SÉRIES HYPERGÉOMÉTRIQUES MULTIPLES ET POLYZÊTAS

par

J. Cresson, S. Fischler et T. Rivoal

Résumé. — Nous décrivons un algorithme théorique et effectif permettant de démontrer que des séries et intégrales hypergéométriques multiples relativement générales se décomposent en combinaisons linéaires à coefficients rationnels de polyzêtas.

Table des matières

1. Introduction 2
2. Liens avec les intégrales hypergéométriques 9
2.1. Exemples 9
2.2. Aparté : approximants de Padé des polylogarithmes multiples 11
2.3. Développement en série de certaines intégrales de Sorokin 13
2.4. D'autres exemples d'intégrales hypergéométriques 15
3. Étude de deux situations instructives 16
3.1. Le cas de la profondeur 1 16
3.2. Le cas de la profondeur 2 17
4. Démonstration du théorème 1 19
4.1. Décomposition des séries multiples en briques 20
4.2. Notations 21
4.3. L'algorithme de décomposition des briques 23
5. Précisions sur le Théorème 5 28
5.1. Preuve de l'assertion sur les dénominateurs 29
5.2. Preuve de l'assertion sur le degré en z_1 31
6. Non-enrichissement des $\mathrm{La}_{s_1,\dots,s_p}$ à exposants négatifs 32

6.1. Préliminaires 33
6.2. Démonstration du théorème 7 34
6.3. Régularisation 36
7. Relations de passage des $\mathrm{Li}_{s_1,\ldots,s_p}$ aux $\mathrm{La}_{s_1,\ldots,s_p}$ 37
7.1. Séries formelles non-commutatives 37
7.2. Formules de passage entre Li et La 39
7.3. Symétries des polyzêtas larges 40
7.4. Régularisation des polyzêtas larges 41
7.5. Les polyzêtas pondérés 43
8. Démonstration du théorème 3 44
8.1. Régularisation $\sqcup\!\sqcup$ analytique 44
8.2. Aspects effectifs 44
8.3. Régularisation $\sqcup\!\sqcup$ combinatoire 45
8.4. Énoncés 45
8.5. Preuve du théorème 12 47
Bibliographie 50

1. Introduction

Une généralisation de la fonction zêta de Riemann $\zeta(s)$ est donnée par les séries *polyzêtas*, définies pour tout entier $p \geq 1$ et tout p-uplet $\underline{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_p)$ d'entiers ≥ 1, avec $s_1 \geq 2$, par

$$\zeta(s_1, s_2, \ldots, s_p) = \sum_{k_1 > k_2 > \cdots > k_p \geq 1} \frac{1}{k_1^{s_1} k_2^{s_2} \cdots k_p^{s_p}}.$$

Les entiers p et $s_1 + s_2 + \cdots + s_p$ sont respectivement la profondeur et le poids de $\zeta(s_1, s_2, \ldots, s_p)$. Pour diverses raisons, il est plus simple de considérer que la sommation est faite sur $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_p \geq 1$: nous noterons $\overline{\zeta}(s_1, s_2, \ldots, s_p)$ les séries ainsi obtenues. Il est à noter que les deux séries convergent plus généralement pour des exposants complexes vérifiant $\sum_{j=1}^{r} \Re(s_j) > r$ pour tout $r \in \{1, \ldots, p\}$, ce qui autorise à avoir des exposants entiers négatifs par exemple.

Les polyzêtas interviendront dans cet article par l'intermédiaire des fonctions polylogarithmes multiples, définies par

$$\mathrm{Li}_{s_1,s_2\ldots,s_p}(z_1,z_2,\ldots,z_p)=\sum_{k_1>k_2>\cdots>k_p\geq 1}\frac{z_1^{k_1}z_2^{k_2}\cdots z_p^{k_p}}{k_1^{s_1}k_2^{s_2}\cdots k_p^{s_p}}$$

pour $|z_1|\leq 1,\ldots,|z_p|\leq 1$. On obtiendra en fait les résultats pour les polylogarithmes multiples larges, définis par

$$\mathrm{La}_{s_1,s_2\ldots,s_p}(z_1,z_2\ldots,z_p)=\sum_{k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_p\geq 1}\frac{z_1^{k_1}z_2^{k_2}\cdots z_p^{k_p}}{k_1^{s_1}k_2^{s_2}\cdots k_p^{s_p}}.$$

Lorsque $p=1$, les deux variantes coïncident avec les polylogarithmes usuels et si $z_1=z_2=\cdots=z_p=1$, on a $\mathrm{Li}_{s_1,s_2\ldots,s_p}(1,1,\ldots,1)=\zeta(s_1,s_2\ldots,s_p)$ et $\mathrm{La}_{s_1,s_2\ldots,s_p}(1,1,\ldots,1)=\overline{\zeta}(s_1,s_2\ldots,s_p)$. Nous montrons au paragraphe 7 comment on passe linéairement d'un type de série à l'autre.

On voit naturellement apparaître les polyzêtas lorsque, par exemple, on considère les produits des valeurs de la fonction zêta : on a $\zeta(n)\zeta(m)=\zeta(n+m)+\zeta(n,m)+\zeta(m,n)$, ce qui permet en quelque sorte de « linéariser » ces produits. En dehors de quelques identités telles que $\zeta(2,1)=\zeta(3)$ (due à Euler), la nature arithmétique de ces séries est aussi peu connue que celle des nombres $\zeta(s)$. Cependant, l'ensemble des nombres $\zeta(\underline{s})$ possède une très riche structure algébrique assez bien comprise, au moins conjecturalement (voir [**42**]). Par exemple, on peut s'intéresser aux $\mathbb{Q}$-sous-espaces vectoriels $\mathcal{Z}_p$ de $\mathbb{R}$, engendrés par les 2^{p-2} polyzêtas de poids $p\geq 2$: $\mathcal{Z}_2=\mathbb{Q}\zeta(2)$, $\mathcal{Z}_3=\mathbb{Q}\zeta(3)+\mathbb{Q}\zeta(2,1)$, $\mathcal{Z}_4=\mathbb{Q}\zeta(4)+\mathbb{Q}\zeta(3,1)+\mathbb{Q}\zeta(2,2)+\mathbb{Q}\zeta(2,1,1)$, etc. Posons $v_p=\dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{Z}_p)$. On a alors la

Conjecture 1. — *(i) Pour tout entier $p\geq 2$, on a $v_p=c_p$, où l'entier c_p est défini par la récurrence de type Fibonacci $c_{p+3}=c_{p+1}+c_p$, avec $c_0=1$, $c_1=0$ et $c_2=1$.*

(ii) Les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels $\mathbb{Q}$ et $\mathcal{Z}_p$ $(p\geq 2)$, sont en somme directe.

La suite $(v_p)_{p\geq 2}$ devrait donc croître comme α^p (où $\alpha\approx 1,3247$ est racine du polynôme X^3-X-1), ce qui est bien plus petit que 2^{p-2}. Il y a donc conjecturalement beaucoup de relations linéaires entre les polyzêtas de même poids et aucune en poids différents : dans cette direction, un théorème de Goncharov [**19**] et Terasoma [**28**] affirme que l'on a $v_p\leq c_p$ pour tout entier $p\geq 2$. Il reste donc à montrer l'inégalité inverse pour montrer (i) mais aucune minoration non triviale de v_p n'est connue à ce jour : si l'on montre facilement que $v_2=v_3=v_4=1$, on est bloqué dès l'égalité $v_5=2$, qui est équivalente à l'irrationalité toujours inconnue de $\zeta(5)/(\zeta(3)\zeta(2))$. Plus généralement, un des intérêts de la conjecture 1 est d'impliquer la suivante.

Conjecture 2. — *Les nombres* $\pi, \zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \zeta(9)$, *etc, sont algébriquement indépendants sur* $\mathbb{Q}$.

Cette conjecture semble actuellement totalement hors de portée. Un certain nombre de résultats diophantiens ont néanmoins été obtenus en profondeur 1, c'est-à-dire dans le cas de la fonction zêta de Riemann :

(i) Le nombre $\zeta(3)$ est irrationnel (Apéry [**3**]) ;

(ii) La dimension de l'espace vectoriel engendré sur $\mathbb{Q}$ par 1, $\zeta(3)$, $\zeta(5), \ldots, \zeta(A)$ (avec A impair) croît au moins comme $\log(A)$ ([**5, 33**]) ;

(iii) Au moins un des quatre nombres $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ est irrationnel (Zudilin [**48**]).

Ces résultats peuvent être obtenus par l'étude de certaines séries de la forme [(1)]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(k)}{k^A(k+1)^A \cdots (k+n)^A} \, z^{-k} \tag{1.1}$$

avec $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$, $n \geq 0$, $A \geq 1$ et $|z| \geq 1$ (le choix de $1/z$ plutôt que z est purement technique) : nous rappelons sommairement au paragraphe 3.1 comment on utilise ces séries pour les démontrer, en exploitant le fait que, génériquement, elles s'expriment aussi comme combinaisons linéaires des valeurs de zêta aux entiers lorsque $z = 1$. Les divers choix de P conduisent à des *séries hypergéométriques généralisées* : voir les ouvrages [**4, 35**] pour les définitions, qui ne sont pas essentielles ici.

Notre but est de poser les bases d'une généralisation de cette méthode hypergéométrique en profondeur quelconque en considérant *a priori* des séries multiples de la forme

$$\sum_{k_1 \geq \cdots \geq k_p \geq 1} \frac{P(k_1, \ldots, k_p)}{(k_1)_{n_1+1}^{A_1} \cdots (k_p)_{n_p+1}^{A_p}} \, z_1^{-k_1} \cdots z_p^{-k_p}, \tag{1.2}$$

avec $P(X_1, \ldots, X_p) \in \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_p]$, des entiers $A_j \geq 2$ et $n_j \geq 0$ et $|z_1| \geq 1, \ldots, |z_p| \geq 1$, ceci dans l'espoir qu'elles s'expriment comme combinaisons linéaires de polyzêtas intéressants lorsque $z_1 = \cdots = z_p = 1$. (Pour raccourcir les expressions, on a utilisé le symbole de Pochhammer $(\alpha)_m = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+m-1)$.) De telles séries apparaissent naturellement dans la littérature. Par exemple, Sorokin [**37**] a déduit l'irrationalité de $\zeta(3)$ d'un résultat que l'on peut écrire ainsi : pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$n! \sum_{k_1 \geq k_2 \geq 1} \frac{(k_2-n)_n (k_1-k_2+1)_n}{(k_1)_{n+1}^2 (k_2)_{n+1}} = 2a_n \zeta(2,1) - b_n, \tag{1.3}$$

[(1)] du moins, dans le cas de (i) et (ii) ; le point (iii) nécessite une idée *a priori* différente (série « dérivée ») mais on peut l'intégrer dans le cadre fourni par (1.1). Voir un peu plus loin dans cette Introduction pour plus de détails.

où a_n et b_n sont les célèbres nombres rationnels utilisés par Apéry [**3**] dans sa preuve originelle de l'irrationalité de $\zeta(3)$. La méthode de Sorokin n'utilise pas la série (1.3) mais consiste à résoudre un subtil problème d'approximation de Padé, qu'il n'est malheureusement pas facile de généraliser à d'autres situations. Nous nous affranchissons de l'approximation de Padé pour espérer profiter, en profondeur supérieure, de la grande souplesse de la méthode hypergéométrique en profondeur 1. Il est intéressant de noter que la série double en (1.3) est un exemple de *série hypergéométrique de Kampé de Fériet* (voir [**39**, p. 27]), comme on le voit après quelques transformations triviales du sommande. Par un léger abus de langage, nous appelons série hypergéométrique multiple une expression de la forme (1.2) bien que, en général, il ne s'agisse seulement que de combinaisons linéaires rationnelles des telles séries.

Un ingrédient, fréquemment utilisé avec des séries simples, consiste à dériver la fraction rationnelle en k dans la série (1.1), avant de sommer ; par exemple, une double dérivation sert à montrer le résultat de Zudilin [**48**] rappelé après la conjecture 2. Cette astuce, appliquée plusieurs fois, permet de faire disparaître $\zeta(s)$ de la forme linéaire obtenue, pour de petites valeurs de s. On peut imaginer l'utiliser pour des sommes multiples, même si on n'a aucun résultat connu de disparition de polyzêtas dans ce cadre. Il est clair qu'en dérivant une fraction rationnelle de la forme $P(X_1,\dots,X_p)/\big((X_1)_{n+1}^{A_1}\dots(X_p)_{n+1}^{A_p}\big)$ par rapport à l'une des variables X_j, on obtient une fraction rationnelle de la même forme (avec A_j remplacé par A_j+1) : cette remarque montre que l'on ne perd rien à considérer des séries de la forme (1.2).

En profondeur $p\geq 2$, l'étude des séries multiples du type de (1.2) se décompose en plusieurs étapes et, malheureusement, la première difficulté se présente dès la première étape, qui est pourtant triviale en profondeur 1. Nous mettons ceci en évidence sur l'exemple de la profondeur 2 au paragraphe 3.2 : la généralisation en profondeur quelconque nécessite la production d'un algorithme récursif (permettant de déduire le cas de la profondeur p du cas de la profondeur $p-1$) que l'on décrit au paragraphe 4.3. Nous avons implémenté cet algorithme [**12**] en Pari, ce qui nous a permis d'avoir l'idée du théorème 4 ci-dessous et d'observer d'autres exemples de séries qui font apparaître seulement certains des polyzêtas attendus [**17**].

Informellement, on obtient alors le résultat suivant.

Théorème 1. — *Toute série de la forme* (1.2) *s'écrit comme une combinaison linéaire à coefficients polynômes de Laurent de* $\mathbb{Q}[z_1^{\pm1},\dots,z_p^{\pm1}]$ *en les polylogarithmes multiples* $\mathrm{La}_{s_1,\dots,s_q}(1/\widehat{z}_1,\dots,1/\widehat{z}_q)$ *où* $1\leq q\leq p$, $\sum_{j=1}^q s_j\leq\sum_{j=1}^p A_j$ *et où les* $\widehat{z}_1,\dots,\widehat{z}_q$ *sont certains produits des* $z_1,\dots,z_p$.

Remarques 1. — (1) *Bien que peu surprenant en apparence, ce résultat est, comme on le verra, loin d'être facile à démontrer.*

(2) *Certains des s_j peuvent être négatifs : cela ne peut être le cas que si l'un des degré en l'une des variables X_j de la fraction $P(X_1,\dots,X_p)/\big((X_1)_{n_1+1}^{A_1}\cdots(X_p)_{n_p+1}^{A_p}\big)$ est positif, c'est-à-dire lorsque* $\deg_{X_j}(P)\geq A_j(n+1)$.

(3) *On peut raffiner ce théorème : voir le Théorème 6 au paragraphe 5. Il en résulte par exemple que les polynômes de Laurent sont en fait toujours dans $\mathbb{Q}[z_1,z_2^{\pm1},\dots,z_p^{\pm1}]$.*

Une deuxième difficulté provient du fait que certains polylogarithmes multiples peuvent avoir un ou des exposants $s_j\leq 0$, ce qui nécessite un traitement à part. Informellement, on obtient le résultat dit de *non-enrichissement* suivant (voir le paragraphe 6 pour l'énoncé précis) : *Lorsque tous les $z_1,\dots,z_p$ sont différents de* 1*, tout polylogarithme multiple* $\mathrm{La}_{s_1,\dots,s_p}(\underline{z})$*, de profondeur p et ayant certains exposants ≤ 0, est une combinaison linéaire en des polylogarithme multiples d'indice ≥ 1 (en des produits des z_j), dont les coefficients sont des polynômes à coefficients rationnels en les $\big((1-z_{j_1}\cdots z_{j_m})^{-1}\big)_{1\leq j_1<\cdots<j_m\leq p,\,m\geq 1}$ et les $(z_j^{\pm1})_{1\leq j\leq p}$.*

En combinant ce résultat et le théorème 1 on obtient :

Théorème 2. — *Supposons que pour tout $j=1,\dots,p$ on ait $\mid z_j\mid<1$. Alors, toute série de la forme* (1.2) *s'écrit comme une combinaison linéaire à coefficients polynômes à coefficients rationnels en les $\big((1-z_{j_1}\cdots z_{j_m})^{-1}\big)_{1\leq j_1<\cdots<j_m\leq p,\,m\geq 1}$ et les $(z_j^{\pm1})_{1\leq j\leq p}$ de polylogarithmes multiples $\mathrm{La}_{s_1,\dots,s_q}(1/\widehat{z}_1,\dots,1/\widehat{z}_q)$ où $1\leq q\leq p$, $s_i\geq 1$, $i=1,\dots,q$, $\sum_{j=1}^q s_j\leq\sum_{j=1}^p A_j$ et où les $\widehat{z}_1,\dots,\widehat{z}_q$ sont certains produits des $z_1,\dots,z_p$.*

L'analogue du théorème 1 lorsque $z_1=\cdots=z_p=1$ s'énonce comme suit. Une version plus précise (i.e. théorème 12) sera démontrée au paragraphe 8.5.

Théorème 3. — *Toute série de la forme (1.2) s'écrit lorsque $z_1=\cdots=z_p=1$ comme une combinaison linéaire à coefficients rationnels en les polyzêtas régularisés $\zeta^{\mathrm{III}}(s_1,\dots,s_q)$ où $1\leq q\leq p$, $s_i\geq 1$, $i=1,\dots,q$, $\sum_{j=1}^q s_j\leq\sum_{j=1}^p A_j$.*

Notre algorithme donne diverses précisions sur le théorème 1 (dénominateurs des coefficients, degré des polynômes dans le cas des séries les plus simples, dites briques). De plus, il se prête à une implémentation informatique [**12**] que nous avons effectuée à l'aide du programme Pari : cela nous a permis tester de nombreuses séries et obtenir des résultats

tels que

$$\sum_{k_1\geq k_2\geq 1} \frac{5k_2^2-k_1^2-4k_1k_2-3k_1+7k_2}{(k_1)_3^4\,(k_2+1)_4^3}$$
$$= -\frac{153060027667}{1289945088}+\frac{832127737}{17915904}\,\zeta(2)+\frac{33349589}{2985984}\,\zeta(3)+\frac{10561397}{2985984}\,\zeta(4)$$
$$+\frac{117277}{10368}\,\zeta(5)+\frac{1475}{1728}\,\zeta(6)+\frac{757}{432}\,\zeta(7)+\frac{6125}{1728}\,\zeta(2,2)$$
$$+\frac{245}{24}\,\zeta(2,3)+\frac{35}{32}\,\zeta(3,2)+\frac{1}{6}\,\zeta(3,3)+\frac{595}{864}\,\zeta(4,2)+\frac{7}{4}\,\zeta(4,3). \tag{1.4}$$

Ce résultat pourrait éventuellement être un peu simplifié en utilisant les relations linéaires connues entre polyzêtas.

Une fois cette étape franchie, une troisième difficulté provient de la profusion de polyzêtas qui semblent apparaître spontanément dans des exemples « au hasard » tels que (1.4). Nous avons donc été conduits à rechercher une classe de polynômes $P(X_1,\dots,X_p)$ tels que, *a priori*, seulement certains polyzêtas intéressants ont un coefficient non-nul à la sortie de l'algorithme. Par « intéressants », nous entendons des polyzêtas qui ne sont pas trivialement des puissances de π, qui parasitent les applications diophantiennes en les rendant triviales. [(2)] Voici quelques exemples de séries qui ne font pas apparaître π :

$$\sum_{k_1\geq k_2\geq 1} (k_1+1)(k_2+1)\frac{(k_1-k_2-1)_3(k_1+k_2+1)_3(k_1-1)_5(k_2-1)_5}{(k_1)_3^5\,(k_2)_3^5}$$
$$= \frac{27875}{8192}-\frac{2847}{1024}\,\zeta(3)-\frac{15}{32}\,\zeta(5)+\frac{27}{64}\,\zeta(7),$$

$$\sum_{k_1\geq k_2\geq 1} \big(k_1+\frac{1}{2}\big)\big(k_2+\frac{1}{2}\big)\frac{(k_1-k_2-1)_3(k_1+k_2)_3(k_1-1)_4(k_2-1)_4}{(k_1)_3^7\,(k_2)_3^7}$$
$$= -1156+891\,\zeta(3)+\frac{189}{2}\,\zeta(5)+78\big(\zeta(5,3)-\zeta(3,5)\big)$$

$$\sum_{k_1\geq k_2\geq 1} \frac{(k_1-k_2)(k_1+k_2+4)(k_1-2)_9(k_2-2)_9}{(k_1)_5^4\,(k_2)_5^4}$$
$$= -\frac{642739948033}{41278242816}+\frac{10214719}{995328}\,\zeta(3)+\frac{57497}{18432}\,\zeta(5)$$

[(2)] Par exemple, la minoration de la dimension de l'espace des nombres $\zeta(2n+1)$ devient sans intérêt lorsque l'on rajoute les nombres $\zeta(2n)$: la transcendance de π implique leur indépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$ et donc une minoration de dimension de l'ordre de $A/2$ au lieu de $\log(A)$.

$$\sum_{k_1\geq k_2\geq 3\geq 1} \big(k_1+\frac{1}{2}\big)\big(k_2+\frac{1}{2}\big)\big(k_3+\frac{1}{2}\big) \times \frac{(k_1-k_2)(k_2-k_3)(k_1-k_3)(k_1+k_2+1)(k_1+k_3+1)(k_2+k_3+1)}{(k_1)_2^4\,(k_2)_2^4\,(k_3)_2^4} = -\frac{1}{4}-\zeta(3)+\frac{1}{4}\,\zeta(5)+\zeta(3)^2-\frac{1}{4}\,\zeta(7)$$

Nous avons proposé dans [**11**] une généralisation en profondeur quelconque, des séries *very-well-poised* [3] (ou *très bien équilibrées*) introduites en profondeur 1 ; elle explique les quatre exemples ci-dessus. Il s'agit du résultat suivant, qui est démontré sous une forme plus précise dans [**11**].

Théorème 4. — *Fixons trois entiers $A\geq 2$, $n\geq 0$ et $p\geq 1$, ainsi que $P(X_1,\dots,X_p)\in\mathbb{Q}[X_1,\dots,X_p]$ un polynôme tel que :*

$$P(X_{\sigma(1)},X_{\sigma(2)},\dots,X_{\sigma(p)})=\varepsilon(\sigma)P(X_1,X_2,\dots,X_p)$$

pour tout $\sigma\in\mathfrak{S}_p$ (où $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de σ), et

$$P(X_1,\dots,X_{j-1},-X_j-n,X_{j+1},\dots,X_p) = (-1)^{A(n+1)+1}P(X_1,\dots,X_{j-1},X_j,X_{j+1},\dots,X_p)$$

pour tout $j\in\{1,\dots,p\}$. On suppose que P est de degré au plus $A(n+1)-2$ par rapport à chacune des variables. Alors la série

$$\sum_{k_1\geq\cdots\geq k_p\geq 1}\frac{P(k_1,\dots,k_p)}{(k_1)_{n+1}^A\cdots(k_p)_{n+1}^A}$$

est convergente et c'est un polynôme à coefficients rationnels en les quantités

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_q}\varepsilon(\sigma)\,\zeta(s_{\sigma(1)},\dots,s_{\sigma(q)}) \tag{1.5}$$

avec $q\in\{1,\dots,p\}$ et $s_1,\dots,s_q\geq 3$ impairs.

