

Le principe de fonctorialité de Langlands
comme un problème de généralisation
de la loi d'addition

par Laurent Lafforgue

Sommaire

Introduction

Chapitre I : Propriétés attendues des transformations de Fourier non linéaires

1. Situation
2. Forme et propriétés générales attendues
3. Décomposition spectrale en les places ultramétriques
4. Décomposition spectrale en les places archimédiennes
5. Formule de Poisson

Chapitre II : Le cas des tores

1. Opérateurs de transformation de Fourier quotients sur les tores
2. Espaces de ρ_T -fonctions en les places ultramétriques
3. Espaces de ρ_T -fonctions en les places archimédiennes
4. Formule de Poisson pour les tores
5. Des fonctions unitaires sur les tores quotients

Chapitre III : Au-delà des tores ?

1. Semi-groupes
2. Des fonctions unitaires sur les semi-groupes
3. Définition conjecturale des ρ -fonctions locales
4. Opérateurs de convolution
5. Une forme approchée de formule de Poisson
6. Une caractérisation conjecturale de la fonctionnelle de Poisson

Bibliographie

Introduction

Ce texte étudie la forme générale de transformations de Fourier et de formules de Poisson non additives sur les groupes réductifs adéliques qui est équivalente au transfert automorphe de Langlands des groupes réductifs sur les corps globaux vers les groupes linéaires.

Plus précisément, on considère un groupe réductif G quasi-déployé sur un corps global F et muni d'une paire de Borel (T, B) , le groupe réductif complexe $\widehat{G}$ dual de G muni du tore maximal $\widehat{T}$ dual de T et de l'action naturelle du groupe de Galois Γ_F de F , et une représentation

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

telle que

- l'homomorphisme induit $\widehat{G} \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ est injectif et envoie le tore maximal $\widehat{T}$ de $\widehat{G}$ dans le tore maximal $\widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$ de $\widehat{\mathrm{GL}}_r = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$,
- il existe un caractère $\det_T : G \rightarrow \mathbb{G}_m$ défini sur F tel que le composé du cocaractère central qui lui correspond

$$\widehat{\det}_T : \mathbb{C}^\times \rightarrow Z_{\widehat{G}} \hookrightarrow \widehat{T} \hookrightarrow \widehat{G}$$
 et de $\rho : \widehat{G} \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ soit le cocaractère canonique

$$z \mapsto \begin{pmatrix} z & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z \end{pmatrix},$$
- les images par $\rho : \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ des éléments du groupe de Galois Γ_F sont des matrices de permutation de $\{1, \dots, r\}$ si bien que l'action induite de Γ_F sur $\{1, \dots, r\}$ définit une extension séparable E de F de degré r , le tore $T_E = \mathrm{Res}_{E/F} \mathbb{G}_m$ dont le dual $\widehat{T}_E$ est $(\mathbb{C}^\times)^r$ muni de l'action de Γ_F et un homomorphisme de tores sur F

$$\rho_T^\vee : T_E \rightarrow T$$
 dual de l'homomorphisme Γ_F -équivariant

$$\rho_T : \widehat{T} \rightarrow \widehat{T}_E = (\mathbb{C}^\times)^r$$
 induit par ρ .

On remarque que G se trouve muni du cocaractère central défini sur F

$$\mu_G : \mathbb{G}_m \rightarrow Z_G \hookrightarrow T \hookrightarrow G$$

qui correspond au caractère composé fixé par Γ_F

$$\widehat{\mu}_G : \widehat{G} \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) \xrightarrow{\det} \mathbb{C}^\times.$$

Ce cocaractère central donne un sens au produit $\lambda \cdot g$ de tout élément g de G par un scalaire multiplicatif λ , en particulier à la notation $-g$.

On note $|F|$ l'ensemble des places x de F , F_x les corps localisés de F en ces places, $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de F et $|\bullet|_x$, $x \in |F|$, et $|\bullet| = \prod_{x \in |F|} |\bullet|_x$ les normes par lesquelles les $F_x^\times$ et $\mathbb{A}^\times$ agissent sur les mesures additives des F_x et de $\mathbb{A}$.

Fixant un autre caractère algébrique défini sur F ,

$$\det_G : G \rightarrow \mathbb{G}_m,$$

on munit les groupes locaux $G(F_x)$, $x \in |F|$, et le groupe adélique $G(\mathbb{A}) = \prod_{x \in |F|} G(F_x)$ de mesures que les translations à gauche et à droite transforment par les caractères $|\det_G(\bullet)|_x$, $x \in |F|$, et $|\det_G(\bullet)|$.

Ces mesures définissent des espaces des fonctions de carré intégrable $G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$, $x \in |F|$, ou $G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$, et munissent ces espaces de produits hermitiens.

D'autre part, le choix des mesures invariantes du sur les radicaux unipotents $N_B(F_x)$ des sous-groupes de Borel $B(F_x)$, $x \in |F|$, définit des opérateurs

$$f \mapsto f_B$$

qui transforment les fonctions

$$f : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

en des fonctions

$$f_B : T(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

par la formule

$$f_B(t) = |\det_B(t)|_x^{\frac{1}{2}} \cdot |\delta_B(t)|_x^{\frac{1}{2}} \cdot \int_{N_B(F_x)} du \cdot f(tu) = |\det_B(t)|_x^{\frac{1}{2}} \cdot |\delta_B(t)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{N_B(F_x)} du \cdot f(ut)$$

où $\delta_B : T \rightarrow \mathbb{G}_m$ désigne le caractère modulaire et $\det_B$ le caractère quotient $\det_G \cdot \det_T^{-1}$.

Le premier problème posé est d'associer à ρ un opérateur de ρ -transformation de Fourier $f \mapsto \widehat{f}$ des fonctions f de carré intégrable sur chaque $G(F_x)$, $x \in |F|$, tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ cet opérateur est unitaire et admet pour inverse l'opérateur } f \mapsto \widehat{f}(-\bullet), \\ \bullet \text{ cet opérateur est compatible avec les opérateurs de translation à droite } f \mapsto f^g \text{ et à gauche } f \mapsto {}^g f \text{ par} \\ \text{les éléments } g \in G(F_x) \text{ au sens que} \\ \left. \begin{array}{l} \widehat{f^g} = |\det_G(g)|_x^{-1} \cdot g^{-1} \widehat{f} \\ \widehat{{}^g f} = |\det_G(g)|_x^{-1} \cdot \widehat{f} g^{-1} \end{array} \right\} \forall g \in G(F_x), \forall f, \\ \bullet \text{ l'opérateur de } \rho\text{-transformation de Fourier sur } G(F_x) \text{ est compatible avec l'opérateur de } \rho_T\text{-transformation} \\ \text{de Fourier sur } T(F_x) \text{ au sens que} \\ (\widehat{f})_B = \widehat{f}_B, \forall f. \end{array} \right.$$

Le produit des opérateurs de ρ -transformation de Fourier locales sur les $G(F_x)$, $x \in |F|$, définirait un opérateur de ρ -transformation de Fourier globale sur $G(\mathbb{A})$.

Le second problème posé est d'associer à ρ en chaque place $x \in |F|$ un espace de fonctions $G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$, appelées les ρ -fonctions, tel que :

- chaque ρ -fonction est invariante à gauche et à droite par un sous-groupe ouvert compact [resp. de classe C^∞] si x est une place ultramétrique [resp. archimédienne],
 - chaque ρ -fonction est à la fois intégrable et de carré intégrable,
 - le sous-espace des ρ -fonctions est dense dans l'espace des fonctions de carré intégrable sur $G(F_x)$,
 - il est stable par les translations à gauche et à droite [resp. et par les convolutions à gauche et à droite avec des distributions à support compact si x est archimédienne],
 - si f est une ρ -fonction sur $G(F_x)$, la fonction f_B est une ρ_T -fonction sur $T(F_x)$,
 - réciproquement, si f est une fonction de carré intégrable sur $G(F_x)$ qui est “de type torique” c'est-à-dire ne fait apparaître dans sa décomposition spectrale que des induites de caractères du tore $T(F_x)$, si f est invariante à gauche et à droite par un sous-groupe ouvert compact [resp. de classe C^∞], et si pour toute fonction f' déduite de f par translation à gauche ou à droite [resp. par convolution avec des distributions à support compact], la fonction
- $$f'_B : T(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$
- est une ρ_T -fonction, alors la fonction f est une ρ -fonction.

En toute place ultramétrique $x \in |F|$ où G et ρ sont non ramifiés, le sous-espace des ρ -fonctions sphériques sur $G(F_x)$ doit comprendre un élément particulier, appelé la ρ -fonction “standard” ou “spéciale”, qui vaut en particulier 1 en l'unité 1 de $G(F_x)$.

On appellerait alors ρ -fonctions globales sur $G(\mathbb{A})$ les combinaisons linéaires de produits

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x$$

de ρ -fonctions $f_x : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$ qui sont égales à la ρ -fonction standard en presque toute place $x \in |F|$.

On s'attend à ce que l'opérateur de ρ -transformation de Fourier locale sur $G(F_x)$ respecte le sous-espace des ρ -fonctions en toute place $x \in |F|$ et qu'il fixe la ρ -fonction “standard” en presque toute place ultramétrique x . Cela implique que l'opérateur de ρ -transformation de Fourier globale sur $G(\mathbb{A})$ respecte le sous-espace des ρ -fonctions globales.

Le troisième problème posé est d'associer à ρ une fonctionnelle linéaire

$$\mathcal{P} : f \mapsto \mathcal{P}(f) \in \mathbb{C}$$

sur l'espace des ρ -fonctions globales

$$f : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

qui possède en particulier les propriétés suivantes :

- elle est invariante par les opérateurs de translation à gauche ou à droite par les éléments rationnels $\gamma \in G(F)$,
 - elle coïncide avec la fonctionnelle linéaire
$$f \mapsto \sum_{\gamma \in G(F)} f(\gamma)$$
- en les ρ -fonctions globales qui admettent une factorisation
- $$f = f_x \otimes f^x$$
- dont un facteur est une ρ -fonction locale $f_x : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$ supportée par une partie compacte de $G(F_x)$,
- elle vérifie la formule de Poisson au sens que l'on a
$$\mathcal{P}(f) = \mathcal{P}(\widehat{f})$$
- pour toute ρ -fonction globale f sur $G(\mathbb{A})$.

On a montré dans l'article [Lafforgue, 2016] que, si F est un corps de fonctions, le transfert automorphe de Langlands de G à GL_r via ρ (qui est connu dans ce cas) permet de résoudre ces trois problèmes. On pourrait montrer de la même façon que, si F est un corps de nombres, ces trois problèmes seraient résolus si le transfert automorphe de G à GL_r via ρ était connu.

Réciproquement, le transfert automorphe de G à GL_r via ρ serait impliqué par la résolution de ces trois problèmes pour le groupe réductif quasi-déployé G_{r-1} et la représentation ρ_{r-1} définis de la manière suivante :

- pour tout entier $r' \geq 1$, $G_{r'}$ désigne le groupe réductif quasi-déployé déduit de G par le carré cartésien
$$\begin{array}{ccc} G_{r'} & \longrightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow \det_T \\ \mathrm{GL}_{r'} & \xrightarrow{\det} & \mathbb{G}_m \end{array}$$
- et qui donc admet pour dual $\widehat{G_{r'}}$ le conoyau du cocaractère central
- $$\mathbb{C}^\times \rightarrow \mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{C}) \times \widehat{G}$$
- $$z \mapsto \left(\begin{pmatrix} z & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z \end{pmatrix}, \widehat{\det_T}(z^{-1}) \right)$$

$$\left. \begin{array}{l}
\bullet \text{ pour tout tel } r' \geq 1, \rho_{r'} \text{ désigne la représentation} \\
\\
\widehat{G_{r'}} \rtimes \Gamma_F = \left[(\widehat{G} \rtimes \Gamma_F) \times \mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{C}) \right] / \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathrm{GL}_{rr'}(\mathbb{C}) \\
\quad ((g, \sigma), g') \mapsto \rho(g, \sigma) \otimes g' \\
\\
\text{produit tensoriel de} \\
\\
\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) \\
\\
\text{et de la représentation standard de } \mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{C}).
\end{array} \right\}$$

Cette implication résulterait en effet des “théorèmes réciproques” de l’article [Cogdell, Piatetski-Shapiro, 1994] ou, plus directement, de la construction de “noyaux du transfert” c’est-à-dire de fonctions automorphes

$$(G \times G \times \mathrm{GL}_r)(F) \backslash (G \times G \times \mathrm{GL}_r)(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

qui réalisent “en famille” le transfert automorphe de G à GL_r via ρ . La construction de tels noyaux du transfert à partir d’une formule de Poisson pour un opérateur de ρ_{r-1} -transformation de Fourier sur $G_{r-1}(\mathbb{A})$ est réalisée dans l’article [Lafforgue, 2014] lorsque F est un corps de fonctions. La même construction s’appliquerait dans le cas des corps de nombres.

Le vœu de construction d’un opérateur de ρ -transformation de Fourier sur $G(\mathbb{A})$ associé à une représentation ρ du groupe dual de G et d’une fonctionnelle linéaire $f \mapsto \mathcal{P}(f)$ qui vérifie la formule de Poisson $\mathcal{P}(f) = \mathcal{P}(\widehat{f})$, $\forall f$, avait déjà été exprimé dans l’article [Braverman, Kazhdan, 2000]. Il semble aussi avoir été exprimé oralement depuis des décennies par certains mathématiciens comme R. Godement (selon C. Soulé) ou divers membres de l’école russe (selon M. Gromov).

Le rêve de ces mathématiciens était de généraliser au contexte non additif de G et ρ la théorie de la thèse de Tate pour $\mathbb{G}_m$ plongé dans $\mathbb{A}^1$ et son extension par Godement et Jacquet aux groupes linéaires GL_r plongés dans les espaces de matrices M_r . La structure additive de $\mathbb{A}$ ou $M_r(\mathbb{A})$ avait en effet permis d’introduire des opérateurs de transformation de Fourier adéliques, de définir des espaces naturels de fonctions sur $\mathbb{A}^\times$ ou $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ stables par ces opérateurs et de montrer une formule de Poisson. Tate puis Godement et Jacquet avaient déduit de cette formule de Poisson les propriétés globales (prolongement analytique et équation fonctionnelle) des fonctions L standard des caractères de $\mathbb{A}^\times / F^\times$ puis des représentations automorphes de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$.

Il était donc clair qu’une généralisation de ces constructions et de ces propriétés au contexte non additif de G et ρ impliquerait les mêmes propriétés globales des fonctions

$$L(\rho, \pi, \bullet)$$

associées par Langlands aux représentations $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ et aux représentations automorphes π de $G(\mathbb{A})$.

Enfin, les “théorèmes réciproques” montrent que les propriétés globales des fonctions

$$L(\rho_{r-1}, \pi \otimes \pi', \bullet)$$

associées à la représentation $\rho_{r-1} : \widehat{G_{r-1}} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_{r(r-1)}(\mathbb{C})$ et au produit des représentations automorphes π de $G(\mathbb{A})$ par des représentations automorphes π' de $\mathrm{GL}_{r-1}(\mathbb{A})$ impliquent le transfert automorphe de Langlands de G à GL_r via $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$.

Précisons la relation entre les fonctions L locales et globales et les trois problèmes posés plus haut.

En toute place $x \in |F|$, la connaissance de l'opérateur $f \mapsto \widehat{f}$ de ρ -transformation de Fourier sur $G(F_x)$ équivaut à celle des facteurs

$$\gamma_x(\rho, \pi, s) = \frac{L_x(\rho, \pi, s) \cdot \varepsilon_x(\rho, \pi, s)}{L_x(\rho, \pi^\vee, 1-s)}$$

des représentations lisses admissibles irréductibles π de $G(F_x)$. En effet, la compatibilité de l'opérateur unitaire $f \mapsto \widehat{f}$ avec la double action de $G(F_x)$ par translation à gauche et à droite signifie qu'il agit sur chaque facteur irréductible $\pi \boxtimes \pi^\vee$ de $L^2(G(F_x))$ par un scalaire qui n'est autre que $\gamma_x(\rho, \pi, \frac{1}{2})$.

De plus, la compatibilité des opérateurs de ρ -transformation de Fourier sur $G(F_x)$ et de ρ_T -transformation de Fourier sur $T(F_x)$ via l'opérateur $f \mapsto f_B$ signifie que pour toute représentation lisse admissible irréductible de $G(F_x)$ qui est l'induite normalisée d'un caractère χ de $T(F_x)$ (ou même un sous-quotient de l'induite normalisée de χ), on a

$$\gamma_x(\rho, \pi, \bullet) = \gamma_x(\rho_T, \chi, \bullet).$$

Cela implique que, en les places archimédiennes x , l'opérateur de ρ -transformation de Fourier sur $G(F_x)$ est entièrement déterminé par l'opérateur de ρ_T -transformation de Fourier sur $T(F_x)$.

En les places ultramétriques x , l'opérateur de ρ_T -transformation de Fourier sur $T(F_x)$ détermine l'action de l'opérateur de ρ -transformation de Fourier sur le sous-espace des fonctions de type torique sur $G(F_x)$ et, en particulier, sur le sous-espace des fonctions sphériques si G est non ramifié en la place x .

D'autre part, la propriété de stabilité de l'espace des ρ -fonctions sur $G(F_x)$ par les translations à gauche et à droite fait que cet espace admet une caractérisation spectrale. En les places x ultramétriques, la connaissance de cet espace équivaut à celle des facteurs

$$L_x(\rho, \pi, \bullet)$$

qui sont les plus grands dénominateurs autorisés dans la décomposition spectrale des ρ -fonctions sur $G(F_x)$.

En les places x archimédiennes, la connaissance des facteurs eulériens

$$L_x(\rho, \pi, \bullet)$$

équivaut à celle d'un sous-espace de l'espace des ρ -fonctions sur $G(F_x)$, appelé le sous-espace des ρ -fonctions spéciales. On s'attend à ce que le sous-espace des ρ -fonctions spéciales engendre l'espace des ρ -fonctions sous l'action d'un certain nombre d'opérations.

La compatibilité entre les notions de ρ -fonctions [resp. de ρ -fonctions spéciales] sur $G(F_x)$ et de ρ_T -fonctions [resp. de ρ_T -fonctions spéciales] sur $T(F_x)$ signifie que pour toute représentation lisse admissible π de $G(F_x)$ qui est l'induite normalisée d'un caractère χ de $T(F_x)$, on a

$$L_x(\rho, \pi, \bullet) = L_x(\rho_T, \chi, \bullet).$$

Cette propriété traduit spectralement le fait que la connaissance de l'espace des ρ_T -fonctions [resp. et de celui des ρ_T -fonctions spéciales si x est archimédienne] sur $T(F_x)$ détermine celle de l'espace des ρ -fonctions de type torique [resp. et de celui des ρ -fonctions spéciales de type torique] sur $G(F_x)$. Si x est archimédienne et $F_x \cong \mathbb{C}$, toute fonction de carré intégrable sur $G(F_x)$ est de type torique si bien que l'espace des ρ -fonctions sur $G(F_x)$ et son sous-espace des ρ -fonctions spéciales sont entièrement déterminés par l'espace des ρ_T -fonctions sur $T(F_x)$ et son sous-espace des ρ_T -fonctions spéciales.

Enfin, la formule de Poisson

$$\mathcal{P}(f) = \mathcal{P}(\widehat{f})$$

pour les ρ -fonctions globales $f : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ équivaut aux propriétés globales (prolongement analytique et équation fonctionnelle) des fonctions L globales

$$L(\rho, \pi, \bullet) = \prod_{x \in |F|} L_x(\rho, \pi_x, \bullet)$$

de toutes les représentations automorphes $\pi = \bigotimes_{x \in |F|} \pi_x$ de $G(\mathbb{A})$. Plus précisément, ces propriétés globales des fonctions L sont les traductions en termes spectraux de la décomposition spectrale de la formule de Poisson sous l'action par translation de $G(\mathbb{A})$.

Les trois problèmes posés ci-dessus sont précisés dans le chapitre I :

Le paragraphe I.2 expose le problème général de définition d'un opérateur de ρ -transformation de Fourier local sur chaque $G(F_x)$, $x \in |F|$, et ses propriétés attendues.

Le paragraphe I.3 expose le problème de définition de l'espace des ρ -fonctions sur $G(F_x)$ en les places ultramétriques x comme équivalent à celui de définir des facteurs locaux $L_x(\rho, \pi, \bullet)$ des représentations lisses admissibles irréductibles π de $G(F_x)$.

Le paragraphe I.4 expose le problème parallèle en les places archimédiennes : définir un espace des ρ -fonctions sur $G(F_x)$ et un sous-espace des ρ -fonctions spéciales dont la connaissance équivaldrait à celle des facteurs eulériens $L_x(\rho, \pi, \bullet)$.

Enfin, le paragraphe I.5 expose le problème de construction d'une fonctionnelle de Poisson sur l'espace des ρ -fonctions globales

$$f \mapsto \mathcal{P}(f)$$

qui vérifierait la formule de Poisson

$$\mathcal{P}(f) = \mathcal{P}(\widehat{f}), \quad \forall f,$$

et il propose une formule conjecturale de définition de cette fonctionnelle $f \mapsto \mathcal{P}(f)$.

Il rappelle que, dans le cas des corps de fonctions, l'article [Lafforgue, 2016] a montré que le transfert automorphe de G à GL_r via ρ , qui est connu dans ce cas, donne une réponse positive à tous les problèmes posés. Il permet en particulier de montrer que la formule proposée définit effectivement une fonctionnelle linéaire $\mathcal{P}$ qui vérifie la formule de Poisson et qui coïncide avec la fonctionnelle additive

$$f \mapsto \sum_{\gamma \in M_r(F)} f(\gamma)$$

dans le cas linéaire où $G = \mathrm{GL}_r$ et ρ est la représentation standard de $\widehat{G} = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$.

Le chapitre II résout les trois problèmes posés dans le cas où $G = T$ est un tore et met en évidence dans ce cas de nouvelles propriétés d'invariance des espaces de ρ_T -fonctions locales et globales et de la fonctionnelle de Poisson $f \mapsto \mathcal{P}(f)$.

Ce chapitre est fondé sur le cas linéaire du tore $T_E = \mathrm{Res}_{E/F} \mathbb{G}_m$ agissant sur le groupe aditif $\overline{T}_E = \mathrm{Res}_{E/F} \mathbb{A}^1$. Le choix d'un caractère additif non trivial

$$\psi = \prod_{x \in |F|} \psi_x : \mathbb{A}/F \rightarrow S_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

produit de caractères additifs non triviaux

$$\psi_x : F_x \rightarrow S_1$$

définit en chaque place x un opérateur de transformation de Fourier additive sur $\overline{T}_E(F_x) = E_x \supset E_x^\times = T_E(F_x)$.

En chaque place ultramétrique x , l'espace des " ρ_E -fonctions" sur $E_x^\times$ est défini comme celui des fonctions localement constantes à support compact sur E_x . En chaque place archimédienne x , il est défini comme l'espace des fonctions de classe C^∞ à décroissance rapide sur E_x et son sous-espace des " ρ_E -fonctions spéciales" est défini comme engendré par la fonction de Gauss et ses transformées par les opérateurs différentiels invariants.

Comme montré par Tate dans sa thèse, il en résulte la définition en toute place $x \in |F|$ des facteurs

$$L_x(\rho_E, \chi, \bullet) = L_x(\chi, \bullet)$$

$$\varepsilon_x(\rho_E, \chi, \bullet) = \varepsilon_x(\chi, \psi_x, \bullet)$$

associés aux caractères χ de $E_x^\times$ puis les propriétés globales des fonctions L globales

$$L(\rho_E, \chi, \bullet) = \prod_{x \in |F|} L_x(\rho_E, \chi_x, \bullet)$$

des caractères automorphes $\chi = \bigotimes_{x \in |F|} \chi_x : T_E(\mathbb{A})/T_E(F) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ qui équivalent à la formule de Poisson

$$\sum_{\gamma \in E} f(\gamma) = \sum_{\gamma \in E} \widehat{f}(\gamma), \quad \forall f.$$

Le cas général d'un tore T relié à T_E par une suite exacte de tores sur F

$$1 \longrightarrow T_\rho \longrightarrow T_E \xrightarrow{\rho_T^\vee} T \longrightarrow 1$$

se déduit du cas linéaire de T_E .

En toute place x , le choix d'une mesure invariante dt_ρ de $T_\rho(F_x)$ définit un opérateur

$$(\rho_T^\vee)_* : f \mapsto \left(T(F_x) \ni t \mapsto \int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(t)} dt_\rho \cdot f(t_\rho) \right)$$

qui transforme les fonctions sur $T_E(F_x) = E_x^\times$ en des fonctions sur $T(F_x)$.

Alors l'opérateur de ρ_T -transformation de Fourier sur $T(F_x)$ est défini comme l'unique opérateur équivariant tel que, pour toute fonction f sur $T_E(F_x)$, on ait

$$(\widehat{(\rho_T^\vee)_*(f)}) = (\rho_T^\vee)_*(\widehat{f}),$$

et l'espace des ρ_T -fonctions sur $T(F_x)$ est défini comme engendré par les translatées des images

$$(\rho_T^\vee)_*(f)$$

des ρ_E -fonctions f sur $T_E(F_x) = E_x^\times$. Si x est archimédienne, l'espace des ρ_T -fonctions spéciales sur $T(F_x)$ est défini comme engendré par les translatées par les éléments du sous-groupe compact maximal de $T(F_x)$ des images

$$(\rho_T^\vee)_*(f)$$

des ρ_E -fonctions spéciales f sur $T_E(F_x)$.

Avec ces définitions, on obtient en toute place $x \in |F|$ et pour tout caractère χ de $T(F_x)$ les égalités

$$L_x(\rho_T, \chi, \bullet) = L_x(\rho_E, \chi \circ \rho_T^\vee, \bullet)$$

$$\varepsilon_x(\rho_T, \chi, \bullet) = \varepsilon_x(\rho_E, \chi \circ \rho_T^\vee, \bullet).$$

Il en résulte les propriétés globales des fonctions L globales

$$\begin{aligned} L(\rho_T, \chi, \bullet) &= \prod_{x \in |F|} L_x(\rho_T, \chi_x, \bullet) \\ &= \prod_{x \in |F|} L_x(\rho_E, \chi \circ \rho_T^\vee, \bullet) \\ &= L(\rho_E, \chi \circ \rho_T^\vee, \bullet) \end{aligned}$$

des caractères automorphes $\chi : T(\mathbb{A})/T(F) \rightarrow \mathbb{C}^\times$, qui permettent de montrer que la formule conjecturale du paragraphe I.5 définit dans ce cas une fonctionnelle linéaire sur l'espace des ρ_T -fonctions f sur $T(\mathbb{A})$

$$f \mapsto \mathcal{P}(f)$$

qui vérifie la formule de Poisson $\mathcal{P}(f) = \mathcal{P}(\widehat{f})$, $\forall f$.

Le fait de considérer T comme le quotient de T_E par son sous-tore T_ρ amène à considérer également la variété torique affine normale $\overline{T}$ de tore T définie comme le quotient par T_ρ de $\overline{T}_E = \text{Res}_{E/F} \mathbb{A}^1$. Elle est associée au cône saturé

$$X_{\overline{T}} = \{\chi \in X_T \mid \langle \chi, \rho_T^i \rangle \geq 0, \ 1 \leq i \leq r\}$$

dual du cône engendré par les composantes ρ_T^i , $1 \leq i \leq r$, de l'homomorphisme Γ_F -équivariant

$$\rho_T = (\rho_T^1, \dots, \rho_T^r) : \widehat{T} \rightarrow (\mathbb{C}^\times)^r = \widehat{T}_E$$

dont le dual est $\rho_T^\vee : T_E \rightarrow T$.

Tout caractère $\chi \in X_{\overline{T}}$, dont le corps de définition E_χ est une extension finie séparable de F , définit un morphisme équivariant sur F

$$\chi_F : \overline{T} \rightarrow \text{Res}_{E_\chi/F} \mathbb{A}^1$$

et donc des fonctions unitaires locales

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{\chi, c_x} &: \overline{T}(F_x) \rightarrow S_1, \ x \in |F|, \ c_x \in E_\chi \otimes_F F_x \\ t &\mapsto \psi_x(\text{Tr}(c_x \cdot \chi_F(t))) \end{aligned}$$

et globales

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{\chi, c} &: \overline{T}(\mathbb{A}) \rightarrow S_1, \ c \in E_\chi \otimes_F \mathbb{A} \\ t &\mapsto \psi(\text{Tr}(c \cdot \chi_F(t))). \end{aligned}$$

En les places ultramétriques x , les ρ_T -fonctions sur $T(F_x)$ ne se prolongent pas par continuité à la variété torique $\overline{T}(F_x)$. Mais on observe qu'elles sont supportées par des parties compactes de $\overline{T}(F_x)$ et que, par ailleurs, l'espace des ρ_T -fonctions sur $T(F_x)$ est stable par les opérateurs de multiplication par les fonctions localement constantes

$$U : \overline{T}(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

et donc en particulier par les fonctions unitaires

$$\mathbb{I}_{\chi, c_x} : \overline{T}(F_x) \rightarrow S_1, \ \chi \in X_{\overline{T}}, \ c_x \in E_\chi \otimes_F F_x.$$

On vérifie de même que, en les places x archimédiennes, l'espace des ρ_T -fonctions sur $T(F_x)$ est stable par les opérateurs de multiplication par les fonctions unitaires

$$\mathbb{I}_{\chi, c_x} : \overline{T}(F_x) \rightarrow S_1, \ \chi \in X_{\overline{T}}, \ c_x \in E_\chi \otimes_F F_x.$$

Les opérateurs de multiplication par les fonctions unitaires globales

$$\mathbb{I}_{\chi, c} : \overline{T}(\mathbb{A}) \rightarrow S_1, \ \chi \in X_{\overline{T}}, \ c \in E_\chi \otimes_F \mathbb{A}$$

respectent par conséquent l'espace des ρ_T -fonctions globales sur $T(\mathbb{A})$.

On montre enfin que lorsque $c \in E_\chi$ est un paramètre rationnel, l'opérateur associé de multiplication par

$$\mathbb{I}_{\chi, c} : \overline{T}(\mathbb{A}) \rightarrow S_1$$

fixe la fonctionnelle de Poisson

$$f \mapsto \mathcal{P}(f).$$

Comme la famille d'équations

$$\mathbb{I}_{\chi,c}(\gamma) = 1, \quad \forall \chi \in X_{\overline{T}}, \quad \forall c \in E_{\chi},$$

caractérise les éléments rationnels $\gamma \in \overline{T}(F)$, on s'autorise à noter

$$\mathcal{P}(f) = \left\langle \sum_{\gamma \in \overline{T}(F)} f(\gamma) \right\rangle.$$

Le chapitre III propose dans le cas général non abélien du groupe réductif quasi-déployé G et de la représentation $\rho : \hat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ des définitions conjecturales et des conjectures qui généralisent les définitions et les résultats du chapitre II pour les tores.

Comme le cône $X_{\overline{T}} = \{\chi \in X_T \mid \langle \chi, \rho_T^i \rangle \geq 0, \ 1 \leq i \leq r\}$ est stable non seulement par Γ_F mais aussi par le groupe de Weyl $W_G = W_{\hat{G}}$ de G , il définit un semi-groupe $\overline{G}$ géométriquement normal de groupe G , appelé le semi-groupe dual de ρ . L'adhérence schématique du tore maximal T de G dans $\overline{G}$ est la variété torique $\overline{T}$ et le quotient

$$N_{B^{\mathrm{op}}} \backslash \overline{G} / N_B = \overline{T}^+$$

par les radicaux unipotents de B et du sous-groupe de Borel opposé B^{op} , muni de la double action de T , est la variété torique affine normale associée au cône saturé

$$X_{\overline{T}^+}$$

constitué des caractères de $X_{\overline{T}}$ qui sont dominants.

Tout caractère $\chi \in X_{\overline{T}^+}$ définit un morphisme T -équivariant sur F

$$\chi_F : \overline{G} \rightarrow N_{B^{\mathrm{op}}} \backslash \overline{G} / N_B = \overline{T}^+ \rightarrow \mathrm{Res}_{E_{\chi}/F} \mathbb{A}^1$$

et donc des fonctions unitaires locales

$$\mathbb{I}_{\chi,c_x}^G : N_{B^{\mathrm{op}}}(F_x) \backslash \overline{G}(F_x) / N_B(F_x) \rightarrow S_1, \quad x \in |F|, \quad c_x \in E_{\chi} \otimes_F F_x,$$

et globales

$$\mathbb{I}_{\chi,c}^G : N_{B^{\mathrm{op}}}(\mathbb{A}) \backslash \overline{G}(\mathbb{A}) / N_B(\mathbb{A}) \rightarrow S_1, \quad c \in E_{\chi} \otimes_F \mathbb{A}.$$

En toute place $x \in |F|$, on propose de demander que l'espace des ρ -fonctions sur $G(F_x)$ soit respecté non seulement par les translations à gauche et à droite (et, si x est archimédienne, par les convolutions à gauche et à droite par des distributions à support compact) mais aussi par les opérateurs de multiplication par les fonctions unitaires

$$\mathbb{I}_{\chi,c_x}^G : \overline{G}(F_x) \rightarrow S_1, \quad \chi \in X_{\overline{T}^+}, \quad c_x \in E_{\chi} \otimes_F F_x.$$

Si x est ultramétrique, cela équivaut à demander que cet espace soit stabilisé par les opérateurs de multiplication par les fonctions localement constantes

$$U : \overline{G}(F_x) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Comme le sous-espace des ρ -fonctions de type torique sur $G(F_x)$ est déjà fixé en toute place x , la condition supplémentaire de stabilité par multiplication avec les fonctions $\mathbb{I}_{\chi,c_x}^G$, $\chi \in X_{\overline{T}^+}$, $c_x \in E_{\chi} \otimes_F F_x$, suffit à définir complètement l'espace des ρ -fonctions sur $G(F_x)$. Il reste cependant à vérifier si cette définition est cohérente, ce qui fait l'objet des questions III.13 et III.15 du paragraphe III.3.

On observe d'autre part au paragraphe III.4 que définir en une place $x \in |F|$ l'opérateur cherché de ρ -transformation de Fourier

$$f \mapsto \widehat{f}$$

équivalait à définir l'opérateur binaire de ρ -convolution associé

$$(f, h) \mapsto f *_{\rho} h$$

qui est le ρ -transformé de Fourier de l'opérateur de multiplication point par point des fonctions, c'est-à-dire est caractérisé par la formule

$$\widehat{f \cdot U} = \widehat{f} *_{\rho} \widehat{U}.$$

Le cas des tores et le cas linéaire où $G = \mathrm{GL}_r$ et $\rho = \mathrm{id} : \widehat{G} = \widehat{\mathrm{GL}}_r \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ amène à conjecturer que

- en toute place x , l'opérateur de ρ -convolution sur $G(F_x)$

$$(f, h) \mapsto f *_{\rho} h$$
- est défini par un opérateur d'intégration purement algébrique, associé à une forme différentielle relative algébrique sur une variété algébrique sur F ,
- cette variété algébrique est indépendante de la place x et la forme différentielle relative algébrique qu'elle supporte ne dépend de la place x qu'à multiplication près par un scalaire.

Rappelant que l'opérateur de ρ -transformation de Fourier sur $G(F_x)$ est déjà bien défini en les places x archimédiennes, la conjecture ci-dessus est une question bien posée en ces places qui doit être étudiée en priorité.

Supposant toutes ces questions résolues positivement, on disposerait d'un opérateur unitaire de ρ -transformation de Fourier sur $G(\mathbb{A})$ et d'un espace de ρ -fonctions sur $G(\mathbb{A})$ respecté par cet opérateur, par les translations à gauche et à droite par les éléments de $G(\mathbb{A})$ et par multiplication par les fonctions unitaires

$$\mathbb{I}_{\chi, c}^G : \overline{G}(\mathbb{A}) \rightarrow S_1, \quad \chi \in X_{\overline{T}^+}, \quad c \in E_{\chi} \otimes_F \mathbb{A}.$$

La dernière partie du chapitre III propose de caractériser la fonctionnelle linéaire

$$f \mapsto \mathcal{P}(f)$$

par une série de propriétés.

La première propriété est que $\mathcal{P}$ soit invariante par translation à gauche ou à droite par les éléments rationnels $\gamma \in G(F)$.

