Une loi de réciprocité explicite pour le polylogarithme elliptique *

Francesco Lemma, Shanwen Wang †

Résumé

On démontre une compatibilité entre la réalisation p-adique et la réalisation de de Rham des sections de torsion du profaisceau polylogarithme elliptique. La preuve utilise une variante pour H^1 de la loi de réciprocité explicite de Kato pour le H^2 des courbes modulaires.

Abstract

We prove a compatibility between the p-adic realization and the de Rham realization of the torsion sections of the elliptic polylogarithm prosheaf. The proof uses a new explicit reciprocity law for H^1, which is a variant of Kato's explicit reciprocity law for H^2 of the modular curves.

Table des matières

*2010 Mathematics Subject Classification. 11G55, 11G40, 11F41, 11F85

†Le deuxième auteur est financé par le projet ANR ArSHiFo.

1 Introduction et Notations

1.1 Introduction

Ce travail est motivé par l'étude des valeurs spéciales des fonctions L motiviques. Des conjectures très générales de Beilinson et Bloch-Kato donnent une interprétation cohomologique de ces nombres complexes en termes de cohomologie motivique et de régulateurs. Comme la cohomologie motivique est au jour d'aujourd'hui incalculable en général, la stratégie utilisée dans tous les cas où l'on a pu résoudre, ou "presque", ces conjectures est de construire explicitement des classes de cohomologie motivique particulières dont le régulateur est calculable, puis d'utiliser des techniques automorphes.

Le symbole d'Eisenstein, construction due à Beilinson, fournit des classes de cohomologie motivique non-triviales sur les produits fibrés de la courbe elliptique universelle sur une courbe modulaire. Ces classes interviennent de manière plus ou moins directe dans beaucoup de démonstrations, ou d'approches, de cas particuliers des conjectures de Beilinson et Bloch-Kato (formes modulaires elliptiques, caractères de Dirichlet, formes modulaires de Hilbert sur un corps quadratique réel, formes modulaires de Siegel de genre 2...). Soyons plus précis : soit $K \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$ un sous-groupe ouvert compact net et soit Y_K le courbe modulaire de niveau K. On a la courbe elliptique universelle $\pi : E_K \longrightarrow Y_K$. Soit t une section de torsion de π. Pour tout n entier positif ou nul, la classe d'Eisenstein de poids $n+2$ associée à t est un élément

$$\mathrm{Eis}_t^{n+2} \in H^1_{\mathcal{M}}(Y_K, \mathrm{Sym}^n \mathcal{H}(1))$$

où $\mathcal{H}$ désigne le faisceau motivique $\underline{\mathrm{Hom}}(R^1\pi_*\mathbb{Q}(0), \mathbb{Q}(0))$ et où $H^1_{\mathcal{M}}(Y_K, \mathrm{Sym}^n\mathcal{H}(1))$ désigne la cohomologie motivique de Y_K à coefficients dans $\mathrm{Sym}^n\mathcal{H}(1)$. Notons dès à présent que pour K le sous-groupe principal de congruence de niveau N, et pour t bien choisie, la classe Eis_t^0 est l'image de l'unité de Siegel sous l'application de Kummer intervenant dans la construcation du système d'Euler de Kato (cf. [2],[3],[8]...). Ceci sera rendu précis dans le présent travail. Comme nous l'avons mentionné plus haut, pour obtenir des applications aux valeurs spéciales de fonctions L, il est crucial de décrire aussi explicitement que possible l'image par les régulateurs (de Beilinson, Betti, l-adique, syntomique, de Rham...) de ces classes de cohomologie motivique. La description de l'image des classes d'Eisenstein par le régulateur de Beilinson a été donnée par Beilinson lui-même, et la réalisation de Betti s'en déduit formellement. La réalisation l-adique a été déterminée par Kings ([4] Thm. 4.2.9), la réalisation syntomique et de de Rham a été déterminée par Bannai-Kings ([1] Prop. 3.8).

Le but de cet article est de donner une démonstration de la description des classes d'Eisenstein en cohomologie de de Rham entièrement différente de celle de Bannai-Kings et de placer ce résultat dans un cadre plus général. En effet, nous utilisons le langage de Colmez des distributions algébriques pour encoder les relations de distribution satisfaites par les symboles d'Eisenstein de niveaux différents, ainsi qu'une nouvelle loi de réciprocité explicite (voir le théorème 4.10 pour un énoncé précis). De manière un peu plus précise, on définit deux distributions algébriques [1] (voir §2 et §3 respectivement) sur un espace localement profini $X^{(p)}$ à valeurs dans l'algèbre des formes modulaires et dans la cohomologie étale de courbe modulaire à coefficient dans $W_k(1)$ respectivement, où $W_k = \mathrm{Sym}^{k-2} V_p$ avec $V_p = \mathbb{Q}_p e_1 \oplus \mathbb{Q}_p e_2$ la représentation standard de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$, et on montre qu'elles sont reliées par l'application $\exp^*$, où $\exp^*$ est une variante de l'application exponentielle duale de Kato, dont la formulation est très semblable à celle de Kato revisitée par Colmez [2] (cf. aussi [8]) mais pour H^1 au lieu de H^2.

1.2 Notations

On note $\overline{\mathbb{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$ et on fixe, pour tout nombre premier p, une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_p$ de $\mathbb{Q}_p$, ainsi qu'un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$.

Si $N \in \mathbb{N}$, on note ζ_N la racine N-ième $e^{2i\pi/N} \in \overline{\mathbb{Q}}$ de l'unité. On note $\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}$ l'extension cyclotomique de $\mathbb{Q}$, réunion des $\mathbb{Q}(\zeta_N)$, pour $N \geq 1$, ainsi que $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cycl}}$ l'extension cyclotomique de $\mathbb{Q}_p$, réunion de $\mathbb{Q}_p(\zeta_N)$, pour $N \geq 1$.

Objets adéliques

Soient $\mathcal{P}$ l'ensemble des premiers de $\mathbb{Z}$ et $\hat{\mathbb{Z}}$ le complété profini de $\mathbb{Z}$, alors $\hat{\mathbb{Z}} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}_p$. Soit $\mathbb{A}_f = \mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}}$ l'anneau des adèles finies de $\mathbb{Q}$. Si $x \in \mathbb{A}_f$, on note x_p (resp. $x^{]p[}$) la composante de x en p (resp. en dehors de p). Notons $\hat{\mathbb{Z}}^{]p[} = \prod_{l \neq p} \mathbb{Z}_l$. On a donc $\hat{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_p \times \hat{\mathbb{Z}}^{]p[}$. Cela induit les décompositions suivantes : pour tout $d \geq 1$,

$$\mathbf{M}_d(\mathbb{A}_f) = \mathbf{M}_d(\mathbb{Q}_p) \times \mathbf{M}_d(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}}^{]p[}) \text{ et } \mathrm{GL}_d(\mathbb{A}_f) = \mathrm{GL}_d(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{GL}_d(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}}^{]p[}).$$

Actions de groupes

Soient X un espace topologique localement profini, V un $\mathbb{Z}$-module. On note $\mathrm{LC}_c(X, V)$ le module des fonctions localement constantes sur X à valeurs dans V dont le support est compact dans X. On note $\mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X, V)$ l'ensemble des distributions algébriques sur X à valeurs dans V, c'est-à-dire, des applications $\mathbb{Z}$-linéaires de $\mathrm{LC}_c(X, \mathbb{Z})$ à valeurs dans V. On note $\int_X \phi\mu$ la valeur de μ sur ϕ, où $\mu \in \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X, V)$ et $\phi \in \mathrm{LC}_c(X, \mathbb{Z})$.

Soit G un groupe localement profini, agissant continûment à droite sur X et V. On munit $\mathrm{LC}_c(X, \mathbb{Z})$ et $\mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X, V)$ d'actions de G à droite comme suit : si $g \in G, x \in X, \phi \in \mathrm{LC}_c(X, \mathbb{Z}), \mu \in \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X, V)$, alors

$$(\phi * g)(x) = \phi(x * g^{-1}) \text{ et } \int_X \phi(\mu * g) = \Big(\int_X (\phi * g^{-1})\mu\Big) * g. \tag{1}$$

1. G. Kings [5] donne une perspective similaire sur les classe d'Eisenstein p-adiques en utilisant le language des faisceaux de modules d'Iwasawa.