La somme (1.5) est appelée *polyzêta antisymétrique* dans [**11**]. Lorsque $q=1$, il s'agit simplement de $\zeta(s_1)$. Pour $q=2$, on obtient $\zeta(s_1,s_2)-\zeta(s_2,s_1)$. L'énoncé plus précis donné dans [**11**] montre notamment que lorsque $p=1$, on obtient une forme linéaire en 1 et les $\zeta(s)$, pour s impair compris entre 3 et A. Quand $p=2$, on obtient une forme linéaire en 1,

[3] Voir le paragraphe 3.1 pour l'origine de cette dénomination.

les $\zeta(s)$ pour s impair compris entre 3 et $2A$, et les $\zeta(s,s')-\zeta(s',s)$ pour s,s' impairs tels que $3\leq s<s'\leq A$. [(4)]

Enfin, une dernière difficulté, et non la moindre, consiste à obtenir des résultats diophantiens en direction des conjectures 1 et 2 à l'aide de l'approche combinatoire développée ici. Nous nous contentons ici de démontrer un théorème « technique » concernant le dénominateur commun aux coefficients rationnels des combinaisons linéaires produites par certaines séries du type de (1.2) : voir le théorème 6 au paragraphe 5.

2. Liens avec les intégrales hypergéométriques

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au lien entre certaines intégrales multiples naturellement liées aux polyzêtas et les séries multiples que nous considérons dans le présent article. Nous montrons en particulier comment certaines intégrales peuvent facilement s'écrire comme cas particuliers des séries multiples considérées dans cet article. À nos yeux, la souplesse combinatoire des séries semble bien adaptée à la construction de formes linéaires en polyzêtas mais l'utilisation d'une intégrale ou d'une série dans ce but est essentiellement une affaire de goût, chacune ayant des avantages et des inconvénients. De plus, nous mentionnons certaines intégrales dont on sait qu'elles s'expriment à l'aide de polyzêtas mais auxquelles nos méthodes ne s'appliquent pas.

2.1. Exemples. — Il n'est pas possible de citer l'ensemble des intégrales multiples hypergéométriques qui sont apparues dans la littérature et nous ne mentionnons que les exemples les plus connus.

Posons, pour tous entiers $A\geq 2$ et $n\geq 0$,

$$J_{A,n}=\int_{[0,1]^A}\frac{\prod_{j=1}^A x_j^n(1-x_j)^n}{Q_A(x_1,x_2,\dots,x_A)^{n+1}}\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_A,$$

où $Q_A(\underline{x})=1-(\cdots(1-(1-x_A)x_{A-1})\cdots)x_1$. Lorsque $A=2$ et $A=3$, on retrouve les célèbres intégrales de Beukers [**6**], qui a redémontré le théorème d'Apéry en utilisant le fait que $J_{2,n}\in\mathbb{Q}+\mathbb{Q}\zeta(2)$ et $J_{3,n}\in\mathbb{Q}+\mathbb{Q}\zeta(3)$, sous une forme plus précise. En restant en dimension $A=2$ ou $A=3$, ces intégrales ont ensuite été généralisées dans le but d'améliorer les mesures d'irrationalité respectives de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$: le point d'orgue est la « méthode du groupe » de Rhin-Viola [**31, 32**], qui ont suivi des travaux de Hata [**21, 22**]

[(4)] Les trois premiers exemples numériques précédant le théorème 4 suggèrent que, pour $p=2$, on a parfois des zêtas simples jusqu'à $2A-3$ et des zêtas doubles avec $3\leq s<s'\leq A-2$ seulement. Nous n'avons pas cherché à savoir sous quelles conditions cela est vrai.

en particulier. La principale difficulté de cette approche consiste à montrer directement que ces intégrales sont bien des formes linéaires en les valeurs de zêta.

En dimension supérieure, Vasilyev [**41**] a formulé la conjecture suivante, qu'il a prouvée pour $A = 4$ et 5 : *Pour tous entiers $A \geq 2$ et $n \geq 0$, il existe des rationnels $(p_{j,A,n})_{j=0,2,3,\ldots,A}$ tels que*

$$J_{A,n} = p_{0,A,n} + \sum_{j \equiv A \,(\mathrm{mod}\, 2)} p_{j,A,n}\zeta(j).$$

Cette conjecture, dont l'attaque directe est très difficile, a été démontrée par Zudilin [**47**, paragraphe 8] au moyen d'une identité inattendue entre les intégrales de Vasilyev et certaines séries hypergéométriques très bien équilibrées. Comme on le montre au paragraphe 3.1, il est alors assez facile d'obtenir une forme linéaire en valeurs de zêta à partir d'une série hypergéométrique simple.

Il existe par ailleurs des intégrales d'une forme assez différente et qui ont été étudiées principalement par Sorokin [**36, 37**]. Dans [**37**], il a obtenu une preuve alternative du théorème d'Apéry en montrant que

$$S_{3,n} = \int_{[0,1]^3} \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n z^n(1-z)^n}{(1-xy)^{n+1}(1-xyz)^{n+1}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \in \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\zeta(3), \tag{2.1}$$

tandis que dans [**36**], il a obtenu une nouvelle preuve de la transcendance de π en utilisant l'intégrale

$$T_{A,n} = \int_{[0,1]^{2A}} \prod_{j=1}^{A} \frac{(x_j y_j)^{n+(A-j)(n+1)}(1-x_j)^n(1-y_j)^n}{(1-x_1y_1\cdots x_jy_j)^{n+1}}\,\mathrm{d}x_j\mathrm{d}y_j, \tag{2.2}$$

dont il a montré qu'elle était une forme linéaire rationnelle en 1 et les $\zeta(2,2,\ldots,2) = \pi^{2j}/(2j+1)!$, pour $j = 1,\ldots,A$, lorsque $z = 1$. Dans les deux cas, Sorokin parvient à exprimer ses intégrales comme combinaison linéaire de valeurs de polyzêtas en résolvant de manière itérative des problèmes de Padé non triviaux. D'une manière générale, lorsqu'une intégrale provient d'un problème de Padé explicite, il arrive que l'énoncé même du problème permettent d'éliminer *a priori* certains polyzêtas des formes linéaires lorsque l'on spécialise les polylogarithmes multiples en 1 ou autre valeur intéressante. Ceci confère un grand avantage à cette approche lorsqu'on peut la mettre en œuvre mais elle semble difficile à généraliser. De fait, les travaux ultérieurs cherchent tous à s'affranchir de l'étape « Padé » ; voir néanmoins le paragraphe 2.2 pour un exemple supplémentaire de cette méthode.

Le fait particulièrement remarquable que $J_{3,n} = S_{3,n}$ pour tout entier $n \geq 0$ a été généralisé par Fischler [**15**] et Zlobin [**45**] indépendamment, qui ont montré entre autres

choses que l'on a les identités

$$J_{A,n} = \int_{[0,1]^A} \prod_{j=1}^{A/2} \frac{x_j^n (1-x_j)^n y_j^n (1-y_j)^n}{(1-x_1y_1\cdots x_jy_j)^{n+1}} \,\mathrm{d}x_j\mathrm{d}y_j \tag{2.3}$$

pour $A \geq 2$ pair et

$$J_{A,n} = \int_{[0,1]^A} \frac{z^n(1-z)^n}{(1-x_1y_1\cdots x_ay_az)^{n+1}} \biggl(\prod_{j=1}^{a} \frac{x_j^n (1-x_j)^n y_j^n (1-y_j)^n}{(1-x_1y_1\cdots x_jy_j)^{n+1}} \,\mathrm{d}x_j\mathrm{d}y_j \biggr) \mathrm{d}z \tag{2.4}$$

pour $A \geq 3$ impair avec $a = (A-1)/2$. Il découle de ces travaux l'intuition assez nette que l'on ne perd rien à travailler avec des généralisations de l'une ou l'autre des intégrales $J_{A,n}$ et $S_{A,n}$. Il s'avère que les intégrales de Sorokin $S_{A,n}$ à droite de (2.3) et (2.4) se développent un peu plus facilement en séries multiples que les intégrales $J_{A,n}$ et qu'elles donnent immédiatement des polyzêtas dans le cas $n = 0$. Dans une perspective diophantienne, il est donc naturel de produire des formes linéaires en polyzêtas à partir d'intégrales du type de Sorokin les plus générales possibles ; une telle relation a été démontrée par Zlobin [**45**]. La proposition 2 (démontrée au paragraphe 2.3 ci-dessous) couplée aux résultats de cet article nous permet de redémontrer une assertion similaire à celle de Zlobin mais nous insistons ici sur le fait que nos résultats (résumés informellement par le théorème 1) nous permettent de traiter des séries multiples plus générales que celles apparaissant dans la proposition 2 ou dans les travaux de Zlobin.

Terminons ce paragraphe en mentionnant un récent article de Zlobin [**46**], où il obtient une nouvelle preuve de la conjecture de Vasilyev en partant de intégrale $S_{A,n}$ convenablement développée en série multiple : il s'agit d'un remarquable tour de force.

2.2. Aparté : approximants de Padé des polylogarithmes multiples. — Nous avons indiqué un peu plus haut que Sorokin a produit ses identités entre intégrales et formes linéaires en polyzêtas en résolvant des problèmes de Padé *ad hoc*. Nous mettons en œuvre sa méthode sur l'exemple suivant, qui semble nouveau et qui pourrait conduire à des résultats diophantiens intéressants.

Pour tout entier $N \geq 1$, notons L_N l'ensemble des fonctions $\mathrm{Li}_{s_1,s_2,\ldots,s_p}(z,1,1,\ldots,1)$ ayant un poids $s_1+s_2+\cdots+s_p \leq N$, avec tous les entiers $s_j \geq 1$. (On a $\#\mathrm{L}_N = 2^N-1$ et $\#\bigl(\mathrm{L}_N \setminus \mathrm{L}_{N-1}\bigr) = 2^{N-1}$.) Notons L un élément quelconque de L_N. Notre but est de résoudre le problème de Padé de type I suivant : pour tout entier $n \geq 0$, déterminer 2^N polynômes $(P_{n,N,L})_{L\in\mathrm{L}_N}$ et $P_{n,N,0}$ de degré au plus n tels que

$$P_{n,N,0}(z) + \sum_{L\in\mathrm{L}_N} P_{n,N,L}(z)\, L(1/z) = \mathcal{O}\bigl(1/z^{(2^N-1)(n+1)}\bigr).$$

Notons $R_{n,N}(z)$ cette combinaison linéaire et désignons par $\mathrm{P}(n,N)$ ce problème de Padé.

Proposition 1. — *À une constante multiplicative près, le problème de Padé* $\mathrm{P}(n,N)$ *admet une solution unique et, pour tout complexe* z *tel que* $|z|>1$*, on a*

$$R_{n,N}(z)=\int_{[0,1]^N}\prod_{j=0}^{N-1}\frac{x_j^{(2^N-2^j)(n+1)-1}(1-x_j)^{2^j(n+1)-1}}{(z-x_0x_1\cdots x_j)^{2^j(n+1)}}\,\mathrm{d}x_j. \tag{2.5}$$

Remarque 1. — *Dans* [**38**]*, Sorokin a résolu explicitement le problème de Padé de type II, qui est en quelque sorte le dual de* $\mathrm{P}(n,N)$ *: pour tous entiers* $n\geq 0$ *et* $N\geq 1$*, déterminer* 2^N *polynômes* $(Q_{n,N,L})_{L\in\mathrm{L}_N}$ *et* $Q_{n,N,0}$ *de degrés au plus* $(2^N-1)n$ *tels que, pour tout* $L\in\mathrm{L}_N$*, on ait*

$$Q_{n,N,0}(z)\,L(1/z)-Q_{n,N,L}(z)=\mathcal{O}\big(1/z^{n+1}\big).$$

Esquisse de démonstration. — Voir par exemple [**18**] pour les détails permettant de justifier complètement cette esquisse. Notons tout d'abord que $\mathrm{P}(n,N)$ admet une solution pour tous $n\geq 0$ et $N\geq 1$. Nous allons montrer l'unicité (à constante près) en produisant par récurrence sur N la seule solution possible.

Le problème $\mathrm{P}(n,1)$ est classique puisqu'il s'agit de déterminer les approximants de Padé diagonaux de $\mathrm{Li}_1(1/z)=-\log(1-1/z)$: la solution est exactement l'intégrale (2.5) pour $N=1$.

Supposons maintenant $\mathrm{P}(n,N-1)$ résolu pour tout entier $n\geq 0$. Lorsque l'on dérive un élément de L_N, on obtient un élément de L_{N-1}, multiplié par $1/z$ ou $1/(1-z)$ (exclusivement). On en déduit qu'il existe 2^{N-1} polynômes $Q_{2n+1,N,L}$ et $Q_{2n+1,N,0}$ de degrés au plus $2n+1$ tels que

$$R_{n,N}^{(n+1)}(z)=\frac{Q_{2n+1,N,0}(z)}{z^{n+1}(1-z)^{n+1}}+\sum_{L\in\mathrm{L}_{N-1}}\frac{Q_{2n+1,N,L}(z)}{z^{n+1}(1-z)^{n+1}}\,L(1/z)=\mathcal{O}\big(1/z^{2^N(n+1)}\big),$$

ce que l'on peut réécrire comme

$$z^{n+1}(1-z)^{n+1}R_{n,N}^{(n+1)}(z)=Q_{2n+1,N,0}(z)+\sum_{L\in\mathrm{L}_{N-1}}Q_{2n+1,N,L}(z)\,L(1/z)=\mathcal{O}\big(1/z^{(2^{N-1}-1)(2n+2)}\big).$$

Or on reconnaît dans cette dernière équation le problème $\mathrm{P}(2n+1,N-1)$, que l'on a supposé résolu. Donc, à une constante multiplicative près, on a $R_{n,N}^{(n+1)}(z)=R_{2n+1,N-1}(z)$. On passe de cette équation différentielle à l'intégrale (2.5) au moyen d'un opérateur intégral que nous ne rappelons pas ici (voir [**18**, Lemme 5]). □

2.3. Développement en série de certaines intégrales de Sorokin. — Le but de ce paragraphe est d'exprimer une intégrale de type Sorokin relativement générale (elle contient du moins tous les cas mentionnés ci-dessus) comme une série multiple. Cette dernière est un cas particulier de celle que nous développons en polylogarithmes multiples et/ou polyzêtas dans la suite de l'article : pour ceux qui aiment travailler à partir d'intégrales, la proposition 2 est donc la première étape de notre algorithme de construction de formes linéaires en polyzêtas.

Proposition 2. — *Soient des entiers $D, p \geq 1$ et des entiers positifs $r_1, \dots, r_p$, $s_1, \dots, s_p$, $t_1, \dots, t_p$ et $0 = d_0 < d_1 < d_2 < \cdots < d_p = D$. Pour tout complexe z tel que $|z| > 1$, on a l'identité*

$$\int_{[0,1]^D} \prod_{j=1}^{p} \frac{\prod_{\ell=d_{j-1}+1}^{d_j} x_\ell^{r_j} (1-x_\ell)^{s_j}}{(z - x_1 \cdots x_{d_j})^{t_j+1}} \, \mathrm{d}x_j$$

$$= z^{-(t_1+\cdots+t_p+p-1)} \cdot \prod_{j=1}^{p} \frac{s_j!^{A_j}}{t_j!} \cdot \sum_{k_1 \geq \cdots \geq k_p \geq 1} z^{-k_1} \prod_{j=1}^{p} \frac{(k_j - k_{j+1} + 1)_{t_j}}{(k_j + r_j)_{s_j+1}^{A_j}}, \quad (2.6)$$

où $k_{p+1} = 1$ et $A_j = d_j - d_{j-1}$ pour $j = 1, \dots, p$. La série est de profondeur p et de poids D.

Remarques 2. — *L'équation* (2.6) *s'étend à $|z| = 1$ lorsque les deux membres ont un sens simultanément.*

Dans les applications diophantiennes, il est pratique de sommer sur des indices K_j définis par $K_j = k_j + r$, où $r = \min r_j$. En particulier, si tous les r_j sont égaux à r, la série s'écrit

$$\sum_{K_1 \geq \cdots \geq K_p \geq r+1} z^{-K_1-r} \prod_{j=1}^{p} \frac{(K_j - K_{j+1} + 1)_{t_j}}{(K_j)_{s_j+1}^{A_j}}$$

avec $K_{p+1} = r + 1$. De plus, si $t_p = r$, la présence du symbole de Pochhammer $(K_p - r)_r$ implique que sommer sur l'ensemble d'indices $K_1 \geq \cdots \geq K_p \geq r+1$ revient au même que sommer sur $K_1 \geq \cdots \geq K_p \geq 1$.

Démonstration. — Supposer que $|z| > 1$ assure que les diverses décompositions en séries et inversions séries-intégrales ci-dessous sont licites. Le cas d'un point du cercle $|z| = 1$ s'obtient en invoquant des critères de continuité (théorèmes d'Abel, de Lebesgue, etc).

On développe le dénominateur de l'intégrale multiple, notée $I(z)$ dans la suite, au moyen de l'identité (avec $|z| > 1, 0 \leq x \leq 1$) :

$$\frac{1}{(z-x)^{t+1}} = \frac{1}{z^t} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+t}{m} \left(\frac{x}{z}\right)^m$$

et on obtient alors

$$I(z) = z^{-(t_1+\cdots+t_p+p)} \times \sum_{m_1,\ldots,m_p\ge 0} \prod_{j=1}^{p} \binom{m_j+t_j}{m_j} z^{-m_j} \int_{[0,1]^D} \prod_{j=1}^{p} \Bigg((x_1\cdots x_{d_j})^{m_j} \prod_{\ell=d_{j-1}+1}^{d_j} x_\ell^{r_j}(1-x_\ell)^{s_j}\,\mathrm{d}x_j \Bigg).$$

Or on vérifie que

$$\prod_{j=1}^{p} \Bigg((x_1\cdots x_{d_j})^{m_j} \prod_{\ell=d_{j-1}+1}^{d_j} x_\ell^{r_j}(1-x_\ell)^{s_j} \Bigg) = \prod_{j=1}^{p} \Bigg(\prod_{\ell=d_{j-1}+1}^{d_j} x_\ell^{r_j+m_j+\cdots+m_p}(1-x_\ell)^{s_j} \Bigg).$$

On peut séparer les variables dans l'intégrale et on obtient alors D intégrales facilement calculables (ce sont des fonctions Beta d'Euler), d'où

$$I(z) = z^{-(t_1+\cdots+t_p+p)} \sum_{m_1,\ldots,m_p\ge 0} \prod_{j=1}^{p} \frac{z^{-m_j}\binom{m_j+t_j}{m_j}}{\binom{r_j+s_j+m_j+\cdots+m_p}{s_j}^{A_j} (r_j+s_j+m_j+\cdots+m_p+1)^{A_j}}.$$

On utilise maintenant les deux transformations triviales $\binom{m_j+t_j}{m_j} = \frac{(m_j+1)_{t_j}}{t_j!}$ et

$$\binom{r_j+s_j+m_j+\cdots+m_p}{s_j} (r_j+s_j+m_j+\cdots+m_p+1) = \frac{(r_j+m_j+\cdots+m_p+1)_{s_j+1}}{s_j!}$$

et on pose $k_j = m_j+\cdots+m_p+1$ pour $j=1,\ldots,p$, ainsi que $k_{p+1}=1$. On obtient alors

$$I(z) = z^{-(t_1+\cdots+t_p+p-1)} \cdot \prod_{j=1}^{p} \frac{s_j!^{A_j}}{t_j!} \cdot \sum_{k_1\ge\cdots\ge k_p\ge 1} z^{-k_1} \prod_{j=1}^{p} \frac{(k_j-k_{j+1}+1)_{t_j}}{(k_j+r_j)_{s_j+1}^{A_j}},$$

ce qui termine la preuve. □

À titre d'exemples, remarquons que l'intégrale $S_{3,n}$ en (2.1) vaut exactement la série (1.3) donnée dans l'introduction tandis que l'intégrale (2.2) s'exprime de la manière suivante :

$$T_{A,n} = n!^A \sum_{k_1\ge\cdots\ge k_A\ge 1} \prod_{j=1}^{A} \frac{(k_j-k_{j+1}+1)_n}{(k_j+(p-j)(n+1))_{n+1}^2}.$$

Enfin, à constante multiplicative près, on a

$$R_{n,N}(z) = z^{-(2^N-1)(n+1)+1} \sum_{k_0\ge\cdots\ge k_{N-1}\ge 1} z^{-k_0} \prod_{j=0}^{N-1} \frac{\big(k_j-k_{j+1}+1\big)_{2^j(n+1)-1}}{\big(k_j+(2^N-2^j)(n+1)\big)_{2^j(n+1)}}.$$

2.4. D'autres exemples d'intégrales hypergéométriques. — Il existe beaucoup d'autres types d'intégrales hypergéométriques que celles de Vasilyev et Sorokin et dont par des moyens plus ou moins détournés on sait qu'elles s'expriment comme formes linéaires en polyzêtas. Les deux exemples que nous allons aborder sont dus à Zudilin et Goncharov-Manin respectivement.

L'intégrale considérée par Zudilin est la suivante :

$$Z_n = \int_{[0,1]^5} \frac{\prod_{j=1}^5 x_j^n (1-x_j)^n \, \mathrm{d}x_j}{Q(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^{n+1}}$$

où $Q(\underline{x}) = x_1(1-(1-(1-(1-x_2)x_3)x_4)x_5) + (1-x_1x_2x_3x_4x_5)$. Par un procédé indirect (basé sur des transformations hypergéométriques), il montre que Z_n est égale à une série de nature hypergéométrique très bien équilibrée (avec double une dérivation du sommande) et il en déduit que $Z_n \in \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\zeta(4)$.

