\mathbb{Q}[\tau]$ est une extension quadratique imaginaire $\mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$ de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}[\tau, x]$ est une extension galoisienne de $\mathbb{Q}[\tau]$ de groupe de Galois abélien. C'est une réponse pour les corps quadratiques imaginaires au "Kronecker Jugentraum" également connu comme le 12-ième problème de Hilbert qui prédit que les extensions abéliennes d'un corps de nombres F sont contenues dans des extensions de F engendrées par des valeurs spéciales de fonctions analytiques.

L'extension de ce résultat à l'espace de modules $\mathcal{A}_g$ des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g est donnée par Cohen [14] et Shiga-Wolfart [71] en utilisant le théorème du sous-groupe analytique de Wüstholz (thm. 2.7).

Par la théorie des modèles canoniques, $\mathcal{A}_g(\mathbb{C})$ admet un modèle canonique $\mathcal{A}_{\mathbf{g}}$ sur $\mathbb{Q}$ qui est une variété algébrique quasi-projective sur $\mathbb{Q}$. Les

points spéciaux sont alors dans $\mathcal{A}_g(\overline{\mathbb{Q}})$. On peut normaliser la fonction

$$J_g : \mathbb{H}_g := \{z \in M_g(\mathbb{C}) \mid z = z^t, \operatorname{Im}(z) > 0\} \longrightarrow \mathcal{A}_g(\mathbb{C}) \simeq \operatorname{Sp}_{2g}(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}_g$$

qui uniformise $\mathcal{A}_g(\mathbb{C})$ de sorte que l'image inverse d'un point CM est dans $\mathbb{H}_g(\overline{\mathbb{Q}}) := \mathbb{H}_g \cap M_g(\overline{\mathbb{Q}})$. On fixe une telle normalisation, de sorte que les points spéciaux sont bi-algébriques.

Théorème 2.16 (*Cohen, Shiga-Wolfart*) *Un point $z \in \mathcal{A}_g(\overline{\mathbb{Q}})$ est bi-algébrique si et seulement si il est spécial.*

Dans cette situation une sous-variété spéciale V de S est une sous-variété algébrique définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ telle que les composantes de $\pi^{-1}(V)$ soient algébriques et définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$, i.e. composante d'une intersection d'une sous-variété algébrique de $M_{g,\overline{\mathbb{Q}}}$ avec $\mathbb{H}_g$.

La notion de bi-algébricité pour les points d'une variété de Shimura $S = \Gamma \backslash X^+$ dépend à priori de la réalisation $\mathcal{X}$ de X^+ et de la normalisation de l'application d'uniformisation. Pour les variétés de Shimura de type PEL des normalisations sont donnés dans les travaux de Shimura et reprises dans le texte de Shiga-Wolfart [71]. Les choix sont faits de tel sorte que les points CM sont bi-algébriques.

Pour une variété de Shimura arbitraire, on procède de la manière suivante ([79], ch. 3.3 et 3.4). Soit (G, X) une donnée de Shimura et V une $\mathbb{Q}$ -représentation fidèle de dimension finie. Au vue de l'interprétation de Deligne de X comme $G(\mathbb{R})$ -classe de conjugaison de morphismes du tore de Deligne $\mathbb{S} = \mathbb{C}^*$ dans $G_{\mathbb{R}}$ on dispose pour tout $x \in X^+$ d'une structure de Hodge V_x sur V , donc d'une filtration de Hodge $F_x^*(V_{\mathbb{C}})$ sur $V_{\mathbb{C}}$ ([75] 3.2). D'après Deligne, le plongement de Borel $X \subset X^{\vee}$ de X^+ dans son dual compact $X^{\vee}$ est l'application

$$x \mapsto F_x^*(V_{\mathbb{C}}).$$

Si on fixe x_0 dans X^+ et que l'on note Q le sous-groupe de $\operatorname{GL}(V_{\mathbb{C}})$ stabilisant $F_{x_0}^*(V_{\mathbb{C}})$, on voit que $X^{\vee}$ est réalisé comme une sous-variété de la variété de drapeaux $\Theta_{\mathbb{C}} := \operatorname{GL}(V_{\mathbb{C}})/Q$. Comme V est un $\mathbb{Q}$ -vectoriel, $\Theta_{\mathbb{C}}$ est canoniquement l'extension à $\mathbb{C}$ d'une variété algébrique $\Theta_{\mathbb{Q}}$ sur $\mathbb{Q}$. Par la définition du corps reflex $E(G, X)$ de (G, X) on voit que $X^{\vee}$ comme sous-variété de $\Theta_{\mathbb{C}}$ est défini sur $E(G, X)$. On dit alors qu'un point de X est algébrique si $P \in X^+ \cap X^{\vee}(\overline{\mathbb{Q}}) = X^+ \cap \Theta_{\mathbb{Q}}(\overline{\mathbb{Q}})$.

Un point $x \in X^+$ est CM si et seulement si

$$x : \mathbb{S} \rightarrow G_{\mathbb{R}}$$

se factorise par l'extension $T_{\mathbb{R}}$ d'un $\mathbb{Q}$ -tore maximal $T_{\mathbb{Q}}$ de $G_{\mathbb{Q}}$. Un argument simple donné dans ([79] ch 3.4) montre que si $\pi : X \rightarrow S$ désigne l'application d'uniformisation, les point spéciaux de S sont bi-algébriques. Je ne sais pas, en dehors du cas des variétés de Shimura de type abélien qui se déduit des résultats de Cohen et Shiga-Wolfart si cela caractérise les points spéciaux de S .

Les isomorphismes de réalisations entre la réalisation bornée et les réalisations non bornées de Siegel de X sont donnés par des transformations de Cayley explicites qui sont automatiquement des applications semi-algébriques comme on l'a vu. On peut vérifier que les $\overline{\mathbb{Q}}$ -structures naturelles sont préservées de sorte que pour les questions de bi-algéblicités on peut passer d'une réalisation à l'autre. La brique élémentaire de ces transformations de Cayley sont du type

$$c : \mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}, |\operatorname{Im}(z)| > 0\} \longrightarrow \Delta := \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$$

$$z \mapsto \frac{z - i}{z + i}.$$

Le lecteur intéressé peut consulter par exemple la section I.5 de [11] pour plus de précisions sur les réalisations des espaces symétriques hermitiens et sur leurs isomorphismes via les transformations de Cayley.

2.2.5 Structures spéciales bi-algébriques et conjecture de Kollar-Pardon

Pour résumer les structures que nous avons rencontrées, on fait les définitions suivantes.