Formes modulaires

Soient A un sous-anneau de $\mathbb{C}$ et Γ un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. On note $\mathcal{M}_k(\Gamma, \mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des formes modulaires de poids k pour Γ. On note aussi $\mathcal{M}_k(\Gamma, A)$ le sous A-module de $\mathcal{M}_k(\Gamma, \mathbb{C})$ des formes modulaires dont le q-développement est à coefficients dans A. On pose $\mathcal{M}(\Gamma, A) = \oplus_{k=0}^{+\infty} \mathcal{M}_k(\Gamma, A)$. Et on note $\mathcal{M}_k(A)$ (resp. $\mathcal{M}(A)$) la réunion des $\mathcal{M}_k(\Gamma, A)$ (resp. $\mathcal{M}(\Gamma, A)$), où Γ décrit tous les sous-groupes d'indice fini de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. On note L^{cong} l'ensemble des sous-groupes de congruence. On définit de même :

$$\mathcal{M}_k^{\mathrm{cong}}(A) = \bigcup_{\Gamma \in L^{\mathrm{cong}}} \mathcal{M}_k(\Gamma, A) \text{ et } \mathcal{M}^{\mathrm{cong}}(A) = \oplus_{k=0}^{+\infty} \mathcal{M}_k^{\mathrm{cong}}(A).$$

Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$ et soit $\overline{K}$ la clôture algébrique de K dans $\mathbb{C}$. On note Π_K le groupe des automorphismes de K-algèbres graduées $\mathcal{M}(\overline{K})$ sur $\mathcal{M}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), K)$; c'est un groupe profini. Si K est algébriquement clos et si Γ est un sous-groupe distingué d'indice fini de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, alors le groupe des automorphismes de $\mathcal{M}(\Gamma, K)$ sur $\mathcal{M}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), K)$ est $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\Gamma$. On en déduit que $\Pi_K = \widehat{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$, où $\widehat{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ est le complété profini de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Dans le cas général, on dispose d'une suite exacte :

$$1 \to \Pi_{\overline{K}} \to \Pi_K \to \mathcal{G}_K \to 1,$$

qui admet une section $\mathcal{G}_K \to \Pi_K$ naturelle, en faisant agir $\mathcal{G}_K$ sur les coefficients du q-développement des formes modulaires. Le groupe des automorphimes d'algèbres de $\mathcal{M}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$ sur $\mathcal{M}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$ est le groupe profini $\mathrm{SL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$, complété de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ par rapport aux sous-groupes de congruence. D'autre part, quel que soit $f \in \mathcal{M}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$, le groupe $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$ agit sur les coefficients du q-développement de f à travers son quotient $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}/\mathbb{Q})$ qui est isomorphe à $\hat{\mathbb{Z}}^*$ par le caractère cyclotomique. La sous-algèbre $\mathcal{M}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$ est stable par $\Pi_{\mathbb{Q}}$ qui agit à travers $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ et on a le diagramme commutatif de groupes suivant (cf. par exemple [8, théorème 2.2]) :

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \Pi_{\bar{\mathbb{Q}}} & \longrightarrow & \Pi_{\mathbb{Q}} & \underset{\iota_{\mathbb{Q}}}{\rightleftarrows} & \mathcal{G}_{\mathbb{Q}} & \longrightarrow & 1\,, \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \chi_{\mathrm{cycl}}} & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathrm{SL}_2(\hat{\mathbb{Z}}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}}) & \underset{\iota}{\overset{\det}{\rightleftarrows}} & \hat{\mathbb{Z}}^* & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

où la section $\iota_{\mathbb{Q}}$ de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$ dans $\Pi_{\mathbb{Q}}$ décrite plus haut envoie $u \in \hat{\mathbb{Z}}^*$ sur la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$.

1.3 Remerciements

Nous sommes heureux de remercier Pierre Colmez pour ses remarques. La plupart de ce travail a été effectué pendant le séjour du deuxième auteur à l'université de Padoue. Il a bénéficié de discussions intéressantes avec Matteo Longo et René Scheider. Une grande partie de cet article a été rédigée pendant ses séjours à l'IMJ et à l'IHES. Il souhaite remercier ces institutions pour lui avoir fourni d'excellentes conditions de travail.

2 La distribution $z_{u,\mathrm{Eis,dR}}(k)$

2.1 Séries d'Eisenstein-Kronecker

Les résultats de ce paragraphe peuvent se trouver dans le livre de Weil [10].

Définition 2.1. Si $(\tau, z) \in \mathcal{H} \times \mathbb{C}$, on pose $q = e^{2i\pi\tau}$ et $q_z = e^{2i\pi z}$. On introduit l'opérateur $\partial_z := \frac{1}{2i\pi}\frac{\partial}{\partial z} = q_z\frac{\partial}{\partial q_z}$. On pose aussi $e(a) = e^{2i\pi a}$. Si $k \in \mathbb{N}$, $\tau \in \mathcal{H}$, et $z, u \in \mathbb{C}$, on définit la série d'Eisenstein-Kronecker par

$$\mathrm{H}_k(s,\tau,z,u) = \frac{\Gamma(s)}{(-2i\pi)^k}\Big(\frac{\tau-\bar\tau}{2i\pi}\Big)^{s-k}\sum_{\omega\in\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau}{}' \frac{\overline{\omega+z}^k}{|\omega+z|^{2s}} e\Big(\frac{\omega\bar u - u\bar\omega}{\tau-\bar\tau}\Big).$$

Elle converge pour $\mathrm{Re}(s) > 1 + \frac{k}{2}$, et possède un prolongement méromorphe à tout le plan complexe avec des pôles simples en $s = 1$ (si $k = 0$ et $u \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$) et $s = 0$ (si $k = 0$ et $z \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$). Dans la formule ci-dessus $\sum'$ signifie (si $z \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$) que l'on supprime le terme correspondant à $\omega = -z$.

Si $k \geq 1$, on définit les fonctions suivantes :

$$E_k(\tau, z) = \mathrm{H}_k(k, \tau, z, 0), \quad F_k(\tau, z) = \mathrm{H}_k(k, \tau, 0, z).$$

Les fonctions $E_k(\tau, z)$ et $F_k(\tau, z)$ sont périodiques en z de période $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$. De plus on a :

$$E_{k+1}(\tau, z) = \partial_z E_k(\tau, z), \text{ si } k \in \mathbb{N} \text{ et } E_0(\tau, z) = \log|\theta(\tau, z)| \text{ si } z \notin \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau,$$

où $\theta(\tau, z)$ est donnée par le produit infini :

$$\theta(\tau, z) = q^{1/12}(q_z^{1/2} - q_z^{-1/2})\prod_{n\geq 1}((1-q^n q_z)(1-q^n q_z^{-1})).$$

Soient $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$ et $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$ qui a pour image (α, β) dans $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$. Si $k = 2$ et $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, ou si $k \geq 1$ et $k \neq 2$, on définit des séries d'Eisenstein, éléments de $\mathcal{M}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$:

$$E^{(k)}_{\alpha,\beta} = E_k(\tau, a\tau + b) \text{ et } F^{(k)}_{\alpha,\beta} = F_k(\tau, a\tau + b).$$

Si $k = 2$ et $(\alpha, \beta) = (0, 0)$, on définit [2] $E^{(2)}_{0,0} = F^{(2)}_{0,0} := \lim_{s\to 2} H_2(s, \tau, 0, 0)$.

2.2 La distribution $z_{u,\mathrm{Eis,dR}}(k)$

Soient $X = \mathbb{A}_f^2, G = \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ et $V = \mathcal{M}_k^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$. On définit une action de G à droite sur X par la multiplication de matrices :

$$x * \gamma = (a, b)\gamma, \text{ si } x = (a, b) \text{ et } \gamma \in \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}}).$$

L'action de $\Pi_{\mathbb{Q}}$ stabilise V et se factorise à travers $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$; l'action de $\mathrm{SL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ est l'action modulaire usuelle $|_k$ et celle de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$, si $d \in \hat{\mathbb{Z}}^*$, se fait via un relèvement σ_d dans $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$ agissant sur les coefficients du q-développement.