Les intégrales de Goncharov-Manin [**20**] apparaissent quant à elles comme des périodes de certains motifs de Tate mixte, dont Brown [**7**] a donné la forme explicite suivante :

$$\int_{[0,1]^A} \frac{\prod_{j=1}^A x_j^{r_j} (1-x_j)^{s_j} \, \mathrm{d}x_j}{\prod_{1\leq i<j\leq A} (1-x_i\cdots x_j)^{t_{i,j}}} \tag{2.7}$$

avec des entiers $r_j, s_j, t_{i,j} \geq 0$ tels que l'intégrale converge. Remarquons que (2.7) contient comme cas particulier les intégrales abordées par la proposition 2 (en $z=1$). Par des arguments de nature géométrique, Brown a prouvé une conjecture de Goncharov-Manin qui affirmait que ces intégrales sont toujours de formes linéaires rationnelles en polyzêtas. Sa méthode n'est malheureusement pas constructive, ce qui rend impossible une quelconque utilisation diophantienne de son théorème par les voies classiques.

Ces deux types d'intégrales ont donc le défaut de n'être évaluable que par des procédés très indirects. Pour remédier à cela, on pourrait tenter de les « développer » en séries multiples à la manière de la proposition 2, puis espérer appliquer une généralisation convenable de notre algorithme. Ceci n'aura rien d'évident ; par exemple, les cas les plus simples de l'intégrale (2.7) peuvent conduire à des séries telles que

$$\sum_{m,n\geq 1} \frac{1}{m^{s_1} n^{s_2} (m+n)^{s_3}},$$

dont il n'est même pas clair qu'elles puissent s'exprimer à l'aide de polyzêtas (c'est cependant bien le cas : voir [**14**] pour plus de détails et des références). Étendre notre algorithme nécessitera donc des idées nouvelles.

3. Étude de deux situations instructives

3.1. Le cas de la profondeur 1. — La stratégie [5] pour démontrer les théorèmes diophantiens concernant les valeurs de la fonction zêta est la suivante. Soient des entiers $n \geq 0$, $A \geq 1$ et $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$. Considérons la fraction rationnelle $R(X) = P(X)/(X)_{n+1}^A$ ainsi que la série

$$S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} R(k)\, z^{-k}.$$

On suppose cette dernière convergente pour $z = 1$, ce qui impose que $\deg(P) \leq A(n+1)-2$. On commence par développer $R(X)$ en éléments simples :

$$R(X) = \sum_{s=1}^{A} \sum_{j=0}^{n} \frac{C\begin{bmatrix} s \\ j \end{bmatrix}}{(X+j)^s} \quad \text{avec} \quad C\begin{bmatrix} s \\ j \end{bmatrix} = \frac{1}{(A-s)!} \Big(R(X)(X+j)^A \Big)^{(A-s)} \Big|_{X=-j}$$

et, en reportant dans $S(z)$, on obtient

$$S(z) = \sum_{s=1}^{A} \sum_{j=0}^{n} C\begin{bmatrix} s \\ j \end{bmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{-k}}{(k+j)^s}.$$

On remarque alors que, trivialement,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{-k}}{(k+j)^s} = z^j \operatorname{Li}_s(1/z) - \sum_{k=1}^{j} \frac{z^{j-k}}{k^s} \tag{3.1}$$

et donc qu'il existe des polynômes $Q_s(z) \in \mathbb{Q}[z]$, de degré au plus n, tels que

$$S(z) = Q_0(z) + \sum_{s=1}^{A} Q_s(z) \operatorname{Li}_s(1/z).$$

On a bien sûr $\operatorname{Li}_s(1) = \zeta(s)$ et $\operatorname{Li}_s(-1) = (2^{1-s}-1)\zeta(s)$ pour tout $s > 1$. Pour $s \geq 1$, on a l'expression très simple

$$Q_s(z) = \sum_{j=0}^{n} C\begin{bmatrix} s \\ j \end{bmatrix} z^j.$$

Pour les applications envisagées, il est important de se ramener à des coefficients entiers et on montre que $Q_1(1) = 0$ et $\mathrm{d}_n^{A-j} Q_j(z) \in \mathbb{Z}[z]$ pour tout $j \in \{0, \ldots, A\}$, où $\mathrm{d}_n = \text{p.p.c.m.}\{1, 2, \ldots, n\}$. Il existe donc des entiers q_j tels que

$$\mathrm{d}_n^A S(1) = q_0 + \sum_{s=2}^{A} q_s\, \zeta(s),$$

[5] C'est essentiellement la seule dont on dispose : toutes les autres approches connues produisent les mêmes formes linéaires (voir [**16**]).

et une expression similaire pour $S(-1)$.

Tout le problème réside maintenant dans des choix de A et de P tels que l'on puisse appliquer efficacement un critère d'irrationalité ou d'indépendance linéaire : il apparaît rapidement que l'on doit éliminer les nombres $\zeta(s)$ pour s pair, sous peine de n'obtenir que des résultats triviaux. Une manière d'y parvenir est d'imposer que le polynôme $P(X)$ satisfasse à

$$P(-X-n) = -P(X). \tag{3.2}$$

En effet, par unicité de la décomposition de $R(X)$ en éléments simples, l'équation (3.2) se traduit par $C\begin{bmatrix} s \\ n-j \end{bmatrix} = (-1)^{A(n+1)+s+1} C\begin{bmatrix} s \\ j \end{bmatrix}$ et donc les coefficients q_s sont nuls pour s pair lorsque A est lui-même pair. Par exemple, lorsque A est pair, on peut utiliser les séries

$$n!^{A-2r} \sum_{k=1}^{\infty} \left(k+\frac{n}{2}\right) \frac{(k-rn)_{rn}(k+n+1)_{rn}}{(k)_{n+1}^{A}} = q_0 + \sum_{\substack{s=3 \\ s \text{ impair}}}^{A} q_s\, \zeta(s),$$

qui sont des séries hypergéométriques spéciales, dites *very-well-poised* (voir [**4, 35**] pour la définition exacte). On se réfèrera à [**5, 16, 23, 33, 48**] pour plus de détails sur l'utilisation diophantienne de ce type de série.

3.2. Le cas de la profondeur 2. — Une fois formalisé le cas de la profondeur 1, il est naturel d'essayer de suivre la même démarche en profondeur supérieure. Le cas de la profondeur $p = 2$ est déjà instructif et nous allons le traiter en détails.

Nous expliquons notre approche sur la série suivante

$$S(z_1, z_2) = \sum_{k_1 \geq k_2 \geq 1} \frac{P(k_1, k_2)}{(k_1)_{n+1}^2 (k_2)_{n+1}^2}\, z_1^{-k_1} z_2^{-k_2}, \tag{3.3}$$

avec $\deg_{k_1}(P) \leq A(n+1)-2$ et $\deg_{k_2}(P) \leq A(n+1)-2$, ce qui assure que la série converge absolument pour $|z_1| \geq 1$ et $|z_2| \geq 1$. On notera que la série introduite en (1.3) ne vérifie pas cette condition de degré : les conséquences de cela sont évoquées à la fin de ce paragraphe.

La première étape consiste, comme précédemment, à décomposer en éléments simples la fraction rationnelle qui constitue le sommande de $S(z_1, z_2)$:

$$\frac{P(k_1, k_2)}{(k_1)_{n+1}^2 (k_2)_{n+1}^2} = \sum_{j_1, j_2 = 0}^{n} \sum_{s_1, s_2 = 1}^{2} \frac{C\begin{bmatrix} s_1, s_2 \\ j_1, j_2 \end{bmatrix}}{(k_1+j_1)^{s_1} (k_2+j_2)^{s_2}},$$

où les $C\left[\begin{matrix} s_1, s_2 \\ j_1, j_2 \end{matrix}\right]$ sont des rationnels explicitables. Il est important de noter que la condition portant sur les degrés de P implique que cette décomposition n'a pas de partie entière. En reportant dans $S(z_1, z_2)$, on obtient ainsi

$$S(z_1, z_2) = \sum_{j_1,j_2=0}^{n} \sum_{s_1,s_2=1}^{2} C\left[\begin{matrix} s_1, s_2 \\ j_1, j_2 \end{matrix}\right] \sum_{k_1 \geq k_2 \geq 1} \frac{z_1^{-k_1} z_2^{-k_2}}{(k_1+j_1)^{s_1}(k_2+j_2)^{s_2}}.$$

La deuxième étape consiste à exprimer explicitement la série

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \frac{z_1^{-k_1}}{(k_1+j_1)^{s_1}} \sum_{k_2=1}^{k_1} \frac{z_2^{-k_2}}{(k_2+j_2)^{s_2}} \tag{3.4}$$

comme une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Q}[z_1^{\pm 1}, z_2^{\pm 1}]$ en les polylogarithmes multiples (larges ou stricts). Comme on l'a vu en (3.1), dans le cas d'une seule variable ($p = 1$), c'est une étape triviale mais, malheureusement, en deux variables, ce n'est plus le cas. On écrit tout d'abord la somme intérieure sur k_2 comme

$$\sum_{k_2=1}^{k_1} \frac{z_2^{-k_2}}{(k_2+j_2)^{s_2}} = \sum_{k_2=j_2+1}^{k_1+j_2} \frac{z_2^{j_2-k_2}}{k_2^{s_2}} = \Bigg(\sum_{k_2=1}^{k_1+j_1} - \sum_{k_2=1}^{j_2} + \varepsilon_{j_1,j_2} \sum_{k_2=k_1+j_1\wedge j_2+1}^{k_1+j_1\vee j_2} \Bigg) \frac{z_2^{j_2-k_2}}{k_2^{s_2}}$$

où $j_1 \wedge j_2 = \min(j_1, j_2)$, $j_1 \vee j_2 = \max(j_1, j_2)$ et $\varepsilon_{j_1,j_2} = 1$ si $j_1 < j_2$, -1 si $j_1 > j_2$, 0 si $j_1 = j_2$. Puis on reporte ces trois sommes dans la somme sur k_1. Les deux premières séries se traitent facilement :

$$\begin{aligned} \sum_{k_1=1}^{\infty} \frac{z_1^{-k_1}}{(k_1+j_1)^{s_1}} \sum_{k_2=1}^{k_1+j_1} \frac{z_2^{j_2-k_2}}{k_2^{s_2}} &= \sum_{k_1=j_1+1}^{\infty} \frac{z_1^{j_1-k_1}}{k_1^{s_1}} \sum_{k_2=1}^{k_1} \frac{z_2^{j_2-k_2}}{k_2^{s_2}} \\ &= z_1^{j_1} z_2^{j_2}\, \mathrm{La}_{s_1,s_2}(1/z_1, 1/z_2) - \sum_{k_1=1}^{j_1} \frac{z_1^{j_1-k_1}}{k_1^{s_1}} \sum_{k_2=1}^{k_1} \frac{z_2^{j_2-k_2}}{k_2^{s_2}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\sum_{k_1=1}^{\infty} \frac{z_1^{-k_1}}{(k_1+j_1)^{s_1}} \sum_{k_2=1}^{j_2} \frac{z_2^{j_2-k_2}}{k_2^{s_2}} \\ &\qquad = z_1^{j_1} \Bigg(\sum_{k_2=1}^{j_2} \frac{z_2^{j_2-k_2}}{k_2^{s_2}} \Bigg) \mathrm{La}_{s_1}(1/z_1) - \Bigg(\sum_{k_1=1}^{j_1} \frac{z_1^{j_1-k_1}}{k_1^{s_1}} \Bigg) \Bigg(\sum_{k_2=1}^{j_2} \frac{z_2^{j_2-k_2}}{k_2^{s_2}} \Bigg). \end{aligned}$$

La troisième série est un peu plus compliquée : on note que

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \frac{z_1^{-k_1}}{(k_1+j_1)^{s_1}} \sum_{k_2=k_1+j_1\wedge j_2+1}^{k_1+j_1\vee j_2} \frac{z_2^{j_2-k_2}}{k_2^{s_2}} = \sum_{k_2=j_1\wedge j_2+1}^{j_1\vee j_2} z_2^{j_2-k_2} \sum_{k_1=1}^{\infty} \frac{(z_1 z_2)^{-k_1}}{(k_1+j_1)^{s_1}(k_1+k_2)^{s_2}}$$

puis l'on développe en éléments simples la fraction rationnelle

$$\frac{1}{(k_1+j_1)^{s_1}(k_1+k_2)^{s_2}}$$

pour conclure que cette série s'écrit comme une combinaison linéaire de $\mathrm{La}_s(1/z_1z_2)$ avec $1 \leq s \leq s_1 \vee s_2$ et aussi de $\mathrm{La}_{s_1+s_2}(1/z_1z_2)$ si $k_2 = j_1 \vee j_2 = j_1$, avec des coefficients polynomiaux en $z_1^{\pm 1}$ et $z_2^{\pm 1}$. En résumé, lorsque $z_1 = z_2 = 1$, la décomposition de la série (3.4) fait apparaître au plus les polyzêtas suivants : $\zeta(s_1, s_2)$, $\zeta(s_1 + s_2)$ et les $\zeta(s)$ pour $1 \leq s \leq s_1 \vee s_2$. En particulier, il n'y a aucune raison apparente pour que les valeurs de zêta aux entiers pairs n'apparaissent pas.

Enfin, troisième étape, en reportant la décomposition ainsi obtenue dans (3.3), on doit identifier les polyzêtas qui apparaissent réellement dans $S(1,1)$, c'est-à-dire ceux affectés d'un coefficient non-nul. Or cette identification n'est pas évidente : la série $S(1,1)$ fait apparaître *a priori* les polyzêtas

$$\zeta(1),\ \zeta(1,1),\ \zeta(2),\ \zeta(2,1),\ \zeta(1,2),\ \zeta(3),\ \zeta(2,2),\ \zeta(4)$$

(certains sont divergents). Lorsque, par exemple, $P(X_1, X_2) = (X_2 - n)_n(X_1 - X_2 + 1)_n$, il est assez difficile de prouver que seuls $\zeta(2)$, $\zeta(2,2)$ et $\zeta(4)$ n'ont pas un coefficient nul.

On doit aussi parfois tenir compte d'un autre phénomène : contrairement à $S(z_1, z_2)$, la décomposition en éléments simples du sommande de la série en (1.3) produit une partie entière (puisque le degré en X_2 de la fraction $(X_2 - n)_n(X_1 - X_2 + 1)_n/(X_1)_{n+1}^2(X_2)_{n+1}$ est positif) qui complique encore cette étape en faisant apparaître des polylogarithmes multiples « exotiques » tels que $\mathrm{La}_{2,-1}(z_1, z_2)$ qu'il faut traiter de façon *ad hoc*. Ce procédé devient quasiment inextricable en trois variables, ce qui explique le formalisme que nous développons au paragraphe 4.

4. Démonstration du théorème 1

Nous venons de démontrer le théorème 1 pour $p = 1$ (paragraphe 3.1) et $p = 2$ (paragraphe 3.2). Dans ce paragraphe, on le démontre en toute généralité : la stratégie consiste à se ramener dans un premier temps à un cas plus simple (paragraphe 4.1) que l'on démontre ensuite (théorème 5 au paragraphe 4.3). Nous en obtiendrons des raffinements au paragraphe 5.

4.1. Décomposition des séries multiples en briques. — En imitant le cas de la profondeur 1, nous allons transformer la série

$$S_P\left[\begin{matrix}A_1,\dots,A_p\\ n_1,\dots,n_p\end{matrix}\,\middle|\, z_1,\dots,z_p\right]=\sum_{k_1\geq\cdots\geq k_p\geq 1}\frac{P(k_1,\dots,k_p)}{(k_1)_{n_1+1}^{A_1}\cdots(k_p)_{n_p+1}^{A_p}}\,z_1^{-k_1}\cdots z_p^{-k_p} \tag{4.1}$$

en développant en éléments simples la fraction rationnelle

$$R(X_1,\dots,X_p)=\frac{P(X_1,\dots,X_p)}{(X_1)_{n_1+1}^{A_1}\cdots(X_p)_{n_p+1}^{A_p}}.$$

Posons $\hat{A}_i=\deg_{X_i}(P)-A_i(n_i+1)$: c'est le degré en X_i de la fraction rationnelle R. Notons J l'ensemble des indices $i\in\{1,\dots,p\}$ tels que $\hat{A}_i\geq 0$ (c'est-à-dire $\deg_{X_i}(P)\geq A_i(n_i+1)$) : c'est l'ensemble des i pour lesquels R est de degré positif ou nul en X_i, c'est-à-dire relativement auxquels une partie entière va apparaître. Pour $I\subset\{1,\dots,p\}$, on note $I^{\mathrm{c}}=\{1,\dots,p\}\setminus I$. Alors on a

$$R(X_1,\dots,X_p)=\sum_{I\subset J}\sum_{\substack{(s_i)_{i\in I^{\mathrm{c}}}\text{ tel que}\\ 1\leq s_i\leq A_i\\ \text{pour tout } i\in I^{\mathrm{c}}}}\sum_{\substack{(j_i)_{i\in I^{\mathrm{c}}}\text{ tel que}\\ 0\leq j_i\leq n_i\\ \text{pour tout } i\in I^{\mathrm{c}}}}\sum_{\substack{(\hat{s}_i)_{i\in I}\text{ tel que}\\ 0\leq \hat{s}_i\leq \hat{A}_i\\ \text{pour tout } i\in I}} C\begin{bmatrix}I\\(s_i)\\(j_i)\\(\hat{s}_i)\end{bmatrix}\frac{\prod_{i\in I}X_i^{\hat{s}_i}}{\prod_{i\in I^{\mathrm{c}}}(X_i+j_i)^{s_i}} \tag{4.2}$$

avec

$$C\begin{bmatrix}I\\(s_i)\\(j_i)\\(\hat{s}_i)\end{bmatrix}=\partial\begin{bmatrix}I\\(s_i)\\(\hat{s}_i)\end{bmatrix}\Big(R_I(Y_1,\dots,Y_p)\prod_{i\in I^{\mathrm{c}}}(Y_i+j_i)^{A_i}\prod_{i\in I}Y_i^{\hat{A}_i}\Big)\,\Big|\,\begin{matrix}Y_i=0\text{ pour }i\in I\\ Y_i=-j_i\text{ pour }i\in I^{\mathrm{c}}\end{matrix}$$

en notant $\partial\begin{bmatrix}I\\(s_i)\\(\hat{s}_i)\end{bmatrix}$ l'opérateur différentiel suivant

$$\partial\begin{bmatrix}I\\(s_i)\\(\hat{s}_i)\end{bmatrix}=\prod_{i\in I^{\mathrm{c}}}\Big(\frac{1}{(A_i-s_i)!}\Big(\frac{\partial}{\partial Y_i}\Big)^{A_i-s_i}\Big)\prod_{i\in I}\Big(\frac{1}{(\hat{A}_i-\hat{s}_i)!}\Big(\frac{\partial}{\partial Y_i}\Big)^{\hat{A}_i-\hat{s}_i}\Big),$$

et $R_I(Y_1,\dots,Y_p)$ la fraction rationnelle obtenue à partir de $R(X_1,\dots,X_p)$ en posant :

$$\begin{cases}X_i=\frac{1}{Y_i}\text{ pour }i\in I\\ X_i=Y_i\text{ pour }i\in I^{\mathrm{c}}.\end{cases}$$

Le cas particulier où il n'y a pas de partie entière correspond à $\hat{A}_i\leq -1$ pour tout $i\in\{1,\dots,p\}$, c'est-à-dire $J=\emptyset$. La somme sur I se réduit alors à $I=\emptyset$, la famille $(\hat{s}_i)$ est vide et on obtient la décomposition en éléments simples habituelle :

$$R(X_1,\dots,X_p)=\sum_{s_1=1}^{A_1}\cdots\sum_{s_p=1}^{A_p}\sum_{j_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{j_p=0}^{n_p}C\begin{bmatrix}s_1,\dots,s_p\\ j_1,\dots,j_p\end{bmatrix}\frac{1}{(X_1+j_1)^{s_1}\cdots(X_p+j_p)^{s_p}}.$$

Revenons au cas général. En reportant (4.2) dans (4.1), on obtient

$$S_P\left[\begin{matrix}A_1,\dots,A_p\\ n_1,\dots,n_p\end{matrix}\,\middle|\, z_1,\dots,z_p\right] = \sum_{I\subset J}\ \sum_{\substack{(s_i)_{i\in I^{\mathrm{c}}}\text{ tel que}\\ 1\le s_i\le A_i\\ \text{pour tout } i\in I^{\mathrm{c}}}}\ \sum_{\substack{(j_i)_{i\in I^{\mathrm{c}}}\text{ tel que}\\ 0\le j_i\le n_i\\ \text{pour tout } i\in I^{\mathrm{c}}}}\ \sum_{\substack{(\hat{s}_i)_{i\in I}\text{ tel que}\\ 0\le \hat{s}_i\le \hat{A}_i\\ \text{pour tout } i\in I}}$$
$$\cdot\, C\begin{bmatrix} I\\ (s_i)\\ (j_i)\\ (\hat{s}_i)\end{bmatrix} \sum_{k_1\ge\cdots\ge k_p\ge 1} \frac{\prod_{i\in I} k_i^{\hat{s}_i}}{\prod_{i\in I^{\mathrm{c}}}(k_i+j_i)^{s_i}}\, z_1^{-k_1}\cdots z_p^{-k_p}.$$

On a donc ramené le problème initial (i.e., l'évaluation de (4.1)) à celui de la décomposition en polylogarithmes multiples de séries élémentaires de la forme

$$\sum_{k_1\ge\cdots\ge k_p\ge 1} \frac{z_1^{-k_1}\cdots z_p^{-k_p}}{(k_1+j_1)^{s_1}\cdots(k_p+j_p)^{s_p}},$$

où $s_i\in\mathbb{Z}$ et $j_i\in\mathbb{N}$. C'est ce problème que nous allons maintenant résoudre ; cela terminera la preuve du théorème 1.

4.2. Notations. — Dans tout ce paragraphe, N désignera un entier ≥ 1 qui jouera essentiellement le rôle de profondeur, rôle dévolu jusqu'à présent à l'entier p. On notera :

- $\underline{j}_N = (j_i)_{i=1,\dots N}$ et $\underline{m}_N = (m_i)_{i=1,\dots N}$ (avec $m_1 = 0$) des suites d'entiers de $\mathbb{N}$;
- $\underline{s}_N = (s_i)_{i=1,\dots N}$ une suite d'entiers de $\mathbb{Z}$;
- $\underline{z}_N = (z_i)_{i=1,\dots N}$ une suite de complexes de modules ≥ 1 ;
- $a\wedge b = \min(a,b)$ et $a\vee b = \max(a,b)$;
- $\varepsilon_{a,b} = 1$ si $a<b$, -1 si $a>b$, 0 si $a=b$ et $\varepsilon_p = \varepsilon_{j_{p-1},j_p+m_p}$ (pour $p\ge 2$) ;
- $t_p = j_{p-1}\wedge(j_p+m_p)$ et $T_p = j_{p-1}\vee(j_p+m_p)$ (pour $p\ge 2$).