La seconde propriété est que les fonctionnelles déduites de $\mathcal{P}$ par moyennisation le long de $N_B(\mathbb{A})$

$$f \mapsto \int_{N_B(F) \backslash N_B(\mathbb{A})} du \cdot \mathcal{P}(f^u)$$

$$f \mapsto \int_{N_B(\mathbb{A}) / N_B(F)} du \cdot \mathcal{P}(^u f)$$

soient égales à deux fonctionnelles linéaires

$$f \mapsto \mathcal{P}_B(f) \quad \text{et} \quad f \mapsto \mathcal{P}'_B(f)$$

qui sont construites au paragraphe III.5 à partir des résultats déjà connus sur les tores.

La troisième propriété consiste à demander que la fonctionnelle

$$f \mapsto \mathcal{P}(f)$$

soit fixée par les opérateurs de multiplication par les fonctions unitaires à paramètres rationnels

$$\mathbb{I}_{\chi,c}^G : \overline{G}(\mathbb{A}) \rightarrow S_1, \quad \chi \in X_{\overline{T}^+}, \quad c \in E_\chi.$$

On conjecture au paragraphe III.6 qu'il existe une unique fonctionnelle linéaire $\mathcal{P}$ vérifiant ces propriétés.

Compte tenu de la formule

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{P}_B(f) &= \mathcal{P}'_B(\widehat{f}) \\ \mathcal{P}'_B(f) &= \mathcal{P}_B(\widehat{f}) \end{aligned} \right\}, \quad \forall f,$$

déjà connue car déduite de la formule de Poisson sur le tore $T(\mathbb{A})$, la formule de Poisson sur $G(\mathbb{A})$

$$\mathcal{P}(f) = \mathcal{P}(\widehat{f}), \quad \forall f,$$

se ramènerait à montrer que $\mathcal{P}$ est également fixée par les opérateurs de ρ -convolution

$$f \mapsto f *_{\rho} \widehat{\mathbb{I}_{\chi,c}^G}$$

avec les ρ -transformées de Fourier $\widehat{\mathbb{I}_{\chi,c}^G}$ des fonctions unitaires à paramètres rationnels $\mathbb{I}_{\chi,c}^G$, $\chi \in X_{\overline{T}^+}$, $c \in E_\chi$.

On voit qu'ici encore la question du calcul de l'opérateur de ρ -convolution

$$(f, h) \mapsto f *_{\rho} h$$

apparaît cruciale.

Ce texte représente les notes écrites d'un cours donné à l'Université de Nottingham en juin 2016, à l'invitation d'Ivan Fesenko, que c'est un grand plaisir de remercier ici ainsi que les autres auditeurs.

C'est également un plaisir de remercier Cécile Gourgues qui a réalisé la frappe entière du manuscrit avec sa disponibilité, son efficacité et sa gentillesse coutumières.

Chapitre I.

Propriétés attendues des transformations de Fourier non linéaires

1 Situation

On se place sur un corps global F .

On note $|F|$ l'ensemble des places de F et F_x la complétion de F en toute place $x \in |F|$.

En toute place ultramétrique x , on note O_x l'anneau des entiers de F_x , ϖ_x une uniformisante, q_x le cardinal fini du corps résiduel $\kappa_x = O_x/\varpi_x \cdot O_x$ et

$$v_x : F_x^\times \rightarrow \mathbb{Z}$$

la valuation associée à x .

Notant

$$\mathbb{A} = \prod_{x \in |F|} F_x$$

l'anneau topologique des adèles de F , on choisit une fois pour toutes un caractère additif continu unitaire non trivial

$$\psi = \prod_{x \in |F|} \psi_x : \mathbb{A}/F \rightarrow S_1 = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| = 1\} .$$

En toute place $x \in |F|$, le caractère additif continu unitaire non trivial

$$\psi_x : F_x \rightarrow S_1 \subset \mathbb{C}^\times$$

définit sur F_x une unique mesure additive da_x dite la mesure “auto-duale” relative à ψ_x . Le groupe multiplicatif $F_x^\times$ agit sur les mesures additives de F_x , et en particulier sur da_x , par un caractère continu

$$|\bullet|_x : F_x^\times \rightarrow \mathbb{R}_+^\times .$$

Si x est une place ultramétrique, ce caractère $|\bullet|_x$ n'est autre que la norme ultramétrique

$$|\bullet|_x = q_x^{-v_x(\bullet)} .$$

Si $F_x \cong \mathbb{R}$, $|\bullet|_x$ n'est autre que la valeur absolue usuelle des nombres réels.

Enfin, si $F_x \cong \mathbb{C}$, $|\bullet|_x$ est le carré du module usuel des nombres complexes.

On considère d'autre part un groupe réductif connexe et quasi-déployé G sur F , muni d'une paire de Borel (T, B) définie sur F .

On appelle “standard” les sous-groupes paraboliques [resp. de Levi] de G qui contiennent B [resp. T]. Il existe une unique injection

$$P \mapsto M_P$$

de l'ensemble fini des sous-groupes paraboliques standard dans l'ensemble fini des sous-groupes de Levi standard, telle que chaque P soit le produit

$$P = M_P \cdot N_P = N_P \cdot M_P$$

de son sous-groupe de Levi $M_P \supset T$ et de son radical unipotent $N_P \subset N_B$.

Pour tout tel P , on notera

$$\delta_P : P \rightarrow P/N_P \cong M_P \rightarrow \mathbb{G}_m$$

le caractère modulaire par lequel P ou M_P agissent par la conjugaison $(m, u) \mapsto m \cdot u \cdot m^{-1}$ sur la puissance extérieure maximale de l'espace Lie (N_P) .

On dispose du dual $\widehat{G}$ de G . C'est un groupe réductif sur $\mathbb{C}$, muni d'une paire de Borel $(\widehat{T}, \widehat{B})$ et d'une action du groupe de Galois Γ_F de F qui se factorise à travers le quotient de Γ_F par un sous-groupe ouvert distingué d'indice fini. Son tore maximal $\widehat{T}$ s'identifie au dual du tore maximal T de G , ce qui signifie que le réseau $X_{\widehat{T}}$ des caractères de $\widehat{T}$ s'identifie à celui $X_T^\vee$ des cocaractères de T ou, ce qui revient au même, que le réseau $X_T^\vee$ des cocaractères de $\widehat{T}$ s'identifie à celui X_T des caractères de T .

On suppose enfin que G est muni d'un caractère défini sur F

$$\det_T : G \rightarrow \mathbb{G}_m$$

ou, ce qui revient au même, d'un cocaractère central

$$\widehat{\det}_T : \mathbb{C}^\times \rightarrow Z_{\widehat{G}} \hookrightarrow \widehat{T} \hookrightarrow \widehat{G}$$

fixé par l'action de Γ_F .

Définition I.1. –

On appellera “représentation de transfert” de G tout morphisme algébrique continu

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \widehat{\mathrm{GL}}_r = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

tel que :

(1) Le composé de

$$\widehat{\det}_T : \mathbb{C}^\times \rightarrow \widehat{T} \hookrightarrow \widehat{G}$$

et de ρ n'est autre que le cocaractère central de $\widehat{\mathrm{GL}}_r$

$$z \mapsto \begin{pmatrix} z & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z \end{pmatrix}.$$

(2) Le morphisme ρ envoie $\widehat{T}$ dans le tore maximal $\widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$ de $\widehat{\mathrm{GL}}_r$ et induit donc un morphisme de tores

$$\rho_T = (\rho_T^1, \dots, \rho_T^r) : \widehat{T} \rightarrow \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r.$$

(3) Le noyau de $\rho_T : \widehat{T} \rightarrow \widehat{T}_r$ est trivial ou, ce qui revient au même, le noyau de $\rho : \widehat{G} \rightarrow \widehat{\mathrm{GL}}_r$ est trivial.

De plus, une telle représentation de transfert ρ de G sera dite “régulière” si elle satisfait la condition supplémentaire :

- (4) L'action du groupe de Galois Γ_F de F sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de ρ se fait par permutation des vecteurs de sa base canonique, si bien que l'action induite de Γ_F sur l'ensemble d'indices $\{1, 2, \dots, r\}$ définit une F -algèbre E séparable de degré r .

Remarques :

- (i) Pour tout sous-groupe de Levi standard M de G , son dual $\widehat{M}$ s'identifie à un sous-groupe de Levi de $\widehat{G}$ fixé par l'action de Γ_F , et toute représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \widehat{\mathrm{GL}}_r$$

induit une représentation de transfert

$$\rho_M : \widehat{M} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \widehat{\mathrm{GL}}_r$$

qui est régulière si ρ est régulière.

- (ii) Si la représentation de transfert ρ est régulière, on dispose du tore

$$T_E = \mathrm{Res}_{E/F} \mathbb{G}_m$$

déduit de $\mathbb{G}_m$ par restriction des scalaires à la Weil de E à F .

Son tore dual $\widehat{T}_E$ s'identifie à

$$\prod_{1 \leq i \leq r} \mathbb{C}^\times = (\mathbb{C}^\times)^r$$

muni de l'action par permutation de Γ_F . L'homomorphisme de tores complexes

$$\rho_T : \widehat{T} \rightarrow \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$$

peut donc être vu comme un homomorphisme Γ_F -équivariant

$$\widehat{T} \rightarrow \widehat{T}_E$$

dual d'un homomorphisme de tores sur F

$$\rho_T^\vee : T_E \rightarrow T.$$

Celui-ci s'inscrit dans une suite exacte de tores sur F

$$1 \rightarrow T_\rho \rightarrow T_E \rightarrow T \rightarrow 1$$

dont le noyau T_ρ admet pour dual le conoyau de

$$\rho_T : \widehat{T} \hookrightarrow \widehat{T}_E.$$

□

Exemple :

Pour n'importe quel entier $k \geq 1$, considérons la représentation de transfert définie par la représentation irréductible sym^k de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

Cela signifie que

$$\widehat{G} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mu_k,$$

où $\mu_k = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid z^k = 1\}$, est muni de la représentation

$$\begin{aligned} \rho : \widehat{G} &\rightarrow \mathrm{GL}_{k+1}(\mathbb{C}), \\ g &\mapsto \mathrm{sym}^k(g). \end{aligned}$$

Le groupe réductif complexe $\widehat{G}$ admet pour tore maximal

$$\widehat{T} = T_2(\mathbb{C})/\mu_k = (\mathbb{C}^\times)^2/\mu_k$$

avec donc

$$X_{\widehat{T}} = \{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid n_1 + n_2 \in k\mathbb{Z}\}$$

et

$$X_{\widehat{T}}^\vee = \left\{ (r_1, r_2) \in \mathbb{Q}^2 \mid r_1, r_2 \in \frac{1}{k}\mathbb{Z} \wedge r_1 - r_2 \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Les poids de la représentation irréductible ρ sont les

$$(i, k-i) \in X_{\widehat{T}}, \quad 0 \leq i \leq k.$$

Le groupe réductif $\widehat{G}$ sur $\mathbb{C}$ est le dual d'un unique groupe réductif G déployé sur F .

L'homomorphisme de passage au quotient par $\mu_k \subset Z_{\widehat{\mathrm{GL}}_2}$

$$\widehat{\mathrm{GL}}_2 = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \widehat{G}$$

est dual d'un homomorphisme

$$G \rightarrow \mathrm{GL}_2.$$

Si T est le tore dual de $\widehat{T}$ sur F , identifié au tore maximal de G , le morphisme induit

$$T \rightarrow T_2 = \mathbb{G}_m^2$$

identifie $X_T^\vee = X_{\widehat{T}}$ à

$$\{(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2 = X_{T_2}^\vee \mid n_1 + n_2 \in k\mathbb{Z}\}.$$

Cela signifie que G s'inscrit dans le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\quad} & \mathrm{GL}_2 \\ \downarrow & \square & \downarrow \det \\ \mathbb{G}_m & \xrightarrow{\lambda \mapsto \lambda^k} & \mathbb{G}_m \end{array}$$

et ses points peuvent être notés comme des paires

$$(g, \det(g)^{1/k}) \quad \text{avec } g \in \mathrm{GL}_2.$$

En particulier, T s'inscrit dans le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\quad} & T_2 = \mathbb{G}_m^2 \\ \downarrow & \square & \downarrow \begin{smallmatrix} (\lambda_1, \lambda_2) \\ \lambda_1 \lambda_2 \end{smallmatrix} \\ \mathbb{G}_m & \xrightarrow{\lambda \mapsto \lambda^k} & \mathbb{G}_m \end{array}$$

et ses points peuvent être notés comme des triplets

$$(\lambda_1, \lambda_2, (\lambda_1 \lambda_2)^{1/k}) \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{G}_m.$$

2 Forme et propriétés générales attendues

On considère toujours un groupe réductif connexe et quasi-déployé G sur le corps global F , muni d'une paire de Borel (T, B) définie sur F .

Définition I.2. –

Supposons le groupe réductif G muni d'une famille de caractères définis sur F

$$\det_{M_P} : G \rightarrow \mathbb{G}_m$$

indexés par les sous-groupes paraboliques standard P de G , avec donc en particulier deux caractères $\det_G, \det_T : G \rightarrow \mathbb{G}_m$.

Pour tout P , introduisons le caractère quotient

$$\det_P = \det_G \cdot \det_{M_P}^{-1} : G \rightarrow \mathbb{G}_m$$

avec donc

$$\det_G = \det_{M_P} \cdot \det_P, \quad \forall P,$$

et en particulier

$$\det_G = \det_T \cdot \det_B.$$

En n'importe quelle place $x \in |F|$, choisissons des mesures invariantes du_P sur les radicaux unipotents $N_P(F_x)$.

Alors, pour toute fonction

$$f : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C},$$

on notera

$$f_P : M_P(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

les fonctions définies par les intégrales

$$\begin{aligned} f_P(m_P) &= |\det_P(m_P)|_x^{1/2} \cdot |\delta_P(m_P)|_x^{1/2} \cdot \int_{N_P(F_x)} du_P \cdot f(m_P u_P) \\ &= |\det_P(m_P)|_x^{1/2} \cdot |\delta_P(m_P)|_x^{-1/2} \cdot \int_{N_P(F_x)} du_P \cdot f(u_P m_P) \end{aligned}$$

lorsque ces intégrales sont bien définies.

Remarque :

Les mesures invariantes du_P sur les radicaux unipotents $N_P(F_x)$ sont uniquement déterminées à multiplication près par un scalaire.

En presque toute place ultramétrique x , le groupe réductif G est non ramifié sur F_x donc admet un modèle entier sur O_x . On dispose du sous-groupe ouvert compact maximal $G(O_x)$ de $G(F_x)$ et on peut choisir pour du_P l'unique mesure invariante de $N_P(F_x)$ qui attribue le volume 1 au sous-groupe ouvert compact $N_P(O_x) = N_P(F_x) \cap G(O_x)$.

□

Pour toute fonction f sur $G(F_x)$ et tout $g \in G(F_x)$, on notera

$$f^g : g' \mapsto f(g'g)$$

et

$${}^g f : g' \mapsto f(gg')$$

les fonctions translatées de f par g à droite et à gauche.

On pose :

Définition I.3. –

Dans les conditions de la définition I.2 ci-dessus, un opérateur

$$f \mapsto \widehat{f}$$

agissant sur les fonctions

$$f : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

sera appelé un opérateur de transformation de Fourier sur $G(F_x)$ muni des caractères $\det_G$ et $\det_{M_P} = \det_G \cdot \det_P^{-1}$ si :

- (1) Cet opérateur est défini par une formule intégrale de la forme

$$\widehat{f}(g') = \int_{G(F_x)} dg \cdot f(g) \cdot k^G(g g')$$

où

- dg est une mesure sur $G(F_x)$ que les translations à droite ou à gauche transforment par le caractère

$$g \mapsto |\det_G(g)|_x,$$

- $g \mapsto k^G(g)$ est une fonction sur $G(F_x)$ qui est localement intégrable et invariante par conjugaison.

- (2) Par conséquent, l'opérateur $f \mapsto \widehat{f}$ transforme les fonctions continues à support compact en des fonctions continues sur $G(F_x)$ et il vérifie la double propriété

$$\begin{cases} \widehat{f^g} &= |\det_G(g)|_x^{-1} \cdot g^{-1} \widehat{f} \\ \widehat{g f} &= |\det_G(g)|_x^{-1} \cdot \widehat{f}^{g^{-1}} \end{cases}$$

pour toute fonction $f : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$ et tout $g \in G(F_x)$.

- (3) De plus, cet opérateur $f \mapsto \widehat{f}$ est unitaire, c'est-à-dire préserve le produit hermitien

$$(f_1, f_2) \mapsto \langle f_1, f_2 \rangle = \int_{G(F_x)} dg \cdot f_1(g) \cdot \overline{f_2(g)}.$$

Autrement dit, cet opérateur s'étend en un automorphisme de l'espace des fonctions de carré intégrable sur $G(F_x)$ et admet pour inverse l'opérateur défini par la formule intégrale

$$f \mapsto \left[g' \mapsto \int_{G(F_x)} dg \cdot f(g) \cdot \overline{k^G(g g')} \right].$$

- (4) Enfin, il existe pour tout sous-groupe parabolique standard P de G

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ une mesure } dm_P \text{ sur } M_P(F_x) \text{ que les translations à droite ou à gauche transforment} \\ \text{par le caractère} \\ \qquad \qquad \qquad m_P \mapsto |\det_{M_P}(m_P)|_x, \\ \bullet \text{ une fonction } m_P \mapsto k^{M_P}(m_P) \text{ sur } M_P(F_x) \text{ qui est localement intégrable et invariante} \\ \text{par conjugaison,} \end{array} \right.$$

telles que, pour toute fonction continue à support compact

$$f : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C},$$

on ait

$$(\widehat{f})_P(m'_P) = \int_{M_P(F_x)} dm_P \cdot f_P(m_P) \cdot k^{M_P}(m_P m'_P).$$

Exemples :

- (i) Si $G = \mathbb{G}_m^r$, $\det_G$ est le caractère

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) \mapsto \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r$$

et $dg = da_1 \dots da_r$ est la mesure de $G(F_x) = (F_x^\times)^r$ induite par la mesure additive autoduale de F_x^r , alors l'opérateur de transformation de Fourier linéaire

$$f \mapsto \widehat{f} = \left[(a'_1, \dots, a'_r) \mapsto \int da_1 \dots da_r \cdot f(a_1, \dots, a_r) \cdot \psi_x(a_1 a'_1 + \dots + a_r a'_r) \right]$$

est un opérateur de transformation de Fourier au sens de la définition ci-dessus.

- (ii) De même, si $G = \mathrm{GL}_r$, $\det_G$ est le caractère

$$g \mapsto \det(g)^r$$

et dg est la mesure de $\mathrm{GL}_r(F_x) \subset M_r(F_x)$ induite par la mesure additive autoduale de $M_r(F_x)$, alors l'opérateur de transformation de Fourier linéaire

$$f \mapsto \widehat{f} = \left[g' \mapsto \int_{\mathrm{GL}_r(F_x)} dg \cdot f(g) \cdot \psi_x(\mathrm{Tr}(g g')) \right]$$

est un opérateur de transformation de Fourier au sens de la définition ci-dessus.

□

Voici comment la notion d'opérateur de transformation de Fourier sur $G(F_x)$ varie en fonction du choix des caractères algébriques $\det_G$ et $\det_{M_P} = \det_G \cdot \det_P^{-1} : G \rightarrow \mathbb{G}_m$:

Lemme I.4. –

Dans les conditions de la définition I.3 ci-dessus, considérons une autre famille de caractères définis sur F

$$\det'_G, \quad \det'_{M_P} = \det'_G \cdot \det_P'^{-1} : G \rightarrow \mathbb{G}_m.$$

Alors :

- (i) Si dg [resp. dm_P] est une mesure sur $G(F_x)$ [resp. $M_P(F_x)$] équivariante relativement au caractère

$$G(F_x) \ni g \mapsto |\det_G(g)|_x,$$

$$[\text{resp.} \quad M_P(F_x) \ni m_P \mapsto |\det_{M_P}(m_P)|_x],$$

la mesure produit

$$d'g = |\det'_G(g)|_x \cdot |\det_G(g)|_x^{-1} \cdot dg$$

$$[\text{resp.} \quad d'm_P = |\det'_{M_P}(m_P)|_x \cdot |\det_{M_P}(m_P)|_x^{-1} \cdot dm_P]$$

est équivariante relativement au caractère

$$G(F_x) \ni g \mapsto |\det'_G(g)|_x$$

$$[\text{resp.} \quad M_P(F_x) \ni m_P \mapsto |\det'_{M_P}(m_P)|_x].$$

(ii) *L'opérateur de multiplication*

$$f \mapsto |\det'_G(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det_G(\bullet)|_x^{\frac{1}{2}} \cdot f$$

$$[\text{resp.} \quad f_P \mapsto |\det'_{M_P}(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det_{M_P}(\bullet)|_x^{\frac{1}{2}} \cdot f_P]$$

définit un automorphisme de l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur $G(F_x)$ [resp. $M_P(F_x)$] pour la mesure dg [resp. dm_P] sur l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable pour la mesure $d'g$ [resp. $d'm_P$].

(iii) *La famille de ces opérateurs de multiplication transforme les opérateurs*

$$f \mapsto f_P$$

associés dans la définition I.2 aux caractères $\det_P = \det_G \cdot \det_{M_P}^{-1}$ en les opérateurs

$$f \mapsto f_P$$

associés aux caractères $\det'_P = \det'_G \cdot \det_{M_P}^{-1}$.

(iv) *La famille de ces opérateurs de multiplication transforme tout opérateur de transformation de Fourier sur $G(F_x)$ relativement aux caractères $\det_G$ et $\det_{M_P}$ en un opérateur de transformation de Fourier sur $G(F_x)$ relativement aux caractères $\det'_G$ et $\det'_{M_P}$.*

De plus, si le premier opérateur a la forme

$$f \mapsto \left[g' \mapsto \int_{G(F_x)} dg \cdot f(g) \cdot k^G(g g') \right]$$

et induit les

$$f_P \mapsto \left[m'_P \mapsto \int_{M_P(F_x)} dm_P \cdot f_P(m_P) \cdot k^{M_P}(m_P m'_P) \right],$$

alors l'opérateur image a la forme

$$f \mapsto \left[g' \mapsto \int_{G(F_x)} d'g \cdot f(g) \cdot k'^G(g g') \right]$$

et induit les

$$f_P \mapsto \left[m'_P \mapsto \int_{M_P(F_x)} d'm_P \cdot f_P(m_P) \cdot k'^{M_P}(m_P m'_P) \right]$$

avec

$$k'^G(g) = |\det'_G(g)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det_G(g)|_x^{\frac{1}{2}} \cdot k^G(g), \quad \forall g \in G(F_x),$$

$$k'^{M_P}(m_P) = |\det'_{M_P}(m_P)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot |\det_{M_P}(m_P)|_x^{\frac{1}{2}} \cdot k^{M_P}(m_P), \quad \forall m_P \in M_P(F_x), \quad \forall P.$$

□

Voici le premier problème qui se pose à nous :

Problème I.5. –

On voudrait associer à tout triplet composé de

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ un groupe réductif quasi-déployé } G \text{ sur le corps global } F, \text{ muni d'une paire de Borel } (T, B), \\ \bullet \text{ une représentation de transfert au sens de la définition I.1} \\ \\ \rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \widehat{\mathrm{GL}}_r = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}), \\ \\ \bullet \text{ une famille de caractères algébriques} \\ \\ \det_G, \quad \det_{M_P} = \det_G \cdot \det_P^{-1} : G \rightarrow \mathbb{G}_m \\ \\ \text{indexés par les sous-groupes paraboliques standard } P \text{ de } G, \end{array} \right.$$

et à toute place $x \in |F|$, un opérateur de transformation de Fourier sur $G(F_x)$ au sens de la définition I.3, appelé opérateur de ρ -transformation de Fourier sur $G(F_x)$,

$$f \mapsto \widehat{f} = \left[g' \mapsto \int_{G(F_x)} dg \cdot f(g) \cdot k^\rho(g g') \right]$$

de telle façon que :

- (1) *Lorsque l'on fait varier les caractères $\det_G$ et $\det_{M_P}$, les opérateurs de transformation de Fourier associés $f \mapsto \widehat{f}$ sont transformés les uns dans les autres par les opérateurs de multiplication du lemme I.4.*
- (2) *Pour tout sous-groupe parabolique standard P de G , l'opérateur*

$$f \mapsto f_P$$

transforme l'opérateur de transformation de Fourier sur $G(F_x)$ associé à la représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \widehat{\mathrm{GL}}_r$$

en l'opérateur de transformation de Fourier sur $M_P(F_x)$ associé à la représentation de transfert induite

$$\rho_{M_P} : \widehat{M_P} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \widehat{\mathrm{GL}}_r.$$

- (3) *Si l'on fait agir $F_x^\times$ sur $G(F_x)$ par le cocaractère central*

$$\mu_G : \mathbb{G}_m \rightarrow Z_G \hookrightarrow G$$

qui correspond au caractère composé

$$\widehat{\mu}_G : \widehat{G} \xrightarrow{\rho} \widehat{\mathrm{GL}}_r = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) \xrightarrow{\det} \mathbb{C}^\times,$$

on a toujours

$$\overline{k^\rho(g)} = k^\rho(-g), \quad \forall g \in G(F_x).$$

Remarques :

- (i) D'après la condition (1), il suffit de définir les opérateurs de transformation de Fourier sur $G(F_x)$ et les $M_P(F_x)$ associés à $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \widehat{\mathrm{GL}}_r$ pour un seul choix des caractères $\det_G$ et $\det_{M_P} = \det_G \cdot \det_P^{-1} : G \rightarrow \mathbb{G}_m$.
 Une possibilité consiste à les prendre tous triviaux à l'exception de $\det_T$ qui est fixé par la condition (1) de la définition I.1.
 Une autre possibilité consiste à les prendre tous égaux au caractère $\det_T$.
- (ii) La propriété (3) signifie que la propriété d'unitarité de l'opérateur de ρ -transformation de Fourier sur $G(F_x)$

$$f \mapsto \widehat{f} = \left[g' \mapsto \int_{G(F_x)} dg \cdot f(g) \cdot k^\rho(g g') \right]$$

est équivalente à ce que

$$\widehat{\widehat{f}}(g) = f(-g), \quad \forall g \in G(F_x), \quad \forall f.$$

□

3 Décomposition spectrale en les places ultramétriques

On considère toujours un groupe réductif G quasi-déployé sur un corps global F .

Dans ce paragraphe, on considère aussi une place ultramétrique x de F .

Munissant $G(F_x)$ d'une mesure invariante (normalisée par la condition $\mathrm{vol}(G(O_x)) = 1$ si G est non ramifié sur F_x), on note $\mathcal{H}_x^G$ l'algèbre de convolution des fonctions localement constantes à support compact $h : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$. Elle est la réunion filtrante des sous-algèbres unitaires $\mathcal{H}_{x,K}^G$ des fonctions invariantes à droite et à gauche par les sous-groupes ouverts compacts $K \subset G(F_x)$.

On note $\{\pi\}_x^G$ l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations lisses admissibles irréductibles de $\mathcal{H}_x^G$. Il est la réunion filtrante des sous-ensembles $\{\pi\}_{x,K}^G$ de représentations π qui admettent des vecteurs non nuls invariants par les $K \subset G(F_x)$. Chaque $\{\pi\}_{x,K}^G$ s'identifie à l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations irréductibles de dimension finie de $\mathcal{H}_{x,K}^G$.

Définition I.6. –

On considère comme ci-dessus un groupe réductif G quasi-déployé sur le corps global F , une place ultramétrique x de F et un sous-groupe ouvert compact $K \subset G(F_x)$.

On dira qu'une fonction

$$\{\pi\}_{x,K}^G \rightarrow \mathbb{C}$$

est polynomiale si elle appartient à l'algèbre $A_{x,K}^G$ engendrée par les fonctions

$$\{\pi\}_{x,K}^G \ni \pi \mapsto \mathrm{Tr}_\pi(h)$$

associées aux éléments $h \in \mathcal{H}_{x,K}^G$.

□

On sait que chaque $A_{x,K}^G$ est un produit fini d'algèbres intègres et de type fini sur $\mathbb{C}$, et que l'ensemble correspondant $\{\pi\}_{x,K}^G$ s'identifie à un ouvert de Zariski de la variété algébrique complexe $\mathrm{Spec}(A_{x,K}^G)$. De plus, si $K \subset K'$ sont deux sous-groupes ouverts compacts emboîtés de $G(F_x)$, l'inclusion

$$\{\pi\}_{x,K'}^G \hookrightarrow \{\pi\}_{x,K}^G$$

est une immersion ouverte et fermée entre variétés algébriques.

On a la formule de Plancherel :

Théorème I.7. (Harish-Chandra) –

Pour tout sous-groupe ouvert compact $K \subset G(F_x)$, notons $\text{Im} \{\pi\}_{x,K}^G$ la sous-variété algébrique réelle de la variété algébrique complexe $\{\pi\}_{x,K}^G$ qui classifie les représentations π qui sont unitaires et tempérées.

Elle est munie d'une unique mesure $d\pi$, appelée mesure de Plancherel, telle que, pour toute $h \in \mathcal{H}_{x,K}^G$, on ait

$$h(1) = \int_{\text{Im} \{\pi\}_{x,K}^G} d\pi \cdot \text{Tr}_\pi(h).$$

□

Pour toute $\pi \in \{\pi\}_x^G$, on note $\pi^\vee$ la représentation “contragrédiente” de π constituée des formes linéaires sur π qui sont invariantes par un sous-groupe ouvert compact de $G(F_x)$. On appelle “coefficients matriciels” de π les fonctions

$$G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

de la forme

$$g \mapsto \langle v^\vee, g \cdot v \rangle = \langle g^{-1} \cdot v^\vee, v \rangle$$

avec $v \in \pi$, $v^\vee \in \pi^\vee$, ou plus généralement les combinaisons linéaires (finies) de telles fonctions.

On voit que pour tout coefficient matriciel $g \mapsto \varphi_x(g)$ d'une représentation $\pi \in \{\pi\}_x^G$, la fonction $g \mapsto \varphi_x(g^{-1})$ est un coefficient matriciel de la représentation contragrédiente $\pi^\vee$ de π .

La formule de Plancherel induit le théorème suivant de décomposition spectrale des fonctions localement constantes à support compact sur $G(F_x)$:

Théorème I.8. –

Pour tout sous-groupe ouvert compact $K \subset G(F_x)$, toute fonction $h \in \mathcal{H}_{x,K}^G$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$h(g) = \int_{\text{Im} \{\pi\}_{x,K}^G} d\pi \cdot h_\pi(g), \quad \forall g \in G(F_x),$$

où :

- pour tout $g \in G(F_x)$, la fonction

$$\pi \mapsto h_\pi(g)$$

est une fonction polynomiale sur $\{\pi\}_{x,K}^G$,

- pour toute $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^G$, la fonction

$$G(F_x) \ni g \mapsto h_\pi(g)$$

est un coefficient matriciel de π invariant à gauche et à droite par K .

□

Considérons maintenant le cas où G est non ramifié en la place ultramétrique x , c'est-à-dire où l'action sur $\widehat{G}$ du groupe de Galois Γ_{F_x} de F_x est non ramifiée. Alors l'élément de Frobenius σ_x agit sur $\widehat{G}$ et on peut noter $\widehat{G}_x$ la fibre du produit semi-direct

$$\widehat{G} \rtimes \sigma_x^{\mathbb{Z}}$$

au-dessus de σ_x , munie de sa structure de variété algébrique sur $\mathbb{C}$ et de l'action par conjugaison du groupe algébrique $\widehat{G}$.

Comme G admet dans ce cas une structure de schéma en groupes réductifs sur $\text{Spec}(O_x)$, on dispose du sous-groupe ouvert compact maximal $G(O_x)$ de $G(F_x)$. Notant $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G = \mathcal{H}_{x,G(O_x)}^G$ et $A_{x,\emptyset}^G = A_{x,G(O_x)}^G$, on a le théorème de Satake :

Théorème I.9. –

Si G est non ramifié en x , on a un isomorphisme canonique d'algèbres

$$S_x^G : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[\widehat{G}_x]^{\widehat{G}}.$$

En particulier, $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ est commutative et s'identifie à $A_{x,\emptyset}^G$.

Remarque :

Si G est déployé sur F_x , c'est-à-dire si Γ_{F_x} agit trivialement sur $\widehat{G}$, l'algèbre $\mathbb{C}[\widehat{G}_x]^{\widehat{G}}$ est l'algèbre $\mathbb{C}[\widehat{G}]^{\widehat{G}}$ des polynômes invariants sur $\widehat{G}$. Elle s'identifie à l'algèbre $\mathbb{C}[\widehat{T}]^{W_G}$ des polynômes sur $\widehat{T}$ invariants par l'action du groupe de Weyl $W_G = W_{\widehat{G}}$ de G et $\widehat{G}$.

C'est en particulier le cas si $G = \text{GL}_r$. On note alors $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^{\text{GL}_r} = \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r$ qui est isomorphe à $\mathbb{C}[\widehat{T}_r]^{\mathfrak{S}_r}$. □

On dit qu'une représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \widehat{\text{GL}}_r = \text{GL}_r(\mathbb{C})$$

est non ramifiée en la place ultramétrique x si G est non ramifié en x et si, de plus, l'action de Γ_{F_x} sur l'espace de ρ est non ramifiée. On sait que ρ est non ramifiée en presque toute place.

Si ρ est non ramifiée en x , elle définit un homomorphisme

$$\widehat{G} \rtimes \sigma_x^{\mathbb{Z}} \rightarrow \widehat{\text{GL}}_r = \text{GL}_r(\mathbb{C})$$

qui induit un homomorphisme d'algèbres

$$\mathbb{C}[\widehat{\text{GL}}_r]^{\widehat{\text{GL}}_r} \rightarrow \mathbb{C}[\widehat{G}_x]^{\widehat{G}}$$

et donc, via les isomorphismes de Satake,

$$\rho_x^* : \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r \rightarrow \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G.$$

Nous pouvons maintenant compléter le problème I.5 de définition de transformations de Fourier “non linéaires” sur les groupes réductifs associés aux représentations de transfert :

Problème I.10. –

Considérons comme dans le problème I.5 les triplets constitués de :

- un groupe réductif quasi-déployé G sur le corps global F , muni d'une paire de Borel (T, B) ,
 - une représentation de transfert au sens de la définition I.1
- $$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \widehat{\text{GL}}_r = \text{GL}_r(\mathbb{C}),$$
- une famille de caractères algébriques
- $$\det_G, \quad \det_{M_P} = \det_G \cdot \det_P^{-1} : G \rightarrow \mathbb{G}_m$$
- indexés par les sous-groupes paraboliques standard P de G .*

Supposons que le caractère $\det_T : G \rightarrow \mathbb{G}_m$ correspond au cocaractère central $\widehat{\det}_T : \mathbb{C}^\times \rightarrow \widehat{G}$ de la définition I.1, et considérons une place ultramétrique x de F .

On voudrait pouvoir associer à ces données, en plus d'un opérateur de ρ -transformation de Fourier sur $G(F_x)$

$$f \mapsto \widehat{f} = \left[g' \mapsto \int_{G(F_x)} dg \cdot f(g) \cdot k^\rho(g g') \right]$$

vérifiant les propriétés requises, un sous-espace de fonctions

$$G(F_x) \rightarrow \mathbb{C},$$

appelées les “ ρ -fonctions”, qui satisfasse les conditions suivantes :

- (1) Les ρ -fonctions sont de carré intégrable pour la mesure dg (équivariante pour le caractère $|\det_G(\bullet)|_x$), et chacune est invariante à droite et à gauche par un sous-groupe ouvert compact $K \subset G(F_x)$.
- (2) L'espace des ρ -fonctions est invariant par les translations à droite $f \mapsto f^g = f(\bullet g)$ et à gauche $f \mapsto {}^g f = f(g \bullet)$, ainsi que par la transformation de Fourier $f \mapsto \widehat{f}$ et son inverse $f \mapsto \widehat{\widehat{f}}(-\bullet)$. D'autre part, il est dense dans l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur $G(F_x)$.
- (3) Pour toute $\pi \in \{\pi\}_x^G$, les intégrales

$$\int_{G(F_x)} dg \cdot f(g) \cdot \varphi(g) \cdot |\det_T(g)|_x^{s-\frac{1}{2}} \cdot |\det_G(g)|_x^{-\frac{1}{2}}$$

associées aux ρ -fonctions

$$f : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

et aux coefficients matriciels de π

$$\varphi : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

convergent absolument, pour tout $s \in \mathbb{C}$ de partie réelle $\operatorname{Re}(s)$ assez grande, vers une fraction rationnelle en $Z = q_x^{-s}$.