Définition 2.17 (i) On dit qu'une variété algébrique V sur $\mathbb{C}$ est munie d'une structure bi-algébrique si son revêtement universel $\widehat{V}$ est biholomorphe à un ouvert semi-algébrique d'une variété algébrique. Si V est muni d'une structure bi-algébrique alors pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, V^r est muni d'une structure bi-algébrique.

(ii) On dit qu'une variété algébrique V sur $\mathbb{C}$ est munie d'une structure spéciale bi-algébrique forte si V est à la fois muni d'une structure spéciale

forte et d'une structure bi-algébrique telle que les sous-variétés spéciales de V^r sont les sous-variétés bi-algébriques ayant un point spécial.

(iii) On dit qu'une variété algébrique V sur $\mathbb{C}$ est munie d'une structure spéciale bi-algébrique forte arithmétique si elle est munie d'une structure spéciale bi-algébrique ayant les propriétés arithmétiques suivantes.

(a) La variété V est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

(b) Le revêtement universel $\widehat{V}$ se plonge dans une variété algébrique définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

(c) Soit $\pi : \widehat{V} \rightarrow V$ l'application d'uniformisation. Les points spéciaux de V sont les points z de $V(\overline{\mathbb{Q}})$ tels que tout $y \in \pi^{-1}(z)$ soit dans $\widehat{V}(\overline{\mathbb{Q}})$.

Les variétés semi-abéliennes et les variétés de Shimura mixtes sont munies de structures spéciales bi-algébriques fortes. Les variétés de Shimura de type abélien et $\mathbb{G}_m$ sont munies de structures spéciales bi-algébriques fortes arithmétiques. Une question naturelle dans ce langage est de vérifier que les variétés abéliennes à multiplication complexe et les variétés de Shimura mixtes sont munies de structures spéciales bi-algébriques fortes arithmétiques.

Explicitons l'exemple de la variété de Shimura mixte $\mathcal{U}_g$ qui est la variété abélienne universelle sur $\mathcal{A}_g$.

La construction de $\mathcal{U}_g$ s'obtient à partir du $\mathbb{Q}$ -groupe algébrique

$$P_{2g} = V_{2g} \rtimes \mathrm{GSp}_{2g}$$

où V_{2g} est le $\mathbb{Q}$ -vecteuriel de dimension $2g$ muni de l'action naturelle du groupe symplectique GSp_{2g} . Le groupe $P_{2g}(\mathbb{R})$ agit de manière transitive sur

$$X_g^+ := \mathbb{R}^{2g} \times \mathbb{H}_g.$$

par

$$(v, h).(v', x) := (v + hv', hx).$$

On peut plonger X_g^+ comme un ouvert (pour la topologie archimédienne) d'une variété algébrique complexe $X_g^\vee$ munie d'une action transitive de $P_{2g}(\mathbb{C})$. Ce plongement est $P_{2g}(\mathbb{R})$ -équivariant de sorte que l'on a

$$X_g^+ = P_{2g}(\mathbb{R}).x_0 \hookrightarrow P_{2g}(\mathbb{C}).x_0 = P_{2g}(\mathbb{C})/\mathrm{Stab}_{P_{2g}(\mathbb{C})}(x_0) = X_g^\vee.$$

On vérifie encore que X_g^+ est semi-algébrique réel et on définit comme dans le cas pur la notion de sous-variété algébrique de X_g^+ . Au vu de sa description explicite, on dispose aussi d'une $\overline{\mathbb{Q}}$ -structure sur X_g^+ .

Soit $\Gamma = \mathbb{Z}^{2g} \rtimes \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z})$. Alors Γ est un réseau arithmétique de X_g^+ et on a une application d'uniformisation

$$\pi : X_g^+ \longrightarrow \mathcal{U}_g = \Gamma \backslash X_g^+.$$

Plus généralement si N est un entier positif, on note $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z})(N)$ l'ensemble des matrices de $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z})$ qui sont congrues à $\mathbf{1}$ modulo N et

$$\Gamma(N) = \mathbb{Z}^{2g} \rtimes \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z})(N).$$

Soit $\mathcal{A}_{g,N}$ l'espace de modules des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g munies d'une structure symplectique de niveau N . On a alors $\mathcal{A}_{g,N} \simeq \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z})(N) \backslash \mathbb{H}_g$ et $\mathcal{A}_{g,N} = \mathcal{A}_g$. On note

$$\mathcal{U}_{g,N} := \Gamma(N) \backslash X_g^+.$$

On a un morphisme

$$\eta = \eta_N : \mathcal{U}_{g,N} \longrightarrow \mathcal{A}_{g,N}$$

tel que pour tout N pair avec $N \geq 4$ et tout $x \in \mathcal{A}_{g,N}(\mathbb{C})$ représentant la variété abélienne principalement polarisée A_x de dimension g munie d'une structure symplectique de niveau N , la fibre $\eta^{-1}(x)$ de η au dessus de x est A_x munie de sa structure symplectique. Le lecteur peut consulter la thèse de Pink ([58] ch. 10), en particulier le théorème 10.6 et la proposition 10.8 pour des énoncés plus précis ainsi que des preuves. Les points spéciaux sont dans ce cas les points de torsion des fibres au dessus d'un point spécial. D'après la thèse de Pink [58] on dispose d'un modèle canonique de $\mathcal{U}_{g,N}$ sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et le morphisme η est lui même défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

Richard Pink donne une définition des sous-variétés faiblement spéciales pour les variétés de Shimura mixtes en terme de données de Shimura mixtes ([59] def. 4.1). Ziyang Gao vérifie alors que les variétés faiblement spéciales sont les variétés bi-algébriques. Dans la situation précédente une sous-variété algébrique de $\mathcal{U}_g$ est faiblement spéciale si et seulement si une composante de son image inverse par π est algébrique [28].

Par ailleurs $X_g^+ = \mathbb{R}^{2g} \times \mathbb{H}_g$ est naturellement plongé dans $\mathbb{R}^{2g} \times (\mathbb{C})^{g^2}$. On peut donc parler de la notion de point algébrique de X_g^+ et les points spéciaux de $\mathcal{U}_g$ sont alors bi-algébriques. On s'attend à ce que ce soient les seuls. Cela contient le théorème 2.8 pour les variétés abéliennes à multiplication

complexe. Cela explique aussi pourquoi on ne trouve une interprétation bi-algébrique satisfaisante pour les points de torsion des variétés abéliennes que dans le cas des variétés abéliennes à multiplication complexe.