À toute suite finie $\underline{u}_N = (u_1,\dots,u_N)$, on associe les trois suites :

- $\underline{u}_N^p = (u_p,\dots,u_N)$ de longueur $N-p+1$ (pour $1\le p\le N$) ;
- ${}_p\underline{u}_N = (u_1,\dots,u_{p-2},u_{p-1}u_p,u_{p+1},\dots,u_N)$ de longueur $N-1$ (pour $2\le p\le N$) ;
- $1/\underline{u}_N = (1/u_1,\dots,1/u_N)$ lorsque les u_i sont non-nuls.

On définit les *briques decalées-modulées* par

$$\mathrm{B}_N\left[\begin{matrix}\underline{s}_N\\ \underline{m}_N\\ \underline{j}_N\end{matrix}\,\middle|\,\underline{z}_N\right] = \sum_{\substack{k_{N-1}+m_N\ge k_N\ge 1\\ k_{N-2}+m_{N-1}\ge k_{N-1}\ge 1\\ \vdots\\ k_1+m_2\ge k_2\ge 1\\ k_1\ge 1}} \frac{z_1^{-k_1}\cdots z_N^{-k_N}}{(k_1+j_1)^{s_1}\cdots(k_N+j_N)^{s_N}}. \tag{4.3}$$

Les j_i sont les décalages, les m_i les modulations, les s_i les exposants et N la profondeur. Par définition, $m_1 = 0$: toutes les briques B' que nous construirons à l'aide de briques

B avec $m_1 = 0$ auront aussi $m'_1 = 0$. Ces séries convergent absolument lorsque $|z_1| > 1$ et $|z_j| \geq 1$ pour $j = 2, \ldots, N$, ce que l'on suppose dorénavant et qui légitime les diverses manipulations que nous effectuerons dessus ; nous montrerons au paragraphe 8 comment obtenir des résultats similaires lorsque tous les z_i valent 1. Un cas particulier important est celui où tous les m_i sont nuls : on parlera de *brique décalée*, ou simplement de *brique*, [(6)] et on la notera

$$\mathrm{B}_N \left[\begin{matrix} \underline{s}_N \\ \underline{j}_N \end{matrix} \middle| \, \underline{z}_N \right] = \sum_{k_1 \geq \cdots \geq k_N \geq 1} \frac{z_1^{-k_1} \cdots z_N^{-k_N}}{(k_1 + j_1)^{s_1} \cdots (k_N + j_N)^{s_N}}. \tag{4.4}$$

Nous avons déjà rencontré ce type de briques dans les cas $N = 1$ et $N = 2$ au paragraphe 3 et en toute généralité au paragraphe 4.1. Pour obtenir des relations compactes, on définit la brique de profondeur 0 (et vide de paramètres) comme la fonction identiquement égale à 1. La modulation semble *a priori* une notion artificielle et inutile puisqu'on ne s'intéresse réellement qu'aux briques décalées : à l'usage, il n'en est rien car, de façon surprenante, on ne peut apparemment pas produire le théorème 5 ci-dessous sans modulation.

Nous appellerons *terme de profondeur* $\leq N - 1$ toute combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Q}[z_1^{\pm 1}, \ldots, z_N^{\pm 1}]$ de briques décalées-modulées de profondeur $\leq N - 1$ et évaluées en des produits quelconques des variables $z_1, \ldots, z_N$.

Pour tout entier p tel que $1 \leq p \leq N + 1$, on définit le polynôme de Laurent

$$Q_{\underline{s}_N^p, p}(K; \underline{z}_N^p) = \sum_{K \geq k_p \geq \cdots \geq k_N \geq 1} \frac{z_p^{-k_p} \cdots z_N^{-k_N}}{\prod_{i=p}^N k_i^{s_i}},$$

(qui vaut 0 si $K = 0$) pour $p \leq N$ et $Q_{\underline{s}_N^{N+1}, N+1}(K; \underline{z}_N^{N+1}) = 1$ pour $p = N + 1$. On notera $Q_{\underline{s}_N^p, p}(K; \underline{z}_N^p) = Q_{N,p}(K; \underline{z}_N^p)$ lorsqu'il n'y aura pas de risque de confusion sur les exposants en jeu. On a

$$Q_{N,p}(K; \underline{z}_N^p) = \sum_{k_p=1}^{K} \frac{z_p^{-k_p}}{k_p^{s_p}} \, Q_{N,p+1}(k_p; \underline{z}_N^{p+1}). \tag{4.5}$$

(6) Dans un contexte voisin, Zudilin [**48**] a introduit une notion de *brique*, reprise et généralisée dans [**23**]. Ces briques n'ont rien à voir avec les nôtres ; elles sont suffisamment différentes pour ne pas les confondre si on est amené à manipuler les deux types de briques simultanément.

Enfin, pour tout entier p tel que $2 \leq p \leq N$, on définit

$$R_{\underline{s}_N,p}(K;{}_p\underline{z}_N) = \sum_{\substack{k_{p-2}+m_{p-1}\geq k_{p-1}\geq 1 \\ \vdots \\ k_1+m_2\geq k_2\geq 1 \\ k_1\geq 1}} \frac{z_1^{-k_1}\cdots z_{p-2}^{-k_{p-2}}(z_{p-1}z_p)^{-k_{p-1}}}{\left(\prod_{i=1}^{p-1}(k_i+j_i)^{s_i}\right)(k_{p-1}+K)^{s_p}}\, Q_{N,p+1}(k_{p-1}+K;\underline{z}_N^{p+1}). \quad (4.6)$$

Si $p=2$, on attribue la valeur 1 au produit vide $z_1^{-k_1}\cdots z_{p-2}^{-k_{p-2}}$. On notera $R_{\underline{s}_N,p}(K;{}_p\underline{z}_N) = R_{N,p}(K;{}_p\underline{z}_N)$ lorsqu'il n'y aura pas de risque de confusion et nous montrerons qu'il s'agit d'un terme de profondeur $\leq N-1$.

4.3. L'algorithme de décomposition des briques. — Le but de ce paragraphe est de démontrer que *la brique décalée-modulée* (4.3) *est la somme de* $\left(z_1^{j_1}\cdots z_N^{j_N}\right)\mathrm{La}_{\underline{s}_N}(1/\underline{z}_N)$ *et de termes de profondeur au plus* $N-1$. Cette proposition informelle (qui suffit à démontrer le théorème 1, compte tenu des résultats du paragraphe 4.1) découle du théorème suivant qui est beaucoup plus précis.

Théorème 5. — *(i) Pour tout entier* $N \geq 1$, *on a*

$$\mathrm{B}_N\left[\begin{array}{c}\underline{s}_N\\ \underline{m}_N\\ \underline{j}_N\end{array}\middle|\,\underline{z}_N\right] = \left(z_1^{j_1}\cdots z_N^{j_N}\right)\mathrm{La}_{\underline{s}_N}(1/\underline{z}_N) - \sum_{p=1}^{N}\left(z_p^{j_p}\cdots z_N^{j_N}\right)\, Q_{N,p}(j_p;\underline{z}_N^p)\,\mathrm{B}_{p-1}\left[\begin{array}{c}\underline{s}_{p-1}\\ \underline{m}_{p-1}\\ \underline{j}_{p-1}\end{array}\middle|\,\underline{z}_p\right] + \sum_{p=2}^{N}\varepsilon_p\,\left(z_p^{j_p}\cdots z_N^{j_N}\right)\sum_{k_p=t_p+1}^{T_p} z_p^{-k_p}R_{N,p}(k_p;{}_p\underline{z}_N). \quad (4.7)$$

(ii) Pour tout entier p *tel que* $2 \leq p \leq N$ *et tout entier* $K \geq 0$, *la série* $R_{N,p}(K;{}_p\underline{z}_N)$ *est un terme de profondeur* $\leq N-1$.

Remarques 3. — (1) *Si* $N=1$, *l'expression débutant par* $\sum_{p=2}^{N}\varepsilon_p(\cdots)$ *n'apparaît pas.*

(2) *Ce théorème fournit un algorithme permettant d'expliciter totalement le résultat informel évoqué au début de ce paragraphe. Nous avons implémenté cet algorithme sous GP-Pari.*

Démonstration. — La partie (i) repose sur le lemme suivant, que nous démontrons à la toute fin de ce paragraphe.

Lemme 1. — (*i*) *Pour tout* $N \geq 2$ *et tout* $p = 2, \dots, N$, *on a*

$$\mathrm{B}_N\left[\begin{array}{ccccc|c} \underline{s}_N & & & & & \\ \underline{m}_p & j_p & 0 & \cdots & 0 & \underline{z}_N \\ \underline{j}_p & 0 & 0 & \cdots & 0 & \end{array}\right] = z_p^{j_p}\,\mathrm{B}_N\left[\begin{array}{ccccc|c} \underline{s}_N & & & & & \\ \underline{m}_{p-1} & j_{p-1} & 0 & \cdots & 0 & \underline{z}_N \\ \underline{j}_{p-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \end{array}\right]$$
$$- z_p^{j_p}\,Q_{N,p}(j_p; \underline{z}_N^p)\,\mathrm{B}_{p-1}\left[\begin{array}{c|c} \underline{s}_{p-1} & \\ \underline{m}_{p-1} & \underline{z}_p \\ \underline{j}_{p-1} & \end{array}\right] + \varepsilon_p \sum_{k_p=t_p+1}^{T_p} z_p^{j_p-k_p} R_{N,p}(k_p; {}_p\underline{z}_N).$$

(*ii*) *Pour tout* $N \geq 1$, *on a*

$$\mathrm{B}_N\left[\begin{array}{ccccc|c} \underline{s}_N & & & & & \\ 0 & j_1 & 0 & \cdots & 0 & \underline{z}_N \\ \underline{j}_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \end{array}\right] = z_1^{j_1}\,\mathrm{La}_{\underline{s}_N}(1/\underline{z}_N) - z_1^{j_1}\,Q_{N,1}(j_1; \underline{z}_N).$$

On applique le point (i) de ce lemme avec $p = N$, ce qui donne

$$\mathrm{B}_N\left[\begin{array}{c|c} \underline{s}_N & \\ \underline{m}_N & \underline{z}_N \\ \underline{j}_N & \end{array}\right] = -z_N^{j_N}\,Q_{N,N}(j_N; z_N)\,\mathrm{B}_{N-1}\left[\begin{array}{c|c} \underline{s}_{N-1} & \\ \underline{m}_{N-1} & \underline{z}_{N-1} \\ \underline{j}_{N-1} & \end{array}\right]$$
$$+ z_N^{j_N}\mathrm{B}_N\left[\begin{array}{ccc|c} \underline{s}_N & & & \\ \underline{m}_{N-1} & j_{N-1} & & \underline{z}_N \\ \underline{j}_{N-1} & 0 & & \end{array}\right] + \varepsilon_N \sum_{k_N=t_N+1}^{T_N} z_N^{j_N-k_N} R_{N,N}(k_N; {}_N\underline{z}_N).$$

On repète ce procédé $N-1$ fois en appliquant le lemme 1, (i), à l'unique brique de profondeur N qui apparaît à chaque itération, jusqu'à obtenir (en plus d'autres termes) la brique

$$\mathrm{B}_N\left[\begin{array}{ccccc|c} \underline{s}_N & & & & & \\ \underline{m}_1 & j_1 & 0 & \cdots & 0 & \underline{z}_N \\ \underline{j}_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \end{array}\right],$$

à laquelle on applique alors le point (ii) du même lemme 1 (puisque $\underline{m}_1 = m_1 = 0$). En regroupant les termes, on constate que l'on a démontré le point (i) du théorème 5.

Pour prouver la partie (ii), on a également besoin d'un lemme technique, dont on donnera la démonstration à la fin du paragraphe.

Lemme 2. — *Soient* $e, f \in \mathbb{Z}$ *et* $i, j \in \mathbb{C}$.

(*i*) *Lorsque* $i = j$,

$$\frac{1}{(X+i)^e(X+j)^f} = \frac{1}{(X+i)^{e+f}}\ .$$

(*ii*) *Lorsque* $e \leq 0$ *et* $f \geq 1$,

$$\frac{1}{(X+i)^e(X+j)^f} = \sum_{u=0}^{-e} \binom{-e}{u} (i-j)^{-e-u} \frac{1}{(X+j)^{f-u}}\ .$$

(*iii*) *Lorsque* $e, f \leq 0$,

$$\frac{1}{(X+i)^e(X+j)^f} = \sum_{u=0}^{-e}\sum_{v=0}^{-f}\binom{-e}{u}\binom{-f}{v} i^{-e-u} j^{-f-v} X^{u+v} .$$

(*iv*) *Lorsque* $i \neq j$ *et* $e, f \geq 1$,

$$\frac{1}{(X+i)^e(X+j)^f} = \sum_{u=1}^{e} \frac{\binom{e+f-1-u}{f-1}}{(i-j)^{e+f-u}} \frac{(-1)^f}{(X+i)^u} + \sum_{v=1}^{f} \frac{\binom{e+f-1-v}{e-1}}{(j-i)^{e+f-v}} \frac{(-1)^e}{(X+j)^v}.$$

Nous allons exprimer $R_{N,p}(K; {}_p\underline{z}_N)$ en termes de briques à l'aide du lemme 2 appliqué à la fraction

$$\frac{1}{(k_{p-1}+j_{p-1})^{s_{p-1}}(k_{p-1}+K)^{s_p}}$$

qui apparaît dans (4.6). Cinq cas se présentent naturellement et il n'y en a pas d'autres possibles ; leurs intersections peuvent être non vides mais c'est sans importance ici.

Si $p = N$, resp. $p = 2$, les colonnes correspondant à $s_{p+1}, s_{p+2}, \ldots, s_N$, resp. $\underline{s}_{p-2}$, des six briques B_{N-1} suivantes n'apparaissent pas.

4.3.1. Premier cas : $K = j_{p-1}$. — Cela correspond au cas (i) du lemme 2. On a alors

$$R_{N,p}(K; {}_p\underline{z}_N) = \mathrm{B}_{N-1}\left[\begin{array}{cccccc|c} \underline{s}_{p-2} & s_{p-1}+s_p & s_{p+1} & s_{p+2} & \cdots & s_N & \\ \underline{m}_{p-2} & m_{p-1} & j_{p-1} & 0 & \cdots & 0 & {}_p\underline{z}_N \\ \underline{j}_{p-2} & j_{p-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \end{array}\right].$$

4.3.2. Deuxième cas : $s_{p-1} \leq 0$ *et* $s_p \geq 1$. — Cela correspond au cas (ii) du lemme 2. On a alors

$$R_{N,p}(K; {}_p\underline{z}_N) = \sum_{u=0}^{-s_{p-1}} \binom{-s_{p-1}}{u} (j_{p-1}-K)^{-s_{p-1}-u} \cdot \mathrm{B}_{N-1}\left[\begin{array}{cccccc|c} \underline{s}_{p-2} & s_p-u & s_{p+1} & s_{p+2} & \cdots & s_N & \\ \underline{m}_{p-2} & m_{p-1} & K & 0 & \cdots & 0 & {}_p\underline{z}_N \\ \underline{j}_{p-2} & K & 0 & 0 & \cdots & 0 & \end{array}\right].$$

4.3.3. Troisième cas : $s_{p-1} \geq 1$ *et* $s_p \leq 0$. — Cela correspond de nouveau au cas (ii) du lemme 2. On a alors

$$R_{N,p}(K; {}_p\underline{z}_N) = \sum_{u=0}^{-s_p} \binom{-s_p}{u} (K-j_{p-1})^{-s_p-u} \cdot \mathrm{B}_{N-1}\left[\begin{array}{cccccc|c} \underline{s}_{p-2} & s_{p-1}-u & s_{p+1} & s_{p+2} & \cdots & s_N & \\ \underline{m}_{p-2} & m_{p-1} & K & 0 & \cdots & 0 & {}_p\underline{z}_N \\ \underline{j}_{p-2} & j_{p-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \end{array}\right].$$

4.3.4. Quatrième cas : $s_{p-1} \leq 0$ et $s_p \leq 0$. — Cela correspond au cas (iii) du lemme 2. On a alors

$$R_{N,p}(K;{}_p\underline{z}_N) = \sum_{u=0}^{-s_{p-1}} \sum_{v=0}^{-s_p} \binom{-s_{p-1}}{u} \binom{-s_p}{v} j_{p-1}^{-s_{p-1}-u} K^{-s_p-v} \cdot \mathrm{B}_{N-1}\left[\begin{array}{cccccc|c} \underline{s}_{p-2} & -u-v & s_{p+1} & s_{p+2} & \cdots & s_N & \\ \underline{m}_{p-2} & m_{p-1} & K & 0 & \cdots & 0 & {}_p\underline{z}_N \\ \underline{j}_{p-2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \end{array} \right].$$

4.3.5. Cinquième cas : $K \neq j_{p-1}$, $s_{p-1} \geq 1$ et $s_p \geq 1$. — Cela correspond au cas (iv) du lemme 2. On a alors

$$\begin{aligned} &R_{N,p}(K;{}_p\underline{z}_N) \\ &\quad = (-1)^{s_p} \sum_{u=1}^{s_{p-1}} \frac{\binom{s_{p-1}+s_p-1-u}{s_p-1}}{(j_{p-1}-K)^{s_{p-1}+s_p-u}} \mathrm{B}_{N-1}\left[\begin{array}{cccccc|c} \underline{s}_{p-2} & u & s_{p+1} & s_{p+2} & \cdots & s_N & \\ \underline{m}_{p-2} & m_{p-1} & K & 0 & \cdots & 0 & {}_p\underline{z}_N \\ \underline{j}_{p-2} & j_{p-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \end{array} \right] \\ &\quad + (-1)^{s_{p-1}} \sum_{v=1}^{s_p} \frac{\binom{s_{p-1}+s_p-1-v}{s_{p-1}-1}}{(K-j_{p-1})^{s_{p-1}+s_p-v}} \mathrm{B}_{N-1}\left[\begin{array}{cccccc|c} \underline{s}_{p-2} & v & s_{p+1} & s_{p+2} & \cdots & s_N & \\ \underline{m}_{p-2} & m_{p-1} & K & 0 & \cdots & 0 & {}_p\underline{z}_N \\ \underline{j}_{p-2} & K & 0 & 0 & \cdots & 0 & \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Chacun de ces cinq cas montre que $R_{N,p}(K;{}_p\underline{z}_N)$ est un terme de profondeur $\leq N-1$, ce qui conclut la preuve. □

Démonstration du lemme 1. — Montrons (i). Remarquons tout d'abord que pour toute suite $(u_n)_{n\geq 0}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^{k+m} \frac{u_{\ell+j}\, z^{-\ell}}{(\ell+j)^s} &= \sum_{\ell=j+1}^{k+j+m} \frac{u_\ell\, z^{j-\ell}}{\ell^s} \\ &= \left(-\sum_{\ell=1}^{j} + \sum_{\ell=1}^{k+i} + \varepsilon_{i,j+m} \sum_{\ell=k+i\wedge(j+m)+1}^{k+i\vee(j+m)} \right) \frac{u_\ell\, z^{j-\ell}}{\ell^s} \\ &= \left(-\sum_{\ell=1}^{j} + \sum_{\ell=1}^{k+i} \right) \frac{u_\ell\, z^{j-\ell}}{\ell^s} + \varepsilon_{i,j+m} \sum_{\ell=i\wedge(j+m)+1}^{i\vee(j+m)} \frac{u_{k+\ell}\, z^{j-k-\ell}}{(k+\ell)^s}, \end{aligned} \tag{4.8}$$

après quelques manipulations immédiates.

Supposons maintenant $2 \leq p \leq N-1$. On a

$$\mathrm{B}_N\left[\begin{array}{ccccc|c} \underline{s}_N & & & & & \\ \underline{m}_p & j_p & 0 & \cdots & 0 & \underline{z}_N \\ \underline{j}_p & 0 & 0 & \cdots & 0 & \end{array}\right] = \sum_{\substack{k_{p-2}+m_{p-1}\geq k_{p-1}\geq 1 \\ \vdots \\ k_1+m_2\geq k_2\geq 1 \\ k_1\geq 1}} \frac{z_1^{-k_1}\cdots z_p^{-k_{p-1}}}{\prod_{i=1}^{p-1}(k_i+j_i)^{s_i}} \sum_{k_p=1}^{k_{p-1}+m_p} \frac{z_p^{-k_p}}{(k_p+j_p)^{s_p}}\, Q_{N,p+1}(k_p+j_p;\underline{z}_N^{p+1})$$

On applique (4.8) à la somme $\sum_{k_p=1}^{k_{p-1}+m_p}(\ldots)$ et à la suite $u_n = Q_{N,p+1}(n;\underline{x}_N^{p+1})$: grâce à la relation (4.5) entre $Q_{N,p}$ et $Q_{N,p+1}$, on voit alors que

$$\mathrm{B}_N\left[\begin{array}{ccccc|c} \underline{s}_N & & & & & \\ \underline{m}_p & j_p & 0 & \cdots & 0 & \underline{z}_N \\ \underline{j}_p & 0 & 0 & \cdots & 0 & \end{array}\right] = z_p^{j_p}\,\mathrm{B}_N\left[\begin{array}{ccccc|c} \underline{s}_N & & & & & \\ \underline{m}_{p-1} & j_{p-1} & 0 & \cdots & 0 & \underline{z}_N \\ \underline{j}_{p-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \end{array}\right]$$
$$- z_p^{j_p}\,Q_{N,p}(j_p;\underline{z}_N^p)\,\mathrm{B}_{p-1}\left[\begin{array}{c|c} \underline{s}_{p-1} & \\ \underline{m}_{p-1} & \underline{z}_p \\ \underline{j}_{p-1} & \end{array}\right] + \varepsilon_p \sum_{k_p=t_p+1}^{T_p} z_p^{j_p-k_p} R_{N,p}(k_p;{}_p\underline{z}_N).$$

Pour (ii), on a

$$\begin{aligned} &\mathrm{B}_N\left[\begin{array}{ccccc|c} \underline{s}_N & & & & & \\ 0 & j_1 & 0 & \cdots & 0 & \underline{z}_N \\ \underline{j}_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \end{array}\right] \\ &= \sum_{k_1=1}^{\infty} \frac{z_1^{-k_1}}{(k_1+j_1)^{s_1}}\, Q_{N,2}(k_1+j_1;\underline{z}_N^2) = \sum_{k_1=j_1+1}^{\infty} \frac{z_1^{j_1-k_1}}{k_1^{s_1}}\, Q_{N,2}(k_1;\underline{z}_N^2) \\ &= z_1^{j_1}\,\mathrm{B}_N\left[\begin{array}{ccccc|c} \underline{s}_N & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \underline{z}_N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \end{array}\right] - \sum_{k_1=1}^{j_1} \frac{z_1^{j_1-k_1}}{k_1^{s_1}}\, Q_{N,2}(k_1;\underline{z}_N^2) \\ &= z_1^{j_1}\mathrm{La}_{\underline{s}_N}(1/\underline{z}_N) - z_1^{j_1}\,Q_{N,1}(j_1;\underline{z}_N) \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration du lemme. □

Démonstration du lemme 2. — Les points (i), (ii) et (iii) sont triviaux et on démontre seulement (iv), qui l'est à peine moins. En effet, on a

$$\frac{1}{(X+i)^e(X+j)^f} = \sum_{u=1}^{e} \frac{a_u}{(X+i)^u} + \sum_{v=1}^{f} \frac{b_v}{(X+j)^v}$$

avec

$$a_u = \frac{1}{(e-u)!}\left(\frac{1}{(X+j)^f}\right)^{e-u}\Bigg|_{X=-i}$$
$$= \frac{(-f)(-f-1)\cdots(-f-e+u+1)}{(e-u)!(j-i)^{e+f-u}} = \binom{e+f-u-1}{f-1}\frac{(-1)^f}{(i-j)^{e+f-u}}$$

et la formule similaire attendue pour b_v. □

5. Précisions sur le Théorème 5

Le but de ce paragraphe est de préciser la nature des polynômes de Laurent qui apparaissent quand on itère le Théorème 5, sous la condition que tous les exposants s_i sont strictement positifs.