La proposition suivante est une traduction des relations de distribution [8, lemme 2.6] pour les séries d'Eisenstein $F^{(k)}_{\alpha,\beta}$.

2. La série $H_2(s, \tau, 0, 0)$ converge pour $\mathrm{R}e(s) > 2$, mais pas pour $s = 2$.

Proposition 2.2. *[8, théorème 2.13] Si $k \geq 1$, il existe une distribution algébrique*

$$z_{\mathrm{Eis,dR}}(k) \in \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbb{A}_f^2, \mathcal{M}_k^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}))$$

vérifiant : quels que soient $r \in \mathbb{Q}^*$ et $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$, on a

$$\int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}})\times(b+r\hat{\mathbb{Z}})} z_{\mathrm{Eis,dR}}(k) = r^{k-2} F^{(k)}_{r^{-1}a,r^{-1}b}.$$

De plus, si $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$, alors $z_{\mathrm{Eis,dR}}(k) * \gamma = z_{\mathrm{Eis,dR}}(k)$.

Soit $\langle\cdot\rangle : \mathbb{Z}_p^* \to \hat{\mathbb{Z}}^*$ l'inclusion naturelle envoyant x sur $\langle x\rangle = (1, \cdots, x, 1, \cdots)$, où x est à la place p. D'après [8, Proposition 2.14], si $u \in \mathbb{Z}_p^*$, il existe une distribution

$$z_{u,\mathrm{Eis,dR}}(k) = (u^2 - \langle u\rangle) z_{\mathrm{Eis,dR}}(k)$$

caractérisée par le fait que, quels que soient $r \in \mathbb{Q}^*$ et $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$, on a

$$\int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}})\times(b+r\hat{\mathbb{Z}})} z_{u,\mathrm{Eis,dR}}(k) = \frac{1}{(k-2)!} r^{k-2} F^{(k)}_{u,r^{-1}a,r^{-1}b},$$

où $F^{(k)}_{u,\alpha,\beta} = u^2 F^{(k)}_{\alpha,\beta} - u^{2-k} F^{(k)}_{<u>\alpha,<u>\beta}$.

Remarque 2.3. Bannai-Kings [1, Proposition 3.8] ont déterminé la réalisation de de Rham de la classe d'Eisenstein (cf. l'introduction). Ils la notent $\mathrm{Eis}^k_{\mathrm{dR}}(\varphi)$ avec $\varphi \in \mathcal{C}^0((\mathbb{Z}/N)^2, \mathbb{Q})$. Si ϕ est la transformée de Fourier de φ, vue comme une fonction localement constante sur $\mathbb{A}_f^2$, un calcul direct en passant aux q-développements, montre que [3],

$$\frac{1}{2} N^{k-2} \mathrm{Eis}^k_{\mathrm{dR}}(\varphi) = \int \phi z_{\mathrm{Eis,dR}}(k).$$

Par ailleurs, R. Scheider [7] a obtenu une description de la réalisation de de Rham du polylogarithme elliptique et en déduit une description explicite de $\mathrm{Eis}^k_{\mathrm{dR}}(\varphi)$ compatible avec les autres.

3 Classe d'Eisenstein p-adique

La realisation p-adique des classes d'Eisenstein, appelées classes d'Eisenstein p-adiques, a été déterminée par Kings [4, theorem 4.2.9] par une construction géométrique. On donne une description purement algébrique des classes d'Eisenstein p-adiques, qui est compatible avec celle de Kings (cf. remarque 3.3).

3. La normalisation vient de la relation de distribution.

3.1 Unités de Siegel

Soit K un sous corps de $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{U}(\Gamma, K)$ le groupe des unités modulaires pour Γ dont le q-développement est à coefficients dans K. On note $\mathcal{U}(K)$ (resp. $\mathcal{U}^{\mathrm{cong}}(K)$) la réunion des $\mathcal{U}(\Gamma, K)$, où Γ décrit tous les sous-groupes d'indice fini (resp. de congruence) de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Si $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$, $(c, 6) = 1$ et $(c\alpha, c\beta) \neq (0, 0)$, on note $g_{c,\alpha,\beta}$ l'unité de Siegel définie par la formule :

$$g_{c,\alpha,\beta} = \frac{\theta^{c^2}(\tau, \tilde{\alpha}\tau + \tilde{\beta})}{\theta(\tau, c\tilde{\alpha}\tau + c\tilde{\beta})}, \text{ avec } (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \mathbb{Q}^2 \text{ qui a pour image } (\alpha, \beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2.$$

Elle ne dépend pas du choix de $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \mathbb{Q}^2$ et appartient à $\mathcal{U}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$. On note $g_{\alpha,\beta} = g_{c,\alpha,\beta}^{1/(c^2-1)} \in \mathbb{Q} \otimes \mathcal{U}(\overline{\mathbb{Q}})$, qui ne dépend pas du choix de $c \equiv 1 \mod N$. De plus, pour tout c, on a $g_{c,\alpha,\beta} = g_{\alpha,\beta}^{c^2} g_{c\alpha,c\beta}^{-1}$.

L'action de $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ sur $\mathcal{M}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$ induit une action de $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ sur $\mathbb{Q} \otimes \mathcal{U}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$. Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$ et soit $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$. Alors on a $g_{\alpha,\beta} * \gamma = g_{(\alpha,\beta)*\gamma}$, où $(\alpha, \beta) * \gamma = (a\alpha + c\beta, b\alpha + d\beta)$ est le produit de matrices usuel avec $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$.

Les relations de distribution des unités de Siegel se traduisent en l'énoncé suivant :

Proposition 3.1. *[8, Théorème 2.21]Il existe une distribution algébrique*

$$z_{\mathrm{Siegel}} \in \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbb{A}_f^2 - (0,0), \mathbb{Q} \otimes \mathcal{U}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})),$$

telle que, quels que soient $r \in \mathbb{Q}^*$ et $(a, b) \in \mathbb{Q}^2 - (r\mathbb{Z}, r\mathbb{Z})$, on ait :

$$\int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}})\times(b+r\hat{\mathbb{Z}})} z_{\mathrm{Siegel}} = g_{r^{-1}a, r^{-1}b}(\tau).$$

De plus, z_{Siegel} est invariante sous l'action de $\Pi_{\mathbb{Q}}$.

3.2 Théorie de Kummer p-adique

Soit G un groupe localement profini. Soit X un espace topologique localement profini muni d'une action continue de G à droite. Soit M un G-module topologique muni d'une action à droite de G. On note $\mathrm{H}^i(G, M)$ le i-ième groupe de cohomologie continue de G à valeurs dans M.

Notons $Z^0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} | x_n \in \mathcal{U}(\overline{\mathbb{Q}}), (x_{n+1})^p = x_n\}$. La topologie sur $\mathcal{U}(\overline{\mathbb{Q}})$ est discrète et on munit Z^0 de la topologie de la limite projective. Notons $Z = \mathbb{Q} \otimes Z^0$; Z est muni d'une action de $\Pi_{\mathbb{Q}}$ composante par composante.

On définit une projection θ de Z^0 sur $\mathcal{U}(\overline{\mathbb{Q}})$ en envoyant $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur x_0. La projection $\theta : Z^0 \to \mathcal{U}(\overline{\mathbb{Q}})$ est surjective, et son noyau est

$$\mathrm{Ker}(\theta) = \{(1, \zeta_p, \zeta_{p^n}, ...\zeta_{p^n}, ...)\} \cong \mathbb{Z}_p(1).$$

Autrement dit, on a la suite exacte de $\Pi_{\mathbb{Q}}$-modules topologiques :

$$0 \to \mathbb{Z}_p(1) \to Z^0 \to \mathcal{U}(\overline{\mathbb{Q}}) \to 0.$$

Dans la suite, on pose $X = \mathbb{A}_f^2 - (0,0)$. Comme $\mathbb{Q}$ est plat sur $\mathbb{Z}$, on obtient la suite exacte de $\Pi_{\mathbb{Q}}$-modules topologiques :

$$0 \to \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X, \mathbb{Q}_p(1)) \to \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X, Z \otimes \mathbb{Q}) \to \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X, \mathcal{U}(\overline{\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \to 0.$$

En prenant la cohomologie continue de $\Pi_{\mathbb{Q}}$, on obtient une application de connexion "de Kummer" :

$$\mathrm{H}^0(\Pi_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X, \mathcal{U}(\overline{\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^1(\Pi_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X, \mathbb{Q}_p(1))).$$

On note $z^{(p)}_{\mathrm{Siegel}} \in \mathrm{H}^1(\Pi_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X, \mathbb{Q}_p(1)))$ l'image de z_{Siegel} sous l'application de Kummer.