Il me semble plausible qu'il n'y ait pas d'autres variétés algébriques sur $\mathbb{C}$ munies d'une structure spéciale bi-algébrique forte arithmétique ou non au delà des exemples déjà rencontrés dans ce texte. La conjecture suivante de Kollar et Pardon [40] prévoit en tout cas des restrictions très fortes sur les variétés munies d'une structure bi-algébrique.

Conjecture 2.18 *Soit V une variété algébrique projective lisse munie d'une structure bi-algébrique. Alors le revêtement universel $\widehat{V}$ de V est biholomorphe à un produit*

$$\widehat{V} = W \times \mathbb{C}^n \times \mathcal{D} \quad (1)$$

où W est une variété algébrique projective normale simplement connexe et $\mathcal{D}$ un domaine symétrique hermitien.

Il est tentant de penser que les 3 facteurs du membre de droite de l'équation (1) sont le reflet de la trichotomie de Zilber. Je ne sais cependant pas donner un sens précis à cette assertion.

2.3 Manin-Mumford -André-Oort et Zilber–Pink abstrait.

Soit S une variété algébrique munie d'une structure spéciale. La conjecture de Manin-Mumford-André-Oort abstraite est la suivante.

Conjecture 2.19 *(i) Soit Z une sous-variété de S contenant un ensemble Zariski dense de points spéciaux. Alors Z est une sous-variété spéciale de S .*

(ii) Soit Z une sous-variété de S . L'ensemble des sous-variétés spéciales de S contenues dans Z et maximal parmi les sous-variétés spéciales contenues dans Z est fini.

On montre que les deux formulations de la question sont équivalentes en utilisant les propriétés (ii) et (iii) des structures spéciales.

Soit d la dimension de S . Pour tout entier r avec $0 \leq r \leq d$, on note $\Sigma_r = \Sigma_r(S)$ l'ensemble des sous-variétés spéciales de S de dimension au plus r .

Soit Z une sous-variété irréductible de S . Soit $\langle Z \rangle$ la plus petite sous-variété spéciale de S contenant Z (définition 2.1). On définit le **défaut** $\delta(Z)$ de Z comme le nombre entier

$$\delta(Z) = \dim(\langle Z \rangle) - \dim(Z).$$

On définit pour tout entier r comme précédemment

$$Z(r) := \cup_{V \in \Sigma_r} V \cap Z.$$

Avec ces définitions le problème de Manin-Mumford-André-Oort abstrait devient l'équivalence

$$Z(r) \text{ est Zariski dense dans } Z \text{ si et seulement si } \delta(Z) = 0.$$

La forme abstraite de la conjecture de Pink est alors :

Conjecture 2.20 (i) Si $\delta(Z) > 0$ alors $Z(\delta(Z) - 1)$ n'est pas Zariski dense dans Z .

(ii) On suppose que Z est Hodge générique dans $S = \langle Z \rangle$ (def 2.1). Soit

$$s = \dim(S) - \dim(Z) = \delta(Z).$$

Alors $Z(s - 1)$ n'est pas Zariski dense dans Z .

Les deux formulations du problème de Pink sont équivalentes et elles impliquent la forme abstraite de Manin-Mumford-André-Oort.

On peut formuler, dans l'esprit de Zilber, une conjecture un peu plus forte du problème en terme d'intersections **atypiques**.

Définition 2.21 Soit V une variété algébrique de dimension d . Soient A et B deux sous-variétés de dimension a et b respectivement. On dit que l'intersection de A et de B est **atypique** si il existe une composante C de $A \cap B$ telle que

$$\dim(C) > a + b - d.$$

On dit alors qu'un tel C est une composante atypique de $A \cap B$.

Si Z est une sous-variété irréductible de S comme précédemment, on note Z_{atyp} la réunion des composantes atypiques des intersections de Z avec les sous-variétés spéciales de S .

Avec cette définition la conjecture de Zilber abstraite est la suivante.

Conjecture 2.22 *Soit Z une sous-variété algébrique Hodge générique de S . L'ensemble Z_{atyp} n'est pas Zariski dense dans Z .*

Soit $s = \dim(S) - \dim(Z)$, soit V une sous-variété spéciale de S de dimension au plus $s - 1$. Si l'intersection $V \cap Z$ est non vide, alors toute composante de $V \cap Z$ est atypique. On en déduit que

$$Z(s - 1) \subset Z_{atyp}$$

de sorte que la forme abstraite de la conjecture de Zilber entraîne la forme abstraite de celle de Pink quand Z est Hodge générique.

On suppose de plus que l'on a une notion bien définie de sous-variétés faiblement spéciales de S . C'est le cas dans tous les exemples que nous avons en vue. Pour tout entier r avec $0 \leq r \leq d$, on note $\Sigma'_r = \Sigma'_r(S)$ l'ensemble des sous-variétés faiblement spéciales de S de dimension au plus r . On définit pour tout entier r comme précédemment et toute sous-variété Z de S ,

$$Z((r)) := \cup_{V \in \Sigma'_r} (V \cap Z)_{>0}$$

ou $(V \cap Z)_{>0}$ désigne la réunion des composantes de $V \cap Z$ de dimension positive. Une question générale qui a une réponse positive dans plusieurs cas importants est la suivante.

Question 2.23 *Est il vrai que*

$$Z^{oa} := Z - Z((s))$$

est un ouvert de Z ?

On peut remarquer que si Z est contenu dans une sous-variété faiblement spéciale stricte alors Z^{oa} est l'ensemble vide. Il existe aussi des exemples tels que Z^{oa} est vide même si Z n'est pas contenu dans une sous-variété faiblement spéciale stricte.

3 La conjecture de Zilber–Pink

Dans cette partie on fait un point rapide sur ce qui est connu pour les problèmes de type Manin-Mumford-André-Oort ou Zilber–Pink dans les exemples classiques de variétés algébriques munies d'une structure spéciale.

3.1 Manin-Mumford.

Quand $V = A$ est une variété abélienne ou une variété semi-abélienne, la conjecture 2.19 est connue sous le nom de conjecture de Manin-Mumford.