On pose

- $M_i = \sum_{k=1}^{i} m_k$ avec $M_0 = 0$;
- $I_N = \max_{i=1,\dots,N}(T_i + M_{i-1})$ avec $T_i = j_{i-1} \vee (j_i + m_i)$, $j_0 = 0$ et $I_0 = 0$;
- $J_N = \max_{i=1,\dots,N}(j_i)$ et $J_0 = 0$;
- $K_N = \max_{i=1,\dots,N}(T_i)$ et $K_0 = 0$;
- $\Sigma_N = \sum_{i=1}^{N} s_i$.

J_N est le cas spécial de I_N obtenu lorsque les modulations sont toutes nulles. Rappelons que d_n dénote le p.p.c.m. des entiers $1, 2, \dots, n$. Par convention, $\mathrm{d}_0 = 1$. On utilisera le fait trivial que $\mathrm{d}_n^e \mathrm{d}_m^f$ divise $\mathrm{d}_{n\vee m}^{e+f}$.

Théorème 6. — *Supposons que tous les exposants s_i sont strictement positifs.*

(*i*) *Les polynômes de Laurent qui interviennent dans la décomposition de la brique décalée-modulée large* (4.3) *en polylogarithmes multiples sont dans*

$$d_{I_N}^{-\Sigma_N}\mathbb{Z}[z_1, z_2^{\pm 1}, \dots, z_N^{\pm 1}]$$

et leur degré en z_1 est au plus K_N.

(*ii*) *Les polynômes de Laurent qui interviennent dans la décomposition de la brique décalée large* (4.4) *en polylogarithmes multiples sont dans*

$$d_{J_N}^{-\Sigma_N}\mathbb{Z}[z_1, z_2^{\pm 1}, \dots, z_N^{\pm 1}]$$

et leur degré en z_1 est au plus J_N.

Remarques 4. — (1) *Le point* (*ii*) *est le seul vraiment utile ; nous ne savons pas le démontrer sans d'abord démontrer* (*i*)*, dont il est un cas particulier.*

(2) *On n'utilisera pas que les s_i sont strictement positifs pour démontrer que les polynômes de Laurent sont des polynômes de degré $\leq j_1$ en la variable z_1.*

(3) *Concernant le dénominateur, un résultat similaire a probablement lieu dans le cas général mais nous n'avons pas cherché à l'expliciter, faute de perspectives diophantiennes évidentes.*

Démonstration. — (i) Nous procédons, en deux temps, par récurrence sur la profondeur N de la brique (4.3) : le point (ii) en découle en prenant le cas particulier de modulations toutes nulles.

5.1. Preuve de l'assertion sur les dénominateurs. — Le cas $N = 1$ est immédiat : on a

$$\mathrm{B}_1\left[\begin{array}{c|c} s_1 & \\ 0 & z_1 \\ j_1 & \end{array}\right] = z_1^{j_1}\,\mathrm{La}_{s_1}(z_1) - z_1^{j_1}\,Q_{1,1}(j_1; z_1), \tag{5.1}$$

où $Q_{1,1}(j_1; z_1) = \displaystyle\sum_{k_1=1}^{j_1} \frac{z_1^{-k_1}}{k_1^{s_1}}$ a pour dénominateur $\mathrm{d}_{j_1}^{s_1} = \mathrm{d}_{I_1}^{\Sigma_1}$.

Supposons maintenant le Théorème 6 vrai jusqu'à la profondeur $N-1$ et analysons les différents termes de l'équation (4.7), que nous rappelons :

$$\begin{aligned}\mathrm{B}_N\left[\begin{array}{c|c} \underline{s}_N & \\ \underline{m}_N & \underline{z}_N \\ \underline{j}_N & \end{array}\right] &= (z_1^{j_1}\cdots z_N^{j_N})\,\mathrm{La}_{\underline{s}_N}(\underline{z}_N) \\ &\quad - \sum_{p=1}^{N} (z_p^{j_p}\cdots z_N^{j_N})\,Q_{N,p}(j_p; \underline{z}_N^p)\,\mathrm{B}_{p-1}\left[\begin{array}{c|c} \underline{s}_{p-1} & \\ \underline{m}_{p-1} & \underline{z}_p \\ \underline{j}_{p-1} & \end{array}\right] \\ &\quad + \sum_{p=2}^{N} \varepsilon_p\,(z_p^{j_p}\cdots z_N^{j_N}) \sum_{k_p=t_p+1}^{T_p} z_p^{-k_p} R_{N,p}(k_p; {}_p\underline{z}_N).\end{aligned}$$

Tout d'abord

$$Q_{N,p}(j_p; \underline{z}_N^p) = \sum_{j_p\geq k_p\geq\cdots\geq k_N\geq 1} \frac{z_p^{-k_p}\cdots z_N^{-k_N}}{\prod_{i=p}^N k_i^{s_i}}$$

a pour dénominateur $\mathrm{d}_{j_p}^{s_p+\cdots+s_N}$. Par hypothèse de récurrence, un dénominateur de la brique B_{p-1} est $\mathrm{d}_{I_{p-1}}^{s_1+\cdots+s_{p-1}}$, même pour $p = 1$. Un dénominateur des termes $Q_{N,p}\mathrm{B}_{p-1}$ est donc $\mathrm{d}_{j_p}^{s_p+\cdots+s_N}\,\mathrm{d}_{I_{p-1}}^{s_1+\cdots+s_{p-1}}$, qui divise $\mathrm{d}_{I_N}^{\Sigma_N}$ puisque $j_p \vee I_{p-1} \leq (T_p + M_{p-1}) \vee I_{p-1} = I_p \leq I_N$ pour tout $p \in \{1, \ldots, N\}$.

Il reste à analyser les termes $R_{N,p}(k_p; {}_p\underline{z}_N)$: nous allons distinguer deux cas.

5.1.1. Premier cas : $k_p = j_{p-1}$. — On est alors dans la situation du paragraphe 4.3.1 :

$$R_{N,p}(j_{p-1}; {}_p\underline{z}_N) = \mathrm{B}_{N-1}\left[\begin{array}{cccccc|c} \underline{s}_{p-2} & s_{p-1}+s_p & s_{p+1} & s_{p+2} & \cdots & s_N & \\ \underline{m}_{p-2} & m_{p-1} & j_{p-1} & 0 & \cdots & 0 & {}_p\underline{z}_N \\ \underline{j}_{p-2} & j_{p-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \end{array}\right].$$

L'hypothèse de récurrence s'applique : un dénominateur de la brique est

$$\mathrm{d}^{\Sigma_N}_{I_{p-1}\vee(j_{p-1}\vee(0+j_{p-1})+M_p)} = \mathrm{d}^{\Sigma_N}_{I_{p-1}\vee(j_{p-1}+M_p)}.$$

Comme $j_{p-1} + M_{p-1} \leq T_p + M_{p-1}$, ce dénominateur divise $\mathrm{d}^{\Sigma_N}_{I_p}$, qui divise $\mathrm{d}^{\Sigma_N}_{I_N}$.

5.1.2. Second cas : $k_p \neq j_{p-1}$. — On est maintenant dans la situation du paragraphe 4.3.5 :

$$\sum_{p=2}^{N} \varepsilon_p \left(z_p^{j_p} \cdots z_N^{j_N}\right) \sum_{\substack{k_p=t_p+1 \\ k_p\neq j_{p-1}}}^{T_p} R_{N,p}(k_p; {}_p\underline{z}_N) = \sum_{p=2}^{N} \varepsilon_p \left(z_p^{j_p} \cdots z_N^{j_N}\right)\left(\sum_{u=1}^{s_{p-1}} B_{1,p}(u) + \sum_{v=1}^{s_p} B_{2,p}(v)\right)$$

avec

$$B_{1,p}(u) = (-1)^{s_p} \sum_{\substack{k_p=t_p+1 \\ k_p\neq j_{p-1}}}^{T_p} \frac{\binom{s_{p-1}+s_p-1-v}{s_p-1}}{(j_{p-1}-k_p)^{s_{p-1}+s_p-u}} \cdot \mathrm{B}_{N-1}\left[\begin{array}{cccccc|c} \underline{s}_{p-2} & u & s_{p+1} & s_{p+2} & \cdots & s_N & \\ \underline{m}_{p-2} & m_{p-1} & k_p & 0 & \cdots & 0 & {}_p\underline{z}_N \\ \underline{j}_{p-2} & j_{p-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \end{array}\right] \quad (5.2)$$

et

$$B_{2,p}(v) = (-1)^{s_{p-1}} \sum_{\substack{k_p=t_p+1 \\ k_p\neq j_{p-1}}}^{T_p} \frac{\binom{s_{p-1}+s_p-1-v}{s_{p-1}-1}}{(k_p-j_{p-1})^{s_{p-1}+s_p-v}} \cdot \mathrm{B}_{N-1}\left[\begin{array}{cccccc|c} \underline{s}_{p-2} & v & s_{p+1} & s_{p+2} & \cdots & s_N & \\ \underline{m}_{p-2} & m_{p-1} & k_p & 0 & \cdots & 0 & {}_p\underline{z}_N \\ \underline{j}_{p-2} & k_p & 0 & 0 & \cdots & 0 & \end{array}\right]. \quad (5.3)$$

Nous allons montrer que $\mathrm{d}^{\Sigma_N}_{I_N}$ est un dénominateur convenable pour les termes (5.2) et (5.3), ce qui suffira puisqu'il est indépendant de p, u et v. Fixons p, u et v. Par hypothèse de récurrence, les deux briques B_{N-1} ont pour dénominateurs respectifs

$$D_1 = \mathrm{d}^{u+\Sigma_N-s_p-s_{p-1}}_{I_{p-1}\vee(k_p+M_{p-1})} \quad \text{et} \quad D_2 = \mathrm{d}^{v+\Sigma_N-s_p-s_{p-1}}_{I_{p-2}\vee(j_{p-2}\vee(k_p+m_{p-1})+M_{p-2})\vee(k_p+M_{p-1})}.$$

Puisque $k_p \leq T_p$, on a $I_{p-1} \vee (k_p + M_{p-1}) \leq I_{p-1} \vee (T_p + M_{p-1}) = I_p$ et donc D_1 divise $\mathrm{d}^{u+\Sigma_N-s_p-s_{p-1}}_{I_p}$. D'autre part, si $j_{p-2} \leq k_p + m_{p-1}$, on a

$$j_{p-2} \vee (k_p + m_{p-1}) + M_{p-2} \leq k_p + m_{p-1} + M_{p-2} \leq T_p + M_{p-1}$$

tandis que si $j_{p-2} \geq k_p + m_{p-1}$, alors

$$j_{p-2} \vee (k_p + m_{p-1}) + M_{p-2} \leq j_{p-2} + M_{p-2} \leq T_{p-1} + M_{p-2},$$

d'où D_2 divise $\mathrm{d}_{I_{p-2} \vee (T_{p-1}+M_{p-2}) \vee (T_p + M_{p-1})}^{v+\Sigma_N - s_p - s_{p-1}} = \mathrm{d}_{I_p}^{v+\Sigma_N - s_p - s_{p-1}}$. On obtient donc des dénominateurs uniformes en k_p pour les briques B_{N-1} :

$$\mathrm{d}_{I_p}^{u+\Sigma_N - s_p - s_{p-1}} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}_{I_p}^{v+\Sigma_N - s_p - s_{p-1}}.$$

Les deux sommes

$$\mathrm{d}_{I_p}^{u+\Sigma_N - s_p - s_{p-1}} B_{1,p}(u) = (-1)^{s_p} \sum_{\substack{k_p = t_p + 1 \\ k_p \neq j_{p-1}}}^{T_p} \frac{\binom{s_{p-1}+s_p-1-u}{s_p-1}}{(j_{p-1} - k_p)^{s_{p-1}+s_p-u}} \, \mathrm{d}_{I_p}^{u+\Sigma_N - s_p - s_{p-1}} \mathrm{B}_{N-1}[\cdots]$$

et

$$\mathrm{d}_{I_p}^{v+\Sigma_N - s_p - s_{p-1}} B_{2,p}(v) = (-1)^{s_{p-1}} \sum_{\substack{k_p = t_p + 1 \\ k_p \neq j_{p-1}}}^{T_p} \frac{\binom{s_{p-1}+s_p-1-v}{s_{p-1}-1}}{(k_p - j_{p-1})^{s_{p-1}+s_p-v}} \, \mathrm{d}_{I_p}^{v+\Sigma_N - s_p - s_{p-1}} \mathrm{B}_{N-1}[\cdots]$$

ont donc pour dénominateurs respectifs $\mathrm{d}_{|j_p+m_p-j_{p-1}|}^{-u+s_{p-1}+s_p}$ et $\mathrm{d}_{|j_p+m_p-j_{p-1}|}^{-v+s_{p-1}+s_p}$, qui divisent trivialement $\mathrm{d}_{I_p}^{-u+s_{p-1}+s_p}$, resp. $\mathrm{d}_{I_p}^{-v+s_{p-1}+s_p}$, car $|j_p + m_p - j_{p-1}| \leq T_p \leq I_p$. Ainsi, on peut prendre

$$\mathrm{d}_{I_p}^{-u+s_{p-1}+s_p} \, \mathrm{d}_{I_p}^{u+\Sigma_N - s_p - s_{p-1}} = \mathrm{d}_{I_p}^{\Sigma_N}$$

et

$$\mathrm{d}_{I_p}^{-v+s_{p-1}+s_p} \, \mathrm{d}_{I_p}^{v+\Sigma_N - s_p - s_{p-1}} = \mathrm{d}_{I_p}^{\Sigma_N},$$

comme dénominateur de (5.2) et (5.3), ce qui achève la preuve du Théorème 6 puisque $\mathrm{d}_{I_p}^{\Sigma_N}$ divise $\mathrm{d}_{I_N}^{\Sigma_N}$.

5.2. Preuve de l'assertion sur le degré en z_1. — De nouveau, on raisonne par récurrence sur la profondeur $N \geq 1$. C'est évidemment vrai pour $N = 1$ par l'équation (5.1). Supposons maintenant l'assertion vraie pour $N - 1$ et, comme précédemment, analysons les termes de l'équation (4.7). Le terme $(z_1^{j_1} \cdots z_N^{j_N}) \, \mathrm{La}_{\underline{s}_N}(\underline{z}_N)$ est de la forme voulue, avec un degré $j_1 \leq K_N$. Dans le terme

$$\sum_{p=1}^{N} (z_p^{j_p} \cdots z_N^{j_N}) \, Q_{N,p}(j_p; \underline{z}_N^p) \, \mathrm{B}_{p-1} \left[\begin{array}{c|c} \underline{s}_{p-1} & \\ \underline{m}_{p-1} & \underline{z}_p \\ \underline{j}_{p-1} & \end{array} \right],$$

si $p \geq 2$, la variable z_1 n'apparaît pas dans les polynômes de Laurent $Q_{N,p}(j_p; \underline{z}_N^p)$ et seulement dans la brique $B_{p-1}[\ldots]$ qui est de profondeur $p-1 \leq N-1$: l'hypothèse de récurrence s'applique et seules les puissances positives de z_1 interviennent bien, jusqu'au plus $z_1^{K_{p-1}}$, donc au plus $z_1^{K_N}$. Si $p = 1$, alors z_1 intervient dans l'expression $z_1^{j_1} \, Q_{N,1}(j_1; \underline{z}_N^1) \, \mathrm{B}_0[\ldots] =$

$z_1^{j_1} Q_{N,1}(j_1; \underline{z}_N)$, qui est aussi un polynôme en z_1 de degré au plus $j_1 \leq K_N$. Il reste le dernier terme

$$\sum_{p=2}^{N} \varepsilon_p \, (z_p^{j_p} \cdots z_N^{j_N}) \sum_{k_p=t_p+1}^{T_p} z_p^{-k_p} R_{N,p}(k_p; {}_p\underline{z}_N)$$

qui ne dépend de z_1 que par $R_{N,p}(k_p; {}_p\underline{z}_N)$. Or les expressions que nous en avons données au paragraphe précédent montrent qu'il s'agit d'une combinaison linéaire de briques de profondeur $\leq N-1$ évaluées en ${}_p\underline{z}_N$ et dont les coefficients ne dépendent pas des z_i. Dans ${}_p\underline{z}_N$, la variable z_1 apparaît seule si $3 \leq p \leq N$: l'hypothèse de récurrence s'applique et on vérifie que le degré en z_1 est au plus $K_p \leq K_N$. Si $p = 2$, alors il y a une subtilité car z_1 apparaît multiplié par z_2 : ce n'est pas gênant, l'hypothèse de récurrence s'applique de nouveau et le degré en z_1 est $\leq T_2 \leq K_N$, ce qui conclut la démonstration. □

6. Non-enrichissement des $\mathrm{La}_{s_1,\ldots,s_p}$ à exposants négatifs

L'algorithme de décomposition des briques peut faire apparaître des polylogarithmes larges à exposants négatifs. Par exemple la décomposition de l'intégrale de Sorokin pour $\zeta(3)$

$$\int_{[0,1]^3} \frac{u^n(1-u)^n v^n(1-v)^n w^n(1-w)^n}{(z_1 - uv)^{n+1}(z_1 z_2 - uvw)^{n+1}} \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w,$$

fait intervenir des $\mathrm{La}_{s_1,s_2}(1/z_1, 1/z_2)$, avec $s_1 = 1, 2$, $s_2 = 0, -1, \ldots, -n+1$.

Afin de régler ces cas singuliers, on démontre un résultat dit de *non-enrichissement arithmétique*.

Théorème 7. — *Supposons que, pour tout $j = 1, \ldots, p$, on ait $|z_j| < 1$. Alors, tout polylogarithme multiple large $\mathrm{La}_{s_1,\ldots,s_p}(z_1, \ldots, z_p)$ de profondeur p ayant certains exposants $s_j \leq 0$ s'exprime comme une combinaison linéaire finie de polylogarithmes multiples larges $\mathrm{La}_{s'_1,\ldots,s'_q}(z_1^*, \ldots, z_q^*)$ de profondeur $q \leq p$, avec $s'_j \geq 1$, où les z_i^* sont certains produits des z_j. Les coefficients de la combinaison linéaire sont des polynômes à coefficients rationnels en les $\left((1 - z_{j_1} \cdots z_{j_m})^{-1}\right)_{1 \leq j_1 < \ldots < j_m \leq p,\, m \geq 1}$ et les $\left(z_j^{\pm 1}\right)_{1 \leq j \leq p}$. De plus, on a $\sum_{i=1}^{q} s'_q \leq \sum_{i=1}^{p} s_p$ pour toutes les suites d'exposants $\underline{s}'$ qui apparaissent.*

Remarques 5. — (1) *Pour tout z tel que $|z| < 1$, on a*

$$\mathrm{La}_{-s}(z) = \left(z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^s \left(\frac{1}{1-z}\right) \in (1-z)^{-s-1}\mathbb{Z}[z].$$

(2) *Ce théorème est de facture informelle mais sa démonstration offre un moyen algorithmique de l'expliciter.*

(3) *Un résultat de ce type est annoncé par Écalle (*[**13**, pp. 419–420]*) dans le cas des polyzêtas, sans démonstration.*

6.1. Préliminaires. — On suppose dans toute la suite de ce paragraphe que toutes les variables notées z ou z_j sont de modules < 1. La démonstration utilisera l'identité triviale suivante, valable pour tout entier $K \geq 1$:

$$\sum_{k_1=1}^{K} \sum_{k_2=1}^{k_1} = \sum_{k_2=1}^{K} \left(\sum_{k_1=1}^{K} - \sum_{k_1=1}^{k_2-1} \right). \tag{6.1}$$

Pour tous entiers $s \geq 0$ et $K \geq 1$, on définit $P_s(K,z) = \sum_{k=1}^{K} k^s z^k$, qui vérifie :

$$P_s(K,z) = \left(z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \right)^s \left(z\frac{1-z^K}{1-z} \right).$$

On en déduit que l'on a

$$P_s(K,z) = \sum_{\ell=0}^{s} \frac{z^K a_{1,\ell}(s,z) + a_{2,\ell}(s,z)}{(1-z)^{s+1}} K^\ell \tag{6.2}$$

où $a_{1,\ell}(s,z)$ et $a_{1,\ell}(s,z)$ sont des polynômes en z de degré au plus s et indépendants de K. On notera

Les objets naturels qui vont intervenir sont des *polylogarithmes larges tronqués* :

$$\mathrm{La}^K_{s_1,\dots,s_p}(z_1,\dots,z_p) = \sum_{K \geq k_1 \geq \cdots \geq k_p \geq 1} \frac{z_1^{k_1} \dots z_p^{k_p}}{k_1^{s_1} \dots k_p^{s_p}}.$$

On remarque que l'on a $\mathrm{La}^K_{s_1}(z_1) = P_{-s_1}(K,z_1)$ lorsque $s_1 \leq 0$.

On aura besoin du lemme suivant.