3.3 Torsion à la Soulé

Soit G un groupe localement profini, agissant continûment à droite sur X. Soit V une $\mathbb{Q}_p$-représentation de G à droite. On note $\mathcal{C}^0_c(X, V)$ le $\mathbb{Q}_p$-espace des fonctions continues à support compact sur X à valeurs dans V et $\mathfrak{D}_0(X, V)$ le $\mathbb{Q}_p$-espace des mesures sur X à valeurs dans V. On munit $\mathcal{C}^0_c(X, V)$ et $\mathfrak{D}_0(X, V)$ d'actions de G à droite comme suit : si $g \in G$, $x \in X$, $\phi(x) \in \mathcal{C}^0_c(X, V)$, et $\mu \in \mathfrak{D}_0(X, V)$, alors

$$\phi * g(x) = \phi(x * g^{-1}) * g \text{ et } \int_X \phi(x)(\mu * g) = \left(\int_X (\phi * g^{-1})\mu \right) * g.$$

La proposition suivant est la "Torsion à la Soulé", utilisée aussi dans la construction de système d'Euler de Kato.

Proposition 3.2. *[9, proposition 2.17] Si $f \in \mathcal{C}^0_c(X, V)^G$, alors la multiplication d'une mesure $\mu \in \mathfrak{D}_0(X, \mathbb{Z}_p)$ par la fonction f induit un morphisme G-équivariant à droite de $\mathfrak{D}_0(X, \mathbb{Z}_p)$ dans $\mathfrak{D}_0(X, V)$.*

D'après [8, lemme 2.24], si $u \in \mathbb{Z}_p^*$, il existe un opérateur $r_u = u^2 - \langle u \rangle$ tel que la distribution algébrique $z^{(p)}_{u,\mathrm{Siegel}} = r_u z^{(p)}_{\mathrm{Siegel}}$ appartienne à $\mathrm{H}^1(\Pi_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X, \mathbb{Z}_p(1)))$, et donc s'étende par continuité en une mesure. Ceci nous permet d'utiliser la "torsion à la Soulé".

On note $V_p = \mathbb{Q}_p e_1 \oplus \mathbb{Q}_p e_2$ la représentation standard de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ à droite donnée par les formules :

$$\text{si } \gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right), e_1 * \gamma = ae_1 + be_2 \text{ et } e_2 * \gamma = ce_1 + de_2.$$

On note $W_k = \mathrm{Sym}^{k-2} V_p$. Alors, la multiplication par la fonction $x \mapsto \frac{1}{(k-2)!}(ae_1 + be_2)^{k-2}$, où $x_p = (a, b)$ est la composante à la place p de x, induit un morphisme naturel :

$$\mathrm{H}^1(\Pi_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_0(X, \mathbb{Z}_p(1))) \to \mathrm{H}^1(\Pi_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_0(X, W_k(1))).$$

On note $X^{(p)} = (\mathbb{A}_f^{]p[})^2 \times (\mathbb{Z}_p^2 - p\mathbb{Z}_p^2)$. On note $z_{u,\mathrm{Eis},\text{ét}}(k) \in \mathrm{H}^1(\Pi_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_0(X^{(p)}, W_k(1)))$ la restriction à $X^{(p)}$ de la mesure

$$(x \mapsto \frac{1}{(k-2)!}(ae_1 + be_2)^{k-2}) \otimes z^{(p)}_{u,\mathrm{Siegel}}.$$

On appelle $z_{u,\mathrm{Eis},\text{ét}}(k)$ la classe d'Eisenstein p-adique.

Remarque 3.3. On vérifie facilement, en revenant aux définitions, que notre construction redonne celle de Kings [4, theorem 4.2.9]. Plus précisément, si $(N,p)=1$, on a

$$\begin{aligned}&\int_{(\alpha+N\hat{\mathbb{Z}})\times(\beta+N\hat{\mathbb{Z}})} z_{u,\mathrm{Eis},\text{ét}}(k)\\ =&\lim_{n\to\infty}\sum_{\substack{(a,b)\equiv(\alpha,\beta)\ \bmod N\\ 1\leq a,b\leq Np^n}}(ae_1+be_2)^{k-2}\delta(g_{u,a/Np^n,b/Np^n})\\ =&N^{k-2}\varprojlim_n\sum_{\substack{(a,b)\equiv(\alpha,\beta)\ \bmod N\\ 1\leq a,b\leq Np^n}}(a/Np^ne_1+b/Np^ne_2)^{k-2}\delta(g_{u,a/Np^n,b/Np^n}),\end{aligned}$$

où la limite projective $\varprojlim_n \sum_{(a,b)\equiv(\alpha,\beta)\ \bmod N}(a/Np^ne_1+b/Np^ne_2)^{k-2}\delta(g_{u,a/Np^n,b/Np^n})$ est la classe d'Eisenstein p-adique de Kings.

4 Une loi de réciprocité explicite

4.1 La méthode de Tate-Sen-Colmez

Dans ce paragraphe, on rappelle les résultats de [8, §3, §4] sur la méthode de Tate-Sen-Colmez pour l'anneau $\mathfrak{K}^+=\mathbb{Q}_p\{q/p\}$ des fonctions analytiques sur la boule $v_p(q)\geq 1$ à coefficients dans $\mathbb{Q}_p$.

L'anneau $\mathfrak{K}^+$ et ses extensions

L'anneau $\mathfrak{K}^+$ est un anneau principal, complet pour la valuation v_p définie par la formule :

$$v_p(f)=\inf_{n\in\mathbb{N}}v_p(a_n),\ \text{si}\ f=\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n(q/p)^n\in\mathfrak{K}^+.$$

On a $v_p(fg)=v_p(f)+v_p(g)$, ce qui permet de prolonger v_p au corps des fractions de $\mathfrak{K}^+$ et on note $\mathfrak{K}$ son complété. Fixons une clôture algébrique $\overline{\mathfrak{K}}$ de $\mathfrak{K}$ munie de la valuation v_p qui est le prolongement unique de v_p sur $\mathfrak{K}$ à $\overline{\mathfrak{K}}$. On note $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}}$ le groupe de Galois de $\overline{\mathfrak{K}}$ sur $\mathfrak{K}$.

Soit $M\geq 1$ un entier. On note q_M (resp. ζ_M) la racine M-ième $q^{1/M}$ (resp. $\exp(\frac{2i\pi}{M})$) de q (resp. 1). On note $F_M=\mathbb{Q}_p[\zeta_M]$. Soit $\mathfrak{K}_M=\mathfrak{K}[q_M,\zeta_M]$; c'est une extension galoisienne de $\mathfrak{K}$ de groupe de Galois $\left(\begin{smallmatrix}1, & \mathbb{Z}/M\mathbb{Z}\\ 0, & (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^*\end{smallmatrix}\right)$.

On note $\mathfrak{K}_\infty$ (resp. F_∞) la réunion des $\mathfrak{K}_M$ (resp. F_M) pour tous $M\geq 1$. On note $P_{\mathbb{Q}_p}$ (resp. $P_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$) le groupe de Galois de $\overline{\mathbb{Q}}_p\mathfrak{K}_\infty$ sur $\mathfrak{K}$ (resp. $\overline{\mathbb{Q}}_p\mathfrak{K}$) . Le groupe $P_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ est un groupe profini qui est isomorphe au groupe $\hat{\mathbb{Z}}$. De plus, on a une suite exacte :

$$1\to P_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\to P_{\mathbb{Q}_p}\to\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}\to 1.$$

Fixons M un entier ≥ 1. On note $\mathfrak{K}_{Mp^\infty}$ (resp. F_{Mp^∞}) la réunion des $\mathfrak{K}_{Mp^n}$ (resp. F_{Mp^∞}) pour tous $n\geq 1$. Soit $\overline{\mathfrak{K}}^+$ la clôture intégrale de $\mathfrak{K}^+$ dans $\overline{\mathfrak{K}}$. On note $\mathfrak{K}_M^+$ la clôture intégrale de $\mathfrak{K}^+$ dans $\mathfrak{K}_M$ et $\mathfrak{K}_\infty^+=\cup_M\mathfrak{K}_M^+$.