La première preuve de la conjecture de Manin-Mumford pour les sous-variétés des variétés abéliennes est donnée par Raynaud [63] par des techniques p -adiques. De nombreuses preuves alternatives sont apparues par la suite par des approches très diverses montrant la richesse de la question. Citons notamment :

- la preuve de Hindry [36] par une combinaison de méthodes galoisiennes et géométriques,
- celle de l’auteur de ces notes et de Zhang via la conjecture de Bogomolov [74], [90] par des techniques de théorie d’Arakelov et d’équidistribution de suites de points de petite hauteur,
- celle de Hrushowski [37] via la théorie des modèles,
- celle de Pink et Roessler [61] qui traduit l’approche de Hrushowski dans le langage de la géométrie algébrique,
- enfin celle de Pila et Zannier [53] par une combinaison de théorie o-minimale, de transcendance fonctionnelle et de théorie de Galois.

3.2 André-Oort.

Yves André [2], intéressé par des problèmes de transcendance des périodes des variétés de Shimura propose la conjecture 2.19 pour les courbes dans une variété de Shimura. Frans Oort [51], motivé par des questions concernant les jacobiniennes à multiplication complexe propose la conjecture 2.19 pour les sous-variétés de l’espace de module $\mathcal{A}_g$ des variétés abéliennes principalement polarisée de dimension g . Il ne fait pas de doute que l’un et l’autre avait en tête l’analogie avec l’énoncé de la conjecture de Manin-Mumford. Le problème précédent pour une variété de Shimura mixte est donc connu sous le nom de conjecture d’André-Oort.

Pour la conjecture d’André-Oort pour les variétés de Shimura plusieurs séries de travaux ont été inspirés des différentes méthodes ayant permis de donner une preuve de Manin-Mumford.

Les méthodes p -adiques de Raynaud [63] ont été la source d'inspiration de Oort et de son école dans un premier temps. Des résultats notables dans la direction de la conjecture d'André-Oort pour l'adhérence de Zariski d'un ensemble de points CM d'une variété de Shimura vérifiant des hypothèses de réduction en une place fixée sont obtenus par Moonen ([50] thm 5.7) et Yafaev [85].

Edixhoven a développé une approche de la conjecture d'André-Oort qui après analyse s'avère très proche dans l'esprit de celle d'Hindry pour Manin-Mumford. Nous parlerons donc de la méthode d'Edixhoven-Hindry. Cette méthode est expliquée en détail dans ce volume dans mon texte [75] ainsi que celui de Yafaev [86]. Les résultats obtenus ainsi utilisent de manière essentielle l'hypothèse de Riemann généralisée (GRH) via des énoncés de type Cebotarev effectifs [70]. Edixhoven montre tout d'abord la conjecture d'André-Oort sous GRH pour un produit de 2 courbes modulaires [25]. Edixhoven et Yafaev [27], obtiennent ensuite le résultat pour une courbe dans une variété de Shimura arbitraire et Edixhoven traite le cas des sous-variétés de dimension arbitraire dans un produit de n copies de la courbe modulaire [26]. La conjecture d'André-Oort sous GRH est alors obtenue pour une variété de Shimura arbitraire par Klingler-Yafaev et l'auteur de ce texte ([39], [78]) en incorporant des idées de théorie ergodique sur les espaces homogènes à la Margulis-Ratner ([17], [76]), dans la méthode galoisienne et géométrique d'Edixhoven-Hindry. Notons aussi que la méthode d'Edixhoven-Hindry donne des résultats inconditionnels concernant l'adhérence de Zariski d'un ensemble de points CM contenus dans une orbite de Hecke.

Le premier résultat inconditionnel de la conjecture d'André-Oort est obtenu par André pour un produit de 2 courbes modulaires par une méthode utilisant les développements de Puiseux qui n'a pas pu s'étendre à d'autres cas [3].

La méthode de Pila-Zannier pour Manin-Mumford a été adaptée par Pila qui obtient ainsi une preuve inconditionnelle d'AO pour un produit arbitraire de courbes modulaires [54]. Comme pour le cas de la conjecture de Manin-Mumford la méthode est une combinaison de théorie o-minimale, de transcendance fonctionnelle et de théorie de Galois. Ce point de vue est développé dans ce volume dans le texte de Scanlon [68] et nous renvoyons à la dernière partie de ce texte pour une discussion détaillée des résultats récents. Une preuve inconditionnelle de la conjecture d'André-Oort pour $\mathcal{A}_g$ est obtenue par la méthode de Pila grâce à la combinaison du travail de nombreux auteurs. On montre dans [77] comment André-Oort se déduit en général de 3 ingrédients

principaux. Soit S une variété de Shimura et $\pi : X^+ \rightarrow S := \Gamma \backslash X^+$ l'application d'uniformisation.

- La définissabilité dans la structure o-minimale $\mathbb{R}_{an,exp}$ de la restriction de π à un ensemble fondamental convenable. Ce résultat est obtenu par Peterzil-Starchenko pour $\mathcal{A}_g$ [52] et dans [38] pour une variété de Shimura arbitraire.
- La conjecture d'Ax-Lindemann hyperbolique qui est maintenant connue en toute généralité s'énonce de la manière suivante :

Théorème 3.1 *Soit $V \subset X^+$ un ensemble irréductible algébrique au sens de la section 2.2.4. Alors l'adhérence de Zariski W de $\pi(V)$ est faiblement spéciale (i.e bi-algébrique).*

Ax Lindemann est prouvé par Pila pour les produits de courbes modulaires [54], par Ullmo-Yafaev pour les variétés de Shimura compactes [81], par Pila-Tsimerman pour $\mathcal{A}_g$ [55] et par Klingler-Ullmo-Yafaev pour une variété de Shimura arbitraire [38].

- Des bornes inférieures convenables pour la taille des orbites sous Galois de points spéciaux. Cet ingrédient est aussi au centre de l'approche de Edixhoven-Hindry. Pour une discussion sur le type de borne attendu pour une variété de Shimura arbitraire nous référons à la section 2.3 de [77]. Notons que les bornes recherchées sont connues sous GRH pour toute variété de Shimura d'après des résultats de Tsimerman [72] et Ullmo-Yafaev [80]. Pour un point z de $\mathcal{A}_g$ paramétrant la variété abélienne A_z , on note d_z la valeur absolue du discriminant du centre des endomorphismes de A_z . Si z est un point spécial alors le corps de définition $k(z)$ de z est un corps de nombres. On cherche à montrer dans ce cas qu'il existe des constantes positives α et β tels que pour tout point spécial de $\mathcal{A}_g$ on ait

$$[k(z) : \mathbb{Q}] > \alpha d_z^\beta. \quad (2)$$

Une première approche directe de Tsimerman [72] permet de montrer cette inégalité pour $g \leq 6$; le cas $g \leq 3$ a aussi été obtenu dans [80]. Une preuve pour g arbitraire est conséquence de l'observation remarquable