De plus, ces fractions rationnelles en $Z = q_x^{-s}$ engendrent un idéal fractionnaire qui admet un unique générateur

$$L_x(\rho, \pi, Z)$$

dont l'inverse $L_x(\rho, \pi, Z)^{-1}$ est un polynôme en Z et π dont la spécialisation en $Z = 0$ est égale à 1.

- (4) Une fonction invariante à droite et à gauche par un sous-groupe ouvert compact K

$$f : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

est une ρ -fonction si et seulement si ses restrictions aux fibres de l'homomorphisme

$$|\det_T(\bullet)|_x : G(F_x) \rightarrow q_x^{\mathbb{Z}}$$

sont à support compact, et qu'elle se décompose spectralement sous la forme

$$f(\bullet) = |\det_G(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\operatorname{Im} \{\pi\}_{x,K}^G} d\pi \cdot f_\pi(\bullet) \cdot L_x\left(\rho, \pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

où :

- pour tout $g \in G(F_x)$, la fonction

$$\pi \mapsto f_\pi(g)$$

est une fonction polynomiale sur $\{\pi\}_{x,K}^G$,

- pour toute $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^G$, la fonction sur $G(F_x)$

$$g \mapsto f_\pi(g)$$

est un coefficient matriciel de π invariant à droite et à gauche par K .

- (5) Il existe une famille (nécessairement unique) de polynômes inversibles en les $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^G$ et $Z^{\pm 1}$

$$\varepsilon_x(\rho, \pi, Z)$$

tels que

$$\varepsilon_x(\rho, \pi \otimes |\det_T(\bullet)|_x^{-s}, Z) = \varepsilon_x(\rho, \pi, q_x^s \cdot Z), \quad \forall s \in \mathbb{C}, \quad \forall \pi,$$

et que, pour toute ρ -fonction f décomposée spectralement comme ci-dessus, on ait

$$\widehat{f}(\bullet) = |\det_G(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\text{Im}\{\pi\}_{x,K}^G} d\pi \cdot f_\pi((\bullet)^{-1}) \cdot L_x\left(\rho, \pi, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \varepsilon_x\left(\rho, \pi, q_x^{-\frac{1}{2}}\right).$$

- (6) Pour tout sous-groupe parabolique standard P de G , et pour toute ρ -fonction sur $G(F_x)$

$$f : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C},$$

la fonction

$$f_P : M_P(F_x) \ni m_P \mapsto |\det_P(m_P)|_x^{\frac{1}{2}} \cdot |\delta_P(m_P)|_x^{\frac{1}{2}} \cdot \int_{N_P(F_x)} du_P \cdot f(m_P u_P)$$

est une ρ_{M_P} -fonction sur $M_P(F_x)$.

En particulier, la fonction

$$f_B : T(F_x) \ni t \mapsto |\det_B(t)|_x^{\frac{1}{2}} \cdot |\delta_B(t)|_x^{\frac{1}{2}} \cdot \int_{N_B(F_x)} du_B \cdot f(t u_B)$$

est une ρ_T -fonction sur $T(F_x)$.

- (7) Réciproquement, si une fonction invariante à droite et à gauche par $K \subset G(F_x)$

$$f : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

admet une décomposition spectrale qui ne fait apparaître que des représentations $\pi \in \text{Im}\{\pi\}_{x,K}^G$ induites normalisées de représentations $\pi_P \in \text{Im}\{\pi\}_x^{M_P}$, alors f est une ρ -fonction si les

$$\left({}^g f^{g'}\right)_P : M_P(F_x) \rightarrow \mathbb{C}, \quad g, g' \in G(F_x),$$

sont toutes des ρ_{M_P} -fonctions sur $M_P(F_x)$.

- (8) Si G et ρ sont non ramifiés en la place ultramétrique x et $K = G(O_x)$, les fractions rationnelles

$$L_x(\rho, \pi, Z), \quad \pi \in \{\pi\}_{x,\emptyset}^G = \{\pi\}_{x,G(O_x)}^G$$

et

$$\varepsilon_x(\rho, \pi, Z), \quad \pi \in \{\pi\}_{x,\emptyset}^G,$$

sont les transformées par l'homomorphisme

$$\rho_x^* : \mathbb{C}[Z_1^{\pm 1}, \dots, Z_r^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_r} \cong \mathcal{H}_{x,\emptyset}^r \rightarrow \mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$$

des fractions rationnelles

$$\prod_{1 \leq i \leq r} \frac{1}{1 - Z_i \cdot Z} = \prod_{1 \leq i \leq r} L_x(1_x, Z_i \cdot Z)$$

et

$$\prod_{1 \leq i \leq r} \varepsilon_x(1_x, Z_i \cdot Z, \psi_x)$$

où 1_x désigne le caractère trivial de $\mathbb{G}_m(F_x) = F_x^\times$.

- (9) Les facteurs $L_x(\rho, \pi, Z)$ et $\varepsilon_x(\rho, \pi, Z)$, $\pi \in \{\pi\}_x^G$, ne dépendent pas du choix des caractères $\det_G$ et $\det_{M_P} = \det_G \cdot \det_P^{-1}$.

Autrement dit, lorsque l'on fait varier ces caractères, les espaces de ρ -fonctions sur $G(F_x)$ et de ρ_{M_P} -fonctions sur les $M_P(F_x)$ sont transformés les uns dans les autres par les opérateurs de multiplication du lemme I.4.

Remarques :

- (i) A partir du moment où, comme il est demandé dans la propriété (2), l'espace des ρ -fonctions est stable par les translations à droite et à gauche ainsi que par l'opérateur de ρ -transformation de Fourier – lequel est compatible avec ces translations au sens de la propriété (2) de la définition I.3 –, cet espace et sa ρ -transformation de Fourier doivent admettre des expressions spectrales. Les propriétés (3), (4) et (5) précisent la forme attendue de ces expressions spectrales.
- (ii) Les propriétés (3) et (4) signifient que la connaissance des ρ -fonctions sur $G(F_x)$ équivaut à celle des facteurs $L_x(\rho, \pi, Z)$, $\pi \in \{\pi\}_x^G$.
- (iii) De même, la propriété (5) signifie que la connaissance de l'opérateur de ρ -transformation de Fourier agissant sur l'espace des ρ -fonctions – et donc sur l'espace des fonctions de carré intégrables sur $G(F_x)$ dans lequel le sous-espace des ρ -fonctions est dense – équivaut à la connaissance des facteurs $\varepsilon_x(\rho, \pi, Z)$, $\pi \in \{\pi\}_x^G$.
- (iv) La propriété d'unitarité de l'opérateur de ρ -transformation de Fourier $f \mapsto \hat{f}$ s'exprime par le fait que, pour toute représentation unitaire tempérée $\pi \in \text{Im } \{\pi\}_x^G$, les fractions rationnelles

$$L_x(\rho, \pi^\vee, Z) \quad \text{et} \quad L_x(\rho, \pi, Z)$$

doivent être conjuguées l'une de l'autre, tandis que les polynômes inversibles

$$\varepsilon_x(\rho, \pi^\vee, Z) \quad \text{et} \quad \varepsilon_x(\rho, \pi, Z)$$

doivent vérifier la relation

$$\varepsilon_x\left(\rho, \pi^\vee, \frac{1}{q_x Z}\right) \cdot \overline{\varepsilon_x(\rho, \pi, Z)} = 1.$$

- (v) Compte tenu des propriétés (3), (4) et (5), les propriétés (6) et (7) équivalent à demander que, pour tout sous-groupe parabolique standard P de G dont le sous-groupe de Levi M_P est muni de la représentation de transfert induite $\rho_{M_P} : \widehat{M_P} \rtimes \Gamma_F \hookrightarrow \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \xrightarrow{\rho} \widehat{\text{GL}}_r$, et pour toute représentation $\pi \in \{\pi\}_x^G$ qui est l'induite normalisée d'une représentation $\pi_P \in \{\pi\}_x^{M_P}$, on a

$$L_x(\rho, \pi, Z) = L_x(\rho_{M_P}, \pi_P, Z),$$

$$\varepsilon_x(\rho, \pi, Z) = \varepsilon_x(\rho_{M_P}, \pi_P, Z).$$

- (vi) Si G et ρ sont non ramifiés en la place ultramétrique x , la propriété (8) signifie que l'intersection de l'espace des ρ -fonctions sur $G(F_x)$ avec celui des fonctions sphériques

$$G(O_x) \backslash G(F_x) / G(O_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

est déjà entièrement fixée, ainsi que l'action sur ce sous-espace de l'opérateur de ρ -transformation de Fourier.

Il en est de même du sous-espace que celui-ci engendre par les translations à droite et à gauche par les éléments de $G(F_x)$, c'est-à-dire du sous-espace des ρ -fonctions dont la décomposition spectrale ne fait apparaître que des représentations $\pi \in \{\pi\}_{x, \emptyset}^G$.

□

La condition imposée aux ρ -fonctions sur $G(F_x)$ que leurs restrictions aux fibres de l'homomorphisme

$$|\det_T(\bullet)|_x : G(F_x) \rightarrow q_x^{\mathbb{Z}}$$

soient à support compact impose :

Lemme I.11. –

Supposons résolu le problème I.10 ci-dessus.

Alors on a nécessairement :

- (i) *Les fractions rationnelles quotients*

$$\gamma_x(\rho, \pi, Z) = \frac{L_x(\rho, \pi, Z) \cdot \varepsilon_x(\rho, \pi, Z)}{L_x\left(\rho, \pi^\vee, \frac{1}{q_x Z}\right)}$$

ne dépendent que du support supercuspidal des représentations $\pi \in \{\pi\}_x^G$.

- (ii) *Autrement dit, pour tout sous-groupe parabolique standard P de G et toute représentation $\pi \in \{\pi\}_x^G$ qui est un sous-quotient de l'induite normalisée d'une représentation $\pi_P \in \{\pi\}_x^{M_P}$, on a*

$$\gamma_x(\rho, \pi, Z) = \gamma_x(\rho_{M_P}, \pi_P, Z).$$

- (iii) *De plus, dans les conditions de (ii), le polynôme*

$$L_x(\rho, \pi, Z)^{-1}$$

divise le polynôme

$$L_x(\rho_{M_P}, \pi_P, Z)^{-1}.$$

□

4 Décomposition spectrale en les places archimédiennes

On considère maintenant un groupe réductif G quasi-déployé sur un corps de nombres F .

Dans ce paragraphe, on considère une place archimédienne x de F , avec donc $F_x \cong \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On choisit un sous-groupe compact maximal K du groupe réductif réel ou complexe $G(F_x)$. On sait qu'un tel sous-groupe est unique à conjugaison près. On le munit de l'unique mesure invariante de volume 1.

Comme K est compact, ses représentations continues irréductibles sont de dimension finie. Elles sont munies d'une action de l'algèbre de convolution des fonctions continues $K \rightarrow \mathbb{C}$.

Pour toute famille finie σ de représentations continues irréductibles de K , il existe une unique fonction continue, invariante par conjugaison et idempotente

$$\mathbb{I}_\sigma : K \rightarrow \mathbb{C}$$

qui agit par l'identité sur les éléments de σ et par 0 sur toutes les autres représentations continues irréductibles de K .

Pour toute telle σ , on note $\mathcal{H}_{x,\sigma}^K$ la sous-algèbre de dimension finie des fonctions continues

$$h : K \rightarrow \mathbb{C}$$

invariantes par convolution à droite ou à gauche avec $\mathbb{I}_\sigma$.

Remarquant que $\mathcal{H}_{x,\sigma}^K \subset \mathcal{H}_{x,\sigma'}^K$ pour toutes familles finies de représentations irréductibles $\sigma \subset \sigma'$, on note $\mathcal{H}_x^K$ l'algèbre de convolution réunion filtrante des $\mathcal{H}_{x,\sigma}^K$.

D'autre part, on munit également $G(F_x)$ d'une mesure invariante. On sait qu'une telle mesure est uniquement déterminée à multiplication près par un scalaire.

Le choix d'une telle mesure définit un produit de convolution sur l'espace des fonctions C^∞ à support compact $G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$.

Cet espace est également muni d'une double action par convolution à droite ou à gauche de l'algèbre $\mathcal{H}_x^K$.

Pour toute famille finie σ de représentations irréductibles de K , on note $\mathcal{H}_{x,\sigma}^G$ l'espace des fonctions C^∞ à support compact

$$G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

qui sont invariantes par convolution à droite ou à gauche avec $\mathbb{I}_\sigma$. Ce sous-espace est stable par convolution à droite ou à gauche avec les éléments de $\mathcal{H}_x^K$ et le produit de convolution sur $G(F_x)$ le munit d'une structure d'algèbre.

Pour toutes familles finies $\sigma \subseteq \sigma'$ de représentations irréductibles de K , $\mathcal{H}_{x,\sigma}^G$ est une sous-algèbre de $\mathcal{H}_{x,\sigma'}^G$, ce qui permet de définir l'algèbre $\mathcal{H}_{x,K}^G$ réunion filtrante des sous-algèbres $\mathcal{H}_{x,\sigma}^G$.

Cette algèbre $\mathcal{H}_{x,K}^G$ est constituée des fonctions C^∞ à support compact $G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$ dont les translatées à gauche ou à droite par les éléments de K engendrent un espace vectoriel de dimension finie. Elle est munie d'une double action de $\mathcal{H}_x^K$ par convolution à droite et à gauche, ce qui confère à la somme directe $\mathcal{H}_{x,K}^G \oplus \mathcal{H}_x^K$ une structure d'algèbre dont $\mathcal{H}_{x,K}^G$ est un idéal bilatère.

Si K' est un autre sous-groupe compact maximal de $G(F_x)$, nécessairement conjugué de K , l'algèbre $\mathcal{H}_{x,K'}^K$ est isomorphe à l'algèbre $\mathcal{H}_x^K$ et l'algèbre $\mathcal{H}_{x,K'}^G$ est l'image de $\mathcal{H}_{x,K}^G$ par un automorphisme intérieur de $G(F_x)$.

On rappelle :

Définition I.12. –

Considérons comme ci-dessus un sous-groupe compact maximal K du groupe réductif réel ou complexe $G(F_x)$ sur $F_x \cong \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Une représentation π de l'algèbre $\mathcal{H}_{x,K}^G \oplus \mathcal{H}_x^K$ est dite admissible si :

- *Tout vecteur v de l'espace de π s'écrit sous la forme*

$$v = \sum_{1 \leq i \leq k} h_i \cdot v_i$$

où les v_i sont des vecteurs de l'espace de π et les h_i sont des éléments de l'algèbre $\mathcal{H}_{x,K}^G$.

- Pour toute famille finie σ de représentations irréductibles de K , le sous-espace π_σ de π constitué des vecteurs fixés par l'élément idempotent $\mathbb{I}_\sigma \in \mathcal{H}_{x,\sigma}^K \subset \mathcal{H}_x^K$ est de dimension finie.
De plus, l'action de la sous-algèbre $\mathcal{H}_{x,\sigma}^G$ de $\mathcal{H}_{x,K}^G$ sur le sous-espace de dimension finie π_σ de π est continue.

Remarque :

L'espace de toute représentation admissible π de $\mathcal{H}_{x,K}^G \oplus \mathcal{H}_x^K$ est la réunion filtrante de ses sous-espaces π_σ . □

On note $\{\pi\}_x^G$ l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations admissibles irréductibles de l'algèbre $\mathcal{H}_{x,K}^G \oplus \mathcal{H}_x^K$. Cet ensemble ne dépend pas du choix du sous-groupe compact maximal K de $G(F_x)$.

Il est la réunion filtrante des sous-ensembles $\{\pi\}_{x,\sigma}^G$ de représentations π telles que $\pi_\sigma \neq 0$. Chaque $\{\pi\}_{x,\sigma}^G$ s'identifie à l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations continues irréductibles de dimension finie de l'algèbre $\mathcal{H}_{x,\sigma}^G \oplus \mathcal{H}_x^K$.

Définition I.13. –

On considère comme ci-dessus un groupe réductif G quasi-déployé sur le corps global F , une place archimédienne x de F et un sous-groupe compact maximal $K \subset G(F_x)$.

Pour toute famille finie σ de représentations irréductibles de K , on dira qu'une fonction

$$\{\pi\}_{x,\sigma}^G \rightarrow \mathbb{C}$$

est régulière si elle appartient à l'algèbre (sans élément unité) $A_{x,\sigma}^G$ engendrée par les fonctions

$$\{\pi\}_{x,\sigma}^G \ni \pi \mapsto \text{Tr}_\pi(h)$$

associées aux éléments $h \in \mathcal{H}_{x,\sigma}^G$. □

Pour toute famille finie σ de représentations irréductibles de K , il existe sur $\{\pi\}_{x,\sigma}^G$ une unique structure de variété analytique complexe de Stein pour laquelle les fonctions régulières, éléments de $A_{x,\sigma}^G$, sont des fonctions holomorphes sur $\{\pi\}_{x,\sigma}^G$. En revanche, les fonctions holomorphes sur $\{\pi\}_{x,\sigma}^G$ ne sont pas nécessairement régulières.

Si $\sigma \subseteq \sigma'$ sont deux telles familles finies emboîtées, l'inclusion

$$\{\pi\}_{x,\sigma}^G \rightarrow \{\pi\}_{x,\sigma'}^G$$

est une immersion ouverte et fermée entre variétés analytiques complexes.

On a la formule de Plancherel :

Théorème I.14. (Harish-Chandra) –

Pour toute famille finie σ de représentations irréductibles de K , notons $\text{Im } \{\pi\}_{x,\sigma}^G$ la sous-variété analytique réelle de la variété analytique complexe $\{\pi\}_{x,\sigma}^G$ qui classe les représentations admissibles irréductibles π de $\mathcal{H}_{x,K}^G \oplus \mathcal{H}_x^K$ qui sont unitaires et tempérées.

Elle est munie d'une unique mesure $d\pi$, appelée mesure de Plancherel, telle que, pour toute fonction $h \in \mathcal{H}_{x,\sigma}^G$, on ait

$$h(1) = \int_{\text{Im } \{\pi\}_{x,\sigma}^G} d\pi \cdot \text{Tr}_\pi(h).$$

□

Pour toute représentation admissible π de $\mathcal{H}_{x,K}^G \oplus \mathcal{H}_x^K$, il existe une représentation admissible $\pi^\vee$ qui admette une forme bilinéaire non dégénérée

$$\begin{aligned}\pi^\vee \times \pi &\rightarrow \mathbb{C} \\ (v^\vee, v) &\mapsto \langle v^\vee, v \rangle\end{aligned}$$

qui vérifie

$$\langle v^\vee, h \cdot v \rangle = \langle h^\vee \cdot v^\vee, v \rangle, \quad \forall v, \forall v^\vee, \forall h \in \mathcal{H}_{x,K}^G \oplus \mathcal{H}_x^K,$$

où $h^\vee$ est déduit de h par le changement de variable $g \mapsto g^{-1}$ de $G(F_x)$ et de K .

La représentation $\pi^\vee$ est unique à unique isomorphisme près. Elle est appelée la représentation contragrédiente de π .

Pour tous vecteurs $v \in \pi$ et $v^\vee \in \pi^\vee$, la forme linéaire

$$\mathcal{H}_{x,K}^G \ni h \mapsto \langle v^\vee, h \cdot v \rangle = \langle h^\vee \cdot v^\vee, v \rangle$$

est continue sur chaque sous-algèbre $\mathcal{H}_{x,\sigma}^G \subset \mathcal{H}_{x,K}^G$. Elle est définie par une fonction localement intégrable que l'on peut noter par abus de langage

$$G(F_x) \ni g \mapsto \langle v^\vee, g \cdot v \rangle = \langle g^{-1} \cdot v^\vee, v \rangle$$

et qui est de classe C^∞ .

Ces fonctions

$$G(F_x) \ni g \mapsto \langle v^\vee, g \cdot v \rangle, \quad v \in \pi, \quad v^\vee \in \pi^\vee,$$

et plus généralement leurs combinaisons linéaires (finies) peuvent être appelées “coefficients matriciels” de π .

La formule de Plancherel induit le théorème suivant de décomposition spectrale des fonctions C^∞ à support compact sur $G(F_x)$ qui sont éléments de $\mathcal{H}_{x,K}^G$:

Théorème I.15. –

Pour toute famille finie σ de représentations irréductibles de K , toute fonction $h \in \mathcal{H}_{x,\sigma}^G$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$h(g) = \int_{\text{Im } \{\pi\}_{x,\sigma}^G} d\pi \cdot h_\pi(g), \quad \forall g \in G(F_x),$$

où :

- pour tout $g \in G(F_x)$, la fonction

$$\{\pi\}_{x,\sigma}^G \ni \pi \mapsto h_\pi(g)$$

est une fonction régulière, élément de $A_{x,\sigma}^G$,

- pour toute $\pi \in \{\pi\}_{x,\sigma}^G$, la fonction

$$G(F_x) \ni g \mapsto h_\pi(g)$$

est un coefficient matriciel de π invariant à gauche et à droite par l'élément idempotent $\mathbb{I}_\sigma \in \mathcal{H}_x^K$.

□

Nous pouvons maintenant compléter le problème I.5 de définition de ρ -transformations de Fourier sur les groupes réductifs et le problème I.10 de définition d'espaces de ρ -fonctions en les places ultramétriques du corps global F :

Problème I.16. –

Considérons comme dans les problèmes I.5 et I.10 les triplets constitués de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ un groupe réductif quasi-déployé } G \text{ sur le corps global } F, \text{ muni d'une paire de Borel } (T, B), \\ \bullet \text{ une représentation de transfert au sens de la définition I.1} \\ \rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \widehat{\mathrm{GL}}_r = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}), \\ \bullet \text{ une famille de caractères algébriques} \\ \det_G, \quad \det_{M_P} = \det_G \cdot \det_P^{-1} : G \rightarrow \mathbb{G}_m \\ \text{indexés par les sous-groupes paraboliques standard } P \text{ de } G. \end{array} \right.$$

On suppose comme dans le problème I.10 que le caractère $\det_T : G \rightarrow \mathbb{G}_m$ correspond au cocaractère central $\widehat{\det}_T : \mathbb{C}^\times \rightarrow \widehat{G}$ de la définition I.1.

Enfin, on considère cette fois une place archimédienne x de F et un sous-groupe compact maximal K du groupe réductif réel ou complexe $G(F_x)$ tel que $G(F_x) = B(F_x) \cdot K$ et que, pour tout sous-groupe parabolique standard P de G , $M_P(F_x) \cap K$ est un sous-groupe compact maximal de $M_P(F_x)$.

On voudrait pouvoir associer à ces données, en plus d'un opérateur de ρ -transformation de Fourier sur $G(F_x)$

$$f \mapsto \widehat{f} = \left[g' \mapsto \int_{G(F_x)} dg \cdot f(g) \cdot k^\rho(g g') \right]$$

vérifiant les propriétés requises, un espace et un sous-espace de fonctions

$$G(F_x) \rightarrow \mathbb{C},$$

appelées les “ ρ -fonctions” et les “ ρ -fonctions spéciales”, qui satisfassent les conditions suivantes :

- (1) Les ρ -fonctions sont de carré intégrable pour la mesure dg (équivariante pour le caractère $|\det_G(\bullet)|_x$) et elles sont de classe C^∞ . Chaque ρ -fonction spéciale est invariante par convolution à droite ou à gauche par un élément idempotent $\mathbb{1}_\sigma \in \mathcal{H}_x^K$.
- (2) L'espace des ρ -fonctions spéciales est invariant par translation à droite ou à gauche par les éléments de K , par action des opérateurs différentiels invariants de $G(F_x)$, ainsi que par la ρ -transformation de Fourier $f \mapsto \widehat{f}$ et son inverse $f \mapsto \widehat{f}(-\bullet)$. L'espace des ρ -fonctions est invariant par ces opérateurs, par convolution à droite ou à gauche par les éléments de l'algèbre $\mathcal{H}_{x,K}^G \oplus \mathcal{H}_x^K$ et par translation à droite ou à gauche par les éléments arbitraires de $G(F_x)$. D'autre part, l'espace des ρ -fonctions spéciales (et donc aussi celui des ρ -fonctions) est dense dans l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur $G(F_x)$.
- (3) Pour toute $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^G$, les intégrales

$$\int_{G(F_x)} dg \cdot f(g) \cdot \varphi(g) \cdot |\det_T(g)|_x^{s-\frac{1}{2}} \cdot |\det_G(g)|_x^{-\frac{1}{2}}$$

associées aux ρ -fonctions

$$f : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

et aux coefficients matriciels de π

$$\varphi : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

convergent absolument, pour tout $s \in \mathbb{C}$ de partie réelle $\mathrm{Re}(s)$ assez grande, vers une fonction holomorphe de s qui admet un prolongement analytique à $\mathbb{C}$ tout entier.

De plus, si f décrit le sous-espace des ρ -fonctions spéciales et φ décrit l'espace des coefficients matriciels de π , ces fonctions analytiques de $s \in \mathbb{C}$ engendrent un module libre sur l'anneau $\mathbb{C}[s]$ des polynômes en s qui admet un unique générateur de la forme du produit d'une fonction exponentielle

$$s \mapsto e^{c \cdot s}, \quad \text{avec } c \in \mathbb{R},$$

et d'un "facteur eulérien" (en un sens qui sera précisé plus loin)

$$s \mapsto L_x(\rho, \pi, s) = L_x(\rho, \pi \otimes |\det_T(\bullet)|_x^s, 0)$$

tel que les fonctions

$$\{\pi\}_{x,\sigma}^G \ni \pi \mapsto L_x(\rho, \pi, 0)$$

soient méromorphes pour la structure de variété analytique complexe des $\{\pi\}_{x,\sigma}^G$.

Si f est une ρ -fonction et φ un coefficient matriciel de π , la fonction analytique de $s \in \mathbb{C}$ définie par l'intégrale ci-dessus est le produit du facteur eulérien

$$s \mapsto L_x(\rho, \pi, s)$$

et d'une fonction holomorphe de $s \in \mathbb{C}$.

(4) Pour toute ρ -fonction

$$f : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C},$$

ses restrictions aux images réciproques des parties compactes de $\mathbb{R}_+^\times$ par l'homomorphisme

$$|\det_T(\bullet)|_x : G(F_x) \rightarrow \mathbb{R}_+^\times$$

sont à décroissance rapide, et elle se décompose spectralement sous la forme

$$f(\bullet) = |\det_G(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\text{Im } \{\pi\}_{x,K}^G} d\pi \cdot f_\pi(\bullet) \cdot L_x\left(\rho, \pi^\vee, \frac{1}{2}\right)$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ pour toute } \pi \in \{\pi\}_{x,K}^G, \text{ la fonction} \\ \qquad G(F_x) \ni g \mapsto f_\pi(g) \\ \qquad \text{est un coefficient matriciel de } \pi \\ \bullet \text{ pour tout } g \in G(F_x) \text{ et tout } \sigma, \text{ la fonction} \\ \qquad \{\pi\}_{x,\sigma}^G \ni \pi \mapsto f_\pi(g) \\ \qquad \text{est une fonction holomorphe.} \end{array} \right.$$

De plus, il existe pour chaque $\{\pi\}_{x,\sigma}^G$ une unique structure de variété algébrique complexe affine telle que, pour n'importe quelle fonction $f : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$ qui satisfait les conditions ci-dessus, f est une ρ -fonction spéciale si et seulement si les fonctions holomorphes

$$\{\pi\}_{x,\sigma}^G \ni \pi \mapsto f_\pi(g), \quad g \in G(F_x),$$

sont éléments d'un certain module libre sur l'anneau des polynômes sur $\{\pi\}_{x,\sigma}^G$.

- (5) Il existe une famille (nécessairement unique) de fonctions holomorphes inversibles en les $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^G$ et $s \in \mathbb{C}$

$$\varepsilon_x(\rho, \pi, s) = \varepsilon_x(\rho, \pi \otimes |\det_T(\bullet)|_x^s, 0)$$

telles que, pour toute ρ -fonction f décomposée spectralement comme ci-dessus, on ait

$$\widehat{f}(\bullet) = |\det_G(\bullet)|_x^{-1} \cdot \int_{\text{Im}\{\pi\}_{x,K}^G} d\pi \cdot f_\pi((\bullet)^{-1}) \cdot L_x\left(\rho, \pi, \frac{1}{2}\right) \cdot \varepsilon_x\left(\rho, \pi, \frac{1}{2}\right).$$

- (6) Pour toute ρ -fonction [resp. ρ -fonction spéciale] sur $G(F_x)$

$$f : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

et pour tout sous-groupe parabolique standard P de G , la fonction

$$f_P : M_P(F_x) \ni m_P \mapsto |\det_P(m_P)|_x^{\frac{1}{2}} \cdot |\delta_P(m_P)|_x^{\frac{1}{2}} \cdot \int_{N_P(F_x)} du_P \cdot f(m_P u_P)$$

est une ρ_{M_P} -fonction [resp. ρ_{M_P} -fonction spéciale] sur $M_P(F_x)$.

En particulier, la fonction

$$f_B : T(F_x) \ni t \mapsto |\det_B(t)|_x^{\frac{1}{2}} \cdot |\delta_B(t)|_x^{\frac{1}{2}} \cdot \int_{N_B(F_x)} du_B \cdot f(t u_B)$$

est une ρ_T -fonction [resp. ρ_T -fonction spéciale] sur $T(F_x)$.

- (7) Réciproquement, si une fonction invariante par convolution à droite et à gauche par un élément idempotent $\mathbb{I}_\sigma \in \mathcal{H}_x^K$

$$f : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

admet une décomposition spectrale qui ne fait apparaître que des représentations $\pi \in \text{Im}\{\pi\}_{x,K}^G$ induites normalisées de représentations $\pi_P \in \text{Im}\{\pi\}_{x,K \cap M_P(F_x)}^{M_P}$, alors f est une ρ -fonction [resp. ρ -fonction spéciale] si les

$$({}^k f^{k'})_P : M_P(F_x) \rightarrow \mathbb{C}, \quad k, k' \in K,$$

sont toutes des ρ_{M_P} -fonctions [resp. ρ_{M_P} -fonctions spéciales] sur $M_P(F_x)$.

- (8) Les facteurs $L_x(\rho, \pi, s)$ et $\varepsilon_x(\rho, \pi, s)$, $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^G$, ne dépendent pas du choix des caractères $\det_G$ et $\det_{M_P} = \det_G \cdot \det_P^{-1}$.

Remarques :

- (i) D'après les conditions (3) et (4), la connaissance de l'espace des ρ -fonctions spéciales sur $G(F_x)$ équivaut à celle des facteurs

$$L_x(\rho, \pi, s), \quad \pi \in \{\pi\}_{x,K}^G.$$

- (ii) Une possibilité serait de définir l'espace des ρ -fonctions comme le plus petit espace qui contient les ρ -fonctions spéciales et qui est stable par

- les translations (à gauche et à droite) par les éléments de $G(F_x)$,
- les opérateurs différentiels invariants,
- les convolutions par les éléments de l'algèbre $\mathcal{H}_{x,K}^G \oplus \mathcal{H}_x^K$,
- la ρ -transformation de Fourier $f \mapsto \widehat{f}$ et son inverse $f \mapsto \widehat{f}(-\bullet)$,
- d'autres opérateurs unitaires ou bornés qui restent à préciser.

- (iii) D'après la condition (5), la connaissance de l'action de l'opérateur de ρ -transformation de Fourier $f \mapsto \widehat{f}$ sur l'espace des ρ -fonctions spéciales, celui des ρ -fonctions ou celui des fonctions de carré intégrable sur $G(F_x)$ équivaut à la connaissance des facteurs

$$\gamma_x(\rho, \pi, s) = \frac{L_x(\rho, \pi, s) \cdot \varepsilon_x(\rho, \pi, s)}{L_x(\rho, \pi^\vee, 1-s)}.$$

- (iv) La propriété d'unitarité de l'opérateur de ρ -transformation de Fourier $f \mapsto \widehat{f}$ doit s'exprimer par le fait que, pour toute représentation unitaire tempérée $\pi \in \text{Im} \{\pi\}_{x,K}^G$, les facteurs

$$L_x\left(\rho, \pi^\vee, \frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad L_x\left(\rho, \pi, \frac{1}{2}\right)$$

sont conjugués l'un de l'autre, tandis que les facteurs

$$\varepsilon_x\left(\rho, \pi^\vee, \frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad \varepsilon_x\left(\rho, \pi, \frac{1}{2}\right)$$

sont liés par la formule

$$\varepsilon_x\left(\rho, \pi^\vee, \frac{1}{2}\right) \cdot \overline{\varepsilon_x\left(\rho, \pi, \frac{1}{2}\right)} = 1.$$

- (v) D'après les conditions (6) et (7), on a pour toute représentation $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^G$ qui est l'induite normalisée d'une représentation $\pi_P \in \{\pi\}_{x,K \cap M_P(F_x)}^{M_P}$ les égalités

$$L_x(\rho, \pi, s) = L_x(\rho_{M_P}, \pi_P, s),$$

$$L_x(\rho, \pi^\vee, s) = L_x(\rho_{M_P}, \pi_P^\vee, s).$$

Comme l'opérateur $f \mapsto f_P$ transforme la ρ -transformation de Fourier sur $G(F_x)$ en la ρ_{M_P} -transformation de Fourier sur $M_P(F_x)$, on doit aussi avoir

$$\varepsilon_x(\rho, \pi, s) = \varepsilon_x(\rho_{M_P}, \pi_P, s),$$

ou

$$\gamma_x(\rho, \pi, s) = \gamma_x(\rho_{M_P}, \pi_P, s).$$

- (vi) La condition mise sur les restrictions des ρ -fonctions aux images réciproques par $|\det_T(\bullet)|_x : G(F_x) \rightarrow \mathbb{R}_+^\times$ des parties compactes de $\mathbb{R}_+^\times$ impose que les facteurs

$$\gamma_x(\rho, \pi, s)$$

ne dépendent que des supports supercuspidaux des représentations $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^G$.

Autrement dit, pour toute représentation $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^G$ qui est un sous-quotient d'une représentation $\pi_P \in \{\pi\}_{x,K \cap M_P(F_x)}^{M_P}$, on doit avoir

$$\gamma_x(\rho, \pi, s) = \gamma_x(\rho_{M_P}, \pi_P, s).$$

□

Rappelons le théorème suivant :

Théorème I.17. –

Considérons comme dans l'énoncé du problème I.16 un groupe réductif quasi-déployé G sur le corps global F , une paire de Borel (T, B) de G , une place archimédienne x de F et un sous-groupe compact maximal K du groupe réductif réel ou complexe $G(F_x)$ tel que $G(F_x) = B(F_x) \cdot K$ et que $T(F_x) \cap K$ est le sous-groupe compact maximal de $T(F_x)$.

Alors toute représentation admissible irréductible $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^G$ est un sous-quotient de l'induite normalisée d'une représentation admissible irréductible, c'est-à-dire d'un caractère, $\chi \in \{\pi\}_{x,T(F_x) \cap K}^T$.

De plus, si $F_x \cong \mathbb{C}$, toute représentation unitaire tempérée $\pi \in \text{Im} \{\pi\}_{x,K}^G$ est l'induite normalisée d'un caractère unitaire $\chi \in \text{Im} \{\pi\}_x^T$.

□

On déduit aussitôt de ce théorème :

Corollaire I.18. –

Dans les conditions du problème I.16, les facteurs

$$\gamma_x(\rho, \pi, s) = L_x(\rho, \pi, s) \cdot \varepsilon_x(\rho, \pi, s) \cdot L_x(\rho, \pi^\vee, 1-s)^{-1}$$

associés aux représentations $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^G$ sont entièrement déterminés par les facteurs

$$\gamma_x(\rho_T, \chi, s) = L_x(\rho_T, \chi, s) \cdot \varepsilon_x(\rho_T, \chi, s) \cdot L_x(\rho_T, \chi^\vee, 1-s)^{-1}$$

associés aux caractères $\chi \in \{\pi\}_{x,T(F_x) \cap K}^T$.

Autrement dit, l'opérateur de ρ -transformation de Fourier cherché sur le groupe réductif réel ou complexe $G(F_x)$

$$f \mapsto \hat{f}$$

est entièrement déterminé par l'opérateur de ρ_T -transformation de Fourier sur le tore réel ou complexe $T(F_x)$ associé à la représentation de transfert

$$\rho_T : \hat{T} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \widehat{\text{GL}}_r = \text{GL}_r(\mathbb{C})$$

qui induit l'homomorphisme de tores complexes

$$\rho_T : \hat{T} \rightarrow \hat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r.$$

De plus, si $F_x \cong \mathbb{C}$, l'espace des ρ -fonctions [resp. ρ -fonctions spéciales] sur $G(F_x)$ est entièrement déterminé par l'espace des ρ_T -fonctions [resp. ρ_T -fonctions spéciales] sur $T(F_x)$.