En associant son q-développement à une forme modulaire, on voit les formes modulaires comme des éléments de $\overline{\mathbb{Q}}_p\mathfrak{K}_\infty^+$. Le groupe de Galois $P_{\mathbb{Q}_p}$ de $\overline{\mathbb{Q}}_p\mathfrak{K}_\infty$ sur $\mathfrak{K}$ préserve l'algèbre des formes modulaires $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}})$; autrement dit, $P_{\mathbb{Q}_p}$ est un sous-groupe de $\Pi_{\mathbb{Q}}$.

Les anneaux de Fontaine

Soit L un anneau de caractéristique 0 muni d'une valuation v_p telle que $v_p(p) = 1$. On note $\mathcal{O}_L = \{x \in L, v_p(x) \geq 0\}$ l'anneau des entiers de L pour la topologie p-adique. On note $\mathcal{O}_{\mathbb{C}(L)}$ le complété de $\mathcal{O}_L$ pour la valuation v_p. On pose $\mathbb{C}(L) = \mathcal{O}_{\mathbb{C}(L)}[\frac{1}{p}]$.

Soit $\mathbb{R}(L) = \varprojlim A_n = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} | x_n \in \mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L \text{ et } x_{n+1}^p = x_n, \text{ si } n \in \mathbb{N}\}$. Si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}(L)$, soit $\hat{x}_n$ un relèvement de x_n dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}(L)}$. La suite $(\hat{x}_{n+k}^{p^k})$ converge quand k tend vers l'infini. Sa limite $x^{(n)}$ ne dépend pas du choix des relèvements $\hat{x}_n$. On obtient ainsi une bijection : $\mathbb{R}(L) \to \{(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} | x^{(n)} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}(L)}, (x^{(n+1)})^p = x^{(n)}, \forall n\}$.

L'anneau $\mathbb{R}(L)$ est un anneau parfait de caractéristique p. On note $\mathbb{A}_{\text{inf}}(L)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\mathbb{R}(L)$. Si $x \in \mathbb{R}(L)$, on note $[x] = (x, 0, 0, ...) \in \mathbb{A}_{\text{inf}}(L)$ son représentant de Teichmüller. Alors tout élément a de $\mathbb{A}_{\text{inf}}(L)$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $\sum_{k=0}^{\infty} p^k[x_k]$ avec une suite $(x_k) \in (\mathbb{R}(L))^{\mathbb{N}}$.

On définit un morphisme d'anneaux $\theta : \mathbb{A}_{\text{inf}}(L) \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}(L)}$ par la formule $\sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k] \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} p^k x_k^{(0)}$. On note $\mathbb{B}_{\text{inf}}(L) = \mathbb{A}_{\text{inf}}(L)[\frac{1}{p}]$, et on étend θ en un morphisme $\mathbb{B}_{\text{inf}}(L) \to \mathbb{C}(L)$. On note $\mathbb{B}_m(L) = \mathbb{B}_{\text{inf}}(L)/(\text{Ker}\theta)^m$. On fait de $\mathbb{B}_m(L)$ un anneau de Banach en prenant l'image de $\mathbb{A}_{\text{inf}}(L)$ comme anneau d'entiers.

On définit $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(L) := \varprojlim \mathbb{B}_m(L)$ comme le complété $\text{Ker}(\theta)$-adique de $\mathbb{B}_{\text{inf}}(L)$; on le munit de la topologie de la limite projective, ce qui en fait un anneau de Fréchet. Alors θ s'étend en un morphisme continu d'anneaux topologiques $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(L) \to \mathbb{C}(L)$.

Pour simplifier la notation, on note $\mathbb{A}_{\text{inf}}$ (resp. $\mathbb{B}_{\text{inf}}$ et $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+$) l'anneau $\mathbb{A}_{\text{inf}}(\overline{\mathfrak{K}}^+)$ (resp. $\mathbb{B}_{\text{inf}}(\overline{\mathfrak{K}}^+)$ et $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\overline{\mathfrak{K}}^+)$). Soit $\tilde{q}$ (resp. $\tilde{q}_M$ si $M \geq 1$ est un entier) le représentant de Teichmüller dans $\mathbb{A}_{\text{inf}}$ de $(q, q_p, \cdots, q_{p^n}, \cdots)$ (resp. $(q_M, \cdots, q_{Mp^n}, \cdots)$). Si $M|N$, on a $\tilde{q}_N^{N/M} = \tilde{q}_M$.

On définit une application continue $\iota_{\text{dR}} : \mathfrak{K}^+ \to \mathbb{B}_{\text{dR}}^+$ par $f(q) \mapsto f(\tilde{q})$; ce qui permet d'identifier $\mathfrak{K}^+$ à un sous-anneau de $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+$. Mais il faut faire attention au fait que $\iota_{\text{dR}}(\mathfrak{K}^+)$ n'est pas stable par $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}}$ car $\tilde{q}\sigma = \tilde{q}\tilde{\zeta}^{c_q(\sigma)}$ si $\sigma \in \mathcal{G}_{\mathfrak{K}}$, où c_q est le 1-cocycle à valeur dans $\mathbb{Z}_p(1)$ associé à q par la théorie de Kummer.

Posons $\tilde{\mathfrak{K}}^+ = \iota_{\text{dR}}(\mathfrak{K}^+)[[t]]$. Si $M \geq 1$ est un entier, on note $\tilde{\mathfrak{K}}_M^+$ l'anneau $\tilde{\mathfrak{K}}^+[\tilde{q}_M, \tilde{\zeta}_M]$ et pose $\tilde{\mathfrak{K}}_{Mp^\infty}^+ = \bigcup_n \tilde{\mathfrak{K}}_{Mp^n}^+$. L'application ι_{dR} s'étend en un morphisme continu de $\mathfrak{K}^+$-modules $\iota_{\text{dR}} : \mathfrak{K}_M^+ \to \mathbb{B}_{\text{dR}}^+$ en envoyant ζ_M et q_M sur $\tilde{\zeta}_M$ et $\tilde{q}_M$ respectivement. On a $\tilde{\mathfrak{K}}_M^+ = \iota_{\text{dR}}(\mathfrak{K}_M^+)[[t]]$.

On définit une application $\tilde{\mathfrak{K}}_M^+$-linéaire de $\tilde{\mathfrak{K}}_{Mp^\infty}^+$ dans $\tilde{\mathfrak{K}}_M^+$ par la formule :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_M : \tilde{\mathfrak{K}}_{Mp^\infty}^+ &\longrightarrow \tilde{\mathfrak{K}}_M^+ \\ \tilde{\zeta}_{Mp^n}^a \tilde{q}_{Mp^n}^b &\mapsto \begin{cases} \tilde{\zeta}_{Mp^n}^a \tilde{q}_{Mp^n}^b, \text{ si } p^n|a \text{ et } p^n|b; \\ 0, \text{ sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Proposition 4.1. *[8, théorème 3.17, théorème 3.22] Soit $M \geq 1$. On a*
(1) $\text{H}^0(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}, \mathbb{B}_{\text{dR}}^+) = \mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+)$ *;*
(2) $\tilde{\mathfrak{K}}_{Mp^\infty}^+$ *est dense dans* $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+)$ *;*
(3) *Si $M \geq 1$ est un entier tel que $m = v_p(M) \geq v_p(2p)$, l'application $\mathbf{R}_M : \tilde{\mathfrak{K}}_{Mp^\infty}^+ \to \tilde{\mathfrak{K}}_M^+$ s'étend par continuité en une application $\tilde{\mathfrak{K}}_M^+$-linéaire $\mathbf{R}_M : \mathbb{B}_{\text{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+) \to \tilde{\mathfrak{K}}_M^+$. De plus, $\mathbf{R}_M$ commute à l'action de $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}}$.*