de Tsimerman [73] que la minoration (2) espérée se déduit du théorème de l'isogénie de Masser-Wüstholz [46] et d'une borne supérieure pour la hauteur de Faltings $h_F(A_z)$ de A_z de la forme suivante

$$\forall \epsilon > 0, h_F(A_z) \ll_{\epsilon} d_z^{\epsilon}. \quad (3)$$

Colmez a conjecturé [15] une formule close pour la hauteur de Faltings d'une variété abélienne à multiplication complexe. Nous renvoyons au texte de Colmez ou à [43] pour les notions de base de la théorie des variétés abéliennes à multiplication complexe. On se ramène simplement au cas où les endomorphismes de A_z sont l'anneau d'entiers d'un corps CM, E_z de degré $2g$ sur $\mathbb{Q}$. Dans cette situation Colmez montre que $h_F(A_z)$ ne dépend que du type CM (E_z, Φ) de A_z . En fixant le corps de multiplication complexe E et en faisant la moyenne sur les 2^g -types CM Φ possibles de E , on obtient conjecturalement une formule qui se présente sous une forme plus simple pour la moyenne des hauteurs de Faltings des variétés abéliennes CM par O_E . Des arguments classiques de théorie analytique des nombres montrent alors que la conjecture de Colmez ou sa version en moyenne entraînent la majoration de l'équation (3).

Finalement une preuve de la conjecture de Colmez en moyenne a été obtenu par Andreatta, Goren, Howard et Madapusi-Pera [5] par une étude des points CM sur les variétés de Shimura de type orthogonal et par Yuan et Zhang par une analyse de points de Heegner sur certaines courbes de Shimura [87].

Daw et Orr [21] montrent que la méthode de Pila-Zannier permet de donner une nouvelle preuve d'André-Oort sous l'hypothèse de Riemann généralisée. En étendant les arguments précédents aux variétés de Shimura mixtes, Gao montre la conjecture d'André-Oort pour $\mathcal{U}_g$ ou plus généralement pour les variétés de Shimura mixtes dont la projection sur la partie pure est de type abélien. En utilisant les résultats de Daw et Orr, Gao montre aussi la conjecture d'André-Oort sous l'hypothèse de Riemann généralisée pour une variété de Shimura mixte arbitraire [29].

3.3 Intersections atypiques et conjecture de Zilber–Pink.

Les problèmes d’intersections atypiques et la conjecture de Zilber–Pink ont surtout été étudiés pour les tores et les variétés abéliennes. Le lecteur pourra consulter la monographie de Zannier [88] pour une présentation lucide, de nombreux exemples et une bibliographie détaillée ainsi que le séminaire Bourbaki de Chambert-Loir [13].

Le problème de Pink abstrait est formulé comme une conjecture pour les variétés de Shimura mixtes par Pink ([60] conjecture 1.1) et se formule de manière identique pour les variétés semi-abéliennes. Pink montre en fait que sa conjecture pour les variétés de Shimura mixtes paramétrisant des variétés abéliennes entraîne ce même énoncé pour les variétés abéliennes ([59] prop 4.6 et [60] thm 5.7) donc entraîne aussi la conjecture de Manin-Mumford. Cette même implication pour les variétés semi-abéliennes n’est pas totalement clarifiée comme le montre la remarque 2-(i) du texte de Daniel Bertrand [7]. On dispose avec la conjectures de Pink, au delà de l’analogie formelle, d’un énoncé général qui englobe les questions abordées dans cette introduction et dans ce volume.

Des versions en famille de la conjectures de Manin-Mumford ont aussi été proposées par André sous forme de question ([4] lect. III) et par Pink ([60] conj. 6.2). Cette conjecture pour les familles variétés abéliennes est ouverte (voir néanmoins [47]), et est aussi une conséquence de la conjecture de Pink pour les variétés de Shimura mixtes ([60] thm. 6.3). Pour les familles de variétés semi-abéliennes la conjecture est fausse comme cela a été remarqué par Bertrand [7] mais les contre-exemples fournis par les ”sections de Ribet” sont expliqués par la conjecture initiale de Pink pour les variétés de Shimura mixtes paramétrisant des familles de variétés semi-abéliennes (introduites pour le cas abélien dans la section 2.2.5 de ce texte).

Les textes de Philippe Habegger [33] et Gaël Rémond [67] dans ce volume décrivent les progrès en direction de la conjecture de Zilber–Pink pour un tore $\mathbb{G}_m^r$ ou une variété abélienne. Nous renvoyons à ces textes pour une présentation précise des résultats connus. La notion de hauteur est centrale dans les approches envisagées pour ces cas. Pour une variété abélienne définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ ou sur le tore $\mathbb{G}_m^r$ on dispose d’une hauteur canonique $\hat{h}$ sur les points algébriques qui prend des valeurs positives ou nulles. Les points spéciaux (i.e. les points de torsion) sont alors les points de hauteur 0. La définition de hauteur canonique s’étend aussi aux sous-variétés. La conjecture de Bogomolov

prouvée par Zhang et l’auteur ([74], [90]) puis par David et Philippon pour les variétés abéliennes, caractérise les sous-variétés spéciales comme étant celles de hauteur nulle. Les résultats analogues pour $\mathbb{G}_m^r$ sont dûs à Zhang [89].

Il n’existe pas de caractérisation des points spéciaux ou des sous-variétés spéciales des variétés de Shimura en terme de hauteur de Faltings même si comme on l’a vu les résultats récents sur la conjecture de Colmez fournissent des bornes supérieures très précises sur la hauteur de Faltings des points à multiplication complexe. Colmez montre par exemple que la hauteur de Faltings des points CM sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$ tend vers l’infini quand le discriminant de l’anneau de multiplication complexe de la courbe elliptique E_z paramétrée par z tend vers l’infini [16].

Soit S le tore $\mathbb{G}_m^r$ ou une variété abélienne définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. La stratégie initiée par les travaux fondateurs de Bombieri, Masser et Zannier a plusieurs étapes. La première est la proposition suivante. On utilise les notations de la section 2.3.

Proposition 3.2 *Soit Z une sous-variété de S et soit s la codimension de Z dans S . Alors $Z^{oa} := Z - Z((s))$ est un ouvert de Zariski.*

Ce résultat est obtenu par Bombieri, Masser et Zannier pour $\mathbb{G}_m^r$ [9] et par Rémond dans le cas abélien ([65], [66]). On constate que Z^{oa} est vide si Z est contenu dans une sous-variété faiblement spéciale propre. Il existe cependant des exemples où Z n’est pas contenu dans une sous-variété spéciale propre et pour lesquels Z^{oa} est vide ([88] section 1.3.3).