Lemme 3. — *Soient des entiers $s_1 \geq 0$ et $s_2,\dots,s_p \in \mathbb{Z}$. Pour tous entiers $K \geq 1$ et $p \geq 2$, on a :*

$$\begin{aligned}\mathrm{La}^K_{-s_1,s_2,\dots,s_p}(z_1,\dots,z_p) &= P_{s_1}(K,z_1)\mathrm{La}^K_{s_2,\dots,s_p}(z_2,\dots,z_p) \\ &\quad - \sum_{\ell=0}^{s_1} \frac{a_{1,\ell}(s_1,z_1)}{(1-z_1)^{s_1+1}z_1} \sum_{m=0}^{\ell} \binom{\ell}{m} (-1)^{\ell-m} \mathrm{La}^K_{s_2-m,s_3,\dots,s_p}(z_1z_2,z_3,\dots,z_p) \\ &\quad\quad - \sum_{\ell=0}^{s_1} \frac{a_{2,\ell}(s_1,z_1)}{(1-z_1)^{s_1+1}} \sum_{m=0}^{\ell} \binom{\ell}{m} (-1)^{\ell-m} \mathrm{La}^K_{s_2-m,s_3,\dots,s_p}(z_2,\dots,z_p).\end{aligned}$$

Démonstration. — En utilisant (6.1), on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{La}^K_{-s_1,s_2,\dots,s_p}(z_1,\dots,z_p) &= \sum_{k_2=1}^{K}\frac{z_2^{k_2}}{k_2^{s_2}}\Big(\sum_{k_1=1}^{K}k_1^{s_1}z^{k_1}-\sum_{k_1=1}^{k_2-1}k_1^{s_1}z^{k_1}\Big)\mathrm{La}^{k_2}_{s_3,\dots,s_p}(z_3,\dots,z_p)\\ &= \sum_{k_2=1}^{K}\frac{z_2^{k_2}}{k_2^{s_2}}\big(P_{s_1}(K,z_1)-P_{s_1}(k_2-1,z_1)\big)\mathrm{La}^{k_2}_{s_3,\dots,s_p}(z_3,\dots,z_p).\end{aligned}$$

Au moyen de (6.2), on obtient

$$\mathrm{La}^K_{-s_1,s_2,\dots,s_p}(z_1,\dots,z_p)=P_{s_1}(K,z_1)\sum_{k_2=1}^{K}\left(\frac{z_2^{k_2}}{k_2^{s_2}}\mathrm{La}^{k_2}_{s_3,\dots,s_p}(z_3,\dots,z_p)\right)$$
$$-\sum_{\ell=0}^{s_1}\frac{1}{(1-z_1)^{s_1+1}}\sum_{k_2=1}^{K}(z_1^{k_2-1}a_{1,\ell}(s_1,z_1)+a_{2,\ell}(s_1,z_1))\left(\frac{z_2^{k_2}}{k_2^{s_2}}\,(k_2-1)^\ell\,\mathrm{La}^{k_2}_{s_3,\dots,s_p}(z_3,\dots,z_p)\right).$$

La première somme vaut exactement

$$P_{s_1}(K,z_1)\mathrm{La}^K_{s_2,\dots,s_p}(z_2,\dots,z_p).$$

La seconde somme faisant intervenir $(k_2-1)^\ell$ est à peine plus compliquée. En développant le terme $(k_2-1)^\ell$ par le théorème binomial et en remplaçant directement dans la somme, on obtient en effet :

$$-\sum_{\ell=0}^{s_1}\frac{a_{1,\ell}(s_1,z_1)}{(1-z_1)^{s_1+1}z_1}\sum_{m=0}^{\ell}\binom{\ell}{m}(-1)^{\ell-m}\mathrm{La}^K_{s_2-m,s_3,\dots,s_p}(z_1z_2,z_3,\dots,z_p)$$
$$-\sum_{\ell=0}^{s_1}\frac{a_{2,\ell}(s_1,z_1)}{(1-z_1)^{s_1+1}}\sum_{m=0}^{\ell}\binom{\ell}{m}(-1)^{\ell-m}\mathrm{La}^K_{s_2-m,s_3,\dots,s_p}(z_2,z_3,\dots,z_p),$$

ce qui termine la démonstration. □

6.2. Démonstration du théorème 7. — On remarque que le lemme 3 exprime un polylogarithme de profondeur p à l'aide de polylogarithmes de profondeur $p-1$, ce qui ouvre la porte à une démonstration du théorème 7 par récurrence

Pour $p=1$, le théorème est vrai, comme le montre la remarque (1) qui suit son énoncé.

On suppose que l'on sait décomposer les polylogarithmes de profondeur $\leq p-1$ (avec $p-1\geq 1$) de la manière prévu par le théorème. Soit maintenant $s_1,\dots,s_p$ une suite quelconque d'entiers, avec au moins un $s_j\leq 0$: notons $q+1$ le plus petit indice ≥ 1 tel que $s_{q+1}\leq 0$. Pour simplifier, on note $s_{q+1}=-s$ avec $s\geq 0$. On doit distinguer trois cas : $q=0$, $1\leq q\leq p-2$ et $q=p-1$.

– Le cas $q = 0$. Notons que pour tout entier $t \geq 0$, on a

$$\sum_{k=\ell}^{\infty} k^t z^k = \left(z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^t \left(\frac{z^\ell}{1-z}\right) = \frac{z^\ell Q_t(\ell, z)}{(1-z)^{t+1}}$$

avec $Q_t(\ell, z) \in \mathbb{Z}[\ell, z]$ de degré s en ℓ et z. On pose donc $Q_t(\ell, z) = \sum_{j=0}^{s} q_{j,s}(z)\ell^j$. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{La}_{s_1,s_2,\ldots,s_p}(z_1, z_2, \ldots, z_p) &= \sum_{k_2 \geq \cdots \geq k_p \geq 1} \left(\frac{z_2^{k_2} \cdots z_p^{k_p}}{k_2^{s_2} \cdots k_p^{s_p}} \sum_{k_1=k_2}^{\infty} k_1^s z_1^{k_1} \right) \\
&= \frac{1}{(1-z_1)^{s+1}} \sum_{k_2 \geq \cdots \geq k_p \geq 1} Q_s(k_2, z_1) \frac{(z_1 z_2)^{k_2} z_3^{k_3} \cdots z_p^{k_p}}{k_2^{s_2} k_3^{s_3} \cdots k_p^{s_p}} \\
&= \frac{1}{(1-z_1)^{s+1}} \sum_{j=0}^{s} q_{j,s}(z_1) \mathrm{La}_{s_2-j,s_3,\ldots,s_p}(z_1 z_2, z_3, \ldots, z_p).
\end{aligned}$$

Comme on n'a finalement que des La de profondeur $p-1$, l'hypothèse de récurrence s'applique.

– Le cas $1 \leq q \leq p-2$. On applique le lemme 3 de telle sorte que

$$\begin{aligned}
&\mathrm{La}_{s_1,s_2,\ldots,s_p}(z_1, z_2, \ldots, z_p) \\
&= \sum_{k_1 \geq \cdots \geq k_q \geq 1} \frac{z_1^{k_1} \cdots z_q^{k_q}}{k_1^{s_1} \cdots k_q^{s_q}} \mathrm{La}^{k_q}_{-s,s_{q+2},\ldots,s_p}(z_{q+1}, z_{q+2}, \ldots, z_p) \\
&= \sum_{k_1 \geq \cdots \geq k_q \geq 1} \frac{z_1^{k_1} \cdots z_q^{k_q}}{k_1^{s_1} \cdots k_q^{s_q}} P_s(k_q, z_{q+1}) \mathrm{La}^{k_q}_{s_{q+2},\ldots,s_p}(z_{q+2}, \ldots, z_p) \qquad (6.3) \\
&\quad - \sum_{\ell=0}^{s} \frac{a_{1,\ell}(s, z_{q+1})}{(1-z_{q+1})^{s+1} z_{q+1}} \sum_{m=0}^{\ell} \left((-1)^{\ell-m} \binom{\ell}{m} \right. \\
&\qquad \left. \times \sum_{k_1 \geq \cdots \geq k_q \geq 1} \frac{z_1^{k_1} \cdots z_q^{k_q}}{k_1^{s_1} \cdots k_q^{s_q}} \mathrm{La}^{k_q}_{s_{q+2}-m,s_{q+3},\ldots,s_p}(z_{q+1} z_{q+2}, z_{q+3}, \ldots, z_p) \right) \qquad (6.4) \\
&\quad - \sum_{\ell=0}^{s} \frac{a_{2,\ell}(s, z_{q+1})}{(1-z_{q+1})^{s+1}} \sum_{m=0}^{\ell} \left((-1)^{\ell-m} \binom{\ell}{m} \right. \\
&\qquad \left. \times \sum_{k_1 \geq \cdots \geq k_q \geq 1} \frac{z_1^{k_1} \cdots z_q^{k_q}}{k_1^{s_1} \cdots k_q^{s_q}} \mathrm{La}^{k_q}_{s_{q+2}-m,s_{q+3},\ldots,s_p}(z_{q+2}, z_{q+3}, \ldots, z_p) \right) \qquad (6.5)
\end{aligned}$$

Il est facile de traiter les séries (6.4) et (6.5) puisqu'elles valent respectivment

$$\mathrm{La}_{s_1,\ldots,s_q,s_{q+2}-m,s_{q+3},\ldots,s_p}(z_1, \ldots, z_q, z_{q+1} z_{q+2}, \ldots, z_p)$$

et

$$\mathrm{La}_{s_1,\dots,s_q,s_{q+2}-m,s_{q+3},\dots,s_p}(z_1,\dots,z_q,z_{q+2},\dots,z_p),$$

qui sont de profondeur $p-1$: on peut donc leur appliquer l'hypothèse de récurrence.

Reste la série sur la ligne (6.3) : on utilise de nouveau la forme développée (6.2) de $P_s(K,z)$ pour en obtenir l'expression alternative

$$\begin{aligned}
&\sum_{\ell=0}^{s}\sum_{k_1\geq\cdots\geq k_q\geq 1}\frac{z_1^{k_1}\cdots z_q^{k_q}}{k_1^{s_1}\cdots k_q^{s_q}}\frac{z_{q+1}^{k_q}a_{1,\ell}(s,z_{q+1})+a_{2,\ell}(s,z_{q+1})}{k_q^{-\ell}(1-z_{q+1})^{s+1}}\,\mathrm{La}^{k_q}_{s_{q+2},\dots,s_p}(z_{q+2},\dots,z_p)\\
&\quad=\frac{1}{(1-z_{q+1})^{s+1}}\sum_{\ell=0}^{s}\Bigg(a_{1,\ell}(s,z_{q+1})\mathrm{La}_{s_1,\dots,s_{q-1},s_q-\ell,s_{q+2},\dots,s_p}(z_1,\dots,z_qz_{q+1},z_{q+2},\dots,z_p)\\
&\qquad\qquad+a_{2,\ell}(s,z_{q+1})\mathrm{La}_{s_1,\dots,s_{q-1},s_q-\ell,s_{q+2},\dots,s_p}(z_1,\dots,z_q,z_{q+2},\dots,z_p)\Bigg).
\end{aligned}$$

Comme on a maintenant affaire à une combinaison linéaire de La de profondeur $p-1$, l'hypothèse de récurrence s'applique.

– Le cas $q=p-1$. On a

$$\begin{aligned}
&\mathrm{La}_{s_1,s_2,\dots,s_p}(z_1,z_2,\dots,z_p)\\
&\quad=\sum_{k_1\geq\cdots\geq k_{p-1}\geq 1}\frac{z_1^{k_1}\cdots z_q^{k_{p-1}}}{k_1^{s_1}\cdots k_{p-1}^{s_{p-1}}}\,\mathrm{La}^{k_{p-1}}_{-s}(z_p)\\
&\quad=\sum_{k_1\geq\cdots\geq k_{p-1}\geq 1}\frac{z_1^{k_1}\cdots z_q^{k_q}}{k_1^{s_1}\cdots k_q^{s_q}}P_s(k_{p-1},z_p)\\
&\quad=\sum_{\ell=0}^{s}\sum_{k_1\geq\cdots\geq k_{p-1}\geq 1}\frac{z_1^{k_1}\cdots z_q^{k_q}}{k_1^{s_1}\cdots k_q^{s_q}}\frac{z_p^{k_{p-1}}a_{1,\ell}(s,z_p)+a_{2,\ell}(s,z_p)}{k_q^{-\ell}(1-z_p)^{s+1}}\\
&\quad=\frac{1}{(1-z_p)^{s+1}}\sum_{\ell=0}^{s}\Bigg(a_{1,\ell}(s,z_p)\mathrm{La}_{s_1,\dots,s_{p-2},s_{p-2}-\ell}(z_1,\dots,z_{p-2},z_{p-1}z_p)\\
&\qquad\qquad+a_{1,\ell}(s,z_p)\mathrm{La}_{s_1,\dots,s_{p-2},s_{p-2}-\ell}(z_1,\dots,z_{p-2},z_{p-1})\Bigg).
\end{aligned}$$

On peut de nouveau appliquer l'hypothèse de récurrence, ce qui termine la preuve du théorème 7.

6.3. Régularisation. — L'implémentation effective de l'algorithme en $z_1=\cdots=z_p=1$ nécessite la régularisation des polylogarithmes larges à exposants négatifs. De nombreux travaux existent à ce sujet et nous renvoyons en particulier aux articles de S. Akiyama et Y. Tanigawa ([**1**],[**2**]) pour plus de détails.

Le théorème de non-enrichissement permet d'aborder cette question sous un angle nouveau. En particulier, il ramène le problème de régularisation à la résolution des deux points suivants :

(i) Donner un sens aux nombres zetâs (simples) aux entiers négatifs.

(ii) Donner un sens aux nombres polyzetâs larges dans le cas divergent $s_1 = 1$.

Le problème (ii) fait l'objet du paragraphe 7.4. Le problème (i) est bien connu depuis L. Euler : on sait en effet que

$$\zeta(0) = -1/2, \quad \zeta(-2n) = 0, \quad \zeta(1-2n) = -\frac{B_{2n}}{2n},$$

pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ et où B_n est le n-ième nombre de Bernoulli.

En utilisant ces résultats, on obtient le théorème suivant :

Théorème 8. — *Tout polyzêta large ayant des exposants* ≤ 0 *de profondeur* p *est combinaison linéaire finie, à coefficients rationnels, de polyzêtas larges à exposants* ≥ 1 *de profondeur* $r \leq p$.

Le même résultat est évidemment vrai pour les polyzêtas stricts (voir [**13**, p. 420] pour un énoncé plus précis).

7. Relations de passage des $\mathbf{Li}_{s_1,\ldots,s_p}$ aux $\mathbf{La}_{s_1,\ldots,s_p}$

Nous explicitons des formules de passage entre les polyzetas stricts et larges. On utilise le formalisme des séries formelles non-commutatives. Ces formules reposent sur la définition de la *substitution* de deux séries formelles non-commutatives. Ce formalisme nous permet de mieux mettre en évidence la manière dont les symétries satisfaites par les polyzetas stricts sont modifiées. En particulier, on donne la relation entre la r'egularisation des polyzêtas stricts et larges. On introduit au passage une modification naturelle des polyzetas stricts dont les symétries ont l'aventage d'être très simples.

Dans [**40**], Ulanskii obtient une formule de décomposition analogue à la notre (formule (7.2)) mais sans mettre en évidence la relation algébrique entre les séries génératrices (formule (7.2)), fondamentale pour comprendre le transport des symétries.

7.1. Séries formelles non-commutatives. — Soit $Y = \{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un alphabet. On note Y^* l'ensemble des mots construis sur Y. Un élément de Y^* est noté $y_{\underline{s}} = y_{s_1} \ldots y_{s_p}$, $p \geq 1$, $s_i \in \mathbb{N}$. L'entier p est la longueur de $y_{\underline{s}}$. Soit K un anneau, on note $K\langle Y\rangle$ l'ensemble des séries formelles non-commutatives à coefficients dans K construites sur Y.

Étant donnée une application $L : Y^* \to K$, on note $L(y_{\underline{s}})$ ou plus simplement $L_{\underline{s}}$ l'évaluation de L sur le mot $y_{\underline{s}} \in Y^*$. À toute application $L : Y* \to K$, on associe l'élément de $K\langle Y\rangle$, noté Φ_L et défini par

$$\Phi_L = \sum_{y_{\underline{s}} \in Y^*} L_{\underline{s}} y_{\underline{s}},$$

appelé *série génératrice* de L.

Dans la suite, nous allons considérer les séries génératrices de Li et La définies par

$$\Phi_{\mathrm{Li}} = \sum_{y_{\underline{s}} \in Y^*} \mathrm{Li}_{\underline{s}} y_{\underline{s}} \quad \text{et} \quad \Phi_{\mathrm{La}} = \sum_{y_{\underline{s}} \in Y^*} \mathrm{La}_{\underline{s}} y_{\underline{s}}.$$

De la même façon que ci-dessus, on notera Li (resp. La) l'application de Y^* dans $\mathbb{R}$ telle que $\mathrm{Li}(y_{\underline{s}}) = \mathrm{Li}_{\underline{s}}$ (resp. $\mathrm{La}(y_{\underline{s}}) = \mathrm{La}_{\underline{s}}$).

On associe à toute lettre $y_s \in Y$ un *poids*, noté $\mid y_s \mid$ et défini par $\mid y_s \mid = s$. Le poids d'un mot $y_{\underline{s}} \in Y^*$ est défini par $\mid y_{\underline{s}} \mid = s_1 + \cdots + s_p$.

Une série $S \in K\langle Y\rangle$ étant donnée, $S = \sum_{y_{\underline{s}} \in Y^*} S_{\underline{s}}\, y_{\underline{s}}$, $S_{\underline{s}} \in K$, on peut définir la composante homogène de poids r, $r \geq 0$, notée S_r et donnée par

$$S_r = \sum_{y_{\underline{s}} \in Y^*,\ |y_{\underline{s}}| = r} S_{\underline{s}}\, y_{\underline{s}}.$$

L'ensemble $K\langle Y\rangle$ possède une structure d'algèbre, analogue non-commutative de la structure d'algèbre sur les séries formelles commutatives. On peut aussi définir l'analogue non-commutatif de la *substitution* des séries formelles de la manière suivante :

Définition 1. — *Soit Φ_M et Φ_N deus séries de $K\langle Y\rangle$. On note $\Phi_M \circ \Phi_N$ la série génératrice définie par l'application notée $M \circ N$, qui pour tout $\underline{s} \in \mathbb{N}^*$ est donnée par*

$$(M \circ N)_{\underline{s}} = \sum_{\underline{s}^1 \ldots \underline{s}^k = \underline{s}} M_{|\underline{s}^1|\cdots|\underline{s}^k|} N_{\underline{s}^1} \ldots N_{\underline{s}^k}, \tag{7.1}$$

où $k \geq 1$ et $\underline{s}^i \neq \emptyset$ et $\mid \underline{s} \mid = s_1 + \cdots + s_p$ pour tout $\underline{s} = s_1 \ldots s_p$.

Cette expression est une réécriture de la série

$$\Phi_M \circ \Phi_N = \sum_{\underline{s} \in \mathbb{N}^*} M_{\underline{s}} (\Phi_N)_{s_1} \ldots (\Phi_N)_{s_p},$$

dans $K\langle Y\rangle$, où $(\Phi_N)_s$, $s \in \mathbb{N}$ est la composante homogène de poids s de Φ_N.

Remarque 2. — *L'opération $\circ$ n'est pas usuelle dans l'étude combinatoire des séries formelles non-commutatives (voir* [**34**] *pour une présentation des techniques habituelles). La formule (7.1) intervient dans le formalisme des moules développé par Jean Écalle comme loi de composition sur les moules (voir* [**10**]*).*

Lemme 4. — *L'élément neutre pour la loi* $\circ$ *est la série* $\mathbb{I} = \sum_{s\in\mathbb{N}} y_s$.

La démonstration est immédiate en utilisant (7.1).

On peut caractériser les séries inversibles pour $\circ$, ce qui nous sera utile dans la suite.

Lemme 5. — *Les éléments inversibles de* $K\langle Y\rangle$ *pour la loi* $\circ$ *sont les séries* $\Phi_M = \sum_{y_{\underline{s}}\in Y^*} M_{\underline{s}} y_{\underline{s}}$ *telles que* $M_\emptyset = 0$, $M_s \neq 0$ *pour tout* $s \in \mathbb{N}$.

Démonstration. — Soit $\Phi_M = \sum_{y_{\underline{s}}\in Y^*} M_{\underline{s}} y_{\underline{s}}$ un élément inversible de $K\langle Y\rangle$. Il existe donc $\Phi_N = \sum_{y_{\underline{s}}\in Y^*} N_{\underline{s}} y_{\underline{s}}$ telle que $I = \Phi_M \circ \Phi_N$. Les coefficients de la série Φ_N se déterminent par récurrence sur la longueur des suites $\underline{s}$. En effet, en appliquant la formule (7.1), on a pour toute suite $\underline{s}$:

$$M_{|\underline{s}|}N_{\underline{s}} = I^{\underline{s}} - \sum_{\underline{s}^1\ldots\underline{s}^k=\underline{s},\ k>1} M_{|\underline{s}^1|\cdots|\underline{s}^k|}N_{\underline{s}^1}\ldots N_{\underline{s}^k}.$$

Le membre de droite contient des coefficients $N_{\underline{s}'}$ sur des suites $\underline{s}'$ de longueur strictement inférieure à $l(\underline{s})$. Cette équation détermine donc $N_{\underline{s}}$ si et seulement si $M_{|\underline{s}|} \neq 0$. Comme $|\ \underline{s}\ | \in \mathbb{N}$, on en déduit le lemme. □

7.2. Formules de passage entre Li et La. — Le résultat d'Ulanskii ([**40**, p. 577, Proposition 2]) peut se formuler comme suit.

Théorème 9. — *Les séries génératrices* Φ_{La} *et* Φ_{Li} *sont liées par la relation*

$$\Phi_{\mathrm{La}} = \Phi_{\mathrm{Li}} \circ \mathbf{1}, \tag{7.2}$$

où $\mathbf{1}$ *est la série constante définie par* $\mathbf{1} = \sum_{y_{\underline{s}}\in Y^*} y_{\underline{s}}$.

La formule (7.2) se traduit par la relation

$$\mathrm{La}_{\underline{s}} = \sum_{\underline{s}^1\ldots\underline{s}^k=\underline{s}} \mathrm{Li}_{|\underline{s}^1|\cdots|\underline{s}^k|},$$

où $k \geq 1$, $\underline{s}^i \neq \emptyset$.

La formule (7.2) est nouvelle. Elle met en évidence une dépendance extrêmement simple entre Φ_{La} et Φ_{Li} *via* la composition. La démonstration repose sur l'étude des *polyzêtas mixtes* de la forme

$$\mathrm{Lm}_{\underline{s}}(i) = \sum_{n_1>\cdots>n_i\geq n_{i+1}\geq\ldots n_p\geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1}\ldots n_p^{s_p}},$$

avec $i = 1, \ldots, l(\underline{s})$. On a $\mathrm{Lm}_{\underline{s}}(1) = \mathrm{La}_{\underline{s}}$ et $\mathrm{Lm}_{\underline{s}}(l(\underline{s})) = \mathrm{Li}_{\underline{s}}$ et se fait par récurrence sur la longueur des suites $\underline{s}$ via la relation

$$\mathrm{Lm}_{s_1 \ldots s_p}(i) = \mathrm{Lm}_{s_1 \ldots s_p}(i+1) + \mathrm{Lm}_{s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i + s_{i+1}, s_{i+2}, \ldots, s_p}(i), \tag{7.3}$$

pour $i < p$. On vérifie *via* le lemme 5 que la série $\mathbf{1}$ est inversible pour la loi $\circ$. Précisément, on a :

Lemme 6. — *La série* $\mathbf{1}$ *a pour inverse de composition la série*

$$\mathbf{1}^{\circ -1} = \sum_{y_{\underline{s}} \in Y^*} (-1)^{l(y_{\underline{s}})+1} y_{\underline{s}},$$

où $l(y_{\underline{s}})$ *désigne la longueur de* $y_{\underline{s}}$.