5 Formule de Poisson

On considère toujours un groupe réductif quasi-déployé G sur un corps global F , muni d'une paire de Borel (T, B) et de

- une représentation de transfert au sens de la définition I.1

$$\rho : \hat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \widehat{\text{GL}}_r = \text{GL}_r(\mathbb{C}),$$

- une famille de caractères algébriques définis sur F indexés par les sous-groupes paraboliques standard P de G

$$\det_G, \det_{M_P} = \det_G \cdot \det_P^{-1} : G \rightarrow \mathbb{G}_m$$

tels que le caractère $\det_T : G \rightarrow \mathbb{G}_m$ corresponde au cocaractère central $\widehat{\det}_T : \mathbb{C}^\times \rightarrow \hat{G}$ de la définition I.1.

En chaque place archimédienne x de F , on choisit un sous-groupe compact maximal K_x de $G(F_x)$ tel que $G(F_x) = B(F_x) \cdot K_x$ et que, pour tout sous-groupe parabolique standard P de G , $M_P(F_x) \cap K_x$ soit un sous-groupe compact maximal de $M_P(F_x)$.

Dans ce paragraphe, on suppose résolu le problème I.5 de définition d'un opérateur de ρ -transformation de Fourier sur $G(F_x)$ en chaque place $x \in |F|$ et les problèmes I.10 et I.16 de définition de sous-espaces de ρ -fonctions sur $G(F_x)$ en les places x .

On rappelle que G et ρ sont non ramifiés en presque toute place ultramétrique x . Si G est non ramifié en une telle place x , les fonctions sur $G(F_x)$ invariantes à gauche et à droite par $G(O_x)$ sont appelées "sphériques", et l'ensemble des caractères de l'algèbre commutative $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$ des fonctions sphériques à support compact est noté $\{\pi\}_{x,\emptyset}^G$.

Définition I.19. –

Dans les conditions ci-dessus, on pose :

- (i) *En toute place ultramétrique $x \in |F|$ où G et ρ sont non ramifiés, on appelle " ρ -fonction standard" (ou "spéciale") la fonction sphérique*

$$G(O_x) \backslash G(F_x) / G(O_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

définie par la décomposition spectrale

$$|\det_G(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\text{Im } \{\pi\}_{x,\emptyset}^G} d\pi \cdot \varphi_{x,\pi}(\bullet) \cdot L_x\left(\rho, \pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

où, pour tout $\pi \in \{\pi\}_{x,\emptyset}^G$, $\varphi_{x,\pi}(\bullet)$ désigne l'unique coefficient matriciel de π qui est sphérique et vérifie $\varphi_{x,\pi}(1) = 1$.

- (ii) *On appellera ρ -fonctions (globales) sur $G(\mathbb{A})$ les combinaisons linéaires de produits*

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

de ρ -fonctions locales

$$f_x : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

égales aux " ρ -fonctions standard" de (i) en presque toute place ultramétrique x où G et ρ sont non ramifiés.

- (iii) *On appellera ρ -transformation de Fourier des ρ -fonctions globales sur $G(\mathbb{A})$ l'opérateur linéaire qui associe à toute ρ -fonction produit*

$$f = \bigotimes_{x \in |F|} f_x$$

le produit des ρ -transformées de Fourier locales

$$\widehat{f} = \bigotimes_{x \in |F|} \widehat{f}_x.$$

Remarques :

- (i) Il résulte de la condition (8) du problème I.10 que l'on doit avoir, en presque toute place ultramétrique x de F où G et ρ sont non ramifiés, la propriété

$$\varepsilon_x(\rho, \pi, Z) = 1, \quad \forall \pi \in \{\pi\}_{x, \emptyset}^G,$$

qui entraîne que la ρ -fonction standard sur $G(F_x)$ est sa propre ρ -transformée de Fourier.

Par conséquent, la ρ -transformée de Fourier d'une ρ -fonction globale sur $G(\mathbb{A})$ est encore une ρ -fonction globale.

- (ii) Choisissons une mesure dg sur $G(\mathbb{A})$ qui se transforme suivant le caractère $|\det_G(\bullet)|$ où $|\bullet|$ désigne la norme globale de $\mathbb{A}^\times$

$$|\bullet| = \prod_{x \in |F|} |\bullet|_x : \mathbb{A}^\times \rightarrow \mathbb{A}^\times / F^\times \rightarrow \mathbb{R}_+^\times.$$

La mesure globale dg sur $G(\mathbb{A})$ s'écrit comme un produit de mesures locales dg_x sur les $G(F_x)$ qui se transforment chacune suivant le caractère $|\det_G(\bullet)|_x$.

Comme chaque opérateur de ρ -transformation de Fourier locale sur $G(F_x)$ s'écrit sous la forme

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x(\bullet) = \int_{G(F_x)} dg_x \cdot f_x(g_x) \cdot k_x^\rho(g_x \bullet)$$

pour une certaine fonction localement intégrable invariante par conjugaison

$$k_x^\rho : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C},$$

l'opérateur produit de ρ -transformation de Fourier globale sur $G(\mathbb{A})$ s'écrit sous la forme

$$f \mapsto \widehat{f}(\bullet) = \int_{G(\mathbb{A})} dg \cdot f(g) \cdot k^\rho(g \bullet)$$

où $k^\rho : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ désigne la fonction produit

$$k^\rho = \prod_{x \in |F|} k_x^\rho$$

qui est localement intégrable et invariante par conjugaison.

- (iii) Comme les opérateurs locaux $f_x \mapsto \widehat{f}_x$ sont unitaires et admettent pour inverses les opérateurs $f_x \mapsto \widehat{f}_x(-\bullet)$, l'opérateur de ρ -transformation de Fourier globale sur $G(\mathbb{A})$

$$f \mapsto \widehat{f}$$

est unitaire, c'est-à-dire respecte le produit hermitien

$$(f_1, f_2) \mapsto \int_{G(\mathbb{A})} dg \cdot f_1(g) \cdot \overline{f_2(g)},$$

et il admet pour inverse l'opérateur

$$f \mapsto \widehat{f}(-\bullet).$$

□

Pour énoncer une formule de Poisson susceptible d'être vérifiée par la ρ -transformation de Fourier globale sur $G(\mathbb{A})$, nous avons besoin d'introduire une nouvelle notation :

Définition I.20. –

Soit x une place ultramétrique de F en laquelle le groupe réductif G et la représentation de transfert ρ sont non ramifiés.

Soit une ρ -fonction sur $G(F_x)$

$$f_x : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

qui est sphérique et dont la décomposition spectrale s'écrit

$$f_x(\bullet) = |\det_G(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\text{Im}\{\pi\}_{x,\emptyset}^G} d\pi \cdot f_{x,\pi}(\bullet) \cdot L_x\left(\rho, \pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Alors, pour tous entiers $N, N' \in \mathbb{N}$, on note

$$f_x^{N,N'} : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

la ρ -fonction sphérique sur $G(F_x)$ définie par l'expression spectrale

$$f_x^{N,N'}(\bullet) = |\det_G(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\text{Im}\{\pi\}_{x,\emptyset}^G} d\pi \cdot f_{x,\pi}(\bullet) \cdot L_x\left(\rho, \pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_x^N\left(\rho, \pi, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_x^{N'}\left(\rho, \pi^\vee, q_x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

où $I_x^N(\rho, \pi, Z)$ désigne le polynôme en Z et π produit de

$$L_x(\rho, \pi, Z)^{-1}$$

et du monôme de degré N en Z qui apparaît dans le développement en série formelle en Z de l'inverse

$$L_x(\rho, \pi, Z).$$

Remarques :

- (i) Comme le polynôme $L_x(\rho, \pi, Z)^{-1}$ divise les $I_x^N(\rho, \pi, Z)$ par construction, les fonctions $f_x^{N,N'}$, $N, N' \in \mathbb{N}$, et leurs ρ -transformées de Fourier $\widehat{f_x^{N,N'}}$ sont éléments de l'algèbre $\mathcal{H}_{x,\emptyset}^G$. Autrement dit, elles sont supportées par des parties compactes de $G(F_x)$.
- (ii) Pour toute $\pi \in \{\pi\}_{x,\emptyset}^G$, on a l'égalité

$$\sum_{N \in \mathbb{N}} I_x^N(\rho, \pi, Z) = 1$$

dans l'anneau des séries formelles en Z . De plus, les sommes

$$\sum_{N \geq N_0} \left| I_x^N\left(\rho, \pi, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \right|$$

convergent uniformément vers 0 si $\pi \in \text{Im}\{\pi\}_{x,\emptyset}^G$ et N_0 devient arbitrairement grand.

Il en résulte que, pour tout $g \in G(F_x)$, on a

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} f_x^{N,N'}(g) = f_x(g).$$

□

Pour tout élément $z_0 \in \mathbb{C}$, toute fraction rationnelle à coefficients complexes $R \in \mathbb{C}(Z)$ [resp. toute fonction analytique de $Z \in \mathbb{C}$] s'écrit de manière unique sous la forme

$$R = R_0 + \sum_{1 \leq i \leq k} \frac{a_i}{(Z - z_0)^i}$$

où les a_i , $1 \leq i \leq k$, sont des constantes et R_0 est une fraction rationnelle en Z dont le dénominateur ne s'annule pas en z_0 [resp. R_0 est une fonction analytique de $Z \in \mathbb{C}$ qui est holomorphe au voisinage de z_0]. On peut appeler $R_0(z_0)$ la “valeur régularisée” de R au point z_0 .

Cela permet de proposer l'énoncé suivant de formule de Poisson pour la ρ -transformation de Fourier globale sur $G(\mathbb{A})$:

Problème I.21. –

On considère comme ci-dessus un groupe réductif quasi-déployé G sur le corps global F , muni d'une paire de Borel (T, B) et de

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ une représentation de transfert au sens de la définition I.1} \\ \rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \widehat{\mathrm{GL}}_r = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}), \\ \bullet \text{ une famille de caractères algébriques définis sur } F \text{ indexés par les sous-groupes} \\ \text{paraboliques standard } P \text{ de } G \\ \det_G, \quad \det_{M_P} = \det_G \cdot \det_P^{-1} : G \rightarrow \mathbb{G}_m \\ \text{tels que le caractère } \det_T : G \rightarrow \mathbb{G}_m \text{ corresponde au cocaractère } \widehat{\det}_T : \mathbb{C}^\times \rightarrow \widehat{G} \\ \text{de la définition I.1.} \end{array} \right.$$

Supposant résolus les problèmes I.5, I.10 et I.16 de définition d'opérateurs de ρ -transformation de Fourier et de sous-espaces de ρ -fonctions sur les $G(F_x)$, $x \in |F|$, on voudrait que pour toute ρ -fonction globale

$$f : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C},$$

on ait :

(1) Pour toute place ultramétrique $x \in |F|$ en laquelle G et ρ sont non ramifiés et f se factorise en

$$f = f_x \otimes f^x,$$

avec pour facteur une ρ -fonction sphérique sur $G(F_x)$

$$f_x : G(O_x) \backslash G(F_x) / G(O_x) \rightarrow \mathbb{C},$$

alors, si F est un corps de fonctions [resp. un corps de nombres], la série formelle

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} (f_x^{N, N'} \otimes f^x)(\gamma)$$

est une fraction rationnelle en Z [resp. une fonction analytique de $Z \in \mathbb{C}$] dont la “valeur régularisée en $Z = 1$ ”, notée $S(f)$, ne dépend pas du choix de la place x .

(2) Les fonctions f et $\widehat{f}$ sont reliées par la formule de Poisson

$$S(f) = S(\widehat{f})$$

qui s'écrit encore

$$\left\langle \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} f(\gamma) \right\rangle = \left\langle \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} \widehat{f}(\gamma) \right\rangle$$

en notant

$$\left\langle \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} f(\gamma) \right\rangle = \left(\sum_{\gamma \in G(F)} f(\gamma) \right) + \left(\sum_{\gamma \in G(F)} \widehat{f}(\gamma) \right) - S(f).$$

(3) La fonction f satisfait l'égalité

$$\left\langle \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} f(\gamma) \right\rangle = \sum_{\gamma \in G(F)} f(\gamma)$$

si f se factorise en au moins une place x sous la forme

$$f = f_x \otimes f^x,$$

avec pour facteur une ρ -fonction locale

$$f_x : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

qui est supportée par une partie compacte de $G(F_x)$.

Remarque :

En toute place ultramétrique x de F , pour tout sous-groupe ouvert compact $K \subset G(F_x)$ et pour tout caractère continu unitaire

$$\omega : F_x^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

assez ramifié en fonction de K , on s'attend à ce que

$$L_x(\rho, \pi', Z) = 1$$

pour toute représentation $\pi' \in \{\pi\}_x^G$ de la forme

$$\pi' = \pi \otimes (\omega \circ \det_T(\bullet)), \quad \text{avec } \pi \in \{\pi\}_{x,K}^G.$$

Cela implique que toute ρ -fonction sur $G(F_x)$

$$f_x : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

dont la décomposition spectrale ne fait apparaître que des représentations de la forme ci-dessus $\pi' = \pi \otimes (\omega \circ \det_T(\bullet))$, $\pi \in \{\pi\}_{x,K}^G$, est supportée par une partie compacte de $G(F_x)$, ainsi que sa ρ -transformée de Fourier $\widehat{f}_x$.

Pour toute ρ -fonction globale qui admet en facteur en au moins une place ultramétrique une telle f_x

$$f = f_x \otimes f^x,$$

la formule de Poisson doit donc s'écrire

$$\sum_{\gamma \in G(F)} f(\gamma) = \sum_{\gamma \in G(F)} \widehat{f}(\gamma).$$

Exemple :

Si $G = \mathrm{GL}_r$ et ρ est la représentation standard de $\widehat{G} = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, la ψ_x -transformation de Fourier linéaire définie en toute place x par

$$k_x^\rho(g) = \psi_x(\mathrm{Tr}(g)), \quad g \in \mathrm{GL}_r(F_x) \subset M_r(F_x),$$

et par la mesure additive autoduale dg_x de $M_r(F_x) \supset \mathrm{GL}_r(F_x)$ répond aux conditions du problème I.5.

De plus, en toute place ultramétrique x de F , définir l'espace des ρ -fonctions sur $\mathrm{GL}_r(F_x)$ comme celui des fonctions localement constantes à support compact sur $M_r(F_x) \supset \mathrm{GL}_r(F_x)$ satisfait toutes les conditions du problème I.10.

On a vérifié dans le paragraphe V de l'article [Lafforgue, 2016] que, si F est un corps de fonctions, toutes les conditions du problème I.21 ci-dessus sont également remplies. Dans ce cas, les ρ -fonctions globales sur $G(\mathbb{A})$ sont les restrictions des fonctions localement constantes à support compact sur $M_r(\mathbb{A})$

$$f : \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}) \subset M_r(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

et elles satisfont l'identité

$$\left(\sum_{\gamma \in \widehat{G}(F)} f(\gamma) \right) = \sum_{\gamma \in M_r(F)} f(\gamma).$$

□

De plus, on a vérifié au paragraphe X de l'article [Lafforgue, 2016] :

Théorème I.22. –

Supposons que F est un corps de fonctions, si bien que le transfert automorphe de Langlands global et local de G vers GL_r via la représentation de transfert $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ est connu.

Alors ce transfert automorphe fournit une réponse positive aux problèmes I.5, I.10 et I.21.

□

Pour formuler une réciproque, on a besoin de la définition suivante :

Définition I.23. –

Pour tout entier $r' \geq 1$, on appellera “groupe croisé de degré r' de G ”, noté $G_{r'}$, le groupe réductif quasi-déployé sur F défini par le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} G_{r'} & \longrightarrow & \mathrm{GL}_{r'} \\ \downarrow & & \downarrow \det \\ G & \xrightarrow{\det_T} & \mathbb{G}_m \end{array}$$

et dont le dual $\widehat{G}_{r'}$ s'identifie au conoyau du cocaractère central

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^\times &\rightarrow \widehat{G} \times \mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{C}) \\ z &\mapsto \left(\widehat{\det}_T(z), z^{-1} \right). \end{aligned}$$

Si G est muni de la représentation de transfert

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}),$$

on note

$$\rho_{r'} : \widehat{G}_{r'} \rtimes \Gamma_F = \left[(\widehat{G} \rtimes \Gamma_F) \times \mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{C}) \right] / \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathrm{GL}_{rr'}(\mathbb{C})$$

la représentation de transfert déduite de ρ par produit tensoriel avec l'identité de $\mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned} \left[(\widehat{G} \rtimes \Gamma_F) \times \mathrm{GL}_{r'}(\mathbb{C}) \right] / \mathbb{C}^\times &\rightarrow \mathrm{GL}_{rr'}(\mathbb{C}), \\ ((g, \sigma), g') &\mapsto \rho(g, \sigma) \otimes g'. \end{aligned}$$

□

Les “théorèmes réciproques” de l'article [Cogdell, Piatetski-Shapiro, 1994], ou bien la construction plus directe et un peu plus fine de “noyaux du transfert” (voir la prépublication [Lafforgue, 2012] et l'article [Lafforgue, 2014]) permettent de prouver :

Théorème I.24. –

Dans les conditions du problème I.21 ci-dessus, une solution des problèmes I.5, I.10, I.16 et I.21 pour le groupe croisé G_{r-1} de degré $r-1$ et la représentation de transfert induite

$$\rho_{r-1} : \widehat{G}_{r-1} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \widehat{\mathrm{GL}}_{r(r-1)} = \mathrm{GL}_{r(r-1)}(\mathbb{C})$$

impliquerait le transfert automorphe de Langlands global et local de G à GL_r via ρ .

□

Chapitre II.

Le cas des tores

1 Opérateurs de transformation de Fourier quotients sur les tores

On considère dans tout ce chapitre un tore T quasi-déployé sur le corps global F et une représentation de transfert ρ_T de T régulière au sens de la définition I.1

$$\rho_T : \widehat{T} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \widehat{\mathrm{GL}}_r = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}).$$

Ainsi, ρ_T induit un homomorphisme injectif

$$\rho_T : \widehat{T} \hookrightarrow \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r$$

et T est muni d'un caractère défini sur F

$$\det_T : T \rightarrow \mathbb{G}_m$$

qui correspond à un cocaractère $\widehat{\det}_T : \mathbb{C}^\times \rightarrow \widehat{T}$ dont le composé avec ρ_T est le plongement diagonal

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^\times &\hookrightarrow (\mathbb{C}^\times)^r = \widehat{T}_r \\ z &\mapsto (z, z, \dots, z). \end{aligned}$$

De plus, l'action de Γ_F sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de la représentation ρ_T se fait par permutation des vecteurs de sa base canonique. L'action induite de Γ_F sur $\{1, 2, \dots, r\}$ définit une F -algèbre E séparable de degré r .

D'après la remarque (ii) de la définition I.1, le tore $T_E = \mathrm{Res}_{E/F} \mathbb{G}_m$ admet pour dual $\widehat{T}_E = (\mathbb{C}^\times)^r$ muni de l'action de Γ_F par permutation, si bien que l'homomorphisme Γ_F -équivariant

$$\rho_T : \widehat{T} \rightarrow (\mathbb{C}^\times)^r = \widehat{T}_E$$

est dual d'un homomorphisme de tores sur F

$$\rho_T^\vee : T_E \rightarrow T$$

qui s'inscrit dans une suite exacte de tores sur F

$$1 \rightarrow T_\rho \rightarrow T_E \rightarrow T \rightarrow 1.$$

Le noyau T_ρ de $\rho_T^\vee$ admet pour tore dual le conoyau de

$$\rho_T : \widehat{T} \hookrightarrow \widehat{T}_E.$$

Enfin, on a :

Lemme II.1. –

Dans la situation d'une représentation de transfert régulière

$$\rho_T : \widehat{T} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \widehat{\mathrm{GL}}_r = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

d'un tore T quasi-déployé sur F , et avec les notations rappelées ci-dessus, le caractère composé

$$\det_E : T_E \xrightarrow{\rho_T^\vee} T \xrightarrow{\det} \mathbb{G}_m$$

du caractère $\det_T$ de T et de l'homomorphisme dual $\rho_T^\vee$ n'est autre que le caractère de norme

$$\det_E = \mathrm{Nm} : T_E \rightarrow \mathbb{G}_m,$$

c'est-à-dire le déterminant de l'action de T_E sur l'espace linéaire

$$\overline{T}_E = \mathrm{Res}_{E/F} \mathbb{A}^1.$$

En particulier, la restriction de ce déterminant $\det_E = \mathrm{Nm}$ au noyau

$$T_\rho = \mathrm{Ker}(\rho_T^\vee : T_E \rightarrow T)$$

est triviale.

Remarque :

Si T est déployé sur F et l'action de Γ_F sur l'espace $\mathbb{C}^r$ de ρ_T est triviale, on a $T_E = \mathbb{G}_m^r$, le noyau T_ρ est un tore déployé sur F comme T et T_E , et le caractère

$$\det_E = \mathrm{Nm} : T_E = \mathbb{G}_m^r \rightarrow \mathbb{G}_m$$

est simplement

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) \mapsto \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r.$$

□

L'espace linéaire $\overline{T}_E = \mathrm{Res}_{E/F} \mathbb{A}^1$ est muni du morphisme F -linéaire

$$\mathrm{Tr} : \overline{T}_E = \mathrm{Res}_{E/F} \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^1$$

qui, pour toute F -algèbre A , associe à tout élément $a \in \overline{T}_E(A) = E \otimes_F A$ sa trace comme endomorphisme du A -module $E \otimes_F A$ libre de rang r .

En particulier, pour toute place x de F , le F_x -espace vectoriel $\overline{T}_E(F_x) = E \otimes_F F_x = E_x$, qui est de dimension r , est muni de la forme linéaire

$$\mathrm{Tr} : \overline{T}_E(F_x) \rightarrow F_x.$$

En composant celle-ci avec la composante locale en x

$$\psi_x : F_x \rightarrow S_1 = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| = 1\}$$

du caractère additif continu unitaire non trivial

$$\psi : \mathbb{A}/F \rightarrow S_1,$$

on définit une fonction

$$\begin{aligned} k_x^E : T_E(F_x) = E_x^\times \subset E_x = \overline{T}_E(F_x) &\rightarrow S_1 \\ t_x &\mapsto \psi_x(\text{Tr}(t_x)) \end{aligned}$$

qui est localement constante si x est ultramétrique et de classe C^∞ si x est archimédienne.

On connaît l'existence et les propriétés de la ψ_x -transformation de Fourier linéaire sur $\overline{T}_E(F_x) = E_x \supset E_x^\times = T_E(F_x)$:

Théorème II.2. –

- (i) *Pour toute place $x \in |F|$, il existe sur $\overline{T}_E(F_x) \supset T_E(F_x)$ une unique mesure additive dt_E , dite la “mesure autoduale”, telle que la ψ_x -transformation de Fourier sur $T_E(F_x)$*

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x(\bullet) = \int_{T_E(F_x)} dt_E \cdot f_x(t_E) \cdot k_x^E(t_E \bullet)$$

définisse un opérateur unitaire, c'est-à-dire qui respecte le produit hermitien

$$(f_1, f_2) \mapsto \langle f_1, f_2 \rangle = \int_{T_E(F_x)} dt_E \cdot f_1(t_E) \cdot \overline{f_2(t_E)},$$

et dont l'opérateur inverse est

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x(-\bullet) = \int_{T_E(F_x)} dt_E \cdot f_x(t_E) \cdot \overline{k_x^E(t_E \bullet)}.$$

- (ii) *Si x est une place ultramétrique [resp. archimédienne], cet opérateur induit un automorphisme de l'espace des fonctions localement constantes à support compact [resp. C^∞ à décroissance rapide] sur $\overline{T}_E(F_x) = E_x$.*

Remarque :

Les mesures additives sur $\overline{T}_E(F_x) \supset T_E(F_x)$ sont transformées par les translations multiplicatives suivant le caractère de norme

$$|\det_E(\bullet)|_x : T_E(F_x) \rightarrow F_x^\times \rightarrow \mathbb{R}_+^\times.$$

Par conséquent, on a pour toute fonction f_x sur $T_E(F_x) \subset \overline{T}_E(F_x)$ de carré intégrable et pour tout élément $t \in T_E(F_x)$

$$\widehat{f}_x^t = |\det_E(t)|_x^{-1} \cdot \widehat{f}_x^{t^{-1}}.$$

En particulier, si $t \in T_\rho(F_x)$, on a

$$\widehat{f}_x^t = \widehat{f}_x^{t^{-1}}.$$

□

Revenant à la représentation de transfert ρ_T du dual $\widehat{T}$ de T et à la suite exacte induite

$$1 \rightarrow T_\rho \rightarrow T_E \xrightarrow{\rho_T^\vee} T \rightarrow 1,$$

les tores locaux $T(F_x)$ et $T_E(F_x)$ en chaque place sont reliés de la manière suivante :

Lemme II.3. –

En toute place $x \in |F|$, on a :

(i) *La suite exacte de tores algébriques sur F*

$$1 \rightarrow T_\rho \rightarrow T_E \xrightarrow{\rho_T^\vee} T \rightarrow 1$$

induit un homomorphisme continu

$$T_E(F_x) \rightarrow T(F_x)$$

dont le noyau est $T_\rho(F_x)$ et dont l'image est un sous-groupe ouvert de $T(F_x)$.

(ii) *Si l'on munit $T_\rho(F_x)$ d'une mesure invariante dt_ρ , il existe sur $T(F_x)$ une unique mesure dt qui se transforme par translation suivant le caractère*

$$|\det_T(\bullet)|_x$$

et dont la restriction à l'image de $T_E(F_x) \rightarrow T(F_x)$ est le quotient de la mesure autoduale de $T_E(F_x)$ par la mesure invariante dt_ρ de $T_\rho(F_x)$.

□

Pour toute fonction $f_x : T_E(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$, on peut noter

$$\begin{aligned} (\rho_T^\vee)_*(f_x) : T(F_x) &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(t)} dt_\rho \cdot f_x(t_\rho) \end{aligned}$$

quand cette intégrale est bien définie en presque tout $t \in T(F_x)$. Toutes les fonctions $(\rho_T^\vee)_*(f_x)$ sur $T(F_x)$ construites par ce procédé sont supportées par le sous-groupe ouvert image de l'homomorphisme $\rho_T^\vee : T_E(F_x) \rightarrow T(F_x)$.

On remarque que si x est une place ultramétrique [resp. archimédienne] et $f_x : \bar{T}_E(F_x) = E_x \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction localement constante à support compact [resp. C^∞ à décroissance rapide], alors la fonction image

$$(\rho_T^\vee)_*(f_x) : T(F_x) \ni t \mapsto \int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(t)} dt_\rho \cdot f_x(t_\rho)$$

est partout bien définie et invariante par un sous-groupe ouvert de $T(F_x)$ [resp. de classe C^∞].

On déduit du théorème II.2, du lemme II.3 et de cette remarque :

Corollaire II.4. –

Soit x une place ultramétrique [resp. archimédienne] de F .

Alors :

(i) *Il existe un unique opérateur sur $T(F_x)$*

$$\varphi_x \mapsto \widehat{\varphi}_x,$$

dit de ρ_T -transformation de Fourier, tel que :

- *cet opérateur est unitaire c'est-à-dire respecte le produit hermitien*

$$(\varphi_1, \varphi_2) \mapsto \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \int_{T(F_x)} dt \cdot \varphi_1(t) \cdot \overline{\varphi_2(t)},$$

- *cet opérateur est équivariant au sens que pour toute fonction φ_x sur $T(F_x)$ et tout élément $t \in T(F_x)$, on a*

$$\widehat{\varphi_x^t} = |\det_T(t)|_x^{-1} \cdot \widehat{\varphi_x}^{t^{-1}},$$

- pour toute fonction $f_x : \overline{T}_E(F_x) = E_x \rightarrow \mathbb{C}$ qui est localement constante à support compact [resp. C^∞ à décroissance rapide], on a

$$(\widehat{\rho_T^\vee})_*(f_x) = (\rho_T^\vee)_*(\widehat{f_x}).$$

(ii) Cet opérateur $\varphi_x \mapsto \widehat{\varphi}_x$ sur $T(F_x)$ admet pour inverse

$$\varphi_x \mapsto \widehat{\varphi}_x(-\bullet).$$

□

Ce corollaire est complété par le lemme suivant :

Lemme II.5. –

Si x est une place ultramétrique [resp. archimédienne] de F , considérons n'importe quelle fonction localement constante à support compact [resp. de classe C^∞ à décroissance rapide]

$$\mathbb{I}_x : T_E(F_x) = E_x \rightarrow \mathbb{C}$$

qui est égale à 1 au voisinage de l'élément $0 \in E_x$.

Alors :

(i) Il existe un ouvert dense de $T(F_x)$ tel que la limite

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(t)} dt_\rho \cdot k_x^E(t_\rho) \cdot \mathbb{I}_x(a \cdot t_\rho) = k_x^{\rho_T}(t), \quad t \in T(F_x),$$

converge uniformément sur toute partie compacte de cet ouvert, définissant une fonction

$$t \mapsto k_x^{\rho_T}(t)$$

qui est continue sur cet ouvert et ne dépend pas du choix de la fonction $\mathbb{I}_x$.

(ii) La fonction définie presque partout

$$t \mapsto k_x^{\rho_T}(t)$$

est localement intégrable et on a pour toute fonction continue à support compact φ_x sur $T(F_x)$

$$\widehat{\varphi}_x(\bullet) = \int_{T(F_x)} dt \cdot k_x^{\rho_T}(\bullet t) \cdot \varphi_x(t).$$

□

2 Espaces de ρ_T -fonctions en les places ultramétriques

On considère toujours un tore T quasi-déployé sur F muni d'une représentation de transfert

$$\rho_T : \widehat{T} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \widehat{\mathrm{GL}}_r = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

supposée régulière au sens de la définition I.1.

Sont donc associés à ρ_T une extension séparable E de F de degré r , le tore $T_E = \mathrm{Res}_{E/F} \mathbb{G}_m$ et la suite exacte de tores

$$1 \rightarrow T_\rho \rightarrow T_E \xrightarrow{\rho_T^\vee} T \rightarrow 1$$

duale de l'homomorphisme Γ_F -équivariant

$$\rho_T : \widehat{T} \hookrightarrow \widehat{T}_E = (\mathbb{C}^\times)^r.$$

En toute place x de F , on dispose de l'opérateur unitaire de ψ_x -transformation de Fourier sur $E_x = E \otimes_F F_x$

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x(\bullet) = \int_{E_x^\times} dt_E \cdot f_x(t_E) \cdot k_x^E(\bullet t_E)$$

puis, par passage au quotient par $\rho_T^\vee$, de l'opérateur unitaire de ρ_T -transformation de Fourier sur $T(F_x)$

$$\varphi_x \mapsto \widehat{\varphi}_x(\bullet) = \int_{T(F_x)} dt \cdot \varphi_x(t) \cdot k_x^{\rho_T}(\bullet t).$$

Si ρ_E désigne la représentation standard de $\widehat{T}_E \rtimes \Gamma_F = (\mathbb{C}^\times)^r \rtimes \Gamma_F$, l'opérateur de ψ_x -transformation de Fourier sur $E_x \supset E_x^\times$ peut aussi être appelé opérateur de ρ_E -transformation de Fourier sur $T_E(F_x) = E_x^\times$.

On connaît le théorème suivant qui complète le théorème II.2 :

Théorème II.6. –

En toute place ultramétrique x de F , appelons ρ_E -fonctions les fonctions sur $T_E(F_x)$ qui se prolongent (de manière nécessairement unique) en des fonctions localement constantes à support compact sur $\overline{T}_E(F_x) = E \otimes_F F_x = E_x$.

Alors l'espace des ρ_E -fonctions sur $T_E(F_x)$ satisfait toutes les conditions du problème I.10 (sauf les conditions (6) et (7) qui sont vides dans ce cas) relativement à la ρ_E -transformation de Fourier linéaire sur $T_E(F_x) = E_x^\times \subset E_x$.

En particulier, cet espace des ρ_E -fonctions est respecté par la ρ_E -transformation de Fourier, et sa connaissance plus celle de l'action sur lui de la ρ_E -transformation de Fourier équivalent à celle des fractions rationnelles

$$L_x(\rho_E, \chi, Z) = L_x(\chi, Z)$$

et des polynômes inversibles

$$\varepsilon_x(\rho_E, \chi, Z) = \varepsilon_x(\chi, \psi_x, Z)$$

associés à tout élément $\chi \in \{\pi\}_x^{T_E}$ c'est-à-dire à tout caractère localement constant

$$\chi : T_E(F_x) \rightarrow \mathbb{C}^\times.$$

□

Passant maintenant au tore T muni de la représentation de transfert ρ_T , on déduit de ce théorème :

Corollaire II.7. –

En toute place ultramétrique x de F , appelons ρ_T -fonctions sur $T(F_x)$ les combinaisons linéaires de fonctions images directes

$$\varphi_x = (\rho_T^\vee)_*(f_x) = \int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(\bullet)} dt_\rho \cdot f_x(t_\rho)$$

de ρ_E -fonctions f_x sur $T_E(F_x)$ et de translatées de telles fonctions images par des éléments de $T(F_x)$.

Alors :

- (i) L'espace des ρ_T -fonctions sur $T(F_x)$ satisfait toutes les conditions du problème I.10 (sauf les conditions (6) et (7) qui sont vides dans ce cas) relativement à la ρ_T -transformation de Fourier sur $T(F_x)$

$$\varphi_x \mapsto \widehat{\varphi}_x(\bullet) = \int_{T(F_x)} dt \cdot \varphi_x(t) \cdot k_x^{\rho_T}(t \bullet).$$

En particulier, cet espace des ρ_T -fonctions sur $T(F_x)$ est respecté par la ρ_T -transformation de Fourier et son inverse, et il est dense dans l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable.

- (ii) La connaissance de cet espace des ρ_T -fonctions sur $T(F_x)$ et de l'action sur lui de la ρ_T -transformation de Fourier équivaut à celle des fractions rationnelles

$$L_x(\rho_T, \chi, Z) = L_x(\rho_E, \chi \circ \rho_T^\vee, Z)$$

et des polynômes inversibles

$$\varepsilon_x(\rho_T, \chi, Z) = \varepsilon_x(\rho_E, \chi \circ \rho_T^\vee, Z)$$

associés à tout élément $\chi \in \{\pi\}_x^T$, c'est-à-dire à tout caractère localement constant

$$\chi : T(F_x) \rightarrow \mathbb{C}^\times.$$

□

3 Espaces de ρ_T -fonctions en les places archimédiennes

Comme au paragraphe précédent, on considère un tore T quasi-déployé sur F muni d'une représentation de transfert régulière

$$\rho_T : \widehat{T} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \widehat{\mathrm{GL}}_r = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$$

et la suite exacte de tores duale de ρ_T

$$1 \rightarrow T_\rho \rightarrow T_E \xrightarrow{\rho_T^\vee} T \rightarrow 1.$$

On considère cette fois une place archimédienne x de F . Ainsi, $\overline{T}_E(F_x) = E \otimes_F F_x$ est un produit fini de facteurs $E_{x'}$ tous isomorphes à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Comme en les places ultramétriques de F , l'opérateur de ψ_x -transformation de Fourier linéaire sur E_x ou ses facteurs $E_{x'}$ défini par la fonction noyau $k_x^E = \psi_x \circ \mathrm{Tr}$

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x(\bullet) = \int dt_E \cdot f_x(t_E) \cdot k_x^E(\bullet t_E)$$

est associé à la représentation standard ρ_E de $\widehat{T}_E \rtimes \Gamma_F = (\mathbb{C}^\times)^r \rtimes \Gamma_F$.

Nous allons maintenant associer aussi à ρ_E des espaces de fonctions sur ces facteurs $E_{x'}$ et leur produit $\overline{T}_E(F_x) = E_x$.