L’étape suivante est le théorème suivant (conjecture de la hauteur bornée).

Théorème 3.3 *La hauteur des points algébriques de $Z^{oa} \cap Z(s)$ est uniformément bornée.*

Ce résultat est au centre des textes d’Habegger [33] et de Rémond [67] dans ce volume. Il est dû à Habegger pour $\mathbb{G}_m^r$ [30] et une preuve effective est donnée dans le texte de Habegger dans ce volume. Dans le cas des variétés abéliennes le résultat est dû à Rémond ([65], [66]) et Habegger [31].

Des résultats suffisamment précis sur le problème de Lehmer relatif permettent de montrer que $Z^{oa} \cap Z(s-1)$ est en fait fini. Pour $\mathbb{G}_m^n$ ces résultats sont obtenus par Amoroso et David [1]. Pour les variétés abéliennes à multiplication complexe ils sont obtenus par Ratazzi [62] et Carrizosa [12]. Des arguments simples permettent alors de conclure que si Z est ”suffisamment transverse” - ce qui implique en particulier que Z^{oa} est non vide - alors $Z(s-1)$ est fini comme prévu par la conjecture de Pink.

Précisons la condition de transversalité ci dessus quand la variété ambiante est une variété abélienne A . Le cas du tore $\mathbb{G}_m^r$ est identique. On dit qu’une sous-variété Z de A est suffisamment transverse si pour tout morphisme surjectif de variétés abéliennes $\phi : A \rightarrow B$, on a

$$\dim(\phi(X)) \geq \min(\dim(X), \dim(B)).$$

Si Z est une courbe dans A , alors Z est suffisamment transverse si et seulement si Z n’est pas contenu dans une sous-variété faiblement spéciale. Rémond montre en général que Z^{oa} est vide si et seulement si Z est suffisamment transverse ([66] prop 4.2). Le résultat suivant de Habegger ([30], [31]) résume en grande partie ce qui est connu.

Théorème 3.4 *Soit G une variété abélienne à multiplication complexe ou le tore $\mathbb{G}_m^r$. Soit Z une sous-variété de G de codimension s suffisamment transverse. Alors $Z(s-1)(\overline{\mathbb{Q}})$ n’est pas dense dans Z .*

Même si cette condition de transversalité est trop forte par rapport à ce qui est attendu pour Zilber–Pink il semble difficile avec les techniques actuelles d’obtenir des résultats en direction de Zilber–Pink quand elle n’est pas vérifiée. Cette condition est naturelle dans un contexte où l’on dispose d’un lemme de Poincaré mais s’adapte assez mal dans le contexte des variétés de Shimura. Il serait bon de trouver une bonne notion de transversalité pour la conjecture de Zilber–Pink concernant les variétés de Shimura mixtes ou pures.

Une nouvelle approche qui précise la conjecture des hauteurs et permet aussi d’obtenir des résultats de finitude passe par des estimations effectives de type Bogomolov, c’est à dire des minoration effectives de la hauteur canonique ou du minimum essentiel des sous-variétés qui ne sont pas spéciales. Des bornes de ce type ont été envisagées par David et Philippon pour les tores [19] et les variétés abéliennes [20]. Les applications en direction de la conjecture de Zilber–Pink par cette approche ont été développées par Viada [82], Habegger [32] et Rémond.

Les résultats sur Zilber–Pink pour les variétés de Shimura sont limités. Une raison est que la question d’André–Oort n’était pas entièrement résolue. Une autre est que la notion de hauteur, centrale dans les approches pour les variétés abéliennes et les tores n’est pas adaptée au moins de manière directe au cas des variétés de Shimura. On peut cependant prévoir que la méthode de Pila–Zannier via l’o-minimalité, la transcendance fonctionnelle

et des techniques galoisiennes seront l'objet de futurs développements qui permettront d'améliorer notre compréhension du problème de Zilber-Pink pour les variétés de Shimura. Les premiers résultats en ce sens sont obtenus par Pila-Tsimerman ([56], [57]) et Habegger-Pila ([34], [35]) pour un produit de courbes modulaires. Il ne fait pas de doute que ces méthodes sont promises à un bel avenir.

Références

- [1] F. Amoroso and S. David, *Le problème de Lehmer en dimension supérieure*. J. Reine Angew. Math. **513** (1999), 145–179.
- [2] Y. André, *G-functions and Geometry.*, Aspects of Maths, **E13**, Friede. Vieweg & Sohn, Braunschweig, (1989).
- [3] Y. André, *Finitude des couples d'invariants modulaires singuliers sur une courbe algébrique plane non modulaire*. J. reine angew. Math. **505** 1998, 203-208.
- [4] Y. André *Shimura varieties, subvarieties and CM points* lectures NCTS, Hsinchu (2001)
- [5] F. Andreatta, E. Goren, B. Howard, K. Madapusi-Pera, *Faltings Heights of Abelian varieties with complex multiplication*. Preprint 2015. [https ://www2.bc.edu/ howardbe/Research/research.html](https://www2.bc.edu/howardbe/Research/research.html)
- [6] J. Ax, *On Schanuel's conjecture*. Annals of Math. **93** (1971), 1-24
- [7] D. Bertrand, *Special points and Poincaré bi-extensions*, avec un appendice par Bas Edixhoven. preprint 2011, disponible sur la page web de l'auteur [https ://webusers.imj-prg.fr/ da-niel.bertrand/Recherche/recherche.html](https://webusers.imj-prg.fr/daniel.bertrand/Recherche/recherche.html)
- [8] E. Bombieri, D Masser, U. Zannier, *Intersecting a curve with algebraic subgroups of multiplicative groups*. Int. Math. Res. Not. IMRN 1999, no. **20**, 1119–1140.
- [9] E. Bombieri, D Masser, U. Zannier, *Anomalous subvarieties, structure theorems and applications*. Int. Math. Res. Not. IMRN 2007, no. **19**, 1–33.