Proposition 4.2. *[8, proposition 4.19] Soit $v_p(M) \geq v_p(2p)$; si V est une $\mathbb{Q}_p$-représentation de $P_{\mathfrak{K}_M}$ munie d'un $\mathbb{Z}_p$-réseau T tel que $P_{\mathfrak{K}_M}$ agit trivialement sur $T/2pT$, alors pour $i \in \mathbb{N}$, $\mathbf{R}_M$ induit un isomorphisme :*

$$\mathbf{R}_M : \mathrm{H}^i(P_{\mathfrak{K}_M}, \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{K}^+_{Mp^\infty}) \otimes V) \cong \mathrm{H}^i(P_{\mathfrak{K}_M}, \tilde{\mathfrak{K}}^+_M \otimes V).$$

4.2 Cohomologie des représentations du groupe P_m

Soit $M \geq 1$ tel que $v_p(M) = m \geq v_p(2p)$. Le groupe de Galois $P_{\mathfrak{K}_M}$ de l'extension $\mathfrak{K}_{Mp^\infty}/\mathfrak{K}_M$ est un groupe analytique p-adique compact de rang 2, isomorphe à

$$\mathrm{P}_m = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) : a = 1, c = 0, b \in p^m\mathbb{Z}_p, d \in 1 + p^m\mathbb{Z}_p\},$$

et si $u, v \in p^m\mathbb{Z}_p$, on note (u, v) l'élément $\left(\begin{smallmatrix} 1 & u \\ 0 & e^v \end{smallmatrix}\right)$ de P_m. La loi de groupe s'écrit sous la forme

$$(u_1, v_1)(u_2, v_2) = (e^{v_2}u_1 + u_2, v_1 + v_2).$$

Soient U_m et Γ_m les sous-groupes de P_m topologiquement engendrés par $(p^m, 0)$ et $(0, p^m)$ respectivement. Ces deux sous-groupes sont isomorphes à $\mathbb{Z}_p$. De plus, U_m est distingué dans P_m et on a $\mathrm{P}_m/U_m = \Gamma_m$. Soit V une $\mathbb{Q}_p$-représentation de P_m. La suite spectrale de Hochschild-Serre nous fournit une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{H}^1(\Gamma, V^{U_m}) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{P}_m, V) \to \mathrm{H}^1(U_m, V)^{\Gamma_m}.$$

Lemme 4.3. *On a un isomorphisme $\mathrm{H}^1(U_m, V)^{\Gamma_m} \cong (V/(u_m - 1))^{e^{-p^m}\gamma_m = 1}$.*

Démonstration. C'est un cas particulier de [6, proposition 1.7.7]. □

Soit P un groupe analytique p-adique. On dira que l'action de P sur une $\mathbb{Q}_p$-représentation de dimension finie V est analytique si pour tout $\gamma \in \mathrm{P}$ et $v \in V$, la fonction $x \mapsto \gamma^x v = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{x}{n}(\gamma - 1)^n v$ est une fonction analytique sur $\mathbb{Z}_p$ à valeurs dans V. On dira qu'une $\mathbb{Q}_p$-représentation de dimension finie V de P_m est analytique si l'action de P_m est analytique sur V.

Soit V une $\mathbb{Q}_p$-représentation analytique de P_m. Si $\gamma \in \mathrm{P}_m$, on peut définir une dérivation $\partial_\gamma : V \to V$ par rapport à α_γ par la formule :

$$\partial_\gamma(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x * \gamma^{p^n} - x}{p^n}.$$

En particulier, on note $\partial_{m,i}$, $i = 1, 2$, les dérivations par rapport à $(p^m, 0)$ et $(0, p^m)$ respectivement.

Lemme 4.4. *Soit V une représentation analytique de U_m munie d'un $\mathbb{Z}_p$-réseau T stable sous l'action de U_m. Supposons que $(u_m - 1)T \subset p^2T$. Alors, on a un isomorprhisme*

$$\mathrm{H}^1(U_m, T) \cong T/\partial_{m,1}.$$

Démonstration. Ce lemme se démontre de la même manière que [8, lemme 4.8]. □

Proposition 4.5. *Soit V une représentation analytique de U_m munie d'un $\mathbb{Z}_p$-réseau T stable sous l'action de U_m. Alors,*
(1) *tout élément de $\mathrm{H}^1(U_m, T)$ est représentable par un 1-cocycle analytique à un élément de p^m-torsion près ;*
(2) *l'image d'un 1-cocycle analytique,*

$$u \mapsto c_u = \sum_{i \geq 1} c_i u^i,$$

sous l'isomorphisme $\mathrm{H}^1(U_m, T) \cong T/\partial_{m,1}$ est aussi celle de $\delta^{(1)}(c_u) = c_1$ dans $T/\partial_{m,1}$ à un élément de p^m-torsion près.

Démonstration. Cette proposition se démontre de la même manière que [9, proposition 4.5] (voir aussi [8, théorème 4.1.10]), mais plus simplement. Le point clé est d'utiliser la relation de 1-cocycle pour montrer que l'application

$$\delta^{(1)} : \{\text{1-cocycle analytique}\} \to T$$

induit une surjection $\mathrm{H}^{1,\mathrm{an}}(U_m, T) \to T/(\partial_{m,1})$ à un p^m-torsion près.

□

4.3 Construction d'une application exponentielle duale

On note $\mathfrak{K}^{++} = \mathbb{Z}_p\{q/p\}$ l'anneau des entiers de $\mathfrak{K}^+$ pour la valuation v_p, ainsi que $\mathcal{K}^{++} = \mathbb{Z}_p[[q/p]]$ son complété q/p-adique. On note $\mathfrak{K}_M^{++}$ l'anneau des entiers de $\mathfrak{K}_M^+$, qui est l'anneau

$$\{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n q_M^n \in \mathfrak{K}_M^+ : a_n \in F_M \text{ tel que } v_p(a_n) + \frac{n}{M} \geq 0, \text{ pour tout } n\},$$

et on note $\mathcal{K}_M^{++}$ son complété q/p-adique, ainsi que $\mathcal{K}_M^+ = \mathcal{K}_M^{++} \otimes \mathbb{Q}_p$.

Rappelons que l'application $\iota_{\mathrm{dR}} : \mathfrak{K}^+ \to \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+; f(q) \mapsto f(\tilde{q})$ identifie $\mathfrak{K}^+$ à un sous-anneau de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$. On note $\tilde{\mathfrak{K}}^+ = \iota_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{K}^+)[[t]]$ et $\tilde{\mathcal{K}}^+ = (\widehat{\iota_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{K}^{++})} \otimes \mathbb{Q}_p)[[t]]$, où $\widehat{\iota_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{K}^{++})}$ est le complété $\tilde{q}/p$-adique de $\iota_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{K}^{++})$. De même, on note $\tilde{\mathfrak{K}}_M^+ = \iota_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{K}_M^+)[[t]]$ et $\tilde{\mathcal{K}}_M^+ = (\widehat{\iota_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{K}_M^{++})} \otimes \mathbb{Q}_p)[[t]]$. On a

$$\widehat{\iota_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{K}_M^{++})} = \{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \tilde{q}_M^n \in F_M[[\tilde{q}_M]] : a_n \in F_M \text{ tel que } v_p(a_n) + \frac{n}{M} \geq 0\}.$$

On définit une application $\theta : \tilde{\mathcal{K}}_M^+ \to \mathcal{K}_M^+$ par réduction modulo t, qui est compatible avec celle définie sur $\tilde{\mathfrak{K}}_M^+$. On constate que $\tilde{\mathfrak{K}}_M^+$ est la limite projective $\varprojlim_n (\tilde{\mathfrak{K}}_M^+/t^n)$, où les $\tilde{\mathfrak{K}}_M^+/t^n$ sont des $\mathfrak{K}^+$-modules de rang fini munis de la topologie définie par v_p.