On commence par rappeler la définition suivante :

Définition II.8. –

Considérant les deux fonctions déduites de la fonction gamma

$$\mathbb{C} \ni s \mapsto \begin{cases} G_1(s) = \pi^{-\frac{1}{2}s} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}s\right), \\ G_2(s) = (2\pi)^{1-s} \cdot \Gamma(s), \end{cases}$$

on appelle “facteur eulérien réel” [resp. “facteur eulérien complexe”] les fonctions de la forme

$$P(s) \cdot G_1(s + s_0)$$

$$[resp. \quad P(s) \cdot G_2(s + s_0)]$$

où P est un polynôme en $s \in \mathbb{C}$ de coefficient dominant égal à 1 et $s_0 \in \mathbb{C}$ est une constante. □

On connaît le théorème suivant :

Théorème II.9. –

Si F est un corps de nombres et x une place archimédienne de F , considérons la décomposition

$$\bar{T}_E(F_x) = E \otimes_F F_x = \prod_{x'} E_{x'}$$

en facteurs $E_{x'}$ isomorphes à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Lorsque $E_{x'} \cong \mathbb{R}$ [resp. $E_{x'} \cong \mathbb{C}$] et le caractère unitaire $\psi_x \circ \text{Tr}$ restreint à $E_{x'}$ est écrit sous la forme

$$a \mapsto e^{2\pi i c_{x'} a}, \quad \text{avec } c_{x'} \in \mathbb{R}^\times,$$

$$[resp. \quad a \mapsto e^{2\pi i (c_{x'} a + \bar{c}_{x'} \bar{a})}, \quad \text{avec } c_{x'} \in \mathbb{C}^\times],$$

on appelle ρ_E -fonctions spéciales sur $E_{x'}$ les fonctions de la forme

$$a \mapsto P(a) \cdot e^{-\pi |c_{x'}| a^2}$$

$$[resp. \quad a \mapsto P(a, \bar{a}) \cdot e^{-2\pi |c_{x'}| |a|^2}]$$

où P est un polynôme arbitraire de $\mathbb{C}[Z]$ [resp. $\mathbb{C}[Z_1, Z_2]$].

On appelle ρ_E -fonctions spéciales sur $\bar{T}_E(F_x) = E \otimes_F F_x = \prod_{x'} E_{x'}$ les combinaisons linéaires de produits

$$\bigotimes_{x'} f_{x'}$$

de ρ_E -fonctions spéciales sur les facteurs $E_{x'}$ de E_x .

Alors :

- (i) L'espace des ρ_E -fonctions spéciales sur chaque facteur $E_{x'}$ [resp. sur leur produit $\bar{T}_E(F_x) = E_x$] est stable par translation par les éléments du sous-groupe compact maximal de $E_{x'}^\times$ [resp. de $T_E(F_x) = E_x^\times$] (mais pas par les éléments en dehors de ce sous-groupe) ainsi que par les opérateurs différentiels invariants.

Il est également stable par l'opérateur de ψ_x -transformation de Fourier et son inverse $f_x \mapsto \hat{f}_x(-\bullet)$. D'autre part, il est dense dans l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur $E_{x'}$ [resp. $\bar{T}_E(F_x) = E_x$].

- (ii) Pour tout caractère continu $\chi : E_{x'}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ [resp. $\chi \in \{\pi\}_x^{T_E}$], les intégrales

$$\int_{E_{x'}} dt_E \cdot f_{x'}(t_E) \cdot \chi(t_E) \cdot |\det_E(t_E)|_x^{s-1}$$

$$[resp. \quad \int_{E_x} dt_E \cdot f_x(t_E) \cdot \chi(t_E) \cdot |\det_E(t_E)|_x^{s-1}]$$

associées aux ρ_E -fonctions spéciales $f_{x'}$ sur $E_{x'}$ [resp. f_x sur $E_x = \overline{T}_E(F_x)$], convergent absolument, pour tout $s \in \mathbb{C}$ de partie réelle $\operatorname{Re}(s)$ assez grande, vers une fonction analytique en s .

De plus, ces fonctions analytiques forment un module libre sur $\mathbb{C}[Z]$ qui possède un unique générateur de la forme

$$\begin{aligned} & L_{x'} \left(\chi, s + \frac{1}{2} \right) \cdot |c_{x'}|^{-\frac{1}{2}(s+1)} \quad \text{si } F_{x'} \cong \mathbb{R} \\ & \text{[resp.} \quad L_{x'} \left(\chi, s + \frac{1}{2} \right) \cdot |c_{x'}|^{-(s+1)} \quad \text{si } F_{x'} \cong \mathbb{C} \text{]} \\ & \text{[resp.} \quad L_x \left(\chi, s + \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\prod_{F_{x'} \cong \mathbb{R}} |c_{x'}|^{-\frac{1}{2}(s+1)} \right) \cdot \left(\prod_{F_{x'} \cong \mathbb{C}} |c_{x'}|^{-(s+1)} \right) \text{]} \end{aligned}$$

où les $L_{x'}(\chi, \bullet)$ sont des facteurs eulériens réels [resp. complexes] et

$$L_x(\chi, \bullet) = \prod_{x'} L_{x'}(\chi, \bullet).$$

- (iii) Les ρ_E -fonctions spéciales sur chaque facteur $E_{x'}$ [resp. sur $\overline{T}_E(F_x) = E_x$] admettent une décomposition spectrale de la forme

$$\begin{aligned} f_{x'}(\bullet) &= |\det_E(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\{\chi: E_{x'}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times \text{ unitaire}\}} d\chi \cdot \chi(\bullet) \cdot L_{x'} \left(\chi^{-1}, \frac{1}{2} \right) \cdot p_{x'}(\chi) \\ \text{[resp.} \quad f_x(\bullet) &= |\det_E(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\operatorname{Im} \{\pi\}_x^{T_E}} d\chi \cdot \chi(\bullet) \cdot L_x \left(\chi^{-1}, \frac{1}{2} \right) \cdot p_x(\chi) \text{]} \end{aligned}$$

où, pour tout caractère continu $\chi: E_{x'}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$, la fonction

$$\mathbb{C} \ni s \mapsto p_{x'}(\chi \otimes |\det_E(\bullet)|_x^s)$$

est le produit d'un polynôme en s et de

$$\begin{cases} s \mapsto |c_{x'}|^{-\frac{1}{2}s} & \text{si } F_{x'} \cong \mathbb{R}, \\ s \mapsto |c_{x'}|^{-s} & \text{si } F_{x'} \cong \mathbb{C}, \end{cases}$$

et où la fonction p_x est une somme de produits de telles fonctions $p_{x'}$.

- (iv) Il existe une famille (nécessairement unique) de fonctions exponentielles de la forme $\mathbb{C} \ni s \mapsto a \cdot e^{cs}$, $a \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{x'}(\chi, s, \psi_x) \\ & \text{[resp.} \quad \varepsilon_x(\chi, s, \psi_x) = \prod_{x'} \varepsilon_{x'}(\chi, s, \psi_x) \text{]} \end{aligned}$$

indexées par les caractères continus $\chi: E_{x'}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ [resp. $\chi \in \{\pi\}_x^{T_E}$], telles que

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{x'}(\chi, s, \psi_x) = \varepsilon_{x'}(\chi \otimes |\det_E(\bullet)|^s, 0, \psi_x) \\ & \text{[resp.} \quad \varepsilon_x(\chi, s, \psi_x) = \varepsilon_x(\chi \otimes |\det_E(\bullet)|^s, 0, \psi_x) \text{]} \end{aligned}$$

et que, pour toute ρ_E -fonction spéciale $f_{x'}$ sur $E_{x'}$ [resp. f_x sur $\overline{T}_E(F_x) = E_x$] décomposée spectrale-ment comme ci-dessus, on ait

$$\begin{aligned}\widehat{f}_{x'}(\bullet) &= |\det_E(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\{\chi: E_{x'}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times \text{ unitaire}\}} d\chi \cdot \chi^{-1}(\bullet) \cdot L_{x'}\left(\chi, \frac{1}{2}\right) \cdot \varepsilon_{x'}\left(\chi, \frac{1}{2}, \psi_x\right) \cdot p_{x'}(\chi) \\ [resp. \quad \widehat{f}_x(\bullet) &= |\det_E(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\text{Im}\{\pi\}_x^{T_E}} d\chi \cdot \chi^{-1}(\bullet) \cdot L_x\left(\chi, \frac{1}{2}\right) \cdot \varepsilon_x\left(\chi, \frac{1}{2}, \psi_x\right) \cdot p_x(\chi)] .\end{aligned}$$

□

Ainsi, on dispose en la place archimédienne x de F de facteurs

$$L_x(\rho_E, \chi, s) = L_x(\chi, s) \quad \text{et} \quad \varepsilon_x(\rho_E, \chi, s) = \varepsilon_x(\chi, s, \psi_x)$$

associés aux caractères continus $\chi \in \{\pi\}_x^{T_E}$ de $T_E(F_x) = E_x^\times$.

Ils permettent de définir un espace de ρ_E -fonctions sur $T_E(F_x)$ comme prescrit dans l'énoncé du problème I.16 :

Définition II.10. –

Si F est un corps de nombres et x une place archimédienne de F , considérons le tore réel ou complexe

$$T_E(F_x) = E_x^\times = \prod_{x'} E_{x'}^\times$$

muni de son unique sous-groupe compact maximal K .

On appellera ρ_E -fonctions sur $T_E(F_x) = E_x^\times$ les fonctions

$$f_x : E_x^\times \rightarrow \mathbb{C}$$

qui sont les restrictions des fonctions de classe C^∞ à décroissance rapide

$$\overline{T}_E(F_x) = E_x \rightarrow \mathbb{C}.$$

Elles admettent une décomposition spectrale de la forme

$$f_x(\bullet) = |\det_E(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\text{Im}\{\pi\}_x^{T_E}} d\chi \cdot \chi(\bullet) \cdot L_x\left(\chi^{-1}, \frac{1}{2}\right) \cdot p_x(\chi)$$

pour une fonction

$$p_x : \{\pi\}_x^{T_E} \rightarrow \mathbb{C}$$

dont la restriction à chaque composante connexe de $\{\pi\}_x^{T_E}$ est holomorphe.

Remarques :

- (i) Deux caractères continus $\chi, \chi' : T_E(F_x) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ sont dans la même composante connexe de $\{\pi\}_x^{T_E}$ si et seulement si leurs restrictions au sous-groupe compact maximal de $T_E(F_x)$ se confondent.

En général, les fonctions holomorphes

$$p_x : \{\pi\}_x^{T_E} \rightarrow \mathbb{C}$$

qui apparaissent dans la décomposition spectrale des ρ_E -fonctions

$$f_x : T_E(F_x) \subset \overline{T}_E(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

ne sont pas supportées par un nombre fini de composantes connexes de $\{\pi\}_x^{T_E}$.

- (ii) On sait que l'espace des ρ_E -fonctions en ce sens est stable par l'opérateur de ρ_E -transformation de Fourier $f_x \mapsto \widehat{f}_x$ et son inverse.

Il est également stable par

- les translations par les éléments de $T_E(F_x)$,
- les opérateurs différentiels invariants,
- les convolutions par les distributions à support compact de $T_E(F_x)$.

- (iii) L'espace des ρ_E -fonctions est également stable par les opérateurs de multiplication par les fonctions de classe C^∞

$$\overline{T}_E(F_x) = E_x \rightarrow \mathbb{C}$$

qui sont à croissance au plus polynomiale ainsi que toutes leurs dérivées.

En particulier, il est stable par multiplication par les fonctions de la forme

$$\overline{T}_E(F_x) = E_x \ni t \mapsto \psi_x(P(t))$$

où P est un polynôme arbitraire sur E_x .

□

On déduit du théorème II.9 et de la remarque II.10(ii) qui suit cette définition :

Corollaire II.11. –

Si F est un corps de nombres et x une place archimédienne de F , l'espace des ρ_E -fonctions sur $T_E(F_x) = E_x^\times$, son sous-espace des ρ_E -fonctions spéciales et les facteurs

$$\begin{cases} L_x(\rho_E, \chi, s) = L_x(\chi, s), \\ \varepsilon_x(\rho_E, \chi, s) = \varepsilon_x(\chi, s, \psi_x) \end{cases}$$

associés aux caractères continus $\chi \in \{\pi\}_x^{T_E}$ de $T_E(F_x) = E_x^\times$ satisfont toutes les conditions du problème I.16 (sauf les conditions (6) et (7) qui sont vides dans ce cas) relativement à la ρ_E -transformation de Fourier linéaire sur $E_x^\times \subset E_x$

$$f_x \mapsto \widehat{f}_x(\bullet) = \int_{E_x} dt_E \cdot f_x(t_E) \cdot \psi_x(\text{Tr}(t_E \bullet)).$$

□

Revenant maintenant à la représentation de transfert régulière

$$\rho_T : \widehat{T} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \widehat{\text{GL}}_r = \text{GL}_r(\mathbb{C})$$

et à la suite exacte duale de tores qu'elle induit

$$1 \rightarrow T_\rho \rightarrow T_E \xrightarrow{\rho_T^\vee} T \rightarrow 1,$$

on déduit du corollaire précédent :

Corollaire II.12. –

On considère un tore T quasi-déployé sur un corps de nombres F muni d'une représentation de transfert régulière

$$\rho_T : \widehat{T} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \widehat{\text{GL}}_r = \text{GL}_r(\mathbb{C})$$

et l'homomorphisme de tores sur F dual de ρ_T

$$\rho_T^\vee : T_E = \text{Res}_{E/F} \mathbb{G}_m \rightarrow T.$$

En toute place archimédienne x de F , appelons ρ_T -fonctions [resp. ρ_T -fonctions spéciales] sur $T(F_x)$ les combinaisons linéaires de fonctions images directes

$$\varphi_x = (\rho_T^\vee)_*(f_x) = \int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(\bullet)} dt_\rho \cdot f_x(t_\rho)$$

de ρ_E -fonctions [resp. ρ_E -fonctions spéciales] f_x sur $T_E(F_x)$ et de translatées de telles fonctions images par des éléments de $T(F_x)$ [resp. du sous-groupe compact maximal de $T(F_x)$].

Pour tout caractère continu $\chi \in \{\pi\}_x^T$ de $T(F_x)$, notons d'autre part

$$\begin{cases} L_x(\rho_T, \chi, s) = L_x(\rho_E, \chi \circ \rho_T^\vee, s), \\ \varepsilon_x(\rho_T, \chi, s) = \varepsilon_x(\rho_E, \chi \circ \rho_T^\vee, s). \end{cases}$$

Alors l'espace des ρ_T -fonctions sur $T(F_x)$, son sous-espace des ρ_T -fonctions spéciales et les facteurs $L_x(\rho_T, \chi, s)$ et $\varepsilon_x(\rho_T, \chi, s)$ ainsi définis satisfont toutes les conditions du problème I.16 (sauf les conditions (6) et (7) qui sont vides dans ce cas) relativement à la ρ_T -transformation de Fourier linéaire sur $T(F_x)$

$$\varphi_x \mapsto \widehat{\varphi}_x(\bullet) = \int_{T(F_x)} dt \cdot \varphi_x(t) \cdot k_x^{\rho_T}(t \bullet).$$

□

4 Formule de Poisson pour les tores

On considère toujours un tore T quasi-déployé sur le corps global F , muni d'une représentation de transfert régulière

$$\rho_T : \widehat{T} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \widehat{\text{GL}}_r = \text{GL}_r(\mathbb{C})$$

et la suite exacte de tores duale de ρ_T

$$1 \rightarrow T_\rho \rightarrow T_E \xrightarrow{\rho_T^\vee} T \rightarrow 1.$$

On a défini en toute place x de F un opérateur de ρ_T -transformation de Fourier sur $T(F_x)$

$$\varphi_x \mapsto \widehat{\varphi}_x(\bullet) = \int_{T(F_x)} dt \cdot \varphi_x(t) \cdot k_x^{\rho_T}(t \bullet)$$

ainsi qu'un espace de ρ_T -fonctions sur $T(F_x)$. Cet espace est stable par translation, par la ρ_T -transformation de Fourier et par son inverse $\varphi_x \mapsto \widehat{\varphi}_x(-\bullet)$, et il est dense dans l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable. Cet espace et son automorphisme de ρ_T -transformation de Fourier sont définis par les facteurs

$$L_x(\rho_T, \chi, \bullet) = L_x(\chi \circ \rho_T^\vee, \bullet)$$

$$\varepsilon_x(\rho_T, \chi, \bullet) = \varepsilon_x(\chi \circ \rho_T^\vee, \bullet, \psi_x)$$

associés aux caractères continus $\chi \in \{\pi\}_x^T$. En toute place ultramétrique x de F , $L_x(\rho_T, \chi, Z)$ est l'inverse d'un polynôme en Z et $\chi \in \{\pi\}_x^T$ et $\varepsilon_x(\rho_T, \chi, Z)$ est un polynôme inversible en $Z^{\pm 1}$ et $\chi \in \{\pi\}_x^T$. De plus, si F est un corps de nombres et x une place archimédienne de F , les $\mathbb{C} \ni s \mapsto L_x(\rho_T, \chi, s)$ sont des produits

de facteurs eulériens réels ou complexes au sens de la définition II.8 et les $\mathbb{C} \ni s \mapsto \varepsilon_x(\rho_T, \chi, s)$ sont des fonctions exponentielles de la forme $\mathbb{C} \ni s \mapsto a \cdot e^{cs}$ avec $a \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{R}$.

Enfin, on définit un opérateur de ρ_T -transformation de Fourier globale sur $T(\mathbb{A})$

$$\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$$

comme produit des opérateurs de ρ_T -transformation de Fourier locale sur les $T(F_x)$. Cet opérateur est unitaire et admet pour inverse $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}(-\bullet)$. Il induit un automorphisme de l'espace des ρ_T -fonctions globales sur $T(\mathbb{A})$, définies comme les combinaisons linéaires de produits

$$\bigotimes_{x \in |F|} \varphi_x$$

de ρ_T -fonctions locales $\varphi_x : T(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$ égales en presque toute place ultramétrique x de F où T et ρ_T sont non ramifiés à la ρ_T -fonction locale sphérique standard.

On a le théorème suivant qui résout le problème I.21 dans le cas des tores et des représentations de transfert régulières :

Théorème II.13. –

Soit comme ci-dessus un tore T quasi-déployé sur le corps global F et muni d'une représentation de transfert régulière

$$\rho_T : \widehat{T} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \widehat{\mathrm{GL}}_r = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}).$$

Alors, pour toute ρ_T -fonction globale

$$\varphi : T(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C},$$

on a :

- (i) *Pour toute place ultramétrique $x \in |F|$ en laquelle T et ρ sont non ramifiés et φ se factorise en*

$$\varphi = \varphi_x \otimes \varphi^x$$

avec pour facteur une ρ_T -fonction sphérique sur $T(F_x)$

$$\varphi_x : T(F_x)/T(O_x) \rightarrow \mathbb{C},$$

la série formelle

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in T(F)} (\varphi_x^{N, N'} \otimes \varphi^x)(\gamma)$$

est une fraction rationnelle en Z si F est un corps de fonctions [resp. une fonction analytique de $Z \in \mathbb{C}$ si F est un corps de nombres]. De plus, elle est absolument convergente dans la zone

$$|Z| < q_x^{1/2},$$

donc n'y admet pas de pôle, et sa valeur en $Z = 1$, notée $S(\varphi)$, ne dépend pas du choix de la place x .

- (ii) *On a la formule de Poisson*

$$S(\varphi) = S(\widehat{\varphi})$$

qui s'écrit encore

$$“ \sum_{\gamma \in \overline{T}(F)} \varphi(\gamma) ” = “ \sum_{\gamma \in \overline{T}(F)} \widehat{\varphi}(\gamma) ”$$

en notant

$$“ \sum_{\gamma \in \overline{T}(F)} \varphi(\gamma) ” = \left(\sum_{\gamma \in T(F)} \varphi(\gamma) \right) + \left(\sum_{\gamma \in T(F)} \widehat{\varphi}(\gamma) \right) - S(\varphi).$$

(iii) On a

$$\text{“ } \sum_{\gamma \in \widehat{T}(F)} \varphi(\gamma) \text{ ”} = \sum_{\gamma \in T(F)} \varphi(\gamma)$$

si φ se factorise en au moins une place x sous la forme

$$\varphi = \varphi_x \otimes \varphi^x,$$

avec pour facteur une ρ_T -fonction locale

$$\varphi_x : T(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

qui est supportée par une partie compacte de $T(F_x)$.

C'est le cas en particulier si x est une place ultramétrique et φ_x est une ρ_T -fonction sur $T(F_x)$ dont la décomposition spectrale ne fait apparaître que des caractères produits

$$\chi_x = \chi'_x \cdot (\omega_x \circ \det_T)$$

d'un caractère $\chi'_x : T(F_x) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ de ramification bornée, c'est-à-dire invariant par un sous-groupe ouvert compact K'_x fixé, et d'un caractère $\omega_x : F_x^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ assez ramifié en fonction de K'_x composé avec $\det_T$.

Démonstration :

Dans le cas des corps de fonctions, ce théorème a déjà été prouvé au paragraphe VIII de [Lafforgue, 2016].

Comme nous allons le montrer, la même démonstration vaut pour les corps de nombres.

Si F est un corps de fonctions, tout caractère continu

$$\chi = \bigotimes_{x \in |F|} \chi_x : T(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

est invariant par un sous-groupe ouvert compact $K = \prod_{x \in \mathbb{C}} K_x$ et donc non ramifié en presque toute place x .

On peut poser pour un tel caractère

$$L(\rho_T, \chi, Z) = \prod_{x \in |F|} L_x(\rho_T, \chi_x, Z^{\deg(x)})$$

qui est bien défini en tant que série formelle en Z , et

$$\varepsilon(\rho_T, \chi, Z) = \prod_{x \in |F|} \varepsilon_x(\rho_T, \chi_x, Z^{\deg(x)})$$

qui est bien défini en tant que monôme en Z puisque presque tous les facteurs $\varepsilon_x(\rho_T, \chi_x, Z^{\deg(x)})$ valent 1.

Si q désigne le cardinal du corps fini $\mathbb{F}_q$ des constantes du corps de fonctions F , on peut remplacer Z par q^{-s} , $s \in \mathbb{C}$, pour définir le produit eulérien

$$L(\rho_T, \chi, s) = \prod_{x \in |F|} L_x(\rho_T, \chi_x, q_x^{-s})$$

et la fonction exponentielle

$$\varepsilon(\rho_T, \chi, s) = \prod_{x \in |F|} \varepsilon_x(\rho_T, \chi_x, q_x^{-s}).$$

Si F est un corps de nombres, on note $|F|_\infty$ l'ensemble fini de ses places archimédiennes, $|F|_f$ l'ensemble de ses places ultramétriques et

$$\mathbb{A}_\infty = \prod_{x \in |F|_\infty} F_x, \quad \mathbb{A}_f = \prod_{x \in |F|_f} F_x$$

avec donc

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_f \times \mathbb{A}_\infty.$$

Alors tout caractère continu

$$\chi = \bigotimes_{x \in |F|} \chi_x : T(\mathbb{A}) = T(\mathbb{A}_f) \times T(\mathbb{A}_\infty) \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

est invariant par un sous-groupe ouvert de $T(\mathbb{A}_f)$ et donc non ramifié en presque toute place ultramétrique x . On peut introduire le produit eulérien

$$L(\rho_T, \chi, s) = \prod_{x \in |F|_f} L_x(\rho_T, \chi_x, q_x^{-s}) \cdot \prod_{x \in |F|_\infty} L_x(\rho_T, \chi_x, s)$$

et la fonction exponentielle de $s \in \mathbb{C}$

$$\varepsilon(\rho_T, \chi, s) = \prod_{x \in |F|_f} \varepsilon_x(\rho_T, \chi_x, q_x^{-s}) \cdot \prod_{x \in |F|_\infty} \varepsilon_x(\rho_T, \chi_x, s)$$

qui est bien définie puisque $\varepsilon_x(\rho_T, \chi_x, q_x^{-s})$ vaut uniformément 1 en presque toute place ultramétrique x de F .

Le théorème va résulter de la proposition suivante :

Proposition II.14. –

Soit un caractère continu

$$\chi = \bigotimes_{x \in |F|} \chi_x : T(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

qui est automorphe, c'est-à-dire invariant par le sous-groupe discret $T(F)$ de $T(\mathbb{A})$.

Alors :

(i) *Le produit eulérien*

$$L(\rho_T, \chi, s) = \prod_{x \in |F|} L_x(\rho_T, \chi_x, q_x^{-s})$$

$$[resp. \quad L(\rho_T, \chi, s) = \prod_{x \in |F|_f} L_x(\rho_T, \chi_x, q_x^{-s}) \cdot \prod_{x \in |F|_\infty} L_x(\rho_T, \chi_x, s)]$$

converge absolument, si $\operatorname{Re}(s)$ est assez grand (et plus précisément si $\operatorname{Re}(s) > 1$ lorsque le caractère χ est unitaire) vers une fonction holomorphe de $s \in \mathbb{C}$.

Cette fonction admet un prolongement analytique à $\mathbb{C}$ tout entier (et même est une fonction rationnelle en $Z = q^{-s}$ si F est un corps de fonctions) qui satisfait l'équation fonctionnelle

$$L(\rho_T, \chi^{-1}, 1-s) = L(\rho_T, \chi, s) \cdot \varepsilon(\rho_T, \chi, s).$$

(ii) *Si χ est un caractère unitaire, x_0 est une place ultramétrique de F en laquelle χ_{x_0} est non ramifié et $I_{x_0}^N(\rho_T, \chi_{x_0}, Z)$ désigne le produit du polynôme*

$$L_{x_0}(\rho_T, \chi_{x_0}, Z)^{-1}$$

et du monôme de degré N du développement en série formelle en Z de l'inverse

$$L_{x_0}(\rho_T, \chi_{x_0}, Z),$$

le produit

$$L\left(\rho_T, \chi^{-1}, \frac{1}{2} + s\right) \cdot I_{x_0}^N\left(\rho_T, \chi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}+s}\right)$$

n'a pas de pôle dans le demi-plan

$$\operatorname{Re}(s) > -\frac{1}{2}.$$

(iii) Si, en une place ultramétrique x_0 de F , le caractère $\chi_{x_0} : T(F_{x_0}) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ est le produit

$$\chi_{x_0} = \chi'_{x_0} \cdot (\omega_{x_0} \circ \det_T)$$

d'un caractère $\chi'_{x_0} : T(F_{x_0}) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ de ramification bornée, c'est-à-dire invariant par un sous-groupe ouvert compact K'_{x_0} fixé, et d'un caractère $\omega_{x_0} : F_{x_0}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ assez ramifié en fonction de K'_{x_0} composé avec $\det_T$, la fonction analytique

$$\mathbb{C} \ni s \mapsto L(\rho_T, \chi, s)$$

est partout holomorphe : elle n'a pas de pôle.

Démonstration de la proposition :

On a par définition en toute place ultramétrique x de F

$$\begin{cases} L_x(\rho_T, \chi_x, Z) = L_x(\chi \circ \rho_T, Z), \\ \varepsilon_x(\rho_T, \chi_x, Z) = \varepsilon_x(\chi \circ \rho_T, Z, \psi_x), \end{cases}$$

et en toute place archimédienne x de F

$$\begin{cases} L_x(\rho_T, \chi_x, s) = L_x(\chi \circ \rho_T, s), \\ \varepsilon_x(\rho_T, \chi_x, s) = \varepsilon_x(\chi \circ \rho_T, s, \psi_x). \end{cases}$$

On est donc ramené au cas où $T = T_E$ et ρ_T est la représentation standard ρ_E de $\widehat{T}_E \rtimes \Gamma_F = (\mathbb{C}^\times)^r \rtimes \Gamma_F$, c'est-à-dire au cas de l'espace linéaire $\overline{T}_E(\mathbb{A}) = \mathbb{A} \otimes_F E$ et de la ψ -transformation de Fourier $f \mapsto \widehat{f}$ sur cet espace.

Alors la formule de Poisson linéaire pour les ρ_E -fonctions globales $f : T_E(\mathbb{A}) \subset \overline{T}_E(\mathbb{A}) = \mathbb{A} \otimes_F E \rightarrow \mathbb{C}$

$$\sum_{\gamma \in E} f(\gamma) = \sum_{\gamma \in E} \widehat{f}(\gamma)$$

implique d'après la thèse de Tate les propriétés globales de (i) pour les fonctions analytiques

$$\mathbb{C} \ni s \mapsto L(\chi, s)$$

et permet de localiser les pôles de ces fonctions.

Le calcul des facteurs $L_x(\chi_x, Z)$ en les places x ultramétriques montre (iii), ainsi que (ii) par combinaison avec le résultat de localisation des pôles des fonctions L globales. □

Notons $\{\pi\}_K^{T, \text{aut}}$ la variété analytique complexe des caractères

$$\chi = \bigotimes_{x \in |F|} \chi_x : T(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

qui sont automorphes, c'est-à-dire invariants par le sous-groupe discret $T(F)$ de $T(\mathbb{A})$, et invariants par un sous-groupe ouvert compact K de $T(\mathbb{A})$ [resp. de $T(\mathbb{A}_f)$ si F est un corps de nombres].

Notons également $\text{Im} \{\pi\}_K^{T, \text{aut}} \subset \{\pi\}_K^{T, \text{aut}}$ la sous-variété analytique réelle des caractères unitaires.

Ces variétés analytiques sont munies d'une action sans point fixe des tores complexe et réel $\Lambda^{T, \text{aut}}$ et $\text{Im} \Lambda^{T, \text{aut}}$ définis comme suit :

Définition II.15. –

On note $\Lambda^{T, \text{aut}}$ le groupe de Lie complexe des caractères automorphes continus

$$T(\mathbb{A})/T(F) \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

qui sont triviaux sur le plus grand sous-groupe compact de $T(\mathbb{A})$, et $\text{Im} \Lambda^{T, \text{aut}}$ son sous-groupe de Lie réel des caractères unitaires.

Remarque :

Le quotient de $T(\mathbb{A})/T(F)$ par le plus grand sous-groupe compact de $T(\mathbb{A})$ est isomorphe à

- une puissance finie de $\mathbb{Z}$ si F est un corps de fonctions,
- une puissance finie de $\mathbb{R}$ si F est un corps de nombres.

Donc $\Lambda^{T, \text{aut}}$ est isomorphe à une puissance finie de $\mathbb{C}^\times$ [resp. $\mathbb{C}$] si F est un corps de fonctions [resp. un corps de nombres] et $\text{Im} \Lambda^{T, \text{aut}}$ est isomorphe à la puissance correspondante de $S_1 = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| = 1\}$ [resp. $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$]. □

On remarque :

Lemme II.16. –

Pour tout sous-groupe ouvert K de $T(\mathbb{A})$ [resp. de $T(\mathbb{A}_f)$ si F est un corps de nombres], les composantes connexes des variétés analytiques complexes ou réelles

$$\{\pi\}_K^{T, \text{aut}} \supset \text{Im} \{\pi\}_K^{T, \text{aut}}$$

sont les orbites sous les actions sans point fixe de

$$\Lambda^{T, \text{aut}} \supset \text{Im} \Lambda^{T, \text{aut}}.$$

Par conséquent, elles sont naturellement munies d'une structure de variété algébrique complexe et de sous-variété algébrique réelle. □

On a le parallèle suivant de la proposition II.14 :

Proposition II.17. –

Soit une ρ_T -fonction globale sur $T(\mathbb{A})$ invariante par un sous-groupe ouvert compact K de $T(\mathbb{A})$ [resp. de $T(\mathbb{A}_f)$ si F est un corps de nombres]

$$\varphi : T(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

et un caractère continu automorphe invariant par K

$$\chi : T(\mathbb{A})/T(F) \rightarrow \mathbb{C}^\times.$$

Alors :

(i) L l'intégrale paramétrée par $s \in \mathbb{C}$

$$L(\rho_T, \varphi, \chi, s) = \int_{T(\mathbb{A})} dt \cdot \varphi(t) \cdot \chi(t) \cdot |\det_T(t)|^s$$

converge absolument, si $\operatorname{Re}(s)$ est assez grand (et plus précisément si $\operatorname{Re}(s) > 1$ lorsque le caractère χ est unitaire) vers une fonction holomorphe de $s \in \mathbb{C}$.

Cette fonction admet un prolongement analytique à $\mathbb{C}$ tout entier qui dépend analytiquement de $\chi \in \{\pi\}_K^{T, \text{aut}}$ et satisfait l'équation fonctionnelle

$$L(\rho_T, \widehat{\varphi}, \chi^{-1}, 1-s) = L(\rho_T, \varphi, \chi, s).$$

- (ii) La fonction analytique $s \mapsto L(\rho_T, \varphi, \chi, s)$ est le produit de la fonction analytique $s \mapsto L(\rho_T, \chi, s)$ et d'une fonction holomorphe. En particulier, elle n'a pas d'autres pôles.
- (iii) Si χ est un caractère unitaire et φ se factorise en au moins une place x sous la forme $\varphi = \varphi_x \otimes \varphi^x$, avec pour facteur une ρ_T -fonction locale $\varphi_x : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$ supportée par une partie compacte de $T(F_x)$, la fonction $s \mapsto L(\rho_T, \varphi, \chi, \frac{1}{2} + s)$ n'a pas de pôle dans le demi-plan $\operatorname{Re}(s) < \frac{1}{2}$.
- (iv) Si χ est un caractère unitaire, x_0 une place ultramétrique de F en laquelle χ_{x_0} est non ramifié et $I_{x_0}^N(\rho_T, \chi_{x_0}, Z)$ désigne le produit du polynôme

$$L_{x_0}(\rho_T, \chi_{x_0}, Z)^{-1}$$

et du monôme de degré N du développement en série formelle en Z de l'inverse

$$L_{x_0}(\rho_T, \chi_{x_0}, Z),$$

le produit

$$L\left(\rho_T, \varphi, \chi^{-1}, \frac{1}{2} + s\right) \cdot I_{x_0}^N\left(\rho_T, \chi_{x_0}, q_{x_0}^{-\frac{1}{2}+s}\right)$$

n'a pas de pôle dans le demi-plan

$$\operatorname{Re}(s) > -\frac{1}{2}.$$

- (v) Si, en une place ultramétrique x_0 de F , le caractère $\chi_{x_0} : T(F_{x_0}) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ est le produit

$$\chi_{x_0} = \chi'_{x_0} \cdot (\omega_{x_0} \circ \det_T)$$

d'un caractère $\chi'_{x_0} : T(F_{x_0}) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ de ramification bornée, c'est-à-dire invariant par un sous-groupe ouvert compact K'_{x_0} fixé, et d'un caractère $\omega_{x_0} : F_{x_0}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ assez ramifié en fonction de K'_{x_0} composé avec $\det_T$, la fonction analytique

$$\mathbb{C} \ni s \mapsto L(\rho_T, \varphi, \chi, s)$$

est partout holomorphe : elle n'a pas de pôle.

Démonstration de la proposition :

Comme pour la proposition II.14, il suffit de démontrer ces résultats dans le cas où $T = T_E$ et ρ_T est la représentation standard ρ_E de $\widehat{T}_E \rtimes \Gamma_F$.

Puis, écrivant E comme un produit $E = E_1 \times \dots \times E_k$ de corps de nombres E_i extensions finies de F , il suffit de traiter le cas où E est lui-même un corps de nombres.

On est alors ramené aux résultats de la thèse de Tate. □

On a encore les deux résultats suivants qui se ramènent au cas où $T = T_E$ et ρ_T est la représentation standard ρ_E de $\widehat{T}_E \rtimes \Gamma_F$, donc aux résultats de la thèse de Tate :

Lemme II.18. –

Considérons une ρ_T -fonction globale

$$\varphi : T(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

invariante par un sous-groupe ouvert compact K de $T(\mathbb{A})$ [resp. de $T(\mathbb{A}_f)$ si F est un corps de nombres] et une partie compacte C de l'espace des caractères automorphes continus à valeurs dans $\mathbb{R}_+^+$

$$K \backslash T(\mathbb{A}) / T(F) \rightarrow \mathbb{R}_+^\times.$$

Alors la restriction au domaine

$$\left\{ \chi \in \{\pi\}_K^{T, \text{aut}} \mid |\chi| \in C \right\}$$

de la fonction analytique

$$\chi \mapsto L(\rho_T, \varphi, \chi, 0)$$

est à décroissance rapide dès lors qu'elle n'a pas de pôle dans ce domaine. □

Théorème II.19. –

Soit K un sous-groupe ouvert compact de $T(\mathbb{A})$ [resp. de $T(\mathbb{A}_f)$ si F est un corps de nombres].

Il existe sur le groupe $\text{Im}\{\pi\}_K^{T, \text{aut}}$ des caractères continus unitaires

$$\chi : K \backslash T(\mathbb{A}) / T(F) \rightarrow S_1$$

une unique mesure invariante $d\chi$ telle que, pour toute ρ_T -fonction globale

$$\varphi : T(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

invariante par K et tout réel $s > \frac{1}{2}$, on ait

$$\sum_{\gamma \in T(F)} \varphi(\gamma) = \int_{\text{Im}\{\pi\}_K^{T, \text{aut}}} d\chi \cdot L\left(\rho_T, \varphi, \chi^{-1}, \frac{1}{2} + s\right).$$

□

On peut maintenant donner :

Démonstration du théorème II.13 :

Considérons une place ultramétrique $x \in |F|_f$ en laquelle T et ρ_T sont non ramifiés et φ se factorise en $\varphi = \varphi_x \otimes \varphi^x$, avec pour facteur une ρ_T -fonction sphérique $\varphi_x : T(F_x)/T(O_x) \rightarrow \mathbb{C}$.