Démonstration. — Elle se fait par récurrence sur la longueur des suites. Pour une suite de longueur 1, on a $\mathbf{1}_s^{\circ -1} \mathbf{1}_s = 1$, soit $\mathbf{1}_s^{\circ -1} = 1$ pour tout $s \in \mathbb{N}$. Par ailleurs, la relation $\mathbf{1}^{\circ -1}\mathbf{1} = \mathbf{I}$ donne pour toute suite $\underline{s}$ de longueur $l(\underline{s}) \geq 2$:

$$\mathbf{1}_{\underline{s}}^{\circ -1} + \sum_{\underline{s}^1 \ldots \underline{s}^k = \underline{s},\ 1 \leq k < l(\underline{s})} \mathbf{1}^{\circ -1}_{|\underline{s}^1|, \ldots, |\underline{s}^k|} = 0.$$

Soit $p \geq 2$. Supposons $\mathbf{1}_{\underline{s}}^{\circ -1} = (-1)^{l(\underline{s})+1}$ pour toute suite de longueur $l(\underline{s}) \leq p$. On a donc pour une suite $\underline{s}$ de longueur $p+1$

$$\mathbf{1}_{\underline{s}}^{\circ -1} = -\sum_{k=1}^{p} \binom{p+1-k}{p} (-1)^{k+1}.$$

(Le coefficient $\binom{p+1-k}{p}$ représente le nombre de décomposition de la suite $\underline{s}$ en k suites $\underline{s}^1, \ldots, \underline{s}^k$.) On en déduit le lemme. □

On retrouve donc le résultat d'Ulanskii ([**40**, p. 578, Proposition 3]) sous une forme plus compacte.

Lemme 7. — *Les séries génératrices* Φ_{La} *et* Φ_{Li} *vérifient la relation*

$$\Phi_{\mathrm{Li}} = \Phi_{\mathrm{La}} \circ \mathbf{1}^{\circ -1}.$$

7.3. Symétries des polyzêtas larges. — L'écriture sous la forme de série des polyzêtas stricts permet de mettre en évidence des symétries, appelées symétries de battage contractant. Elles sont associées au produit *stuffle*, noté $\star$ sur les lettres, défini par récurrence

$$y_s y_{\underline{s}} \star y_u y_{\underline{u}} = y_s (y_{\underline{s}} \star y_u y_{\underline{u}}) + y_u (y_s y_{\underline{s}} \star y_{\underline{u}}) + y_{s+u} (y_{\underline{s}} \star y_{\underline{u}}). \tag{7.4}$$

On a

$$\mathrm{Li}(y_{\underline{s}}) \, \mathrm{Li}(y_{\underline{u}}) = \mathrm{Li}(y_{\underline{s}} \star y_{\underline{u}}). \tag{7.5}$$

Cette relation traduit le caractère *diagonal* (on dit aussi *group-like*) de la série génératrice Φ_{Li} dans la cogèbre $(\mathbb{R}\langle Y\rangle, \Delta_\star)$, où $\Delta_\star$ est le coproduit défini par

$$\Delta_\star(y_s) = \sum_{i+j=s} y_i \otimes y_j,$$

c'est-à-dire la relation $\Delta_\star(\Phi_{\mathrm{Li}}) = \Phi_{\mathrm{Li}} \otimes \Phi_{\mathrm{Li}}$. Les polyzêtas larges vérifient aussi une relation de symétrie, beaucoup moins jolie, et qui s'obtient par transport de la loi $\star$ par l'isomorphisme linéaire ϕ défini par $\phi(y_s) = y_s$ pour tout $s \in \mathbb{N}$ et $\phi(y_{s_1} \dots y_{s_p}) = y_{s_1}\phi(y_{s_2} \dots y_{s_p}) + \phi(y_{s_1+s_2} y_{s_3} \dots y_{s_p})$, pour tout $p \geq 2$. Cette relation traduit la relation de récurrence (7.3) sur les polyzêtas mixtes. On a donc pour tout mot $y_{\underline{s}}$ de Y^* :

$$\mathrm{La}(y_{\underline{s}}) = \mathrm{Li}(\phi(y_{\underline{s}})). \tag{7.6}$$

On note $\star_\phi$ la loi tordue sur $\mathbb{R}\langle Y\rangle$ définie par

$$\phi(y_{\underline{s}} \star_\phi y_{\underline{u}}) = \phi(y_{\underline{s}}) \star \phi(y_{\underline{u}}). \tag{7.7}$$

Le symétrie stuffle (7.5) pour les polyzêtas stricts et la relation de structure (7.6) impliquent :

Lemme 8. — *Pour tous mots $y_{\underline{s}}$, $y_{\underline{u}}$ de Y^* on a* $\mathrm{La}(y_{\underline{s}})\mathrm{La}(y_{\underline{u}}) = \mathrm{La}(y_{\underline{s}} \star_\phi y_{\underline{u}})$.

Démonstration. — On a $\mathrm{La}(y_{\underline{s}})\mathrm{La}(y_{\underline{u}}) = \mathrm{Li}(\phi(y_{\underline{s}}))\mathrm{Li}(\phi(y_{\underline{u}}))$. Comme Li vérifie la symétrie $\star$, on obtient $\mathrm{La}(y_{\underline{s}})\mathrm{La}(y_{\underline{u}}) = \mathrm{Li}(\phi(y_{\underline{s}}) \star \phi(y_{\underline{u}}))$. Le lemme découle alors de (7.7). □

La symétrie $\star_\phi$ est beaucoup complexe que la symétrie $\star$. En suivant la démarche ci-dessus, on peut introduire une famille à un paramètre d'isomorphismes linéaires ϕ_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$ et déformer continuement la symétrie des polyzêtas stricts, pour passer par exemple d'une symétrie stuffle à une symétrie *shuffle* (voir §.7.5). On obtient alors les *algèbres de Hoffman tordues* [**43**].

7.4. Régularisation des polyzêtas larges. — Nous avons pour le moment travaillé sur le sous ensemble des mots convergents $Y_c \subset Y^*$. L'existence d'une symétrie $\star_\phi$ permet, comme dans le cas strict, de donner un sens aux polyzêtas larges divergents.

Lemme 9. — *Soit $\gamma \in \mathbb{R}$. Il existe une unique extension* $\mathrm{La}_{\star_\phi}$ *de* La *sur Y^* telle que* $\mathrm{La}_{\star_\phi}(y_1) = \gamma$ *et* $\mathrm{La}_{\star_\phi}(y_{\underline{s}} \star_\phi y_{\underline{u}}) = \mathrm{La}_{\star_\phi}(y_{\underline{s}})\mathrm{La}_{\star_\phi}(y_{\underline{u}})$.

Démonstration. — La démonstration repose sur le calcul de $y_1 \star_\phi y_1^n y_{\underline{s}}$, pour $n \geq 0$, $y_{\underline{s}} \in Y_c$. Pour tout $n \geq 0$, on a

$$y_1 \star_\phi y_1^n y_{\underline{s}} = \phi^{-1}(\phi(y_1) \star \phi(y_1^n y_{\underline{s}})). \tag{7.8}$$

Comme $\phi(y_1) = y_1$, et $\phi^{-1}(y_{\underline{u}}) = y_{\underline{u}} + \ldots$, où $\ldots$ représente des mots de longueur $< l(y_{\underline{u}})$, on en déduit que l'équation (7.8) s'écrit

$$y_1 \star_\phi y_1^n y_{\underline{s}} = y_1^{n+1} y_{\underline{s}} + \ldots, \tag{7.9}$$

où $\ldots$ représente des mots de Y_c ou de la forme $1^i y_{\underline{v}}$ avec $i \leq n$ et $y_{\underline{v}} \in Y_c$.

Soit $\mathrm{La}_{\star_\phi}(y_1) = \gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}$ une constante. En utilisant l'équation (7.9), il est possible de déterminer par récurrence la valeur de $\mathrm{La}_{\star_\phi}(y_1^n y_{\underline{s}})$ pour tout $y_{\underline{s}} \in Y_c$. En effet, supposons que $\mathrm{La}_{\star_\phi}$ soit déterminé sur tous les mots de la forme $y_1^i y_{\underline{u}}$ avec $i \leq n$ et $y_{\underline{u}} \in Y_c$. On obtient, en supposant que $\mathrm{La}_{\star_\phi}$ conserve la symétrie $\star_\phi$,

$$\mathrm{La}_{\star_\phi}(y_1)\mathrm{La}_{\star_\phi}(y_1^n \underline{s}) = \mathrm{La}_{\star_\phi}(y_1^{n+1} y_{\underline{s}}) + \ldots,$$

où $\ldots$ est une somme de termes sur lesquels $\mathrm{La}_{\star_\phi}$ est connue. On a donc

$$\mathrm{La}_{\star_\phi}(y_1^{n+1} y_{\underline{s}}) = \mathrm{La}_{\star_\phi}(y_1)\mathrm{La}_{\star_\phi}(y_1^n \underline{s}) + \ldots.$$

On définit donc $\mathrm{La}_{\star_\phi}$ de manière unique, une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ étant fixée pour $\mathrm{La}_{\star_\phi}(y_1)$. □

Pour être complet, il nous reste à comparer la régularisation directe que nous venons d'obtenir avec celle que l'on peut définir *via* la régularisation $\mathrm{Li}_\star$ de Li.

Théorème 10. — *Soit $\gamma \in \mathbb{R}$, on note* $\mathrm{Li}_\star$ *et* $\mathrm{La}_{\star_\phi}$ *les régularisés de* Li *et* La *respectivement tels que* $\mathrm{Li}_\star(y_1) = \mathrm{La}_{\star_\phi}(y_1) = \gamma$. *On a la relation*

$$\mathrm{La}_{\star_\phi}(y_{\underline{s}}) = \mathrm{Li}_\star(\phi(y_{\underline{s}})). \tag{7.10}$$

Autrement dit, on peut effectuer la régularisation soit sur les La, soit sur leurs décompositions suivant les Li.

Démonstration. — Il suffit de démontrer que l'application $\mathrm{Li}_\star \circ \phi$ est un élément qui vérifie les hypothèses du lemme 9. Comme l'extension de La est unique, on en déduira facilement l'identité (7.10).

On note $P(y_{\underline{u}}) = \mathrm{Li}_\star(\phi(y_{\underline{u}}))$ pour tout $y_{\underline{u}} \in Y^*$. On a $P(y_{\underline{s}}) = \mathrm{La}(y_{\underline{s}})$ pour tout $\underline{s} \in Y_c$ et $P(y_1) = \mathrm{Li}_\star(\phi(y_1)) = \mathrm{Li}_\star(y_1) = \gamma$ par hypothèse. Par ailleurs, pour tout $y_{\underline{s}}$, $y_{\underline{u}} \in Y^*$,

$$P(y_{\underline{s}})P(y_{\underline{u}}) = \mathrm{Li}_\star(\phi(y_{\underline{s}}))\mathrm{Li}_\star(\phi(y_{\underline{u}})) = \mathrm{Li}_\star(\phi(y_{\underline{s}}) \star \phi(y_{\underline{u}})) = P(y_{\underline{s}} \star_\phi y_{\underline{u}}).$$

Par conséquent, P réalise bien une extension de La sur les divergents respectant la symétrie $\star_\phi$. Par unicité, on en déduit $P = \mathrm{La}_{\star_\phi}$. □

7.5. Les polyzêtas pondérés. — Le passage des inégalités strictes aux larges induit une modification des symétries. On peut se demander si il est possible de modifier de façon simple les polyzêtas strictes afin d'obtenir une symétrie de complexité réduite. Par exemple, est-il possible de modifier Li tel que le nouvel objet vérifie la symétrie de battage ? Dans ce paragraphe, nous définissons les *polyzêtas pondérés*, d'expressions simples et de symétrie la symétrie de *battage* ou *shuffle*.

On note Δ le morphisme $K\langle Y\rangle \to K\langle Y\rangle \otimes K\langle Y\rangle$ défini par $\Delta(y_s) = y_s \otimes 1 + 1 \otimes y_s$, pour tout $s \in \mathbb{N}$. On note Exp la série dite *exponentielle* définie par

$$\mathrm{Exp} = \sum_{y_{\underline{s}} \in Y^*} \frac{1}{l(\underline{s})!} y_{\underline{s}}.$$

Lemme 10. — *Soit $\Phi_M \in K\langle Y\rangle$ une série telle que $\Delta_*(\Phi_M) = \Phi_M \otimes \Phi_M$, alors la série $\Phi_{M,p} = \Phi_M \circ \mathrm{Exp}$ vérifie $\Delta(\Phi_{M,p}) = \Phi_{M,p} \otimes \Phi_{M,p}$.*

On renvoie à [**10**] pour la démonstration.

Autrement dit, la composition par la série exponentielle Exp d'une série diagonale pour le coproduit $\Delta_\star$ donne une série diagonale pour le coproduit Δ. La lettre p indique que cette composition pondére par la longueur des mots le regroupement trivial $\Phi_M \circ \mathbf{1}$. Précisément, nous avons la formule

$$\Phi_{M,p} = \sum_{\underline{s}^1 \ldots \underline{s}^k = \underline{s},\ k \geq 1} \frac{1}{l(\underline{s}^1)! \ldots l(\underline{s}^2)!} M_{|\underline{s}^1|,\ldots,|\underline{s}^k|}.$$

Le coproduit Δ est bien connu puisqu'il correspond à celui des *algèbres de Hopf* [**34**]. Dans ce cas, on montre que les éléments diagonaux vérifient la symétrie *shuffle*, notée ш et définie par récurrence sur la longueur des mots de Y^* *via* la relation

$$y_a y_{\underline{s}} \text{ш}\, y_b y_{\underline{u}} = y_a(y_{\underline{s}} \text{ш} y_b y_{\underline{u}}) + y_b(y_a y_{\underline{s}} \text{ш} y_{\underline{u}}).$$

On remarque que cette symétrie est bien moins complexe que la symétrie stuffle (7.4) satisfaite par les polyzêtas stricts.

Nous sommes donc naturellement conduit à la définition des *polyzêtas pondérés*.

Définition 2. — *Pour toute suite d'entier $\underline{s}$, on appelle polyzêta pondéré en $\underline{s}$ la quantité notée $\mathrm{Lp}_{\underline{s}}$ et définie par*

$$\mathrm{Lp}_{\underline{s}} = \sum_{\underline{s}^1 \ldots \underline{s}^k = \underline{s},\ k \geq 1} \frac{1}{l(\underline{s}^1)! \ldots l(\underline{s}^k)!} \mathrm{Li}_{|\underline{s}^1|,\ldots,|\underline{s}^k|}.$$

Le lemme 10 donne immédiatement que, pour tout mot $y_{\underline{s}}$, $y_{\underline{u}} \in Y^*$, on a $\mathrm{Lp}(y_{\underline{s}})\mathrm{Lp}(y_{\underline{u}}) = \mathrm{Lp}(y_{\underline{s}} ш y_{\underline{u}})$. Les polyzêtas pondérés sont utilisés par Jean Ecalle ([**13**, p. 418]) dans l'étude du prolongement méromorphe des multizêtas.

8. Démonstration du théorème 3

Pour démontrer le théorème 3, nous devons régulariser les polyzêtas divergents intervenant dans la décomposition d'une brique. La régularisation qui s'impose ici est la régularisation dite *shuffle* des polyzêtas basée sur l'étude du comportement asymptotique des polylogarithmes lorsque z tend vers 1.

8.1. Régularisation ш analytique. — Dans [**30**, Corollaire 2.5], Racinet caractérise, suivant les travaux de L. Boutet de Monvel, le comportement asymptotique des polylogarithmes lorsque z tend vers 1.

Théorème 11. — *Pour tous entiers strictement positifs $s_1, \ldots, s_p$, la fonction $\mathrm{Li}_{s_1,\ldots,s_p}(z)$ admet, lorsque z tend vers 1 tel que $|z| < 1$, un développement asymptotique du type*

$$\mathrm{Li}_{s_1,\ldots,s_p}(z) = Q_{s_1,\ldots,s_p}(\log(1-z)) + o((1-z)^{\varepsilon})$$

avec $Q_{s_1,\ldots,s_p} \in \mathbb{C}[t]$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

On note $\zeta^{ш}(s_1, \ldots, s_p)$ la valeur régularisée de $\zeta(s_1, \ldots, s_p)$ pour $s_1 = 1$ obtenue en posant $\zeta^{ш}(s_1, \ldots, s_p) = Q(0)$, i.e. le terme constant du polynôme Q. Si $s_1 \geq 2$, on a bien sûr $\zeta^{ш}(s_1, \ldots, s_p) = \zeta(s_1, \ldots, s_p)$.

8.2. Aspects effectifs. — Notons que l'implémentation effective de l'algorithme de décomposition demande deux choses :

(i) Le calcul des $\zeta^{ш}(s_1, \ldots, s_p)$ régularisés en fonction des ζ classiques.

(ii) Le calcul explicite du reste intervenant dans l'estimation asymptotique du théorème 11.

Le calcul des $\zeta^{ш}(s_1, \ldots, s_p)$ dans le cas divergents peut s'effectuer de façon *combinatoire*, beaucoup plus simple que *via* le calcul effectif des développements asymptotiques du théorème 11.

8.3. Régularisation ш combinatoire. — La régularisation ш que nous venons de définir conserve la symétrie ш vérifiée par les polyzêtas convergents. Soit $A = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ un alphabet. On note A_c l'ensemble des mots de A^* commencant par $\mathbf{0}$ et se terminant par $\mathbf{1}$. On note π le morphisme de $\mathbb{R}\langle A_c\rangle$ dans $\mathbb{R}\langle Y\rangle$ défini par $\pi(\mathbf{0}^{s-1}\mathbf{1}) = y_s$, pour tout $s \geq 1$. On note encore ζ le morphisme défini sur A_c par $\zeta(\mathbf{0}^{s-1}\mathbf{1}) = \zeta_s$. Le produit de battage ou shuffle sur A se définit par récurrence sur la longueur des mots par

$$a\mathbf{b}\text{ш}c\mathbf{d} = a(\mathbf{b}\text{ш}c\mathbf{d}) + c(a\mathbf{b}\text{ш}\mathbf{d}),$$

pour tout mot $\mathbf{b}, \mathbf{d} \in A^*$, $a, c \in A$.

On démontre en utilisant l'écriture intégrale des polyzêtas la relation de symétrie dite *shuffle* : Pour tout $\mathbf{u} \in A_c$, $\mathbf{v} \in A_c$, on a

$$\zeta(\mathbf{u})\zeta(\mathbf{v}) = \zeta(\mathbf{u}\text{ш}\mathbf{v}) \tag{8.1}$$

On renvoie par exemple à l'article [**9**] pour plus de détails.

On note A_0 l'ensemble des mots de A^* se terminant par $\mathbf{1}$. On peut donner un sens aux polyzetas sur A_0 en utilisant la relation (8.1) en supposant que celle-ci est encore vérifiée pour tout mot de A_0, ce qui est le cas de la régularisation $\zeta^{\text{ш}}$ ci-dessus. On note encore $\zeta^{\text{ш}}$ le polyzeta étendu à A_0.

Pour tout mot $\underline{s} = s_1 \dots s_r \in A_c$, $r \geq 1$, $s_i \in A$, on a $\mathbf{1}\text{ш}\mathbf{1}^i\underline{s} = (i+1)\mathbf{1}^{i+1}\underline{s} + \mathbf{1}^i s_1[\mathbf{1}\text{ш}\underline{s}^{>1}]$, où $\underline{s}^{>1} = s_2 \dots s_r$. En appliquant $\zeta^{\text{ш}}$, on obtient

$$\zeta^{\text{ш}}(\mathbf{1})\zeta^{\text{ш}}(\mathbf{1}^i\underline{s}) = (i+1)\zeta^{\text{ш}}(\mathbf{1}^{i+1}\underline{s}) + \zeta^{\text{ш}}(\mathbf{1}^i s_1[\mathbf{1}\text{ш}\underline{s}^{>1}]). \tag{8.2}$$

Il est donc possible de calculer $\zeta^{\text{ш}}(\mathbf{1}^{i+1}\underline{s})$ par récurrence sur le nombre de $\mathbf{1}$. Pour cela, il suffit de fixer une valeur à $\zeta^{\text{ш}}(\mathbf{1})$.

Pour obtenir une régularisation combinatoire qui coincide avec la régularisation analytique définie au paragraphe précédent, on doit poser $\zeta^{\text{ш}}(1) = 0$. En effet, un simple calcul donne $\mathrm{Li}_1(z) = -\log(1-z)$. La formule (8.2) permet alors le calcul explicite et algorithmique des polyzêtas divergents.