Posons $\tilde{V} = \varprojlim_n (\tilde{\mathfrak{K}}_M^+/t^n) \hat{\otimes} W_k(1)$ la $\mathbb{Q}_p$-représentation de P_m, qui n'est pas une $\mathbb{Q}_p$-représentation analytique, mais qui peut s'approximer par les representations analytiques $\tilde{T}_{n_1,n_2}$ définis ci-dessous : On note $T(1) = \mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{Z}_p e_1 \oplus \mathbb{Z}_p e_2)(1)$ la structure entière de $W_k(1)$. On note $\tilde{T}_{n_1} = (\widehat{\iota_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{K}_M^{++})} \hat{\otimes} T(1)[[t]])/t^{n_1}$. C'est un $\mathbb{Z}_p$-réseau de $(\tilde{\mathfrak{K}}_M^+/t^{n_1}) \hat{\otimes} W_k(1)$

stable sous l'action de P_m. On note $\mathrm{m}_{n_1}^{n_2}$ le sous $\mathbb{Z}_p$-module de $\tilde{T}_{n_1}$ des éléments avec $(\tilde{q}/p)$-adique valuation $\geq n_2$. Comme $\mathrm{m}_{n_1}^{n_2}$ est stable sous l'action de P_m, on peut définir les $\mathbb{Z}_p$-représentations analytiques $\tilde{T}_{n_1,n_2}$ de P_m, pour tous $n_1, n_2 \geq 1$,

$$\tilde{T}_{n_1,n_2} = (\widehat{\iota_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{K}_M^{++})}\hat{\otimes}T(1)[[t]])/t^{n_1})/\mathrm{m}_{n_1}^{n_2}.$$

L'inclusion $\tilde{V} \subset \varprojlim_{n_1} \left((\varprojlim_{n_2} \tilde{T}_{n_1,n_2}) \otimes \mathbb{Q}_p\right)$ de P_m-représentations, nous permet de définir un morphisme :

$$\mathrm{H}^i(\mathrm{P}_m, \tilde{V}) \to \varprojlim_{n_1} \mathrm{H}^i(\mathrm{P}_m, (\varprojlim_{n_2} \tilde{T}_{n_1,n_2}) \otimes \mathbb{Q}_p) \to \varprojlim_{n_1} \left((\varprojlim_{n_2} \mathrm{H}^i(\mathrm{P}_m, \tilde{T}_{n_1,n_2})) \otimes \mathbb{Q}_p\right).$$

Lemme 4.6. *[9, lemme 4.10] Les actions de $\partial_{m,1}$ et $\partial_{m,2} - p^m$ sur t et $\tilde{q}_M$ sont données par les formules suivantes :*

$$\partial_{m,1}(t) = 0, \partial_{m,1}(\tilde{q}_M) = \frac{p^m t}{M}\tilde{q}_M; \partial_{m,2}(t) = p^m t, \partial_{m,2}(\tilde{q}_M) = 0.$$

Proposition 4.7. *Si $v_p(M) = m \geq v_p(2p)$, alors l'application*

$$f(q_M) \mapsto e_1^{k-2} t f(\tilde{q}_M)$$

induit un isomorphisme de $\mathcal{K}_M^+$ sur $\varprojlim_{n_1} \left((\varprojlim_{n_2} (\tilde{T}_{n_1,n_2}/\partial_{m,1})^{\partial_{m,2}=p^m}) \otimes \mathbb{Q}_p\right)$.

Démonstration. On note $\mathbf{M}_{n_1,n_2}$ le sous-$\mathbb{Z}_p$-module de $\tilde{T}_{n_1,n_2}$ des éléments de la forme

$$\sum_{\substack{0\leq r\leq Mn_2-1;\\ 0\leq s\leq n_1-1}} a_{r,s} e_1^{k-2} \tilde{q}_M^r t^s \text{ où } a_{r,s} \in F_M \text{ vérifie } v_p(a_{r,s}) + \frac{r}{M} \geq 0.$$

On constate qu'il n'existe pas d'élément de $\tilde{T}_{n_1,n_2}$ tel que $\partial_{m,1}x$ appartienne à $\mathbf{M}_{n_1,n_2}$. Par conséquent, l'application naturelle

$$\phi_1 : \mathbf{M}_{n_1,n_2} \to \tilde{T}_{n_1,n_2}/\partial_{m,1}$$

est injective. On vérifie facilement que le $\mathbb{Z}_p$-module $\mathbf{M}_{n_1,n_2} + \partial_{m,1}\tilde{T}_{n_1,n_2}$ contient $p^{m(n_1+1)}\tilde{T}_{n_1,n_2}$, pour tout $n_1, n_2 \geq 1$. Ceci implique que le conoyau $\operatorname{Coker}\phi_1$ de ϕ_1 est un $\mathbb{Z}_p$-module de $p^{m(n_1+1)}$-torsion.

D'autre part, comme on a

$$(\partial_{m,2} - p^m)(e_1^{k-2}\tilde{q}_M^r t^s) = p^m(s-1)e_1^{k-2}\tilde{q}_M^r t^s, \tag{2}$$

le $\mathbb{Z}_p$-module $\mathbf{M}_{n_1,n_2}$ est stable sous l'action de $\partial_{m,2} - p^m$. Donc l'application ϕ_1 induit une application injective, que l'on note encore par ϕ_1,

$$\phi_1 : \mathbf{M}_{n_1,n_2}^{\partial_{m,2}=p^m} \to (\tilde{T}_{n_1,n_2}/\partial_{m,1})^{\partial_{m,2}=p^m}.$$

De plus, son conoyau est un $\mathbb{Z}_p$-module de $p^{m(n_1+1)}$-torsion.

Si $n_2 \geq 1$, on note $(\mathcal{K}_M^{++})_{n_2} = (\mathcal{K}_M^{++})/(q/p)^{n_2}$. Pour tout $n_1 \geq 1$, on dispose d'une application $\phi_0 : (\mathcal{K}_M^{++})_{n_2} \to \mathbf{M}_{n_1,n_2}$ en envoyant $f(q_M)$ sur $f(\tilde{q}_M)e_1^{k-2}t$, qui est une injection. De la formule (2) pour $s = 1$, on déduit que ϕ_0 induit une application injective, notée encore ϕ_0,

$$\phi_0 : (\mathcal{K}_M^{++})_{n_2} \to \mathbf{M}_{n_1,n_2}^{\partial_{m,2}=p^m}.$$

En composant avec l'application ϕ_1, on obtient une application injective

$$\phi = \phi_1 \circ \phi_0 : (\mathcal{K}_M^{++})_{n_2} \to (\tilde{T}_{n_1,n_2}/\partial_{m,1})^{\partial_{m,2}=p^m},$$

En prenant la limite projective sur n_2, on obtient une injection

$$\mathcal{K}_M^{++} \to \varprojlim_{n_2} (\tilde{T}_{n_1,n_2}/\partial_{m,1})^{\partial_{m,2}=p^m} \text{ pour } n_1 \geq 1.$$

Il ne reste qu'à montrer la surjectivité de

$$\mathcal{K}_M^{+} \to (\varprojlim_{n_2} (\tilde{T}_{n_1,n_2}/\partial_{m,1})^{\partial_{m,2}=p^m}) \otimes \mathbb{Q}_p.$$

Cela se ramène à montrer que les applications

$$\varprojlim_{n_2} \phi_0 : \mathcal{K}_M^{+} \to (\varprojlim_{n_2} \mathbf{M}_{n_1,n_2}^{\partial_{m,2}=p^m}) \otimes \mathbb{Q}_p$$

et

$$\varprojlim_{n_2} \phi_1 : (\varprojlim_{n_2} \mathbf{M}_{n_1,n_2}^{\partial_{m,2}=p^m}) \otimes \mathbb{Q}_p \to (\varprojlim_{n_2} (\tilde{T}_{n_1,n_2}/\partial_{m,1})^{\partial_{m,2}=p^m}) \otimes \mathbb{Q}_p$$

sont surjectives. La surjectivité de $\varprojlim_{n_2} \phi_0$ découle de la formule (2) et celle de $\varprojlim_{n_2} \phi_1$ découle du fait que, pour tout $n_1 \geq 1$, le conoyau de ϕ_1 est de $p^{m(n_1+1)}$-torsion.