D'après le théorème II.19, on peut écrire pour tous entiers $N, N' \in \mathbb{N}$ et tout réel $s > \frac{1}{2}$

$$\sum_{\gamma \in T(F)} (\varphi_x^{N, N'} \otimes \varphi^x)(\gamma) = \int_{\text{Im}\{\pi\}_K^{T, \text{aut}}} d\chi \cdot L\left(\rho_T, \varphi_x^{N, N'} \otimes \varphi^x, \chi^{-1}, \frac{1}{2} + s\right)$$

avec

$$L\left(\rho_T, \varphi_x^{N, N'} \otimes \varphi^x, \chi^{-1}, \frac{1}{2} + s\right) = L\left(\rho_T, \varphi, \chi^{-1}, \frac{1}{2} + s\right) \cdot I_x^N\left(\rho_T, \chi_x, q_x^{-\frac{1}{2}+s}\right) \cdot I_x^{N'}\left(\rho_T, \chi_x^{-1}, q_x^{-\frac{1}{2}-s}\right).$$

Il résulte de la proposition II.17(iv) par déplacement de contours d'intégration que l'on peut encore écrire pour toute telle place x et tous $N, N' \in \mathbb{N}$

$$\sum_{\gamma \in T(F)} (\varphi_x^{N, N'} \otimes \varphi^x)(\gamma) = \int_{\text{Im}\{\pi\}_K^{T, \text{aut}}} d\chi \cdot L\left(\rho_T, \varphi, \chi^{-1}, \frac{1}{2}\right) \cdot I_x^N\left(\rho_T, \chi_x, q_x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot I_x^{N'}\left(\rho_T, \chi_x^{-1}, q_x^{-\frac{1}{2}}\right).$$

La série en $z \in \mathbb{C}$

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} z^{N+N'} \cdot \sum_{\gamma \in T(F)} \left(\varphi_x^{N, N'} \otimes \varphi^x \right) (\gamma)$$

converge absolument si $|z| < q_x^{1/2}$ vers

$$\int_{\text{Im} \{ \pi \}_K^{T, \text{aut}}} d\chi \cdot L \left(\rho_T, \varphi, \chi^{-1}, \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{L_x \left(\rho_T, \chi_x, z q_x^{-\frac{1}{2}} \right) \cdot L_x \left(\rho_T, \chi_x^{-1}, z q_x^{-\frac{1}{2}} \right)}{L_x \left(\rho_T, \chi_x, q_x^{-\frac{1}{2}} \right) \cdot L_x \left(\rho_T, \chi_x^{-1}, q_x^{-\frac{1}{2}} \right)}$$

qui définit une fraction rationnelle en z [resp. une fonction analytique en z] si F est un corps de fonctions [resp. un corps de nombres].

Sa valeur $S(\varphi)$ en $z = 1$ est

$$\int_{\text{Im} \{ \pi \}_K^{T, \text{aut}}} d\chi \cdot L \left(\rho_T, \varphi, \chi^{-1}, \frac{1}{2} \right)$$

qui ne dépend pas de la place x et qui, d'après l'équation fonctionnelle de la proposition II.17(i), est invariante par la substitution $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$.

Cela démontre les parties (i) et (ii) du théorème II.13.

Pour la première partie de (iii), considérons une ρ_T -fonction globale $\varphi : T(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ qui se factorise en au moins une place x sous la forme $\varphi = \varphi_x \otimes \varphi^x$, avec pour facteur une ρ_T -fonction locale

$$\varphi_x : T(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

dont la ρ_T -transformée de Fourier $\widehat{\varphi}_x$ est supportée par une partie compacte de $T(F_x)$.

Alors, d'après la proposition II.17(iii), les fonctions analytiques associées aux caractères unitaires $\chi \in \text{Im} \{ \pi \}_K^{T, \text{aut}}$

$$\mathbb{C} \ni s \mapsto L \left(\rho_T, \varphi, \chi^{-1}, \frac{1}{2} + s \right) = L \left(\rho_T, \widehat{\varphi}, \chi, \frac{1}{2} - s \right),$$

n'ont pas de pôle dans le domaine $\text{Re}(s) > -\frac{1}{2}$ si bien que, par déplacement des contours d'intégration, on obtient la formule

$$\sum_{\gamma \in T(F)} \varphi(\gamma) = \int_{\text{Im} \{ \pi \}_K^{T, \text{aut}}} d\chi \cdot L \left(\rho_T, \varphi, \chi^{-1}, \frac{1}{2} \right) = S(\varphi).$$

Cela démontre la première partie de l'assertion (iii) du théorème II.13. La seconde partie résulte de la même façon de la proposition II.17(v).

Le théorème II.13 est démontré. $\square$

5 Des fonctions unitaires sur les tores quotients

On considère toujours un tore T quasi-déployé sur le corps global F , muni d'une représentation de transfert régulière

$$\rho_T : \widehat{T} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \widehat{\text{GL}}_r = \text{GL}_r(\mathbb{C}),$$

et la suite exacte de tores sur F duale de ρ_T

$$1 \rightarrow T_\rho \rightarrow T_E = \text{Res}_{E/F} \mathbb{G}_m \xrightarrow{\rho_T^\vee} T \rightarrow 1.$$

On a déjà introduit et utilisé l'espace linéaire

$$\overline{T}_E = \text{Res}_{E/F} \mathbb{A}^1$$

qui est une variété torique affine lisse de tore T_E .

On pose :

Définition II.20. –

Dans la situation ci-dessus, on note $\bar{T}$ la variété torique affine normale de tore T associée au cône convexe saturé $X_{\bar{T}}^\vee$ de $X_T^\vee$ engendré par les composantes $\rho_T^i \in X_{\hat{T}} = X_T^\vee$, $1 \leq i \leq r$, de l'homomorphisme

$$\rho_T = (\rho_T^1, \dots, \rho_T^r) : \hat{T} \rightarrow \hat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r.$$

De manière équivalente, $\bar{T}$ est le quotient de $\bar{T}_E$ par l'action du sous-tore T_ρ de T_E .

Remarques :

- (i) La variété torique $\bar{T}$ est définie sur F car la famille des ρ_T^i , $1 \leq i \leq r$, est stable par l'action de Γ_F , donc aussi le cône saturé $X_{\bar{T}}^\vee$ de $X_T^\vee$ qu'ils engendrent.
- (ii) L'équivalence des deux définitions de $\bar{T}$ provient de ce qu'un caractère arbitraire

$$\chi : T \rightarrow \mathbb{G}_m$$

se prolonge en un morphisme équivariant

$$\chi : \bar{T} \rightarrow \mathbb{A}^1$$

si et seulement si

$$\langle \chi, \rho_T^i \rangle \geq 0, \quad 1 \leq i \leq r,$$

c'est-à-dire si et seulement si le caractère composé

$$\chi \circ \rho_T^\vee : T_E \rightarrow T \rightarrow \mathbb{G}_m$$

se prolonge en un morphisme

$$\chi \circ \rho_T^\vee : \bar{T}_E \rightarrow \mathbb{A}^1.$$

□

On note $X_{\bar{T}} \subset X_T$ le cône saturé dual de $X_{\bar{T}}^\vee \subset X_T^\vee$ composé des caractères

$$\chi : T \rightarrow \mathbb{G}_m$$

qui se prolongent en un morphisme équivariant

$$\chi : \bar{T} \rightarrow \mathbb{A}^1.$$

On a :

Lemme II.21. –

Pour tout caractère $\chi \in X_{\bar{T}} \subset X_T$, notons E_χ le corps, extension finie séparable de F , qui correspond à l'orbite finie de χ sous l'action du groupe de Galois Γ_F .

Alors :

(i) Pour tout tel $\chi \in X_{\overline{T}}$, on a un morphisme de tores sur F défini par χ et ses transformés par Γ_F

$$\chi_F : T \rightarrow \text{Res}_{E_\chi/F} \mathbb{G}_m ,$$

et il se prolonge en un morphisme équivariant

$$\chi_F : \overline{T} \rightarrow \text{Res}_{E_\chi/F} \mathbb{A}^1$$

de variétés toriques sur F .

(ii) Si χ décrit un ensemble fini d'éléments du cône $X_{\overline{T}} \subset X_T$ dont les transformés par Γ_F engendrent $X_{\overline{T}}$, alors le morphisme produit

$$\prod_{\chi} \chi_F : \overline{T} \rightarrow \prod_{\chi} \text{Res}_{E_\chi/F} \mathbb{A}^1$$

est une immersion fermée.

□

Si χ est un caractère de $X_{\overline{T}} \subset X_T$, on dispose donc en toute place x de F de l'application continue équivariante induite

$$\chi_F : \overline{T}(F_x) \rightarrow (\text{Res}_{E_\chi/F} \mathbb{A}^1)(F_x) = E_\chi \otimes_F F_x = E_{\chi,x} .$$

On dispose d'autre part du morphisme de trace

$$\text{Tr} : E_{\chi,x} = E_\chi \otimes_F F_x \rightarrow F_x ,$$

ainsi que de la composante locale

$$\psi_x : F_x \rightarrow S_1 = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| = 1\}$$

du caractère additif continu unitaire

$$\psi : \mathbb{A}_F/F \rightarrow S_1$$

et des endomorphismes linéaires

$$\begin{aligned} E_{\chi,x} &\rightarrow E_{\chi,x} \\ a_x &\mapsto c_x \cdot a_x \end{aligned}$$

de multiplication par des éléments $c_x \in E_{\chi,x} = E_\chi \otimes_F F_x$.

Cela permet de poser la définition suivante :

Définition II.22. –

Pour tout caractère $\chi \in X_{\overline{T}} \subset X_T$ et pour toute place $x \in |F|$, on appellera χ -fonctions unitaires sur $\overline{T}(F_x)$ et on notera

$$\mathbb{I}_{\chi,c_x} : \overline{T}(F_x) \rightarrow S_1 = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| = 1\}$$

les fonctions

$$\overline{T}(F_x) \ni t \mapsto \psi_x(\text{Tr}(c_x \cdot \chi_F(t)))$$

indexées par les éléments $c_x \in E_{\chi,x} = E_\chi \otimes_F F_x$.

Autrement dit, ce sont les fonctions composées

$$\overline{T}(F_x) \xrightarrow{\chi_F} E_{\chi,x} \xrightarrow{c_x \cdot \bullet} E_{\chi,x} \xrightarrow{\text{Tr}} F_x \xrightarrow{\psi_x} S_1 .$$

□

On a en les places ultramétriques de F :

Proposition II.23. –

Soit x une place ultramétrique de F .

Alors les opérateurs de multiplication par les χ -fonctions unitaires

$$\mathbb{I}_{\chi, c_x} : \overline{T}(F_x) \rightarrow S_1, \quad \chi \in X_{\overline{T}}, \quad c_x \in E_{\chi, x},$$

ou, plus généralement, par n'importe quelles fonctions localement constantes

$$U : \overline{T}(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

préservent l'espace des ρ_T -fonctions sur $T(F_x)$.

Remarque :

Réciproquement, on pourrait montrer que pour n'importe quelle ρ_T -fonction non nulle

$$\varphi_x : T(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

et si χ décrit une famille de générateurs du cône saturé $X_{\overline{T}}$, alors l'espace des ρ_T -fonctions sur $T(F_x)$ est le plus petit espace de fonctions

$$T(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

qui :

- contient la fonction φ_x ,
- est stable par les translations,
- est stable par la ρ_T -transformation de Fourier et son inverse,
- est stable par les opérateurs de multiplication par les χ -fonctions unitaires $\mathbb{I}_{\chi, c_x} : \overline{T}(F_x) \rightarrow S_1$, $c_x \in E_{\chi, x}$.

Démonstration de la proposition :

Par définition, les ρ_T -fonctions sur $T(F_x)$ sont les combinaisons linéaires de translatées par des éléments de $T(F_x)$ de fonctions images directes par ρ_T

$$\varphi_x = (\rho_T^\vee)_* f_x = \int_{(\rho_T^\vee)^{-1}(\bullet)} dt_\rho \cdot f_x(t_\rho)$$

de fonctions localement constantes à support compact

$$f_x : \overline{T}_E(F_x) = E \otimes_F F_x = E_x \rightarrow \mathbb{C}.$$

Or, comme chaque

$$\chi_F : \overline{T}(F_x) \rightarrow E_{\chi, x}$$

est équivariant, la famille des χ -fonctions unitaires

$$\mathbb{I}_{\chi, c_x} : \overline{T}(F_x) \rightarrow S_1$$

est stable par translation par les éléments de $T(F_x)$. Bien sûr, c'est aussi le cas de l'espace des fonctions localement constantes $U : \overline{T}(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$.

Il suffit donc de prouver que si

$$\varphi_x = (\rho_T^\vee)_* f_x$$

est l'image directe d'une fonction localement constante à support compact

$$f_x : \overline{T}_E(F_x) = E_x \rightarrow \mathbb{C},$$

alors les fonctions produits $\varphi_x \cdot \mathbb{I}_{\chi, c_x}$ ou plus généralement $\varphi_x \cdot U$ sont encore des ρ_T -fonctions. Mais ceci résulte de ce que

$$\varphi_x \cdot U = (\rho_T^\vee)_* (f_x \cdot (U \circ \rho_T^\vee))$$

où la fonction composée

$$U \circ \rho_T^\vee : \overline{T}_E(F_x) \xrightarrow{\rho_T^\vee} \overline{T}(F_x) \xrightarrow{\mathbb{I}_{\chi, c_x}} S_1$$

est localement constante et la fonction produit

$$f_x \cdot (U \circ \rho_T^\vee)$$

est localement constante à support compact. □

Nous souvenant que les $\psi_x : F_x \rightarrow S_1$, $x \in |F|$, sont les composantes d'un caractère global

$$\psi = \prod_x \psi_x : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}/F \rightarrow S_1 = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| = 1\},$$

nous pouvons compléter la définition II.22 par la définition globale suivante :

Définition II.24. –

Pour tout caractère $\chi \in X_{\overline{T}} \subset X_T$, on appellera χ -fonctions unitaires sur $\overline{T}(\mathbb{A})$ et on notera

$$\mathbb{I}_{\chi, c} : \overline{T}(\mathbb{A}) \rightarrow S_1$$

les fonctions

$$\overline{T}(\mathbb{A}) \ni t \mapsto \psi(\text{Tr}(c \cdot \chi_F(t)))$$

indexées par les éléments $c = (c_x)_{x \in |F|} \in \mathbb{A}_{E_\chi} = E_\chi \otimes_F \mathbb{A} = \prod_{x \in |F|} E_{\chi, x}$.

Autrement dit, ce sont les fonctions composées

$$\overline{T}(\mathbb{A}) \xrightarrow{\chi_F} E_\chi \otimes_F \mathbb{A} \xrightarrow{c \cdot \bullet} E_\chi \otimes_F \mathbb{A} \xrightarrow{\text{Tr}} \mathbb{A} \xrightarrow{\psi} S_1.$$

Remarque :

Comme le caractère ψ vaut 1 sur les éléments du sous-groupe discret F de $\mathbb{A}$ et que le morphisme $\text{Tr} : E_\chi \otimes_F \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ envoie E_χ dans F , on voit que si $c \in E_\chi$, la fonction unitaire

$$\mathbb{I}_{\chi, c} : \overline{T}(\mathbb{A}) \rightarrow S_1$$

prend la valeur 1 en tous les points de $\overline{T}(F)$. □

La remarque qui suit cette définition rend vraisemblable déjà dans le cas des corps de fonctions le résultat suivant :

Théorème II.25. –

Supposons que F est un corps de fonctions.

Alors, pour tout caractère $\chi \in X_{\overline{T}}$, les opérateurs de multiplication par les χ -fonctions unitaires

$$\mathbb{I}_{\chi, c} = \prod_{x \in |F|} \mathbb{I}_{\chi, c_x} : \overline{T}(\mathbb{A}) \rightarrow S_1, \quad c = (c_x)_{x \in |F|} \in \mathbb{A}_{E_\chi},$$

vérifient les propriétés suivantes :

- (i) Ils stabilisent l'espace des ρ_T -fonctions globales sur $T(\mathbb{A})$.
- (ii) Lorsque $c \in E_\chi$, ils laissent invariante la fonctionnelle de Poisson

$$\varphi \mapsto " \sum_{\gamma \in \overline{T}(F)} \varphi(\gamma) "$$

sur l'espace des ρ_T -fonctions globales sur $T(\mathbb{A})$.

Démonstration :

- (i) On sait déjà d'après la proposition II.23 que l'opérateur de multiplication par $\mathbb{I}_{\chi, c_x}$ respecte l'espace des ρ_T -fonctions locales sur $T(F_x)$ en toute place $x \in |F|$.
On conclut en remarquant que, en presque toute place x non ramifiée pour T et ρ_T , la fonction $\mathbb{I}_{\chi, c_x}$ vaut 1 sur le support $\overline{T}(O_x)$ de la ρ_T -fonction standard en cette place.
- (ii) Rappelons d'abord le lemme suivant qui vaut sur n'importe quel corps :

Lemme II.26. –

Considérons ici n'importe quel corps F , un tore T quasi-déployé sur F et une variété torique affine normale $\overline{T}$ de tore T définie sur F . Alors :

- (i) Les orbites géométriques de $\overline{T}$ muni de l'action de T sont en nombre fini et naturellement indexées par les faces C du cône convexe polyédral saturé $X_{\overline{T}} \subset X_T$ qui définit $\overline{T}$. On les note T_C . Chaque orbite T_C est un sous-schéma localement fermé de $\overline{T}$ qui est défini sur toute extension F' de F dont le groupe de Galois $\Gamma_{F'}$ respecte la face C de $X_{\overline{T}}$.
- (ii) Toute orbite T_C de $\overline{T}$ possède un unique "point base" en lequel tout caractère $\chi \in X_{\overline{T}}$ prend la valeur 1 si χ est élément de la face C et la valeur 0 sinon. Ce point base 1_C est défini sur tout corps $F' \supset F$ sur lequel l'orbite T_C est définie, avec alors

$$T_C(F') = T(F') \cdot 1_C.$$

La dimension de l'orbite T_C est égale à celle de la face correspondante C de $X_{\overline{T}}$.

- (iii) Une orbite T_C est contenue dans l'adhérence $\overline{T}_{C'}$ d'une orbite $T_{C'}$ si et seulement si C est contenue dans C' et donc est une face de celle-ci.

□

Ce lemme permet d'énoncer la proposition suivante, dont nous allons montrer qu'elle entraîne le théorème II.25(ii) avant de la prouver elle-même :

Proposition II.27. –

Sous les hypothèses du théorème II.25, on peut écrire pour toute ρ_T -fonction φ sur $T(\mathbb{A})$

$$" \sum_{\gamma \in \overline{T}(F)} \varphi(\gamma) " = \sum_{\gamma \in T(F)} \varphi(\gamma) + \sum_{\substack{k \geq 1 \\ C_1, C_2, \dots, C_k}} \sum_{\gamma \in T_{C_k}(F)} \varphi_{C_1, C_2, \dots, C_k}(\gamma)$$

où :

- Les $C_1, C_2, \dots, C_k$ décrivent les chaînes de faces définies sur F du cône convexe polyédral $C_0 = X_{\overline{T}}$ telles que, pour $1 \leq i \leq k$, C_i est une face de codimension 1 de C_{i-1} ,
- chaque $\varphi_{C_1, C_2, \dots, C_k}$ est une fonction continue sur la strate $T_{C_k}(\mathbb{A})$ qui se déduit de la fonction $\varphi_{C_1, \dots, C_{k-1}}$ sur $T_{C_{k-1}}(\mathbb{A})$ par un certain opérateur linéaire,

- pour tout point $t \in T_{C_k}(\mathbb{A})$, la valeur de la fonction $\varphi_{C_1, \dots, C_k}$ en le point t ne dépend que des restrictions de la fonction $\varphi_{C_1, \dots, C_{k-1}}$ à des voisinages arbitrairement petits de t dans $\overline{T}_{C_{k-1}}(\mathbb{A})$.

Démonstration du théorème II.25(ii) à partir de la proposition II.27 :

On considère donc un élément rationnel $c \in E_\chi$.

Comme F est un corps de fonctions, la fonction $\mathbb{I}_{\chi, c}$ vaut 1 au voisinage de tout point rationnel $\gamma \in \overline{T}(F)$.

On voit alors, en procédant par récurrence sur k , que les fonctions $\varphi_{C_1, \dots, C_k}$ et $(\mathbb{I}_{\chi, c} \cdot \varphi)_{C_1, \dots, C_k}$ que la proposition II.27 associe aux ρ_T -fonctions globales φ et $\mathbb{I}_{\chi, c} \cdot \varphi$ sur $T(\mathbb{A})$, coïncident dans un voisinage suffisamment petit de tout point rationnel $\gamma \in \overline{T}_{C_k}(F)$.

Cela réduit le théorème II.25(ii) à :

Démonstration de la proposition II.27 :

On considère une ρ_T -fonction globale φ sur $T(\mathbb{A})$. Elle est invariante par un sous-groupe ouvert compact

$$K = \prod_{x \in |F|} K_x$$

de $T(\mathbb{A})$. On peut supposer que φ est un produit

$$\varphi = \bigotimes_{x \in |F|} \varphi_x$$

de ρ_T -fonctions locales invariantes par les K_x

$$\varphi_x : T(F_x) \rightarrow \mathbb{C}.$$

En toute place x de F , la fonction φ_x se décompose spectralement sous la forme

$$\varphi_x(\bullet) = |\det_T(\bullet)|_x^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{\text{Im } \{\pi\}_{x, K_x}^T} d\chi \cdot \chi(\bullet) \cdot L_x \left(\rho_T, \chi^{-1}, q_x^{-\frac{1}{2}} \right) \cdot p_x(\chi)$$

où p_x désigne une fonction polynomiale sur $\{\pi\}_{x, K_x}^T$. De plus, en presque toute place x , le tore T est non ramifié, on a $K_x = T(O_x)$ et le polynôme p_x est uniformément égal à 1 sur $\{\pi\}_{x, K_x}^T = \{\pi\}_{x, \emptyset}^T$.

Le polynôme produit $p = \prod_{x \in |F|} p_x$ est bien défini sur

$$\prod_{x \in |F|} \{\pi\}_{x, K_x}^T$$

et donc sur le sous-groupe algébrique

$$\{\pi\}_K^{T, \text{aut}}$$

des caractères automorphes invariants par K

$$\chi : T(F) \backslash T(\mathbb{A}) / K \rightarrow \mathbb{C}^\times.$$

On sait que

$$\sum_{\gamma \in T(F)} \varphi(\gamma) = \int_{\text{Im } \{\pi\}_K^{T, \text{aut}}} d\chi \cdot p(\chi \otimes |\det_T(\bullet)|^{-s}) \cdot L \left(\rho_T, \chi^{-1}, \frac{1}{2} + s \right)$$

pour tout réel $s > \frac{1}{2}$.

De même, on a

$$\sum_{\gamma \in T(F)} \widehat{\varphi}(\gamma) = \int_{\text{Im}\{\pi\}_K^{T, \text{aut}}} d\chi \cdot p(\chi \otimes |\det_T(\bullet)|^{-s}) \cdot L\left(\rho_T, \chi^{-1}, \frac{1}{2} + s\right)$$

pour tout réel $s < -\frac{1}{2}$.

Enfin on a avec les notations du théorème II.13

$$S(\varphi) = \int_{\text{Im}\{\pi\}_K^{T, \text{aut}}} d\chi \cdot p(\chi) \cdot L\left(\rho_T, \chi^{-1}, \frac{1}{2}\right).$$

La différence

$$\left(\sum_{\gamma \in \overline{T}(F)} \varphi(\gamma) \right) - \sum_{\gamma \in T(F)} \varphi(\gamma) = \sum_{\gamma \in T(F)} \widehat{\varphi}(\gamma) - S(\varphi)$$

se calcule donc par déplacement du contour d'intégration

$$\int_{\text{Im}\{\pi\}_K^{T, \text{aut}}} d\chi \cdot p(\chi \otimes |\det_T(\bullet)|^{-s}) \cdot L\left(\rho_T, \chi^{-1}, \frac{1}{2} + s\right)$$

entre les $s < -\frac{1}{2}$ et $s = 0$. Elle est égale à la somme des résidus de la fonction méromorphe

$$p(\chi \otimes |\det_T(\bullet)|^{-s}) \cdot L\left(\rho_T, \chi^{-1}, \frac{1}{2} + s\right)$$

calculés le long des pôles de la fonction

$$L\left(\rho_T, \chi^{-1}, \frac{1}{2} + s\right)$$

dans le demi-plan $s < 0$.

Or on a pour tout caractère automorphe χ de T

$$L\left(\rho_T, \chi^{-1}, \frac{1}{2} + s\right) = L\left(\chi^{-1} \circ \rho_T^\vee, \frac{1}{2} + s\right).$$

La proposition II.27 et donc aussi le théorème II.25 résultent du corollaire qui suit le théorème bien connu :

Théorème II.28. –

Que F soit un corps de fonctions ou un corps de nombres, écrivons son extension séparable E comme un produit de corps

$$E = E_1 \times \dots \times E_k.$$

Alors pour tout caractère automorphe $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_k)$ de $T_E(\mathbb{A}) = \mathbb{A}_{E_1}^\times \times \dots \times \mathbb{A}_{E_k}^\times$, on a

$$L\left(\chi^{-1}, \frac{1}{2} + s\right) = L\left(\chi_1^{-1}, \frac{1}{2} + s\right) \dots L\left(\chi_k^{-1}, \frac{1}{2} + s\right)$$

et chaque facteur

$$L\left(\chi_i^{-1}, \frac{1}{2} + s\right)$$

a au plus deux pôles simples, en

$$\chi_i = |\det_{E_i}(\bullet)|^{\frac{1}{2} + s}$$

et

$$\chi_i = |\det_{E_i}(\bullet)|^{-\frac{1}{2}+s}.$$

□

Corollaire II.29. –

Que F soit un corps de fonctions ou un corps de nombres, considérons les fonctions analytiques

$$L\left(\rho_T, \chi^{-1}, \frac{1}{2} + s\right) = L\left(\rho_T, \chi^{-1} \otimes |\det_T(\bullet)|^s, \frac{1}{2}\right)$$

en les caractères automorphes χ de $T(\mathbb{A})$ et $s \in \mathbb{C}$.

Alors les pôles de ces fonctions analytiques rencontrés en partant du contour formé par les caractères χ unitaires et $s = 0$ pour aller vers $s < -\frac{1}{2}$ consistent en une réunion d'hypersurfaces dont les intersections mutuelles sont indexées par les faces C de $X_{\overline{T}}$ définies sur F .

Pour toute telle face C , l'intersection correspondante consiste en les $\chi^{-1} \otimes |\det_T(\bullet)|^s$ tels que le caractère

$$\chi^{-1} \otimes |\det_T(\bullet)|^{s+\frac{1}{2}}$$

soit trivial sur le fixateur dans $T(\mathbb{A})$ du point base 1_C de C , donc définisse une fonction sur l'orbite

$$T_C(\mathbb{A})$$

nécessairement invariante par $T(F)$.

Démonstration :

Ce corollaire est une conséquence immédiate du théorème II.28 dans le cas où $T = T_E$ et ρ_T est la représentation standard de $\widehat{T}_E \rtimes \Gamma_F$ avec donc $\overline{T} = \overline{T}_E$.

Le cas général résulte de ce que :

- les fonctions $L(\rho_T, \chi^{-1}, \frac{1}{2} + s)$ en les caractères automorphes χ de $T(\mathbb{A})$ se définissent par restriction des fonctions $L(\chi^{-1}, \frac{1}{2} + s)$ en les caractères automorphes χ de $T_E(\mathbb{A}) = \mathbb{A}_E^\times$, si bien que les pôles des premières se déduisent de ceux des secondes par intersection,
- les faces C de $X_{\overline{T}}$ définies sur F sont les intersections avec le sous-réseau X_T de $X_{\overline{T}_E}$ des faces de $X_{\overline{T}_E}$ définies sur F .

Cela termine la démonstration du corollaire II.29, donc aussi de la proposition II.27 et du théorème II.25.

□

Considérons maintenant le cas où F est un corps de nombres.

On a d'abord l'analogie suivant de la proposition II.23 en les places archimédiennes :

Proposition II.30. –

Soit x une place archimédienne de F .

Alors les opérateurs de multiplication par les χ -fonctions unitaires

$$\mathbb{I}_{\chi, c_x} : \overline{T}(F_x) \rightarrow S_1, \quad \chi \in X_{\overline{T}}, \quad c_x \in E_{\chi, x},$$

préservent l'espace des ρ_T -fonctions locales sur $T(F_x)$ au sens du corollaire II.12.

Démonstration :

La même suite d'arguments que dans la démonstration de la proposition II.23 nous ramène au cas où $T = T_E$, ρ_T est la représentation standard de $\widehat{T}_E \rtimes \Gamma_F$ et $\overline{T} = \overline{T}_E$.

Sur E_x , $\mathbb{I}_{\chi, c_x} \circ \rho_T^\vee$ est la composée du caractère additif unitaire ψ_x et d'une fonction polynomiale. L'opérateur de multiplication par cette fonction préserve l'espace des fonctions de classe C^∞ à décroissance rapide sur E_x comme on l'avait noté dans la remarque (iii) après la définition II.10. □

On peut maintenant démontrer le parallèle suivant du théorème II.25 :

Théorème II.31. –

Supposons que F est un corps de nombres.

Alors, pour tout caractère $\chi \in X_{\overline{T}}$, les opérateurs de multiplication par les χ -fonctions unitaires

$$\mathbb{I}_{\chi, c} = \prod_{x \in |F|} \mathbb{I}_{\chi, c_x} : \overline{T}(\mathbb{A}) \rightarrow S_1, \quad c = (c_x)_{x \in |F|} \in \mathbb{A}_{E_\chi},$$

vérifient les propriétés suivantes :

- (i) *Ils stabilisent l'espace des ρ_T -fonctions globales sur $T(\mathbb{A})$.*
- (ii) *Lorsque $c \in E_\chi$, ils laissent invariante la fonctionnelle de Poisson*

$$\varphi \mapsto " \sum_{\gamma \in \overline{T}(F)} \varphi(\gamma) "$$

sur l'espace des ρ_T -fonctions globales sur $T(\mathbb{A})$.

Démonstration :

- (i) D'après la proposition II.23 [resp. II.30], l'opérateur de multiplication par $\mathbb{I}_{\chi, c_x}$ respecte l'espace des ρ_T -fonctions locales sur $T(F_x)$ en toute place ultramétrique [resp. archimédienne] x de F .

On conclut en remarquant que, de plus, la fonction $\mathbb{I}_{\chi, c_x}$ vaut 1 sur le support $\overline{T}(O_x)$ de la ρ_T -fonction standard en presque toute place ultramétrique x non ramifiée pour T et ρ_T .

- (ii) La conclusion résulte de la proposition suivante :

Proposition II.32. –

Si F est un corps de nombres, toute ρ_T -fonction globale φ sur $T(\mathbb{A})$ au sens du théorème II.17(3) vérifie toutes les propriétés de la proposition II.27, avec donc

$$" \sum_{\gamma \in \overline{T}(F)} \varphi(\gamma) " = \sum_{\gamma \in T(F)} \varphi(\gamma) + \sum_{\substack{k \geq 1 \\ C_1, C_2, \dots, C_k}} \sum_{\gamma \in T_{C_k}(F)} \varphi_{C_1, \dots, C_k}(\gamma).$$

De plus, les valeurs

$$\sum_{\gamma \in T_{C_k}(F)} \varphi_{C_1, \dots, C_k}(\gamma)$$

ne changent pas si l'on remplace φ par son produit

$$\varphi \cdot \mathbb{I}_{\chi, c}$$

par une χ -fonction unitaire

$$\mathbb{I}_{\chi, c} = \prod_{x \in |F|} \mathbb{I}_{\chi, c_x} : \overline{T}(\mathbb{A}) \rightarrow S_1$$

associée à un élément rationnel $c = (c_x)_{x \in |F|} \in E_\chi$.

Démonstration de la proposition :

On considère une ρ_T -fonction globale $\varphi : T(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$. Elle est invariante par un sous-groupe ouvert compact K de $T(\mathbb{A}_f)$.

On dispose des fonctions analytiques

$$\mathbb{C} \ni s \mapsto L(\rho_T, \varphi, \chi, s)$$

associées dans la proposition II.17 à tout caractère continu automorphe invariant par K

$$\chi : K \backslash T(\mathbb{A}) / T(F) \rightarrow \mathbb{C}^\times.$$

On sait que

$$\sum_{\gamma \in T(F)} \varphi(\gamma) = \int_{\text{Im } \{\pi\}_K^{T, \text{aut}}} d\chi \cdot L\left(\rho_T, \varphi, \chi^{-1}, \frac{1}{2} + s\right)$$

pour tout réel $s > \frac{1}{2}$.

De même, on a

$$\sum_{\gamma \in T(F)} \widehat{\varphi}(\gamma) = \int_{\text{Im } \{\pi\}_K^{T, \text{aut}}} d\chi \cdot L\left(\rho_T, \varphi, \chi^{-1}, \frac{1}{2} + s\right)$$

pour tout réel $s < -\frac{1}{2}$.

Enfin, on a avec les notations du théorème II.13

$$S(\varphi) = \int_{\text{Im } \{\pi\}_K^{T, \text{aut}}} d\chi \cdot L\left(\rho_T, \varphi, \chi^{-1}, \frac{1}{2}\right).$$

La différence

$$\left(\sum_{\gamma \in \overline{T}(F)} \varphi(\gamma) \right) - \sum_{\gamma \in T(F)} \varphi(\gamma) = \sum_{\gamma \in T(F)} \widehat{\varphi}(\gamma) - S(\varphi)$$

se calcule donc par déplacement des contours d'intégration

$$\int_{\text{Im } \{\pi\}_K^{T, \text{aut}}} d\chi \cdot L\left(\rho_T, \varphi, \chi^{-1}, \frac{1}{2} + s\right)$$

entre les $s < -\frac{1}{2}$ et $s = 0$. Elle est égale à la somme des résidus de la fonction méromorphe

$$L\left(\rho_T, \varphi, \chi^{-1}, \frac{1}{2} + s\right)$$

calculés le long de ses pôles dans le demi-plan $s < 0$.

Rappelons que, par définition, la ρ_T -fonction globale φ est une combinaison linéaire de translatées par des éléments de $T(\mathbb{A})$ de fonctions images par $\rho_T^\vee$

$$(\rho_T^\vee)_* f$$

de fonctions $f : \overline{T}_E(\mathbb{A}) = \mathbb{A}_E \rightarrow \mathbb{C}$ qui sont de classe C^∞ à décroissance rapide en les places archimédiennes. Dans le cas où $\varphi = (f_T^\vee)_*$, on a pour tout caractère automorphe χ de T

$$L(\rho_T, \varphi, \chi, s) = L(\rho_E, f, \chi \circ \rho_T^\vee, s), \quad \forall s \in \mathbb{C}.$$

Cette observation permet de déduire du théorème suivant, qui est tiré de la thèse de Tate, le corollaire qui le suit :

Théorème II.33. –

Si F est un corps de nombres, écrivons son extension séparable E comme un produit de corps

$$E = E_1 \times \dots \times E_k.$$

Alors, pour toute ρ_E -fonction globale produit sur $\overline{T}_E(\mathbb{A}) = \mathbb{A}_E$

$$f = \prod_{x \in |F|} f_x : \mathbb{A}_E = \prod_{x \in |F|} E_x \rightarrow \mathbb{C},$$

où chaque facteur $f_x : E_x \rightarrow \mathbb{C}$ est localement constant à support compact [resp. de classe C^∞ à décroissance rapide] si x est une place ultramétrique [resp. archimédienne], la fonction analytique

$$L\left(\rho_E, f, \chi^{-1}, \frac{1}{2} + s\right)$$

de $s \in \mathbb{C}$ et des caractères automorphes $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_k)$ de $T_E(\mathbb{A}) = \mathbb{A}_{E_1}^\times \times \dots \times \mathbb{A}_{E_k}^\times$ a au plus des pôles simples, qui sont définis par les équations

$$\chi_i = |\det_{E_i}(\bullet)|^{\frac{1}{2}+s} \quad \text{ou} \quad \chi_i = |\det_{E_i}(\bullet)|^{-\frac{1}{2}+s}, \quad 1 \leq i \leq k.$$

□

Corollaire II.34. –

Si F est un corps de nombres et $\varphi : T(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ une ρ_T -fonction globale, considérons les fonctions analytiques

$$L\left(\rho_T, \varphi, \chi^{-1}, \frac{1}{2} + s\right)$$

en les caractères automorphes χ de $T(\mathbb{A})$ et $s \in \mathbb{C}$.