8.4. Énoncés. — Dans cette partie, et dans toute la suite, on pose pour $j \in \{1, \dots, p\}$:

$$D_j = \Big(\sum_{i=1}^{j} A_i(n_i+1)\Big) - j - 1.$$

Lemme 11. — *La série*

$$\sum_{k_1 \geq \dots \geq k_p \geq 1} \frac{P(k_1, \dots, k_p)}{(k_1)_{n_1+1}^{A_1} \cdots (k_p)_{n_p+1}^{A_p}}$$

converge si, et seulement si, le polynôme $P(X_1, \dots, X_p)$ *vérifie*

$$\sum_{i=1}^{j} \deg_{X_i} P \leq D_j \text{ pour tout } j \in \{1, \dots, p\}. \tag{8.3}$$

Remarque 3. — *Lorsque* $n = 0$ *et* $P = 1$*, ce lemme donne les conditions exactes de convergence des polyzêtas* $\zeta(A_1, A_2, \dots, A_p)$ *lorsque les* A_j *sont dans* $\mathbb{Z}$*. Elles correspondent bien aux conditions qui assurent la convergence absolue des polyzêtas pour des exposants* complexes*. Voir* [**24**, p. 10] *pour une preuve de ces conditions.*

Démonstration. — Pour démontrer ce lemme, on va montrer en fait que les conditions (8.3) équivalent au fait que, pour tout $B \geq 0$, la série

$$\sum_{k_1 \geq \cdots \geq k_p \geq 1} \frac{P(k_1, \dots, k_p)(\log k_p)^B}{(k_1)_{n_1+1}^{A_1} \cdots (k_p)_{n_p+1}^{A_p}} \tag{8.4}$$

converge. C'est évident pour $p = 1$, puisque les conditions (8.3) se réduisent alors à $\deg_{X_1} P \leq A_1(n_1 + 1) - 2$. Supposons que ce soit vrai pour $p - 1$, et soit $P(X_1, \dots, X_p)$; posons $\delta = \deg_{X_p} P$. Si $\delta \leq A_p(n_p + 1) - 1$ alors on a

$$1 \ll \sum_{k_p=1}^{k_{p-1}} \frac{k_p^\delta (\log k_p)^B}{(k_p)_{n_p+1}^{A_p}} \ll (\log k_{p-1})^{B+\delta}$$

donc la convergence de (8.4) équivaut à celle de (8.4) en profondeur $p-1$. Comme justement l'équation correspondant à $j = p$ dans (8.3) se déduit des autres (puisqu'on a supposé $\deg_{X_p} P \leq A_p(n_p + 1) - 1$), la preuve est terminée dans ce cas. Supposons maintenant que l'on ait $\delta \geq A_p(n_p + 1)$. Alors on a

$$k_{p-1}^{\delta - A_p(n_p+1)+1} \ll \sum_{k_p=1}^{k_{p-1}} \frac{k_p^\delta (\log k_p)^B}{(k_p)_{n_p+1}^{A_p}} \ll k_{p-1}^{\delta - A_p(n_p+1)+1} (\log k_{p-1})^B$$

donc la convergence de (8.4) avec $P(X_1, \dots, X_p)$ équivaut à celle de (8.4) avec un polynôme $\widetilde{P}(X_1, \dots, X_{p-1})$ vérifiant $\deg_{X_i} \widetilde{P} = \deg_{X_i} P$ pour $i \in \{1, \dots, p-2\}$ et $\deg_{X_{p-1}} \widetilde{P} = \deg_{X_{p-1}} P + \deg_{X_p} P - A_p(n_p+1)+1$. Or justement les conditions (8.3) pour un tel polynôme $\widetilde{P}$ équivalent aux conditions (8.3) pour P. Le lemme est donc démontré. □

On dit qu'une fonction f, définie sur un ouvert dont le point 1 appartient à l'adhérence, est *à divergence au plus logarithmique* en $z = 1$ si elle admet un développement asymptotique de la forme $f(z) = Q(\log(1-z)) + \mathcal{O}((1-z)^\varepsilon)$ pour un certain $\varepsilon > 0$ et un polynôme $Q \in \mathbb{C}[t]$. La *valeur régularisée* de f en 1 est le coefficient constant de Q, c'est-à-dire $Q(0)$.

Dans le cas particulier où f est définie et continue en 1, le polynôme Q est constant et cette valeur régularisée est simplement $f(1)$.

Lemme 12. — *La fonction*

$$\sum_{k_1\geq\cdots\geq k_p\geq 1}\frac{P(k_1,\ldots,k_p)}{(k_1)_{n_1+1}^{A_1}\cdots(k_p)_{n_p+1}^{A_p}}z^{-k_1} \tag{8.5}$$

est à divergence au plus logarithmique en $z=1$ si, et seulement si,

$$\sum_{i=1}^{j}\deg_{X_i}P\leq D_j+1 \text{ pour tout } j\in\{1,\ldots,p\}. \tag{8.6}$$

La preuve de ce lemme est analogue à celle du lemme 11 ; seule l'initialisation diffère vraiment, puisque la fonction $\sum_{k\geq 1}k^{-1}z^{-k}$ à est divergence au plus logarithmique en $z=1$.

Pour démontrer le théorème 3, on va en fait démontrer le résultat suivant qui est plus fort.

Théorème 12. — *Si les relations* (8.6) *sont satisfaites alors la valeur régularisée en 1 de la fonction* (8.5) *est une combinaison linéaire à coefficients rationnels en les polyzêtas régularisés $\zeta^{\text{Ш}}(s_1,\ldots,s_q)$ où $1\leq q\leq p$, $s_i\geq 1$, $i=1,\ldots,q$, $\sum_{j=1}^{q}s_j\leq\sum_{j=1}^{p}A_j$. En outre, on peut calculer* explicitement *une telle combinaison linéaire.*

8.5. Preuve du théorème 12. — On démontre le théorème 12 par récurrence sur la profondeur p. Quand $p=0$, ce théorème est trivial ; les arguments qui suivent permettent de le démontrer pour $p=1$, mais un raisonnement direct est beaucoup plus facile dans ce cas. Supposons donc que ce théorème soit vrai en toute profondeur strictement inférieure à p.

Soit $P(X_1,\ldots,X_p)$ un polynôme tel que les relations (8.6) soient satisfaites. On pose

$$R(X_1,\ldots,X_p)=\frac{P(X_1,\ldots,X_p)}{(X_1)_{n_1+1}^{A_1}\cdots(X_p)_{n_p+1}^{A_p}},$$

et on étudie la fonction

$$f(z)=\sum_{k_1\geq\cdots\geq k_p\geq 1}R(k_1,\ldots,k_p)z^{-k_1}$$

qui est définie pour $|z|>1$ et est à divergence au plus logarithmique en $z=1$ grâce au lemme 12. On utilise le développement en éléments simples de R, comme au paragraphe 4.1 (dont on reprend les notations). Ceci permet d'écrire, pour $|z|>1$:

$$f(z)=\sum_{\varpi}C[\varpi]\sum_{k_1\geq\cdots\geq k_p\geq 1}\frac{\prod_{i\in I}k_i^{\hat{s}_i}}{\prod_{i\in I^c}(k_i+j_i)^{s_i}}z^{-k_1}. \tag{8.7}$$

Dans cette formule et dans toute la suite, on note ϖ un quadruplet générique

$$(I, (s_i)_{i\in I^c}, (j_i)_{i\in I^c}, (\hat{s}_i)_{i\in I})$$

tel que $1 \le s_i \le A_i$ et $0 \le j_i \le n_i$ pour tout $i \in I^c$, et $0 \le \hat{s}_i \le \hat{A}_i$ pour tout $i \in I$. On pose alors $C[\varpi] = C\begin{bmatrix} I \\ (s_i) \\ (j_i) \\ (\hat{s}_i) \end{bmatrix}$.

La difficulté est que ce développement en éléments simples fait apparaître des fonctions de z dont la divergence en 1 n'est pas logarithmique. Par exemple, si $p = 2$, $n_1 = 2$, $A_1 = 1$, $P(X_1, X_2) = (X_2)^{A_2}_{n_2+1} X_2$ alors les relations (8.6) sont satisfaites mais dans l'expression (8.7) apparaissent les sommes

$$\sum_{k_1\ge k_2\ge 1} \frac{k_2}{k_1 + j} z^{-k_1}$$

pour $j \in \{0, 1, 2\}$, qui sont chacune à divergence non logarithmique. Une méthode pour résoudre ce problème serait de généraliser le théorème 12, en autorisant des divergences non logarithmiques (c'est-à-dire des développements asymptotiques avec des termes $\frac{\log^k(z)}{(1-z)^\ell}$). Mais cela nécessiterait une généralisation du théorème 11, et ne présenterait pas d'intérêt pratique. En effet, la présence de pôles en $\frac{1}{1-z}$ nécessite de connaître aussi le coefficient de $1 - z$ dans les développements asymptotiques, car leur produit contribue à la valeur en $z = 1$. L'algorithme devrait donc calculer beaucoup de termes des développements asymptotiques, ce qui serait coûteux en temps et en mémoire. C'est pourquoi on procède plutôt comme suit. L'idée importante est celle de la régularisation : quand seules des divergences logarithmiques sont présentes, seul le coefficient constant du polynôme en $\log(1 - z)$ intervient dans les calculs, y compris lorsqu'on doit faire des produits.

Notons E_0 l'ensemble des quadruplets $\varpi = (I, (s_i)_{i\in I^c}, (j_i)_{i\in I^c}, (\hat{s}_i)_{i\in I})$ tels que la fonction

$$\sum_{k_1\ge\cdots\ge k_p\ge 1} \frac{\prod_{i\in I} k_i^{\hat{s}_i}}{\prod_{i\in I^c}(k_i + j_i)^{s_i}} z^{-k_1} \tag{8.8}$$

soit à divergence au plus logarithmique en $z = 1$, et E_1 son complémentaire. Dans la somme (8.7), chaque élément $\varpi \in \mathrm{E}_0$ donne lieu à un développement asymptotique de la forme $Q_\varpi(\log(1-z)) + \mathcal{O}((1-z)^\varepsilon)$ avec $\varepsilon > 0$ (qu'on peut choisir indépendant de ϖ) et $Q_\varpi \in \mathbb{C}[t]$. En regroupant d'autre part les contributions de tous les éléments $\varpi \in \mathrm{E}_1$, on a donc :

$$\sum_{\varpi\in \mathrm{E}_1} C[\varpi] \sum_{k_1\ge\cdots\ge k_p\ge 1} \frac{\prod_{i\in I} k_i^{\hat{s}_i}}{\prod_{i\in I^c}(k_i + j_i)^{s_i}} z^{-k_1} = f(z) - \sum_{\varpi\in \mathrm{E}_0} Q_\varpi(\log(1-z)) + \mathcal{O}((1-z)^\varepsilon). \tag{8.9}$$

Comme $f(z)$ est à divergence au plus logarithmique, on voit que le membre de gauche aussi ; on va maintenant transformer ce membre de gauche en une somme du type (8.5)

en profondeur $p-1$. Soit $\varpi \in \mathrm{E}_1$, avec $\varpi = (I, (s_i)_{i\in I^{\mathrm{c}}}, (j_i)_{i\in I^{\mathrm{c}}}, (\hat{s}_i)_{i\in I})$. L'hypothèse (8.6) (avec $j=1$) montre que l'ensemble J défini au paragraphe 4.1 est inclus dans $\{2,\dots,p\}$, donc I aussi. En outre, I est non vide (sinon on aurait $\varpi \in \mathrm{E}_0$ d'après le lemme 12). Donc il existe $t \in \{2,\dots,p\}$ tel que $t \in I$. En notant B_s le s-ième polynôme de Bernoulli (qui est à coefficients rationnels), on a [7] :

$$\sum_{k_t=k_{t+1}}^{k_{t-1}} k_t^{\hat{s}_t} = B_{\hat{s}_t}(k_{t-1}+1) - B_{\hat{s}_t}(k_{t+1}). \tag{8.10}$$

Cette relation permet d'écrire, en posant $\ell_1 = k_1$, …, $\ell_{t-1} = k_{t-1}$, $\ell_t = k_{t+1}$, $\ell_{p-1} = k_p$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k_1\geq\cdots\geq k_p\geq 1} \frac{\prod_{i\in I} k_i^{\hat{s}_i}}{\prod_{i\in I^{\mathrm{c}}}(k_i+j_i)^{s_i}} z^{-k_1} \\
&= \sum_{\ell_1\geq\cdots\geq\ell_{p-1}\geq 1} \frac{\displaystyle\prod_{\substack{i\,\in\, I\\ i\,\leq\, t-1}} \ell_i^{\hat{s}_i} \prod_{\substack{i\,\in\, I\\ i\,\geq\, t+1}} \ell_{i-1}^{\hat{s}_i}}{\displaystyle\prod_{\substack{i\,\in\, I^{\mathrm{c}}\\ i\,\leq\, t-1}} (\ell_i+j_i)^{s_i} \prod_{\substack{i\,\in\, I^{\mathrm{c}}\\ i\,\geq\, t+1}} (\ell_{i-1}+j_i)^{s_i}} \times \Big(B_{\hat{s}_t}(\ell_{t-1}+1) - B_{\hat{s}_t}(\ell_t)\Big) z^{-\ell_1}.
\end{aligned}$$

Cette somme est de la forme

$$\sum_{\ell_1\geq\cdots\geq\ell_{p-1}\geq 1} R_\varpi(\ell_1,\dots,\ell_{p-1}) z^{-\ell_1}$$

pour une certaine fraction rationnelle R_ϖ (qui dépend aussi du choix, arbitraire et fixé, de t). Le membre de gauche de (8.9) s'écrit donc

$$\sum_{\ell_1\geq\cdots\geq\ell_{p-1}\geq 1} \widetilde{R}(\ell_1,\dots,\ell_{p-1}) z^{-\ell_1}, \tag{8.11}$$

où l'on a posé

$$\widetilde{R}(\ell_1,\dots,\ell_{p-1}) = \sum_{\varpi\in\mathrm{E}_1} C[\varpi] R_\varpi(\ell_1,\dots,\ell_{p-1}).$$

La relation (8.9) et le lemme 12 montrent que cette fraction rationnelle $\widetilde{R}(\ell_1,\dots,\ell_{p-1})$ satisfait aux hypothèses du théorème 12, en profondeur $p-1$. Par hypothèse de récurrence, on peut donc écrire (8.11) sous la forme $\widetilde{Q}(\log(1-z)) + \mathcal{O}((1-z)^\varepsilon)$, où $\widetilde{Q}(0)$ est une combinaison linéaire explicite à coefficients rationnels en les polyzêtas régularisés $\zeta^{\mathrm{III}}(s_1,\dots,s_q)$ où $1\leq q\leq p-1$, $\sum_{j=1}^q s_j \leq \sum_{j=1}^p A_j$. Compte tenu de (8.9), il suffit maintenant de calculer $Q_\varpi(0)$ pour $\varpi \in \mathrm{E}_0$, et la preuve du théorème 12 sera terminée.

[7] On peut noter que l'on utilise les mêmes idées que celles du paragraphe 6 sur le non-enrichissement des La à exposants négatifs. En particulier, (8.10) est l'analogue de (6.2) lorsque tous les z_j valent 1.

Pour cela, on décompose la somme (8.8). Tout d'abord, si I est non vide alors on applique la relation (8.10) comme ci-dessus, et on est ramené à une profondeur strictement inférieure. On peut donc supposer que I est vide. Il suffit alors de suivre la preuve du théorème 1 (voir le paragraphe 4) avec $z_1 = z$, $z_2 = \ldots = z_p = 1$, puis d'appliquer le théorème 12 en profondeur $\leq p - 1$. Ceci termine la preuve du théorème 12.

Bibliographie

[1] S. Akiyama, S. Egami et Y. Tanigawa, *Analytic continuation of multiple zeta-functions and their values at non-positive integers*, Acta Arith. **98** (2001), 107–116.

[2] S. Akiyama, Y. Tanigawa, *Multiple zeta values at non-positive integers*, The Ramanujan Journal, vol. 5, no.4 (2001) 327-351.

[3] R. Apéry, *Irrationalité de* $\zeta(2)$ *et* $\zeta(3)$, Astérisque **61** (1979), 11–13.

[4] W. N. Bailey, *Generalized hypergeometric series*, Cambridge University Press, Cambridge, 1935.

[5] K. Ball et T. Rivoal, *Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs*, Invent. Math. **146**.1 (2001), 193–207.

[6] F. Beukers, *A note on the irrationality of* $\zeta(2)$ *and* $\zeta(3)$, Bull. London Math. Soc. **11** (1979), 268–272.

[7] F. C.S. Brown, *Périodes des espaces des modules* $\overline{\mathrm{M}}_{0,n}$ *et multizêtas*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **336** (2006).

[8] P. Cartier, *Fonctions polylogarithmes, nombres polyzêtas et groupes pro-unipotents*, Séminaire Bourbaki, Vol. 2000/2001, Astérisque **282** (2002), exposé No. 885, 137–173.

[9] P. Colmez, *Arithmétique de la fonction zêta*, Éd. École Polytechnique, 2003.

[10] J. Cresson, *Calcul Moulien*, Prépublication de l'I.H.E.S. 06/22 (2006), 93 pages.

[11] J. Cresson, S. Fischler et T. Rivoal, *Phénomènes de symétrie dans des formes linéaires en polyzêtas*, Prépublication de l'I.H.E.S. (2006).

[12] J. Cresson, S. Fischler et T. Tivoal, Algorithme disponible sur
`http://www.math.u-psud.fr/~fischler/algo.html`

[13] J. Écalle, *ARI/GARI, la dimorphie et l'arithmétique des multizêtas : un premier bilan*, J. Théor. Nombres Bordeaux**15** (2003), 411–478.

[14] O. Espinosa et V. H. Moll, *The evaluation of Tornheim double sums. I.*, J. Number Theory **116** (2006), n° 1, 200–229.

[15] S. Fischler, *Groupes de Rhin-Viola et intégrales multiples*, J. Théor. Nombres Bordeaux **15** (2003), n° 2, 479–534.

[16] S. Fischler, *Irrationalité de valeurs de zêta (d'après Apéry, Rivoal, ...)*, Séminaire Bourbaki, Vol. 2002/2003, Astérisque **294** (2004), exposé No. 910, 27–62.

[17] S. Fischler, *Examples of linear forms in specific multiple zeta values*, en préparation.

[18] S. Fischler et T. Rivoal, *Approximants de Padé et séries hypergéométriques équilibrées*, J. Math. Pures Appl. **82**.10 (2003), 1369–1394.

[19] A. B. Goncharov, *Multiple polylogarithms and mixed Tate motives*, 2001, prépublication disponible l'ArXiv : `http://front.math.ucdavis.edu/math.AG/0103059`

[20] A. B. Goncharov et Yu. I. Manin, *Multiple ζ-motives and moduli spaces $\overline{\mathrm{M}}_{0,n}$*, Compos. Math. **140** (2004), n° 1, 1–14.

[21] M. Hata, *A note on Beukers' integral*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **58** (1995), n° 2, 143–153.

[22] M. Hata, *A new irrationality measure for $\zeta(3)$*, Acta Arith. **92** (2000), n° 1, 47–57.

[23] C. Krattenthaler et T. Rivoal, *Hypergéométrie et fonction zêta de Riemann*, à paraître aux Memoirs of the AMS (2006), 93 pages.

[24] C. Krattenthaler et T. Rivoal, *An identity of Andrews, multiple integrals, and very-well-poised hypergeometric series*, à paraître au Ramanujan J. (2006), 16 pages.

[25] L. Lewin, *Polylogarithms and associated functions*, North-Holland Publishing Co., New York-Amsterdam, 1981.

[26] Yu. V. Nesterenko, *A few remarks on $\zeta(3)$* (en russe), Mat. Zametki **59**.6 (1996), 865–880 ; traduction en anglais dans Math. Notes **59**.6 (1996), 625–636.

[27] Hoang Ngoc Minh, M. Petitot et J. Van Der Hoeven, *Shuffle algebra and polylogarithms*, Discrete Math. **225** (2000), 217–230.

[28] T. Terasoma, *Mixed Tate motives and multiple zeta values*, Invent. Math. **149**.2 (2002), 339–369.

[29] G. Racinet, *Série génératrices non-commutatives de polyzêtas et associateurs de Drinfeld*, Thèse de doctorat, Université d'Amiens, 2000.

[30] G. Racinet, *Doubles mélanges des polylogarithmes multiples aux racines de l'unité*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., **95** (2002), 185–231.

[31] G. Rhin et C. Viola, *On a permutation group related to $\zeta(2)$*, Acta Arith. **77** (1996), 23–56.

[32] G. Rhin et C. Viola, *The group structure for $\zeta(3)$*, Acta Arith. **97**.3 (2001), 269–293.

[33] T. Rivoal, *La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I Math. **331**.4 (2000), 267–270.

[34] C. Reutenauer, *Free lie algebras*, London Math. Soc. Monographs, new series 7, 1993.

[35] L. J. Slater, *Generalized hypergeometric functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1966.

[36] V. N. Sorokin, *On the measure of transcendency of the number π^2*, en russe, Mat. Sb. **187** (1996), n° 12, 87–120 ; traduction en anglais dans Sb. Math. **187** (1996), n° 12, 1819–1852.

[37] V. N. Sorokin, *Apéry's theorem*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. no. 3 (1998), 48–52 ; traduction en anglais dans Moscow Univ. Math. Bull. no. 3 (1998), 48–52.

[38] V. N. Sorokin, *On the linear independence of values of generalized polylogarithms*, en russe, Mat. Sb. **192** (2001), n° 8, 139–154 ; traduction en anglais dans Sb. Math. **192** (2001), n° 7-8, 1225–1239.

[39] H. M. Srivastava et P. W. Karlsson, *Multiple Gaussian hypergeometric series*, Ellis Horwood Series : Mathematics and its Applications, New York, 1985.

[40] E. A. Ulanskiĭ, *Identities for generalized polylogarithms* (en russe), Mat. Zametki **73**.4 (2003), 613–624 ; traduction en anglais dans Math. Notes **73** (2003), no. 3-4, 571–581.

[41] D. V. Vasilyev, *Approximations of zero by linear forms in values of the Riemann zeta-function*, Doklady Nat. Acad. Sci Belarus **45**.5 (2001), 36–40 (en russe). Version étendue en anglais : *On small linear forms for the values of the Riemann zeta-function at odd points*, prépublication no.1 (558), Nat. Acad. Sci. Belarus, Institute Math., Minsk (2001), 14 pages.

[42] M. Waldschmidt, *Valeurs zêtas multiples. Une introduction*, J. Théor. Nombres Bordeaux **12** (2000), 581–595.

[43] M. Waldschmidt, *Twisted Hoffman algebras*, Report 12/2003, Colloque « Elementare und analytische Zahlentheorie », Oberwolfach, 2003.

[44] D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications*, First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992), 497–512, Progr. Math., 120, Birkh‘user, Basel, 1994

[45] S. Zlobin, *Integrals that can presented as linear forms in generalized polylogarithms* (en russe), Mat. Zametki **71**.5 (2002), 782–787 ; traduction en anglais dans Math. Notes 71 (2002), no. 5-6, 711–716.

[46] S. A. Zlobin, *Properties of the coefficients of some linear forms of generalized polylogarithms*, en russe, Fundam. Prikl. Mat. 11 (2005), no. 6, 41–58.

[47] W. Zudilin, *Well-poised hypergeometric service for Diophantine problems of zeta values*, J. Théor. Nombres Bordeaux **15** (2003), n° 2, 593–626.

[48] W. Zudilin, *Arithmetic of linear forms involving odd zeta values*, J. Théor. Nombres Bordeaux **16** (2004), 251–291.

J. Cresson, Laboratoire de Mathématiques appliquées de Pau, Bâtiment I.P.R.A, Université de Pau et des Pays de l'Adour, avenue de l'Université, BP 1155, 64013 Pau cedex, France.

S. Fischler, Équipe d'Arithmétique et de Géométrie Algébrique, Université Paris-Sud, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France.

T. Rivoal, Institut Fourier, CNRS UMR 5582, Université Grenoble 1, 100 rue des Maths, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères cedex, France.

---

23 juin 2006