- [10] A. Borel, *Introduction aux groupes arithmétiques*. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XV. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. **1341** Hermann, Paris 1969 125 pp.
- [11] A. Borel, L. Ji, *Compactification of Symmetric and Locally Symmetric Spaces*. Mathematics : Theory and Applications. Birkhuser Boston, Inc., Boston, MA, 2006. 479 pp.
- [12] M. Carrizosa, *Petits points et multiplication complexe*. Int. Math. Res. Not. IMRN 2009, no. **16**, 3016–3097.
- [13] A. Chambert-Loir, *Relations de dépendance et intersections exceptionnelles*. Séminaire Bourbaki, Astérisque **348** (2012), Exp. **1032** 149–188.
- [14] P. Cohen, *Humbert surfaces and transcendence properties of automorphic functions*. Symposium on Diophantine Problems (Boulder, CO, 1994). Rocky Mountain J. Math. **26** (1996), no. 3, 987–1001.
- [15] P. Colmez, *Périodes des variétés abéliennes à multiplication complexe*. Ann. of Math. (2) **138** (1993), no. 3, 625–683.
- [16] P. Colmez, *Sur la hauteur de Faltings des variétés abéliennes à multiplication complexe*. Compositio Math. **111** (1998), no. 3, 359–368.
- [17] L. Clozel, E. Ullmo, *Equidistribution de sous-variétés spéciales*, Annals of Maths **161** (2005), 1571–1588.
- [18] S. David, P. Philippon, *Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abéliennes*. Number theory (Tiruchirapalli, 1996), 333–364, Contemp. Math., **210**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [19] S. David, P. Philippon, *Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés des tores*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **28** (1999), no. 3, 489–543.
- [20] S. David, P. Philippon, *Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abéliennes. II*. Comment. Math. Helv. **77** (2002), no. 4, 639–700.
- [21] C. Daw, M. Orr, *Heights of pre-special points of Shimura varieties*. pre-print 2015.

- [22] P. Deligne, *Travaux de Shimura*. Séminaire Bourbaki, Exposé 389, Février 1971, Lecture Notes in Maths. **244**, Springer-Verlag, Berlin (1971), 123–165.
- [23] P. Deligne, *Variétés de Shimura : interprétation modulaire et techniques de construction de modèles canoniques*. dans *Automorphic Forms, Representations, and L-functions* part. **2** ; Editeurs : A. Borel et W Casselman ; Proc. of Symp. in Pure Math. **33**, American Mathematical Society, (1979), 247–290.
- [24] P. Deligne, *La conjecture de Weil pour les surfaces K3*. Invent. Math. **15** (1972), 206–226.
- [25] B. Edixhoven, *Special points on the product of two modular curves*. Compositio Mathematica **114**, 315–328 (1998).
- [26] B. Edixhoven, *Special points on products of modular curves*. Duke Math. J. **126** (2005), no. 2, 325–348.
- [27] B. Edixhoven, A. Yafaev, *Subvarieties of Shimura varieties*. Ann. Math. (2) **157**, (2003), p. 621–645.
- [28] Z. Gao, *Towards the André–Oort conjecture for mixed Shimura varieties : The Ax–Lindemann theorem and lower bounds for Galois orbits of special points*. A paraître dans Journal für die reine und angewandte Mathematik
- [29] Z. Gao, *About the mixed André–Oort conjecture : reduction to a lower bound for the pure case*. A paraître dans Comptes rendus Mathématiques.
- [30] P. Habegger, *On the bounded height conjecture*. Int. Math. Res. Not. IMRN (2009), no. **5**, 860–886.
- [31] P. Habegger, *Intersecting subvarieties of abelian varieties with algebraic subgroups of complementary dimension*. Invent. Math. **176** (2009), no. 2, 405–447.
- [32] P. Habegger, *A Bogomolov property for curves modulo algebraic subgroups*. Bull. Soc. Math. France **137** (2009), no. 1, 93–125.

- [33] P. Habegger, *Effective height upper bounds on algebraic tori*. Ce volume.
- [34] P. Habegger, J. Pila, *Some unlikely intersections beyond André-Oort*. *Compositio* **148** (2012), 1–27
- [35] P. Habegger, J. Pila, *O-minimality and certain atypical intersections*. paraître dans *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*
- [36] M. Hindry, *Autour d’une conjecture de Serge Lang*. *Invent. Math.*, **94** (3) :575–603, 1988.
- [37] Hrushowski, E, *The Manin-Mumford conjecture and the model theory of difference fields*. *Ann. Pure Appl. Logic* **112** (2001), A701–A703.
- [38] B. Klingler, E. Ullmo, A. Yafaev, *The hyperbolic Ax-Lindemann-Weierstrass conjecture*. *Pub. Math. IHES* à paraître.
- [39] B. Klingler, A. Yafaev, *The André–Oort conjecture*. *Ann. of Math* (2) **180** (2014), no. 3 867–925.
- [40] J. Kollar, J. Pardon, *Algebraic varieties with semialgebraic universal cover*. *J. Topol.* **5** (2012), no. 1, 199–212.
- [41] S. Lang, *Introduction to transcendental numbers*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont (1966).
- [42] S. Lang, *Diophantine approximation on abelian varieties with complex multiplication*. *Advances in Math.* **17** (1975), no. 3, 281–336.
- [43] S. Lang, *Complex multiplication*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], **255**. Springer-Verlag, New York, 1983. 184 pp.
- [44] G. Margulis, *Discrete subgroups of semi-simple subgroups*. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)* [Results in Mathematics and Related Areas (3)], **17**. Springer-Verlag, Berlin, (1991).
- [45] D. Masser, *Linear forms in algebraic points of Abelian functions. III*. *Proc. London Math. Soc.* (3) **33** (1976), no. 3, 549–564.
- [46] D. Masser, G. Wüstholz, *Factorization estimates for abelian varieties*. *Inst. Hautes tudes Sci. Publ. Math.* No. **81** (1995), 5–24.