Alors les pôles de ces fonctions analytiques rencontrés en partant du contour formé par les caractères χ unitaires et $s = 0$ pour aller vers $s < -\frac{1}{2}$ consistent en une réunion d'hypersurfaces dont les intersections mutuelles sont indexées par les faces C de $X_{\overline{T}}$ définies sur F .

Pour toute telle face C , l'intersection correspondante consiste en les $\chi^{-1} \otimes |\det_T(\bullet)|^s$ tels que le caractère

$$\chi^{-1} \otimes |\det_T(\bullet)|^{s+\frac{1}{2}}$$

soit trivial sur le fixateur dans $T(\mathbb{A})$ du point base 1_C de C , donc définisse une fonction sur l'orbite

$$T_C(\mathbb{A})$$

nécessairement invariante par $T(F)$.

□

Fin de la démonstration de la proposition II.32 :

Il reste à démontrer que pour toute chaîne $C_1, C_2, \dots, C_k$ comme dans les énoncés des propositions II.27 et II.32, la forme linéaire qui associe à toute ρ_T -fonction globale φ sur $T(\mathbb{A})$ la somme

$$\sum_{\gamma \in T_{C_k}(F)} \varphi_{C_1, \dots, C_k}(\gamma)$$

est invariante par l'opérateur de multiplication par

$$\mathbb{I}_{\chi, c} : \overline{T}(\mathbb{A}) \rightarrow S_1$$

si $c \in E_\chi$ est un élément rationnel.

L'opérateur linéaire qui définit la fonction

$$C_k(\mathbb{A}) \ni t \mapsto \sum_{\gamma \in T_{C_k}(F)} \varphi_{C_1, \dots, C_k}(\gamma t)$$

à partir de la fonction

$$C_{k-1}(\mathbb{A}) \ni t \mapsto \sum_{\gamma \in T_{C_{k-1}}(F)} \varphi_{C_1, \dots, C_{k-1}}(\gamma t)$$

est donné par un calcul de résidus des fonctions

$$L\left(\rho_T, \varphi, \chi^{-1}, \frac{1}{2} + s\right)$$

le long de ceux de ses pôles dont les équations définissent la face C_k de C_{k-1} .

Notons donc I l'ensemble des indices i , $1 \leq i \leq r$, tels que la forme

$$X_{\overline{T}} \ni \mu \mapsto \langle \mu, \rho_T^i \rangle \in \mathbb{N}$$

associée au cocaractère $\rho_T^i \in X_T^\vee$ ne soit pas uniformément nulle sur la face C_{k-1} de $X_{\overline{T}}$ mais le soit sur la face C_k de C_{k-1} .

Cet ensemble I est stable par l'action du groupe de Galois Γ_F , et l'ordre m des pôles considérés est égal à une somme sur les orbites de Γ_F dans I de multiplicités $m_i \geq 1$.

Considérons la restriction du caractère considéré $\chi \in X_{\overline{T}}$ à la strate $\overline{T}_{C_{k-1}}$ de $\overline{T}$.

Si cette restriction est 0, la fonction $\mathbb{I}_{\chi, c}$ vaut uniformément 1 sur $\overline{T}_{C_{k-1}}(\mathbb{A})$ et l'opérateur

$$\varphi_{C_1, \dots, C_{k-1}} \mapsto \varphi_{C_1, \dots, C_k}$$

commute avec la multiplication par $\mathbb{I}_{\chi, c}$.

Si au contraire la restriction de χ à $\overline{T}_{C_{k-1}}$ n'est pas nulle,

$$t \cdot 1_{C_{k-1}} \mapsto \chi(t \cdot 1_{C_{k-1}})$$

est un caractère χ' du tore $T_{C_{k-1}}$ quotient de T , et tous les entiers $\langle \chi', \rho_T^i \rangle$, $i \in I$, sont tous 0 ou tous $\geq m_i$.

S'ils valent tous 0, la fonction $\mathbb{I}_{\chi, c}$ ne dépend pas de la coordonnée qui définit T_{C_k} dans $\overline{T}_{C_{k-1}}$, si bien que l'opérateur

$$\varphi_{C_1, \dots, C_{k-1}} \mapsto \varphi_{C_1, \dots, C_k}$$

commute avec la multiplication par $\mathbb{I}_{\chi, c}$.

Sinon, la fonction $\mathbb{I}_{\chi, c_x}$ en chaque place x est la composée du caractère additif $\psi_x \circ \text{Tr}$ et d'un caractère multiplicatif dont la dépendance en la coordonnée Z qui définit T_{C_k} dans $\overline{T}_{C_{k-1}}$ est de la forme

$$Z \mapsto Z^{m'} \quad \text{avec} \quad m' \geq m.$$

En les places ultramétriques, et comme dans le cas des corps de fonctions, la fonction $\mathbb{I}_{\chi, c_x}$ ne dépend plus de la coordonnée Z si Z devient assez petit.

En les places archimédiennes, le premier terme non constant dans le développement en Z de la fonction $\mathbb{I}_{\chi, c_x}$ est d'ordre m' qui est au moins égal à l'ordre m du pôle en lequel sont calculés les résidus. Donc l'opérateur

$$\varphi_{C_1, \dots, C_{k-1}} \mapsto \varphi_{C_1, \dots, C_k}$$

commute avec la multiplication par $\mathbb{I}_{\chi, c}$.

Comme $\mathbb{I}_{\chi, c}(\gamma) = 1$, $\forall \gamma \in \overline{T}(F)$, cela termine la démonstration de la proposition II.32 et donc aussi du théorème II.31.

□

Chapitre III.

Au-delà des tores ?

1 Semi-groupes

On commence par rappeler des résultats généraux sur les semi-groupes des groupes réductifs.

Définition III.1. –

Etant donné un groupe réductif G sur un corps k , un semi-groupe $\overline{G}$ de groupe G est une variété affine intègre qui contient G comme ouvert dense et telle que le morphisme de multiplication

$$G \times G \rightarrow G$$

se prolonge en un morphisme

$$\overline{G} \times \overline{G} \rightarrow \overline{G}.$$

Exemple :

Pour tout entier $r \geq 1$, M_r est un semi-groupe de GL_r .

□

On a le résultat classique :

Théorème III.2. –

Soit G un groupe réductif quasi-déployé sur un corps k , muni d'une paire de Borel (T, B) .

Alors :

- (i) *Se donner un semi-groupe géométriquement normal $\overline{G}$ de groupe G sur k équivaut à se donner un cône convexe polyédral saturé*

$$X_{\overline{T}} \subset X_T$$

stable par l'action de groupe de Weyl W_G de G et par celle du groupe de Galois Γ_k de k ou, ce qui revient au même, son cône dual

$$X_{\overline{T}}^\vee = \{\mu \in X_T^\vee \mid \langle \chi, \mu \rangle \geq 0, \forall \chi \in X_{\overline{T}}\}.$$

- (ii) *Dans la correspondance de (i), la variété torique géométriquement normale $\overline{T}$ de tore T associée à $X_{\overline{T}} \subset X_T$ s'identifie à l'adhérence schématique de T dans $\overline{G}$.*
- (iii) *Dans la correspondance de (i), et si $N_B, N_{B^{\mathrm{op}}}$ désignent les radicaux unipotents de B et du sous-groupe de Borel B^{op} opposé de B , la variété quotient*

$$N_{B^{\mathrm{op}}} \backslash \overline{G} / N_B = \overline{T}^+$$

munie de l'action de T à gauche ou à droite, s'identifie à la variété torique géométriquement normale associée au cône saturé

$$X_{\overline{T}^+} \subset X_{\overline{T}} \subset X_T$$

constitué des $\chi \in X_{\overline{T}}$ qui sont dominants, c'est-à-dire vérifient

$$\langle \alpha^\vee, \chi \rangle \geq 0, \quad \forall \alpha \in \Phi_G^+,$$

où Φ_G^+ désigne l'ensemble des racines positives de G muni de B . □

Etant donné un groupe réductif quasi-déployé G sur un corps k muni d'une paire de Borel (T, B) , on sait que les représentations irréductibles de G

$$G \rightarrow \mathrm{GL}_r$$

(définies sur une clôture séparable de k) correspondent bijectivement aux caractères $\chi \in X_{\overline{T}}$ qui sont dominants.

Les images par l'action de Γ_k d'un tel caractère dominant $\chi \in X_{\overline{T}}$ sont encore des caractères dominants. Leur ensemble muni de l'action de Γ_k définit une extension finie séparable k_χ de k , et la collection des représentations irréductibles associées

$$G \rightarrow \mathrm{GL}_{r_\chi}$$

définit un homomorphisme de groupes réductifs sur k

$$G \rightarrow \mathrm{Res}_{k_\chi/k} \mathrm{GL}_{r_\chi}.$$

Le théorème III.2 est complété par la proposition suivante :

Proposition III.3. –

Considérons comme dans le théorème III.2 un groupe réductif quasi-déployé G sur un corps k muni d'une paire de Borel (T, B) .

Soit $X_{\overline{T}} \subset X_T$ un cône convexe polyédral saturé stable par les actions de W_G et de Γ_k , et soit $\overline{G}$ le semi-groupe géométriquement normal de groupe G qui lui correspond.

Alors :

- (i) Pour tout caractère $\chi \in X_{\overline{T}^+}$ de $X_{\overline{T}}$ qui est dominant, l'homomorphisme bien défini sur k associé à χ

$$G \rightarrow \mathrm{Res}_{k_\chi/k} \mathrm{GL}_{r_\chi}$$

se prolonge en un morphisme équivariant

$$\overline{G} \rightarrow \mathrm{Res}_{k_\chi/k} M_{r_\chi}.$$

- (ii) Si χ décrit un ensemble fini d'éléments de $X_{\overline{T}^+}$ dont les transformés par la double action de W_G et de Γ_k engendrent le cône $X_{\overline{T}}$, alors le morphisme produit

$$\overline{G} \rightarrow \prod_{\chi} \mathrm{Res}_{k_\chi/k} M_{r_\chi}$$

est une immersion fermée. □

Cette proposition implique :

Corollaire III.4. –

Dans les conditions de la proposition précédente, on a :

- (i) Tout caractère $\chi \in X_{\overline{T}^+} \subset X_{\overline{T}}$ et ses images par l'action de Γ_k définissent un morphisme équivariant pour la double action du tore maximal T

$$\chi_k : \overline{G} \rightarrow N_{B^{\text{op}}} \backslash \overline{G} / N_B = \overline{T}^+ \rightarrow \text{Res}_{k_{\chi}/k} \mathbb{A}^1.$$

- (ii) Si χ décrit un ensemble fini d'éléments de $X_{\overline{T}^+}$ dont les transformés par l'action de Γ_k engendrent le cône $X_{\overline{T}^+}$, et si $w, w' \in G(k)$ décrivent deux ensembles de représentants du groupe de Weyl k -rationnel

$$W_G^k = \{w \in W_G \mid \sigma(w) = w, \forall \sigma \in \Gamma_k\},$$

alors le morphisme produit

$$\prod_{\chi, (w, w')} \chi_k(w \bullet w') : \overline{G} \rightarrow \prod_{\chi, (w, w')} \text{Res}_{k_{\chi}/k} \mathbb{A}^1$$

est une immersion fermée. □

Ces résultats généraux étant admis, on revient comme dans les chapitres I et II à la donnée de :

- un groupe réductif G quasi-déployé sur un corps global F , muni d'une paire de Borel (T, B) et d'un caractère
$$\det_T : G \rightarrow \mathbb{G}_m,$$
 - une représentation de transfert supposée régulière
$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \widehat{\text{GL}}_r = \text{GL}_r(\mathbb{C})$$
- qui donc induit un homomorphisme Γ_F -équivariant
- $$\rho_T = (\rho_T^1, \dots, \rho_T^r) : \widehat{T} \rightarrow \widehat{T}_r = (\mathbb{C}^\times)^r = \widehat{T}_E$$
- dual d'un homomorphisme de tores sur T
- $$\rho_T^\vee : T_E = \text{Res}_{E/F} \mathbb{G}_m \rightarrow T$$
- qui s'inscrit dans une suite exacte de tores
- $$1 \longrightarrow T_\rho \longrightarrow T_E \xrightarrow{\rho_T^\vee} T \longrightarrow 1.$$

La famille des caractères

$$\rho_T^i \in X_{\widehat{T}} = X_T^\vee, \quad 1 \leq i \leq r,$$

est stable par la double action du groupe de Weyl $W_G = W_{\widehat{G}}$ et de Γ_F , ce qui permet de poser :

Définition III.5. –

Etant donnés comme ci-dessus un groupe réductif G quasi-déployé sur un corps global F et une représentation de transfert régulière

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \text{GL}_r(\mathbb{C}),$$

on appellera “semi-groupe dual de ρ ” le semi-groupe géométriquement normal $\overline{G}$ de groupe G associé au cône saturé stable par les actions de $W_G = W_{\widehat{G}}$ et de Γ_F

$$X_{\overline{T}} = \{\chi \in X_T \mid \langle \chi, \rho_T^i \rangle \geq 0, \quad 1 \leq i \leq r\}.$$

Remarque :

Le semi-groupe $\overline{G}$ associé à ρ avait déjà été introduit par Braverman et Kazhdan. $\square$

Pour tout élément χ de $X_{\overline{T}^+}$, on a noté E_χ l'extension finie séparable de F qui correspond à l'action de Γ_F sur l'orbite de χ .

D'après le corollaire III.4, on dispose des morphismes équivariants

$$\chi_F : \overline{G} \rightarrow N_{B^{\text{op}}} \backslash \overline{G} / N_B = \overline{T}^+ \rightarrow \text{Res}_{E_\chi/F} \mathbb{A}^1.$$

Si χ décrit un ensemble fini d'éléments de $X_{\overline{T}^+}$ dont les transformés par l'action de Γ_F engendrent $X_{\overline{T}^+}$ en tant que cône, le morphisme produit

$$\prod_{\chi} \chi_F : \overline{T}^+ \rightarrow \text{Res}_{E_\chi/F} \mathbb{A}^1$$

est une immersion fermée.

De plus, on a le cas particulier suivant du corollaire III.4 (ii) :

Corollaire III.6. –

Soit $\overline{G}$ le semi-groupe dual d'une représentation de transfert régulière

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \text{GL}_r(\mathbb{C})$$

d'un groupe réductif G quasi-déployé sur un corps global F , muni d'une paire de Borel (T, B) .

Si χ décrit un ensemble fini d'éléments de $X_{\overline{T}^+}$ dont les transformés par l'action de Γ_F engendrent $X_{\overline{T}^+}$ en tant que cône, et si $w, w' \in G(F)$ décrivent deux ensembles de représentants du groupe de Weyl F -rationnel

$$W_G^F = \{w \in W_G \mid \sigma(w) = w, \forall \sigma \in \Gamma_F\},$$

alors le morphisme produit

$$\prod_{\chi, (w, w')} \chi_F(w \bullet w') : \overline{G} \rightarrow \prod_{\chi, (w, w')} \text{Res}_{E_\chi/F} \mathbb{A}^1$$

est une immersion fermée.

Autrement dit, les $\chi_F(w \bullet w')$ définissent un système de coordonnées sur $\overline{G}$. $\square$

2 Des fonctions unitaires sur les semi-groupes

On considère toujours le semi-groupe $\overline{G}$ dual d'une représentation de transfert régulière

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \text{GL}_r(\mathbb{C})$$

d'un groupe réductif G quasi-déployé sur un corps global F , muni d'une paire de Borel (T, B) .

Comme on a vu au paragraphe précédent, les caractères $\chi \in X_{\overline{T}^+}$ définissent des morphismes équivariants

$$\chi_F : \overline{G} \rightarrow N_{B^{\text{op}}} \backslash \overline{G} / N_B = \overline{T}^+ \rightarrow \text{Res}_{E_\chi/F} \mathbb{A}^1$$

qui généralisent ceux introduits dans le lemme II.21(i) du paragraphe II.5 dans le cas des tores.

L'existence de ces morphismes équivariants permet de proposer la généralisation suivante des fonctions unitaires introduites dans les définitions II.22 et II.24 du paragraphe II.5 :

Définition III.7. –

On considère toujours le semi-groupe dual $\overline{G}$ d'une représentation de transfert régulière ρ d'un groupe réductif G quasi-déployé sur un corps global F , muni d'une paire de Borel (T, B) , et la variété torique normale de tore T associée

$$\overline{T}^+ = N_{B^{\text{op}}} \backslash \overline{G} / N_B.$$

A tout caractère $\chi \in X_{\overline{T}^+}$ sont associées des χ -fonctions unitaires locales et globales définies comme suit :

(i) En toute place $x \in |F|$, on appellera χ -fonctions unitaires sur $\overline{G}(F_x)$ les fonctions

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{\chi, c_x}^G &: \overline{G}(F_x) \xrightarrow{\chi_F} (\text{Res}_{E_\chi/F} \mathbb{A}^1)(F_x) = E_\chi \otimes_F F_x = E_{\chi, x} \rightarrow S_1 \\ g &\mapsto \psi_x(\text{Tr}(c_x \cdot \chi_F(g))) \end{aligned}$$

indexées par les éléments

$$c_x \in E_{\chi, x} = E_\chi \otimes_F F_x.$$

Autrement dit, ce sont les composées

$$\overline{G}(F_x) \xrightarrow{\chi_F} E_{\chi, x} \xrightarrow{c_x \cdot \bullet} E_{\chi, x} \xrightarrow{\text{Tr}} F_x \xrightarrow{\psi_x} S_1.$$

(ii) De même, on appellera χ -fonctions unitaires sur $\overline{G}(\mathbb{A})$ les fonctions

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{\chi, c}^G &: \overline{G}(\mathbb{A}) \xrightarrow{\chi_F} (\text{Res}_{E_\chi/F} \mathbb{A}^1)(\mathbb{A}) = E_\chi \otimes_F \mathbb{A} = \mathbb{A}_{E_\chi} \rightarrow S_1 \\ g &\mapsto \psi(\text{Tr}(c \cdot \chi_F(g))) \end{aligned}$$

indexées par les éléments

$$c = (c_x)_{x \in |F|} \in \mathbb{A}_{E_\chi} = E_\chi \otimes_F \mathbb{A}.$$

Autrement dit, ce sont les composées

$$\overline{G}(\mathbb{A}) \xrightarrow{\chi_F} \mathbb{A}_{E_\chi} \xrightarrow{c \cdot \bullet} \mathbb{A}_{E_\chi} \xrightarrow{\text{Tr}} \mathbb{A} \xrightarrow{\psi} S_1$$

ou, si l'on préfère, les fonctions produits

$$\mathbb{I}_{\chi, c}^G = \prod_{x \in |F|} \mathbb{I}_{\chi, c_x}^G : \overline{G}(\mathbb{A}) = \prod_{x \in |F|} \overline{G}(F_x) \rightarrow S_1.$$

□

On déduit du corollaire III.6 :

Corollaire III.8. –

Dans les conditions de la définition III.7, les χ -fonctions unitaires globales $\mathbb{I}_{\chi, c}^G : \overline{G}(\mathbb{A}) \rightarrow S_1$ associées aux caractères $\chi \in X_{\overline{T}^+}$ possèdent les propriétés suivantes :

(i) Pour tout caractère $\chi \in X_{\overline{T}^+}$ et tout élément rationnel

$$c \in E_\chi \subset \mathbb{A}_{E_\chi},$$

tout point rationnel

$$\gamma \in \overline{G}(F)$$

vérifie l'égalité

$$\mathbb{I}_{\chi, c}^G(\gamma) = 1.$$

- (ii) Réciproquement, supposons que χ décrit un ensemble fini d'éléments de $X_{\overline{T}^+}$ dont les transformés par l'action de Γ_F engendrent le cône $X_{\overline{T}^+}$, et que $w, w' \in G(F)$ décrivent deux ensembles de représentants du groupe de Weyl F -rationnel de $\overline{G}$

$$W_G^F = \{w \in W_G \mid \sigma(w) = w, \forall \sigma \in \Gamma_F\}.$$

Alors tout élément $g \in \overline{G}(\mathbb{A})$ tel que

$$\mathbb{I}_{\chi, c}^G(wgw') = 1, \quad \forall \chi, \quad \forall (w, w'), \quad \forall c \in E_\chi,$$

est un point rationnel, élément de $\overline{G}(F)$. □

3 Définition conjecturale des ρ -fonctions locales

On considère désormais un triplet constitué de

- un groupe réductif G quasi-déployé sur un corps global F , muni d'une paire de Borel (T, B) et d'un caractère
$$\det_T : G \rightarrow \mathbb{G}_m,$$
 - une représentation de transfert $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ supposée régulière,
 - une famille de caractères
$$\det_G, \det_{M_P} = \det_G \cdot \det_P^{-1} : G \rightarrow \mathbb{G}_m$$
- indexés par les sous-groupes paraboliques standard $P \supseteq B$ de G .

On dispose de l'homomorphisme de tores sur F

$$\rho_T^\vee : T_E \rightarrow T$$

dual de l'homomorphisme Γ_F -équivariant

$$\rho_T : \widehat{T} \rightarrow (\mathbb{C}^\times)^r = \widehat{T}_E$$

induit par ρ .

On a vu dans les premiers paragraphes du chapitre II que l'homomorphisme $\rho_T^\vee : T_E \rightarrow T$ permet de définir en chaque place $x \in |F|$

- un espace des ρ_T -fonctions [et un sous-espace des ρ_T -fonctions spéciales si $x \in |F|_\infty]$

$$T(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$
- qui sont de carré intégrable,
- un opérateur unitaire de ρ_T -transformation de Fourier
$$\varphi_x \mapsto \widehat{\varphi}_x$$
- agissant sur les fonctions de carré intégrable
$$\varphi_x : T(F_x) \rightarrow \mathbb{C}.$$

On rappelle que, en toute place ultramétrique $x \in |F|_f$, l'espace des ρ_T -fonctions sur $T(F_x)$ est stable par

- les opérateurs de translation par les éléments de $T(F_x)$,
- l'opérateur $\varphi_x \mapsto \widehat{\varphi}_x$ et son inverse,
- les opérateurs de multiplication par les fonctions unitaires

$$\mathbb{I}_{\chi, c_x} : \overline{T}(F_x) \rightarrow S_1, \quad \chi \in X_{\overline{T}}, \quad c_x \in E_{\chi, x},$$

et plus généralement par les fonctions localement constantes

$$U : \overline{T}(F_x) \rightarrow \mathbb{C}.$$

De plus, on a :

Lemme III.9. –

Dans les conditions ci-dessus, toute ρ_T -fonction

$$T(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

en une place ultramétrique $x \in |F|_f$ possède les trois propriétés suivantes :

- (1) *Elle est invariante par un sous-groupe ouvert compact de $T(F_x)$.*
- (2) *Elle est supportée par une partie compacte de $\overline{T}(F_x)$.*
- (3) *Elle est intégrable.*

Démonstration :

Dans le cas linéaire où $T = T_E$ et ρ_T est la représentation standard ρ_E de $\widehat{T}_E \rtimes \Gamma_F$, les ρ_E -fonctions sont les fonctions localement constantes à support compact sur $\overline{T}_E(F_x) = E_x$, donc vérifient les propriétés (1), (2) et (3).

Le cas général s'en déduit puisque les ρ_T -fonctions sur $T(F_x)$ sont par définition les combinaisons linéaires de translatées d'images

$$(\rho_T^\vee)_*(f_x)$$

de ρ_E -fonctions $f_x : T_E(F_x) \subset \overline{T}_E(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$. □

On rappelle d'autre part que, en toute place archimédienne $x \in |F|_\infty$, l'espace des ρ_T -fonctions [resp. des ρ_T -fonctions spéciales] est stable par

- les opérateurs de translation par les éléments de $T(F_x)$ [resp. du sous-groupe compact maximal de $T(F_x)$],
- les opérateurs différentiels invariants,
- l'opérateur $\varphi_x \mapsto \widehat{\varphi}_x$ et son inverse.

De plus, l'espace des ρ_T -fonctions est encore stable par

- les opérateurs de convolution par les distributions à support compact,
- les opérateurs de multiplication par les fonctions unitaires

$$\mathbb{I}_{\chi, c_x} : \overline{T}(F_x) \rightarrow S_1, \quad \chi \in X_{\overline{T}}, \quad c_x \in E_{\chi, x}.$$

Etant donnée une place arbitraire $x \in |F|$, considérons maintenant les fonctions sur $G(F_x)$. Elles sont reliées aux fonctions sur $T(F_x)$ par l'opérateur

$$f \mapsto f_B$$

qui associe aux fonctions

$$f : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

leur "terme constant"

$$f_B : T(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$t \mapsto |\det_B(t)|_x^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{1/2} \cdot \int_{N_B(F_x)} du \cdot f(tu) = |\det_B(t)|_x^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{-1/2} \cdot \int_{N_B(F_x)} du \cdot f(ut).$$

On ne sait encore définir ni l'espace des ρ -fonctions sur $G(F_x)$ (sauf si $F_x \cong \mathbb{C}$) ni l'opérateur de ρ -transformation de Fourier $f \mapsto \hat{f}$ sur $G(F_x)$ (sauf si $F_x \cong \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Mais on sait qu'ils doivent satisfaire les conditions suivantes, qui sont contenues parmi celles des problèmes I.5, I.10 et I.16 :

Conditions requises III.10. –

En toute place $x \in |F|$, on doit avoir :

- (i) L'espace des ρ -fonctions sur $G(F_x)$ doit être stable par translation à gauche ou à droite par les éléments de $G(F_x)$.

De plus, pour toute ρ -fonction f sur $G(F_x)$, la fonction

$$f_B : T(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

doit être une ρ_T -fonction.

- (ii) L'opérateur $f \mapsto \hat{f}$ de ρ -transformation de Fourier des ρ -fonctions sur $G(F_x)$ doit vérifier les conditions

$$\left. \begin{aligned} \widehat{f^g} &= |\det_G(g)|_x^{-1} \cdot g^{-1} \cdot \widehat{f} \\ \widehat{g f} &= |\det_G(g)|_x^{-1} \cdot \widehat{f} \cdot g^{-1} \end{aligned} \right\} \forall g \in G(F_x),$$

et

$$(\widehat{f})_B = \widehat{f_B}.$$

□

Les opérateurs qui apparaissent dans ces conditions et dans toutes celles des problèmes I.5, I.10 et I.16 respectent la décomposition spectrale des fonctions sur $G(F_x)$.

Il en résulte que l'ensemble de ces conditions détermine seulement l'intersection de l'espace des ρ -fonctions recherché avec le sous-espace des fonctions de carré intégrable sur $G(F_x)$ dont la décomposition spectrale ne fait apparaître que des induites de caractères de $T(F_x)$.

L'espace des ρ -fonctions serait entièrement déterminé si l'on demandait qu'il soit également stable par une famille suffisamment riche d'opérateurs unitaires qui ne respectent pas la décomposition spectrale des fonctions sur $G(F_x)$.

Comme l'espace des ρ_T -fonctions sur $T(F_x)$ en toute place $x \in |F|$ est stable par les opérateurs de multiplication par les fonctions unitaires

$$\mathbb{I}_{\chi, c_x} : \overline{T}(F_x) \rightarrow S_1, \quad \chi \in X_{\overline{T}}, \quad c_x \in E_{\chi, x},$$

on est conduit à demander que l'espace des ρ -fonctions sur $G(F_x)$ en toute place $x \in |F|$ soit stable par les opérateurs de multiplication par les fonctions unitaires

$$\mathbb{I}_{\chi, c_x}^G : \overline{G}(F_x) \rightarrow S_1, \quad \chi \in X_{\overline{T}^+}, \quad c_x \in E_{\chi, x}.$$

En les places ultramétriques $x \in |F|$, cela reviendrait à proposer la définition suivante de l'espace des ρ -fonctions :

Définition conjecturale III.11. –

Dans les conditions de ce paragraphe et en toute place ultramétrique $x \in |F|_f$, une fonction

$$f : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

serait appelée une ρ -fonction si et seulement si elle vérifiait les conditions suivantes :

- (1) *Elle est invariante à gauche et à droite par un sous-groupe ouvert compact de $G(F_x)$.*
- (2) *Elle est supportée par une partie compacte de $\overline{G}(F_x)$.*
- (3) *Elle est à la fois de carré intégrable et intégrable.*
- (4) *Pour toute fonction unitaire $U : \overline{G}(F_x) \rightarrow S_1$ qui est un produit de translatées de fonctions $\mathbb{I}_{\chi, c_x}^G$, $\chi \in X_{\overline{T}^+}$, et pour tous éléments $g, g' \in G(F_x)$, la fonction*

$$(U \cdot {}^g f g')_B : T(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

est une ρ_T -fonction sur $T(F_x)$.

Remarques :

- (i) Il est évident que l'espace des ρ -fonctions ainsi défini est stable par
 - les opérateurs de translation [resp. convolution] à gauche et à droite par les éléments de $G(F_x)$ [resp. de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_x^G$],
 - les opérateurs de multiplication par les fonctions unitaires

$$\mathbb{I}_{\chi, c_x}^G : \overline{G}(F_x) \rightarrow S_1, \quad \chi \in X_{\overline{T}^+}, \quad c_x \in E_{\chi, x},$$

et donc, d'après le corollaire III.6, par les fonctions localement constantes

$$U : \overline{G}(F_x) \rightarrow \mathbb{C}.$$

- (ii) La condition (2) implique que, pour toute ρ -fonction en ce sens $f : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$, les restrictions de f aux fibres de l'homomorphisme

$$|\det_T(\bullet)|_x : G(F_x) \rightarrow q_x^{\mathbb{Z}}$$

sont à support compact, comme demandé dans la condition (4) du problème I.10.

- (iii) Il n'est pas clair a priori que l'espace des ρ -fonctions ainsi défini est non trivial. □

Dans le but d'évaluer la pertinence de cette définition, il est commode de disposer de la définition suivante :

Définition III.12. –

On considère comme dans tout le présent paragraphe un groupe réductif G quasi-déployé sur un corps global F , muni d'une paire de Borel (T, B) .

On considère d'autre part une place arbitraire $x \in |F|$.

- (i) Une fonction de carré intégrable

$$f : T(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

sera dite “de type torique” si sa décomposition spectrale ne fait apparaître que des induites normalisées de caractères de $T(F_x)$.

- (ii) On notera

$$f \mapsto f^{\text{tor}}$$

l’opérateur de projection orthogonale de l’espace des fonctions de carré intégrable de $G(F_x)$ sur son sous-espace (qui est fermé) des fonctions de type torique.

Remarque :

Le sous-espace des fonctions de type torique est invariant par les translations à gauche et à droite par les éléments de $G(F_x)$ et l’opérateur $f \mapsto f^{\text{tor}}$ commute avec ces translations. □

Le sous-espace des ρ -fonctions de type torique sur $G(F_x)$ est entièrement déterminé en les places ultramétriques $x \in |F|_f$ par les conditions (6) et (7) du problème I.10.

Pour que la définition conjecturale I.11 soit pertinente, il faudrait que, dans le cas des fonctions de type torique, elle coïncide avec la définition déjà donnée.

C’est la question suivante :

Question III.13. –

Rappelons qu’en toute place ultramétrique $x \in |F|$ une fonction de type torique invariante par un sous-groupe ouvert compact

$$f : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

est appelée une ρ -fonction si et seulement si, pour tous éléments $g, g' \in G(F_x)$, la fonction

$$({}^g f {}^{g'})_B : T(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

est une ρ_T -fonction.

Alors :

- (i) Pour une telle fonction de type torique, cette définition coïncide-t-elle avec la définition conjecturale III.11 ?
- (ii) Autrement dit, pour toute ρ -fonction de type torique f au sens ci-dessus et pour toute fonction unitaire $U : \overline{G}(F_x) \rightarrow S_1$ qui est un produit de translatées de fonctions $\mathbb{I}_{\chi, c_x}^G$, $\chi \in X_{\overline{T}^+}$, la projection

$$(U \cdot f)^{\text{tor}}$$

est-elle encore une ρ -fonction de type torique au sens ci-dessus ?

- (iii) Autrement dit encore, pour toute telle ρ -fonction de type torique f et toute fonction localement constante

$$U : \overline{G}(F_x) \rightarrow \mathbb{C},$$

la projection

$$(U \cdot f)^{\text{tor}}$$

est-elle encore une ρ -fonction de type torique ? □

En les places archimédiennes, on peut proposer la variante suivante de la définition conjecturale III.11 :

Définition conjecturale III.14. –

Dans les conditions de ce paragraphe et en toute place archimédienne $x \in |F|_\infty$, une fonction

$$f : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

serait appelée une ρ -fonction si et seulement si elle vérifiait les conditions suivantes :

- (1) Elle est de classe C^∞ .
- (2) Sa restriction à l'image réciproque par l'homomorphisme

$$|\det_T(\bullet)|_x : G(F_x) \rightarrow \mathbb{R}_+^\times$$

de toute partie compacte de $\mathbb{R}_+^\times$ est à décroissance rapide.

- (3) Toute fonction f' déduite de f par convolution à gauche et à droite avec des distributions à support compact est à la fois de carré intégrable et intégrable.
- (4) Pour toute telle fonction f' déduite de f et toute fonction unitaire $U : \overline{G}(F_x) \rightarrow S_1$ qui est un produit de translatées de fonctions Π_{χ, c_x}^G , la fonction

$$(U \cdot f')_B : T(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

est une ρ_T -fonction sur $T(F_x)$.

Remarques :

- (i) Il est évident que l'espace des ρ -fonctions ainsi défini est stable par
 - les opérateurs de convolution à gauche ou à droite par des distributions à support compact (donc en particulier les translations et les opérateurs différentiels invariants),
 - les opérateurs de multiplication par les fonctions unitaires

$$\Pi_{\chi, c_x}^G : \overline{G}(F_x) \rightarrow S_1, \quad \chi \in X_{\overline{T}^+}, \quad c_x \in E_{\chi, x}.$$

- (ii) Ici encore, il n'est pas clair à priori que l'espace des ρ -fonctions ainsi défini est non trivial. □

On rappelle que, d'après le corollaire I.18, l'opérateur de ρ -transformation de Fourier sur $G(F_x)$

$$f \mapsto \widehat{f}$$

est entièrement déterminé par l'opérateur de ρ_T -transformation de Fourier $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ sur $T(F_x)$ dès lors que x est une place archimédienne.

De plus, en une telle place archimédienne, le sous-espace des ρ -fonctions de type torique sur $G(F_x)$ est entièrement déterminé par les conditions (6) et (7) du problème I.16.

Enfin, on sait d'après le théorème I.17 que si $F_x \cong \mathbb{C}$ toute fonction de carré intégrable sur $G(F_x)$ est de type torique.

Pour que la définition conjecturale III.14 apparaisse pertinente, il faudrait donc pouvoir répondre positivement à la question suivante :

Question III.15. –

- (i) Si $F_x \cong \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'espace des ρ -fonctions sur $G(F_x)$ au sens de la définition conjecturale III.14 est-il respecté par l'opérateur $f \mapsto \widehat{f}$ de ρ -transformation de Fourier sur $G(F_x)$?

- (ii) Si $F_x \cong \mathbb{R}$ [resp. $F_x \cong \mathbb{C}$], une fonction de type torique [resp. de carré intégrable] f est-elle une ρ -fonction au sens de la définition III.14 si elle vérifie les conditions (1), (2) et (3) de cette définition, plus la condition (4') que, pour tous $g, g' \in G(F_x)$, le "terme constant" $({}^g f g')_B : T(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$ soit une ρ_T -fonction ?
- (iii) Autrement dit, si $F_x \cong \mathbb{R}$ [resp. $F_x \cong \mathbb{C}$], est-il vrai que pour

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ toute fonction de type torique [resp. de carré intégrable] } f \text{ vérifiant ces conditions (1), (2), (3) et (4'),} \\ \bullet \text{ toute fonction unitaire } U : \overline{G}(F_x) \rightarrow S_1 \text{ qui est un produit de translatées de fonctions } \mathbb{I}_{\chi, c_x}^G, \\ \quad \chi \in X_{\overline{T}^+}, \end{array} \right.$$

la fonction

$$(U \cdot f)^{\text{tor}} \quad [\text{resp. } U \cdot f]$$

vérifie encore les conditions (1), (2), (3) et (4') ? □

4 Opérateurs de convolution

On considère toujours une représentation de transfert régulière $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \text{GL}_r(\mathbb{C})$ d'un groupe réductif G quasi-déployé sur un corps global F , muni d'une paire de Borel (T, B) et d'une famille de caractères $\det_T$, $\det_G$ et $\det_{M_P} = \det_G \cdot \det_P^{-1} : G \rightarrow \mathbb{G}_m$.

On voudrait définir en toute place $x \in |F|$ un opérateur unitaire de ρ -transformation de Fourier sur $G(F_x)$

$$f \mapsto \widehat{f}$$

qui vérifie en particulier les conditions requises III.10(ii).

On a noté dans le corollaire I.18 que cet opérateur est déjà bien défini si x est une place archimédienne.

En revanche, si x est une place ultramétrique, cet opérateur n'est déjà défini que sur le sous-espace des fonctions de type torique.

On observe que si un tel opérateur $f \mapsto \widehat{f}$ de ρ -transformation de Fourier locale sur $G(F_x)$ est défini, il induit un opérateur associé de ρ -convolution

$$(f, D) \mapsto f *_P D$$

comme le transformé par $f \mapsto \widehat{f}$ de l'opérateur

$$(f, U) \mapsto f \cdot U$$

de multiplication point par point des fonctions sur $G(F_x)$.

Plus précisément, on peut poser :

Définition III.16. –

Dans les conditions de ce paragraphe, considérons une place $x \in |F|$ et supposons que l'espace des fonctions de carré intégrable sur $G(F_x)$ est muni d'un opérateur unitaire de ρ -transformation de Fourier $f \mapsto \widehat{f}$ qui satisfait les conditions requises III.10(ii).

Alors :

(i) Toute fonction bornée mesurable

$$U : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

possède une ρ -transformée de Fourier définie comme la forme linéaire

$$\widehat{U} : f \mapsto \int_{G(F_x)} dg \cdot U(g) \cdot \widehat{f}(g)$$

sur l'espace des fonctions de carré intégrable f dont la ρ -transformée de Fourier $\widehat{f}$ est intégrable.

Elle est continue pour la norme

$$f \mapsto \int_{G(F_x)} dg \cdot |\widehat{f}(g)|.$$

Réciproquement, toute forme linéaire D sur cet espace qui est continue pour cette norme possède une ρ -transformée de Fourier inverse

$$U = \widehat{D}(-\bullet)$$

qui est une fonction bornée mesurable sur $G(F_x)$.

(ii) On note

$$(f, D) \mapsto f *_\rho D$$

l'opérateur binaire de ρ -convolution défini par la formule

$$\widehat{f} *_\rho \widehat{U} = \widehat{f \cdot U}$$

pour toute fonction f de carré intégrable et toute fonction U bornée mesurable sur $G(F_x)$.

L'opérateur $*_\rho$ associe à toute fonction f de carré intégrable et toute forme linéaire D comme dans

(i) une fonction $f *_\rho D$ de carré intégrable sur $G(F_x)$.

Remarque :

Dans la situation de (ii), la norme L^2 de $f *_\rho D$ est majorée par le produit de la norme L^2 de f et de la norme de la forme linéaire D relativement à la norme

$$f \mapsto \int_{G(F_x)} dg \cdot |\widehat{f}(g)|$$

de son espace de définition. □

On observe :

Lemme III.17. –

Dans les conditions de la définition III.16 ci-dessus, considérons une fonction bornée mesurable

$$U : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

qui est invariante à gauche ou à droite par le radical unipotent $N_{B'}(F_x)$ d'un sous-groupe de Borel B' de G sur F_x .

Alors sa ρ -transformée de Fourier

$$D = \widehat{U}$$

ne dépend que de l'opérateur de ρ_T -transformation de Fourier sur $T(F_x)$.

Elle est donc entièrement déterminée par les conditions requises III.10(ii).

Remarque :

Ce lemme s'applique en particulier aux fonctions unitaires

$$\mathbb{I}_{\chi, c_x}^G : \overline{G}(F_x) \rightarrow (N_{B^{\text{op}}} \backslash \overline{G} / N_B)(F_x) = \overline{T}^+(F_x) \rightarrow S_1$$

et à leurs translatées.

Démonstration :

On peut supposer que U est invariante à droite par $N_B(F_x)$.

Choisissons un sous-groupe compact K de $G(F_x)$ tel que

$$G(F_x) = K \cdot B(F_x).$$

Il existe une mesure invariante dk sur K telle que, pour toute fonction intégrable f sur $G(F_x)$ on ait

$$\begin{aligned} \int_{G(F_x)} dg \cdot f(g) &= \int_{K \times T(F_x) \times N_B(F_x)} dk \cdot dt \cdot du \cdot |\det_B(t)|_x \cdot |\delta_B(t)|_x \cdot f(ktu) \\ &= \int_{K \times T(F_x)} dk \cdot dt \cdot |\det_B(t)|_x^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{1/2} \cdot ({}^k f)_B(t). \end{aligned}$$

On en déduit que, pour toute fonction de carré intégrable f dont la ρ -transformée de Fourier $\widehat{f}$ est intégrable, on a

$$\int_{G(F_x)} dg \cdot U(g) \cdot \widehat{f}(g) = \int_{K \times T(F_x)} dk \cdot dt \cdot |\det_B(t)|_x^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{1/2} \cdot U(kt) \cdot \left({}^k \widehat{f}\right)_B(t)$$

qui, d'après les conditions requises III.10(ii), est encore égal à

$$\int_{K \times T(F_x)} dk \cdot dt \cdot |\det_B(t)|_x^{1/2} \cdot |\delta_B(t)|_x^{1/2} \cdot U(kt) \cdot \widehat{(f^{k^{-1}})}_B(t)$$

où $\widehat{(f^{k^{-1}})}_B$ désigne la ρ_T -transformée de Fourier de la fonction

$$(f^{k^{-1}})_B : T(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

pour tout $k \in K$.

Cela démontre le lemme. □

On déduit de ce lemme :

Corollaire III.18. –

Dans les conditions de ce paragraphe, l'opérateur de ρ -transformation de Fourier sur $G(F_x)$ en une place $x \in |F|$

$$f \mapsto \widehat{f}$$

que l'on cherche à définir serait entièrement déterminé par les conditions requises III.10(ii) et par l'opérateur de ρ -convolution associé

$$(f, D) \mapsto f *_\rho D.$$

Démonstration :

En effet, la ρ -transformée de Fourier de tout produit f d'une fonction de type torique f et d'une fonction unitaire de la forme

$$\mathbb{I}_{\chi, c_x}^G : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

serait alors définie par la formule

$$\widehat{f \cdot \mathbb{I}_{\chi, c_x}^G} = \widehat{f} *_{\rho} \widehat{\mathbb{I}_{\chi, c_x}^G}.$$

Or la décomposition spectrale de ces fonctions produits

$$f \cdot \mathbb{I}_{\chi, c_x}^G$$

suffit à faire apparaître toutes les représentations unitaires tempérées de $G(F_x)$. □

Ce corollaire conduit à rechercher des expressions pour les opérateurs de ρ -convolution

$$(f, D) \mapsto f *_{\rho} D$$

dans les cas où l'opérateur de ρ -transformation de Fourier sur $G(F_x)$ est déjà bien défini, c'est-à-dire

- lorsque $G = T$ est un tore,
- lorsque x est une place archimédienne.

Examinons d'abord le cas de la ρ_E -transformation de Fourier linéaire sur $T_E(F_x) = E_x^{\times} \subset E_x = \overline{T}_E(F_x)$.

On connaît la proposition :

Proposition III.19. –

Pour toute fonction de carré intégrable f sur le localisé E_x de E en une place $x \in |F|$, et pour toute fonction généralisée h qui est la transformée de Fourier d'une fonction bornée, on a la formule

$$(f *_{\rho_E} h)(\bullet) = \int_{E_x} dt_E \cdot f(\bullet - t_E) \cdot h(t_E).$$

□

Notons $Z_E \hookrightarrow \overline{T}_E \times \overline{T}_E \times \overline{T}_E$ le fermé irréductible défini par l'équation

$$x_1 + x_2 = x_3,$$

muni de ses trois morphismes de projection

$$\text{pr}_{\rho_E}^1, \text{pr}_{\rho_E}^2, \text{pr}_{\rho_E}^3 : Z_E \rightarrow \overline{T}_E.$$

Il est de dimension

$$2 \dim T_E = 2r$$

et il est invariant par l'action diagonale de T_E dans $\overline{T}_E \times \overline{T}_E \times \overline{T}_E$.

La proposition précédente se traduit en les termes suivants :

Corollaire III.20. –

(i) *En toute place $x \in |F|$, il existe une unique forme différentielle*

$$\omega_E \in \Omega_{Z_E/T_E}^r$$

relative au morphisme de 3^e projection

$$\text{pr}_{\rho_E}^3 : Z_E \rightarrow \overline{T}_E$$

et de degré maximal $r = \dim T_E$, telle que :

- via son action diagonale, T_E agit sur ω_E par le caractère $\det_E : T_E \xrightarrow{\rho_T^\vee} T \xrightarrow{\det_T} \mathbb{G}_m$,
- pour toute fonction de carré intégrable f et toute fonction généralisée h qui est la transformée de Fourier d'une fonction bornée, on a

$$(f *_{\rho_E} h)(\bullet) = \int_{(\mathrm{pr}_{\rho_E}^3)^{-1}(\bullet)} (\mathrm{pr}_{\rho_E}^1)^*(f) \cdot (\mathrm{pr}_{\rho_E}^2)^*(h) \cdot \omega_E.$$

(ii) La forme différentielle algébrique

$$\omega_E \in \Omega_{Z_E/T_E}^r$$

ne dépend de la place $x \in |F|$ qu'à multiplication près par un scalaire.

Remarque :

La forme d'intégration définie sur les fibres de

$$\mathrm{pr}_{\rho_E}^3 : Z_E(F_x) \rightarrow \overline{T}_E(F_x)$$

par la forme différentielle relative de degré maximal ω_E est celle définie par André Weil. $\square$

Notons alors

$$Z_{\rho_T}$$

le schéma affine normal quotient de Z_E par l'action diagonale de $T_\rho = \mathrm{Ker} \left(T_E \xrightarrow{\rho_T^\vee} T \right)$.

Il est muni d'une action de T et de 3 morphismes de projection T -équivalents

$$\mathrm{pr}_{\rho_T}^1, \mathrm{pr}_{\rho_T}^2, \mathrm{pr}_{\rho_T}^3 : Z_{\rho_T} \rightarrow \overline{T}.$$

Sa dimension est $2 \dim T_E - \dim T_\rho = r + \dim T$.

La forme différentielle relative

$$\omega_E \in \Omega_{Z_E/\overline{T}_E}^r$$

est invariante par l'action de T_ρ .

Elle provient donc d'une forme différentielle

$$\omega_{\rho_T} \in \Omega_{Z_{\rho_T}/\overline{T}}^r$$

relative au morphisme de 3^e projection

$$\mathrm{pr}_{\rho_T}^3 : Z_{\rho_T} \rightarrow \overline{T}$$

et de degré maximal $r = \dim Z_{\rho_T} - \dim \overline{T}$.

On déduit du corollaire précédent par passage au quotient :

Proposition III.21. –

On considère le tore T quasi-déployé sur le corps global F , muni du morphisme Γ_F -équivalent $\rho_T : \widehat{T} \rightarrow (\mathbb{C}^\times)^r = \widehat{T}_E$ et du morphisme dual $\rho_T^\vee : T_E \rightarrow T$ de noyau T_ρ .

Alors :

(i) En toute place $x \in |F|$, il existe sur $Z_{\rho_T} = Z_E/T_\rho$ une unique forme différentielle

$$\omega_{\rho_T} \in \Omega_{Z_{\rho_T}/\overline{T}}^r$$

relative au morphisme de 3^e projection

$$\text{pr}_{\rho_T}^3 : Z_{\rho_T} \rightarrow \overline{T}$$

et de degré maximal $r = \dim Z_{\rho_T} - \dim \overline{T}$, telle que

- via son action sur Z_{ρ_T} , T agit sur ω_{ρ_T} par le caractère $\det_T : T \rightarrow \mathbb{G}_m$,
- pour toute fonction de carré intégrable f sur $T(F_x)$ et toute fonction généralisée h qui est la ρ_T -transformée de Fourier d'une fonction bornée, on a

$$(f *_{\rho_T} h)(\bullet) = \int_{(\text{pr}_{\rho_T}^3)^{-1}(\bullet)} (\text{pr}_{\rho_T}^1)^*(f) \cdot (\text{pr}_{\rho_T}^2)^*(h) \cdot \omega_{\rho_T}.$$

(ii) La forme différentielle algébrique

$$\omega_{\rho_T} \in \Omega_{Z_{\rho_T}/\overline{T}}^r$$

ne dépend de la place $x \in |F|$ qu'à multiplication près par un scalaire. □

Cette proposition conduit à proposer la conjecture suivante :

Conjecture III.22. –

On considère une représentation de transfert régulière

$$\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \text{GL}_r(\mathbb{C})$$

d'un groupe réductif G quasi-déployé sur un corps global F , muni d'une paire de Borel (T, B) et de caractères $\det_T, \det_G = \det_T \cdot \det_B : G \rightarrow \mathbb{G}_m$.

Alors :

(i) En toute place $x \in |F|$, l'opérateur de ρ -convolution

$$(f, h) \mapsto f *_{\rho} h$$

(sur les paires constituées d'une fonction f de carré intégrable et d'une fonction généralisée h qui est la ρ -transformée de Fourier d'une fonction bornée) peut être défini par une formule d'intégration (au sens de Weil) de la forme

$$(f *_{\rho} h)(\bullet) = \int_{(\text{pr}_{\rho}^3)^{-1}(\bullet)} (\text{pr}_{\rho}^1)^*(f) \cdot (\text{pr}_{\rho}^2)^*(h) \cdot \omega_{\rho}$$

où :

- Z_{ρ} est une variété algébrique (définie sur F) munie de deux actions à gauche et à droite de G et de trois morphismes équivariants

$$\text{pr}_{\rho}^1, \text{pr}_{\rho}^2, \text{pr}_{\rho}^3 : Z_{\rho} \rightarrow \overline{G},$$

- $\omega_\rho \in \Omega_{Z_\rho/\overline{G}}^d$ est une forme différentielle algébrique (définie sur F) relative à la troisième projection

$$\mathrm{pr}_\rho^3 : Z_\rho \rightarrow \overline{G},$$

sur laquelle G agit à gauche et à droite par le caractère

$$\det_G : G \rightarrow \mathbb{G}_m$$

et de degré maximal

$$d = \dim Z_\rho - \dim \overline{G}.$$

- (ii) De plus, la variété algébrique Z_ρ est indépendante de la place x , et la forme différentielle relative ω_ρ n'en dépend que par une constante multiplicative.

Remarques :

(i) Si $G = \mathrm{GL}_r$ et ρ est la représentation standard de $\widehat{\mathrm{GL}}_r = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$, cette conjecture est évidemment vérifiée. Dans ce cas, la dimension relative de

$$Z_\rho = \{(m_1, m_2, m_3) \in M_r \times M_r \times M_r \mid m_1 + m_2 = m_3\}$$

sur $\overline{G} = M_r$ est $d = r^2$.

- (ii) Si x est une place archimédienne, l'opérateur de ρ -transformation de Fourier sur $G(F_x)$

$$f \mapsto \widehat{f}$$

est déjà entièrement déterminé, donc aussi l'opérateur de ρ -convolution associé

$$(f, h) \mapsto f *_\rho h.$$

Il s'agit donc de savoir si cet opérateur peut être défini algébriquement sous la forme précisée dans cette conjecture. □

5 Une forme approchée de formule de Poisson

On considère toujours une représentation de transfert régulière $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ d'un groupe réductif G quasi-déployé sur un corps global F , muni d'une paire de Borel (T, B) et de caractères $\det_T, \det_G = \det_T \cdot \det_B : G \rightarrow \mathbb{G}_m$.

La représentation régulière ρ définit un morphisme Γ_F -équivariant $\rho_T : \widehat{T} \rightarrow (\mathbb{C}^\times)^r = \widehat{T}_E$ et son dual $\rho_T^\vee : T_E \rightarrow T$ qui induit en toute place $x \in |F|$ une notion de ρ_T -fonction sur $T(F_x)$ et un automorphisme unitaire de ρ_T -transformation de Fourier $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ des ρ_T -fonctions sur $T(F_x)$.

Supposons qu'en toute place ultramétrique $x \in |F|_f$ [resp. archimédienne $x \in |F|_\infty$], on ait défini un espace des ρ -fonctions sur $G(F_x)$ tel que toute ρ -fonction satisfasse les conditions suivantes :

- (1) Elle est invariante à gauche et à droite par un sous-groupe ouvert compact de $G(F_x)$.
[resp. Elle est de classe C^∞ .]
- (2) Elle est supportée par une partie compacte de $\overline{G}(F_x)$.
[resp. Sa restriction à l'image réciproque par l'homomorphisme
- $$|\det_T(\bullet)|_x : G(F_x) \rightarrow \mathbb{R}_+^\times$$
- de toute partie compacte de $\mathbb{R}_+^\times$ est à décroissance rapide.]
- (3) Elle est à la fois de carré intégrable et intégrable.
[resp. Toute fonction f' déduite de f par convolution à gauche et à droite avec des distributions à support compact est à la fois de carré intégrable et intégrable.]
- (4') Pour tous éléments $g, g' \in G(F_x)$, la fonction
- $$(gf g')_B : T(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$
- est une ρ -fonction sur $T(F_x)$.
[resp. Pour toute telle fonction f' déduite de f , la fonction
- $$f'_B : T(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$
- est une ρ_T -fonction sur $T(F_x)$.]

On suppose de plus que si x est une place ultramétrique [resp. archimédienne], l'espace des ρ -fonctions sur $G(F_x)$ est stable par les translations à gauche et à droite [resp. par les convolutions à gauche et à droite par des distributions à support compact].

On suppose enfin qu'une fonction de type torique f sur $G(F_x)$ est une ρ -fonction si elle vérifie les conditions (1), (2), (3) et (4') ci-dessus (qui se ramènent à (1) et (4') si x est ultramétrique ou si x est archimédienne et les translatées à gauche et à droite de f sous l'action d'un sous-groupe compact maximal de $G(F_x)$ engendrent un espace de dimension finie).

En presque toute place ultramétrique $x \in |F|$, le groupe réductif G et la représentation de transfert ρ sont non ramifiés, si bien que l'on dispose sur $G(F_x)$ de la ρ -fonction sphérique standard.

On peut donc appeler ρ -fonctions globales sur $G(\mathbb{A})$ les combinaisons linéaires de fonctions produits

$$f = \prod_{x \in |F|} f_x : G(\mathbb{A}) = \prod_{x \in |F|} G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

de ρ -fonctions locales

$$f_x : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

presque toutes égales aux ρ -fonctions standard sur les $G(F_x)$.

Toutes les conditions ci-dessus étant supposées satisfaites, on fait d'autre part l'hypothèse que l'on ait défini en chaque place $x \in |F|$ un automorphisme unitaire de ρ -transformation de Fourier des ρ -fonctions sur $G(F_x)$

$$f \mapsto \hat{f}$$

qui satisfait les conditions requises

$$\begin{aligned}\widehat{f^g} &= |\det_G(g)|_x^{-1} \cdot \widehat{g^{-1}f} \\ \widehat{g f} &= |\det_G(g)|_x^{-1} \cdot \widehat{f^{g^{-1}}}\end{aligned} \quad \forall g \in G(F_x), \quad \forall f,$$

et

$$(\widehat{f})_B = \widehat{f_B}, \quad \forall f.$$

En toute place x , cet automorphisme respecte le sous-espace des ρ -fonctions de type torique et son action sur ce sous-espace est entièrement déterminée par les conditions ci-dessus.

Le produit de ces opérateurs locaux définit un automorphisme unitaire de ρ -transformation de Fourier globale des ρ -fonctions globales sur $G(\mathbb{A})$.

Utilisant les notations de la définition I.20, on est maintenant en mesure d'énoncer le théorème suivant :

Théorème III.23. –

Soit une représentation de transfert régulière $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_F \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ d'un groupe réductif G quasi-déployé sur un corps global F , muni d'une paire de Borel (T, B) et de caractères $\det_T, \det_G = \det_T \cdot \det_B : G \rightarrow \mathbb{G}_m$.

Supposons que l'on ait défini des espaces de ρ -fonctions locales et globales sur les $G(F_x)$, $x \in |F|$, et $G(\mathbb{A})$ ainsi que des automorphismes unitaires de ρ -transformation de Fourier locale ou globale vérifiant toutes les conditions précédant l'énoncé de ce théorème.

Pour toute ρ -fonction globale

$$f : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C},$$

on a :

- (i) *Pour toute place ultramétrique $x \in |F|_f$ en laquelle G et ρ sont non ramifiés et f se factorise en*

$$f = f_x \otimes f^x$$

avec pour facteur une ρ -fonction sphérique sur $G(F_x)$

$$f_x : G(O_x) \backslash G(F_x) / G(O_x) \rightarrow \mathbb{C},$$

alors, si F est un corps de fonctions [resp. de nombres], les séries formelles

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \int_{N_B(F) \backslash N_B(\mathbb{A})} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \left(f_x^{N, N'} \otimes f^x \right) (\gamma u)$$

et

$$\sum_{N, N' \in \mathbb{N}} Z^{N+N'} \cdot \int_{N_B(\mathbb{A}) / N_B(F)} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \left(f_x^{N, N'} \otimes f^x \right) (u \gamma)$$

sont des fractions rationnelles en Z [resp. des fonctions analytiques de $Z \in \mathbb{C}$] dont les “valeurs régularisées en $Z = 1$ ”, notées $S_B(f)$ et $S'_B(f)$, ne dépendent pas du choix de la place x .

- (ii) *La ρ -fonction f et sa ρ -transformée de Fourier $\widehat{f}$ sont reliées par les formules*

$$S_B(f) = S'_B(\widehat{f}), \quad S'_B(f) = S_B(\widehat{f}),$$

qui s'écrivent encore

$$\mathcal{P}_B(f) = \mathcal{P}'_B(\widehat{f}), \quad \mathcal{P}'_B(f) = \mathcal{P}_B(\widehat{f})$$

en notant

$$\mathcal{P}_B(f) = \left(\int_{N_B(F) \backslash N_B(\mathbb{A})} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} f(\gamma u) \right) + \left(\int_{N_B(F) \backslash N_B(\mathbb{A})} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \widehat{f}(u^{-1} \gamma) \right) - S_B(f)$$

et

$$\mathcal{P}'_B(f) = \left(\int_{N_B(\mathbb{A})/N_B(F)} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} f(u \gamma) \right) + \left(\int_{N_B(\mathbb{A})/N_B(F)} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} \widehat{f}(\gamma u^{-1}) \right) - S'_B(f).$$

(iii) La ρ -fonction f satisfait les égalités

$$\mathcal{P}_B(f) = \int_{N_B(F) \backslash N_B(\mathbb{A})} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} f(\gamma u)$$

et

$$\mathcal{P}'_B(f) = \int_{N_B(\mathbb{A})/N_B(F)} du \cdot \sum_{\gamma \in G(F)} f(u \gamma)$$

si f se factorise en au moins une place x sous la forme

$$f = f_x \otimes f^x,$$

avec pour facteur un ρ -fonction locale

$$f_x : G(F_x) \rightarrow \mathbb{C}$$

qui est supportée par une partie compacte de $G(F_x)$.

Démonstration :

Si F est un corps de fonctions, les parties (i) et (ii) de ce théorème ont été démontrées dans le théorème IX.2(i) de l'article [Lafforgue, 2016] comme conséquences de la formule de Poisson pour la ρ_T -transformation de Fourier des ρ_T -fonctions globales sur $T(\mathbb{A})$. Quant à la partie (iii) du théorème, elle résulte du lemme IX.9 du même article.

Si F est un corps de nombres, le théorème résulte de la même façon de la formule de Poisson pour la ρ_T -transformation de Fourier des ρ_T -fonctions globales sur $T(\mathbb{A})$ démontrée dans le théorème II.13 du présent texte.

□

6 Une caractérisation conjecturale de la fonctionnelle de Poisson

On considère toujours une représentation de transfert régulière ρ d'un groupe réductif G quasi-déployé sur un corps global F , muni d'une paire de Borel (T, B) et de caractères $\det_T, \det_G = \det_T \cdot \det_B : G \rightarrow \mathbb{G}_m$, avec le morphisme Γ_F -invariant induit $\rho_T : \widehat{T} \rightarrow (\mathbb{C}^\times)^r = \widehat{T}_E$.

Comme au paragraphe précédent, on suppose que l'on dispose en toute place x d'un espace de ρ -fonctions sur $G(F_x)$ qui satisfont les conditions (1), (2), (3) et (4') de ce paragraphe, que cet espace est stable par les translations à gauche et à droite (et, en les places archimédiennes, par les convolutions à gauche et à droite par les distributions à support compact) et que son intersection avec le sous-espace des fonctions de type torique est constitué des fonctions de type torique qui satisfont les conditions (1), (2), (3) et (4').

On suppose de plus que, en toute place $x \in |F|$, l'espace des ρ -fonctions sur $G(F_x)$ est stable par les opérateurs de multiplication par les fonctions unitaires

$$\mathbb{I}_{\chi, c_x}^G : \overline{G}(F_x) \rightarrow S_1, \quad \chi \in X_{\overline{T}^+}, \quad c_x \in E_{\chi, x}.$$

Si x est une place ultramétrique [resp. archimédienne], cela revient à supposer que l'espace des ρ -fonctions sur $G(F_x)$ est défini par la définition conjecturale III.11 [resp. III.14] et que la réponse à la question III.13 [resp. III.15(ii) et (iii)] est affirmative.

Ces hypothèses étant faites, on dispose d'un espace des ρ -fonctions globales sur $G(\mathbb{A})$. Cet espace est stable par les translations à gauche ou à droite par des éléments de $G(\mathbb{A})$, par les convolutions à gauche ou à droite par les distributions à support compact en les places archimédiennes (si F est un corps de nombres) et par les opérateurs de multiplication par les fonctions unitaires

$$\mathbb{I}_{\chi, c}^G : \overline{G}(\mathbb{A}) \rightarrow S_1, \quad \chi \in X_{\overline{T}^+}, \quad c \in \mathbb{A}_{E_\chi}.$$

On suppose d'autre part que l'on dispose en toute place $x \in |F|$ d'un opérateur unitaire de ρ -transformation de Fourier sur $G(F_x)$

$$f \mapsto \widehat{f}$$

qui satisfait la condition d'équivariance

$$\widehat{g f g'} = |\det_G(gg')|_x^{-1} \cdot g'^{-1} \widehat{f} g^{-1}, \quad \forall g, g' \in G(F_x), \quad \forall f,$$

et la condition de compatibilité avec la ρ_T -transformation de Fourier sur $T(F_x)$

$$(\widehat{f})_B = \widehat{f}_B, \quad \forall f,$$

qui détermine entièrement son action sur le sous-espace des fonctions de type torique.

On suppose enfin que, en toute place $x \in |F|$, l'opérateur de ρ -transformation de Fourier $f \mapsto \widehat{f}$ et son inverse $\widehat{f} \mapsto f(-\bullet)$ respectent l'espace des ρ -fonctions sur $G(F_x)$. En les places x archimédiennes, cela revient à supposer que la réponse à la question III.15(i) est affirmative.

On a vu dans le corollaire III.18 que la connaissance d'un tel opérateur de ρ -transformation de Fourier sur $G(F_x)$ équivaut à celle de l'opérateur de ρ -convolution associé

$$(f, D) \mapsto f *_\rho D.$$

Il est possible (mais pas logiquement nécessaire) que la définition de la famille des opérateurs de ρ -transformation de Fourier sur les $G(F_x)$, $x \in |F|$, passe par celle d'une famille d'opérateurs de ρ -convolution $*_\rho$ sur les $G(F_x)$, $x \in |F|$, qui vérifierait les conditions d'algébricité et d'indépendance de x de la conjecture III.22.

Quoi qu'il en soit, l'existence d'une famille d'opérateurs de ρ -transformation de Fourier sur les $G(F_x)$ vérifiant les conditions requises implique celle d'un opérateur unitaire de ρ -transformation de Fourier global sur $G(\mathbb{A})$ tel que

$$\widehat{g f g'} = |\det_G(gg')|^{-1} \cdot g'^{-1} \widehat{f} g^{-1}, \quad \forall g, g' \in G(\mathbb{A}), \quad \forall f,$$

qui est compatible avec l'opérateur de ρ_T -transformation de Fourier sur $T(\mathbb{A})$ et qui respecte l'espace des ρ -fonctions globales sur $G(\mathbb{A})$ ainsi que son inverse $f \mapsto \widehat{f}(-\bullet)$.

On rappelle que l'on voudrait construire une fonctionnelle linéaire sur l'espace des ρ -fonctions globales sur $G(\mathbb{A})$

$$\mathcal{P} : f \mapsto \sum_{\gamma \in \overline{G}(F)} f(\gamma) = \mathcal{P}(f)$$

qui satisfasse la formule de Poisson

$$\mathcal{P}(f) = \mathcal{P}(\widehat{f}), \quad \forall f,$$

et qui coïncide avec la fonctionnelle d'évaluation en les points rationnels

$$f \mapsto \sum_{\gamma \in G(F)} f(\gamma)$$

pour toute f se factorisant sous la forme

$$f = f_x \otimes f^x$$

avec pour facteur en une certaine place x une ρ -fonction f_x à support compact dans $G(F_x)$.

Le problème I.21 propose une formule de définition d'une telle fonctionnelle $f \mapsto \mathcal{P}(f)$.

Mais il est naturel de chercher à caractériser la fonctionnelle $f \mapsto \mathcal{P}(f)$ par les propriétés qu'elle devrait vérifier et qui, peut-être, impliqueraient directement la formule de Poisson.

Les premières propriétés qui se déduiraient de la formule proposée dans le problème I.21 seraient les suivantes :

D'une part, la fonctionnelle

$$f \mapsto \mathcal{P}(f)$$

serait invariante par les opérateurs de translation à gauche ou à droite par les éléments rationnels $\gamma \in G(F)$.

D'autre part, on aurait pour toute ρ -fonction globale f sur $G(\mathbb{A})$

$$\begin{aligned} \int_{N_B(F) \backslash N_B(\mathbb{A})} du \cdot \mathcal{P}(f^u) &= \mathcal{P}_B(f) \\ \int_{N_B(\mathbb{A}) / N_B(F)} du \cdot \mathcal{P}(f^u) &= \mathcal{P}'_B(f) \end{aligned}$$

où $\mathcal{P}_B$ et $\mathcal{P}'_B$ désignent les deux fonctionnelles introduites dans le théorème III.23.

Cependant, ces propriétés ne suffiraient pas à caractériser la fonctionnelle $\mathcal{P}$.

Le cas des tores traité dans les théorèmes II.25 et II.31 incite à penser que la fonctionnelle

$$f \mapsto \mathcal{P}(f)$$

pourrait aussi être fixé par les opérateurs de multiplication par les fonctions unitaires globales à paramètres rationnels

$$\mathbb{I}_{\chi, c}^G : \overline{G}(\mathbb{A}) \rightarrow S_1, \quad \chi \in X_{\overline{T}^+}, \quad c \in E_\chi.$$

Cette fois, la combinaison de cette propriété et des précédentes devrait suffire à caractériser la fonctionnelle $\mathcal{P}$.

C'est la conjecture suivante :

Conjecture III.24. –

On se place toujours dans le contexte d'une représentation de transfert régulière $\rho : \widehat{G} \rtimes \Gamma_G \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ d'un groupe réductif G quasi-déployé sur un corps global F , muni d'une paire de Borel (T, B) et de caractères $\det_T, \det_G = \det_T \cdot \det_B : G \rightarrow \mathbb{G}_m$.

On suppose que l'on a défini des espaces de ρ -fonctions locales et globales sur les $G(F_x)$, $x \in |F|$, et sur $G(\mathbb{A})$, ainsi que des opérateurs de ρ -transformation de Fourier sur les $G(F_x)$ et sur $G(\mathbb{A})$, qui vérifient toutes les conditions énoncées plus haut.

En particulier, l'espace des ρ -fonctions globales est invariant par les opérateurs de translation à gauche ou à droite par les éléments de $G(\mathbb{A})$ et par les opérateurs de multiplication par les fonctions unitaires

$$\mathbb{I}_{\chi, c}^G : \overline{G}(\mathbb{A}) \rightarrow S_1, \quad \chi \in X_{\overline{T}^+}, \quad c \in \mathbb{A}_{E_\chi}.$$

Alors :

(i) Il existe sur l'espace des ρ -fonctions globales

$$f : G(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{C}$$

une unique fonctionnelle linéaire

$$f \mapsto \mathcal{P}(f)$$

telle que :

- $\mathcal{P}$ est invariante par translation à gauche ou à droite par les éléments rationnels $\gamma \in G(F)$,
- on a pour toute ρ -fonction globale f

$$\int_{N_B(F) \backslash N_B(\mathbb{A})} du \cdot \mathcal{P}(f^u) = \mathcal{P}_B(f),$$

- $\mathcal{P}$ est invariante par les opérateurs de multiplication par les fonctions unitaires à paramètres rationnels

$$\mathbb{I}_{\chi,c}^G : \overline{G}(\mathbb{A}) \rightarrow S_1, \quad \chi \in X_{\overline{T}^+}, \quad c \in E_\chi.$$

(ii) La fonctionnelle $\mathcal{P}$ ainsi caractérisée vérifie aussi les propriétés suivantes :

- on a pour toute ρ -fonction globale f

$$\int_{N_B(\mathbb{A})/N_B(F)} du \cdot \mathcal{P}(^u f) = \mathcal{P}'_B(f),$$

- $\mathcal{P}$ est invariante par les opérateurs de ρ -convolution

$$f \mapsto f *_{\rho} \widehat{\mathbb{I}_{\chi,c}^G}$$

par les distributions

$$\widehat{\mathbb{I}_{\chi,c}^G}$$

qui sont les ρ -transformées de Fourier des fonctions unitaires à paramètres rationnels

$$\mathbb{I}_{\chi,c}^G : \overline{G}(\mathbb{A}) \rightarrow S_1, \quad \chi \in X_{\overline{T}^+}, \quad c \in E_\chi.$$

Remarque :

Les propriétés de (ii) et la formule de Poisson du théorème III.23(ii)

$$\mathcal{P}'_B(\widehat{f}) = \mathcal{P}_B(f), \quad \forall f,$$

impliquent que la fonctionnelle composée

$$f \mapsto \mathcal{P}(\widehat{f})$$

vérifierait toutes les propriétés de (i), donc coïnciderait avec la fonctionnelle

$$f \mapsto \mathcal{P}(f).$$

Ce serait la formule de Poisson recherchée. □

Bibliographie

- A. BRAVERMAN et D. KAZHDAN, 2000, “ γ -functions of representations and lifting” (avec un appendice par V. Vologodsky), in “Visions in Mathematics”, GAFA 2000 Special Volume, Part I, p. 237-278.
- J.W. COGDELL et I.I. PIATETSKI-SHAPIRO, 1994, “Converse theorems for $GL(n)$ ”, Publications mathématiques de l’IHES numéro 79, p. 157-214.
- R. GODEMENT et H. JACQUET, 1972, “Zeta functions of simple algebras”, LNM 260, Springer-Verlag.
- L. LAFFORGUE, 2012, “Noyaux du transfert automorphe de Langlands et formules de Poisson non linéaires”, prépublication de l’IHÉS numéro M/12/28.
- L. LAFFORGUE, 2014, “Noyaux du transfert automorphe de Langlands et formules de Poisson non linéaires”, Japanese Journal of Mathematics 9, n° 1, p. 1-68.
- L. LAFFORGUE, 2015, “Formules de Poisson non linéaires et principe de fonctorialité de Langlands”, in “Introduction to Modern Mathematics”, p. 339-363, ALM 33, Higher Education Press, Beijing.
- L. LAFFORGUE, 2016, “Du transfert automorphe de Langlands aux formules de Poisson non linéaires”, Annales de l’Institut Fourier, tome 66, n° 3, p. 899-1012.
- J. TATE, 1950, “Fourier analysis in number fields and Hecke’s zeta-functions”, thèse de doctorat (Princeton) reproduite dans : J.W.S. Cassels et A. Fröhlich (éditeurs), “Algebraic number theory”, Academic Press (1967), p. 305-347.