- [47] D. Masser, U. Zannier, *Torsion points on families of simple abelian surfaces and Pell's equation over polynomial rings*. With an appendix by E. V. Flynn. J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **17** (2015), no. 9, 2379–2416.
- [48] N. Mok, *Metric Rigidity Theorems on Hermitian Locally Symmetric Manifolds* Series in Pure Math. **6**. World Scientific (1989).
- [49] B. Moonen, *Linearity properties of Shimura varieties I*. Journal of Algebraic Geometry **7** (1998), 539–567.
- [50] B. Moonen, *Linearity properties of Shimura varieties II*. Compositio Math. **114** (1998), 3–35.
- [51] F. Oort, *Some questions in algebraic geometry*. (1995), <http://www.math.uu.nl/people/oort>
- [52] Y. Peterzil, S. Starchenko, *Definability of restricted theta functions and families of abelian varieties*. Duke Math. J. **162** (2013), no. 4, 731–765.
- [53] J. Pila, U. Zannier, *Rational points in periodic analytic sets and the Manin-Mumford conjecture*. Rend. Mat. Acc. Lincei **19** (2008) 149–162.
- [54] J. Pila, *o -minimality and the André-Oort conjecture for $\mathbb{C}^n$* . Ann. of Math. (2) **173** (2011), no. 3, 1779–1840.
- [55] J. Pila, J. Tsimerman, *Ax -Lindemann for $\mathcal{A}_g$* . Annals Math. **179** (2014), 659–681.
- [56] J. Pila, J. Tsimerman, *Ax -Schanuel for the j -function*. A paraître dans Duke Math. J.
- [57] J. Pila, J. Tsimerman, *Multiplicative relations among singular moduli*. preprint (2015).
- [58] R. Pink, *Compactification of mixed Shimura varieties*. Dissertation (1989), Bonner Mathematische Schriften **209**. Disponible sur la page web de l'auteur <https://people.math.ethz.ch/pink/publications.html>
- [59] R. Pink, *A Combination of the Conjectures of Mordell-Lang and André-Oort*. Geometric Methods in Algebra and Number Theory, (Bogomolov, F., Tschinkel, Y., Eds.), Progress in Mathematics **253**, Birkhuser (2005), 251–282.

- [60] R. Pink, *A Common Generalization of the Conjectures of André-Oort, Manin-Mumford, and Mordell-Lang*. Preprint (2005), 13 p.
- [61] R. Pink, D. Roessler, *On Hrushovski proof of the Manin-Mumford*. J. Algebraic Geom. **13**, (2004), no. 4, 771–798.
- [62] N. Ratazzi, *Intersection de courbes et de sous-groupes et problèmes de minoration de hauteur dans les variétés abéliennes C.M.* Ann. Inst. Fourier **58** (2008), no. 5, 1575–1633.
- [63] M. Raynaud, *Sous-variétés d’une variété abélienne et points de torsion*. Arithmetic and Geometry, Vol. I Progr. Math. 35, Birkhauser Boston, MA, (1988).
- [64] G. Rémond, *Intersection de sous-groupes et de sous-variétés. I*. Math. Ann. **333** (2005), no. 3, 525–548.
- [65] G. Rémond, *Intersection de sous-groupes et de sous-variétés. II*. J. Inst. Math. Jussieu **6** (2007), no. 2, 317–348.
- [66] G. Rémond, *Intersection de sous-groupes et de sous-variétés. III*. Comment. Math. Helv. **84** (2009), no. 4, 835–863.
- [67] G. Rémond, *Généralisation du problème de Lehmer et application à la conjecture de Zilber-Pink*. Ce volume.
- [68] T. Scanlon, *o -minimality as an approach to the André-Oort conjecture*. Ce volume.
- [69] T. Schneider, *Arithmetische Untersuchungen elliptischer Integrale*. Math. Ann. **113** (1937), no. 1, 1–13.
- [70] J-P. Serre, *Quelques applications du théorème de densité de Chebotarev*. Pub. Math. IHES **54** (1981), 123–202
- [71] H. Shiga, J. Wolfart *Criteria for complex multiplication and transcendence properties of automorphic functions*. J. Reine Angew. Math. **463** (1995), 1–25.
- [72] J. Tsimerman, *Brauer-Siegel for arithmetic tori and lower bounds for Galois orbits of special points*. J. Amer. Math. Soc. **25** (2012), 1091–1117.

- [73] J. Tsimerman, *A proof of the André-Oort conjecture for $\mathcal{A}_g$* . preprint 2015.
- [74] E. Ullmo, Positivité et discrétion des points algébriques des courbes. *Ann. of Maths* **147** (1998), 167–179.
- [75] E. Ullmo, *Autour de la conjecture d’André-Oort*. Ce volume.
- [76] E. Ullmo, *Equidistribution de sous-variétés spéciales II*. J. Reine Angew. Math. **606** (2007), 193–216.
- [77] E. Ullmo, *Applications du théorème d’Ax-Lindemann hyperbolique*. Compos. Math. 150 (2014), no. 2, 175–190.
- [78] E. Ullmo, A. Yafaev, *Galois orbits and equidistribution of special subvarieties of Shimura varieties : towards the André-Oort conjecture*. Ann. of Math (2) **180** (2014), no. 3 823–865.
- [79] E. Ullmo, A. Yafaev, *A characterisation of special subvarieties*. Mathematika **57** (2011), no. 2, 263 –273.
- [80] E. Ullmo, A. Yafaev, *Nombre de classes des tores de multiplication complexe et bornes inférieures pour les orbites Galoisienne de points spéciaux*. Bulletin de la SMF, **143**, 197–228.
- [81] E. Ullmo, A. Yafaev, *Hyperbolic Ax-Lindemann theorem in the cocompact case*. Duke Math. J. **163** (2014) 433-463.
- [82] E. Viada, *The intersection of a curve with a union of translated codimension-two subgroups in a power of an elliptic curve*. Algebra Number Theory **2** (2008), no. 3, 24–298.
- [83] M. Waldschmidt, *Diophantine approximation on linear algebraic groups-Transcendence properties of the exponential function in several variables*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **326**. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [84] G. Wüstholz, *Algebraic groups, Hodge theory, and transcendence*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986), 476–483, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1987).

- [85] A. Yafaev, *On a result of Moonen on the moduli space of principally polarised abelian varieties*. Compos. Math. **141** (2005), no. 5, 1103–1108.
- [86] A. Yafaev, *Special points and intersections on abelian and Shimura varieties*. Ce volume.
- [87] X. Yuan, S. Zhang, *On the Averaged Colmez Conjecture*. Preprint (2015) <https://web.math.princeton.edu/~shouwu/publications.pdf>
- [88] U. Zannier, *Some problems of unlikely intersections in arithmetic and geometry. With appendixes by David Masser*. Annals of Mathematics Studies, **181**. Princeton University Press, Princeton, NJ, (2012) 160 pp.
- [89] S. Zhang, *Positive line bundles on arithmetic varieties*. J. Amer. Math. Soc. (1) **8** (1995), 187–221.
- [90] S. Zhang, *Equidistribution of small points on abelian varieties*. Annals of Maths **147** (1998), p. 159–165.
- [91] B. Zilber, *Exponential sums equations and the Schanuel conjecture*. J. London Math. Soc. (2) **65** (2002), no. 1, 27–44.
- [92] B. Zilber, *Model theory of special subvarieties and Schanuel-types conjectures*. 2013; <http://arxiv.org/abs/1501.03301>