□

En composant les applications obtenues dans les paragraphes précédents, on obtient le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathrm{H}^1(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_M}, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes W_k(1)) & & \\
 & & \uparrow{\scriptstyle (1)} & & \\
\mathrm{H}^1(P_{\mathfrak{K}_M}, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+) \otimes W_k(1)) & & \xrightarrow{\quad (2) \quad} & & \mathrm{H}^1\left(P_{\mathfrak{K}_M}, \tilde{V}\right) \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle (3)} \\
 & \overset{\exp^*}{\vdots} & & & \varprojlim_{n_1} \left((\varprojlim_{n_2} \mathrm{H}^1(P_{\mathfrak{K}_M}, \tilde{T}_{n_1,n_2})) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \right) \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle (4)} \\
\mathcal{K}_M^+ & & \xleftarrow[\cong]{(5)} & & \varprojlim_{n_1} \left((\varprojlim_{n_2} (\tilde{T}_{n_1,n_2}/\partial_{m,1})^{\partial_{m,2}=p^m} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \right),
\end{array}$$

où

• l'application (1), d'inflation, est injective car $(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}} = \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+)$ et $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}$ agit trivialement sur $W_k(1)$;

- (2) est l'isomorphisme induit par "la trace de Tate normalisée" $\mathbf{R}_M$ (cf. proposition 4.2) ;
- (3) est l'application naturelle induite par la projection ;
- (4) est induite par l'application de restriction et l'isomorphisme du lemme 4.4 ;
- (5) est l'isomorphisme dans la proposition 4.7.

On définit l'application $\exp^*$ en composant les applications $(2), (3), (4), (5)$.

Recette 4.8. Comme $\tilde{T}_{n_1,n_2}$ est une représentation analytique pour tout n_1 et n_2, l'application (5) se calcule grâce au théorème 4.5. Plus précisément, cela se fait comme suit : on définit une application $\mathrm{res}_k^{(n_1,n_2)} : \tilde{T}_{n_1}^{\partial_2=1} \to \mathcal{K}_M^+$ en composant la projection [4] $\tilde{T}_{n_1}^{\partial_2=1} \to (\tilde{T}_{n_1,n_2}/\partial_1)^{\partial_2=1}$ avec l'inverse de l'isomorphisme dans la proposition 4.7. En prenant la limite projective sur n_2, on obtient un morphisme $\mathrm{res}_k^{(n_1)} : \tilde{V}_k^{\partial_2=1} \to \mathcal{K}_M^+$. Si $c = (c^{(n_1)}) \in \varprojlim \mathrm{H}^1(U_{\mathfrak{K}_M}, \tilde{T}_{n_1})^{\partial_2=1}$ est représenté par une limite de 1-cocycle analytique $\sigma \mapsto c_\sigma^{(n_1)}$ sur $U_{\mathfrak{K}_M}$ à valeurs dans $\tilde{T}_{n_1}^{\partial_2=1}$, alors l'image de c dans $\mathcal{K}_M^+$ est $\mathrm{res}_k(\delta^{(1)}(c)) = \varprojlim_{n_1} \mathrm{res}_k^{(n_1)}(\delta^{(1)}(c))$, où $\delta^{(1)}$ est l'application définie dans la proposition 4.5.

4.4 Application à la classe d'Eisenstein p-adique

4.4.1 Énoncé du théorème principal

Soit $M \geq 1$, $p|M$ et $A = (\alpha, \beta)$ avec $(\alpha, \beta) \in \{1, \cdots, M\}$ et $(\alpha, \beta) \notin p\mathbb{Z}^2$. On note $\psi_{M,A}$ la fonction caractéristique $1_{A+M\hat{\mathbb{Z}}^2}$. C'est une fonction invariante sous l'action de $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_M}$. Par ailleurs, l'image de la classe d'Eisenstein p-adique $z_{u,\mathrm{Eis,ét}}(k)$ sous l'application de localisation appartient à $\mathrm{H}^1(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_M}, \mathfrak{D}_0((\hat{\mathbb{Z}}^{(p)})^2, W_k(1)))$, et on a $\int \psi_{M,A} z_{u,\mathrm{Eis,ét}}(k) \in \mathrm{H}^1(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_M}, W_k(1))$. On note son image dans $\mathrm{H}^1(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_M}, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}^+) \otimes W_k(1))$ par $z_{M,A}$.

Proposition 4.9. *Pour toute paire (M, A) ci-dessus et $v_p(M) \geq v_p(2p)$, on a*

$$\exp^*(z_{M,A}) = \frac{1}{(k-2)!} M^{k-2} F^{(k)}_{u,\frac{\alpha}{M},\frac{\beta}{M}}.$$

On peut condenser cet énoncé en l'énoncé suivant (avec des notations évidentes) :

Théorème 4.10. *Si $k \geq 2$ et si $u \in \mathbb{Z}_p^*$, on a l'égalité suivante dans $\mathrm{H}^0(\Pi_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X^{(p)}, \mathfrak{K}_\infty^+))$,*

$$\exp^*(z_{u,\mathrm{Eis},\acute{e}t}(k)) = z_{u,\mathrm{Eis,dR}}(k).$$

4.4.2 Construction d'un 1-cocycle

Soit $a, b \in \{1, \cdots p^n M\}$ vérifiant : $(a, b) \equiv (\alpha, \beta) \mod M$. On note les fonctions caractéristiques $1_{(a+Mp^n\mathbb{Z}_p)\times(b+Mp^n\mathbb{Z}_p)}$ par $\psi_{a,b}^{(n)}$. Notons U l'ouvert $(\alpha + M\mathbb{Z}_p) \times (\beta + M\mathbb{Z}_p)$ de $\mathbb{Z}_p^2$. On définit une mesure $\mu \in \mathrm{H}^1(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_M}, \mathfrak{D}_0(U, \mathbb{Z}_p(1)))$ par la formule :

$$\int \psi_{a,b}^{(n)} \mu = \int_{(a+Mp^n\hat{\mathbb{Z}})\times(b+Mp^n\hat{\mathbb{Z}})} z_{u,\mathrm{Siegel}}^{(p)}.$$

4. Comme ∂_1 et ∂_2 se commutent, on peut prendre le sous-module fixé par ∂_2, ensuite prendre le quotient.

On a $z_{u,\mathrm{Eis,ét}}(k) = \frac{1}{(k-2)!}(a_p e_1 + b_p e_2)^{k-2} \otimes z^{(p)}_{u,\mathrm{Siegel}}$. Ceci implique que

$$z_{M,A} = \int \psi_{M,A} z_{u,\mathrm{Eis,ét}}(k) = \int_U \frac{1}{(k-2)!}(a_p e_1 + b_p e_2)^{k-2}\mu.$$

Soit Ψ une base du $\mathbb{Z}$-module des fonctions localement constantes sur U constituée de fonctions du type $\psi^{(n)}_{a,b}$, avec $n \in \mathbb{N}$ et (a,b) comme ci-dessus. On définit une distribution algébrique μ_Ψ sur U à valeurs dans $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}(\overline{\mathfrak{K}}^+)[u_q]$ avec $u_q = \log \tilde{q}$ par la formule : si $\psi^{(n)}_{a,b} \in \Psi$,

$$\int \psi^{(n)}_{a,b}\mu_\Psi = \log g_u(\tilde{q}, \tilde{q}^a_{Mp^n}\tilde{\zeta}^b_{Mp^n}),$$

où l'élément $g_u(\tilde{q}, \tilde{q}^a_{Mp^n}\tilde{\zeta}^b_{Mp^n})$ est obtenu en remplaçant les variables q_{Mp^n} et ζ_{Mp^n} de la fonction $g_{u,\frac{a}{Mp^n},\frac{b}{Mp^n}}$ par $\tilde{q}_{Mp^n}$ et $\tilde{\zeta}_{Mp^n}$ respectivement.

On identifie $\mathbb{Z}_p(1)$ au sous-module de $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ via l'isomorphisme de $\mathbb{Z}_p[\mathcal{G}_{\mathfrak{K}}]$-modules :

$$\log \circ [\cdot] : \mathbb{Z}_p[1] \to \mathbb{Z}_p t.$$

Lemme 4.11. *[8, lemme 5.10] Considérons l'application*

$$\mathrm{H}^1(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_M}, \mathfrak{D}_0(U, \mathbb{Z}_p(1))) \to \mathrm{H}^1(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_M}, \mathfrak{D}_0(U, t\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}})).$$

Alors μ est représenté par le 1-cocycle $\gamma \mapsto \mu_\Psi * (\gamma - 1)$, qui est l'inflation d'un 1-cocycle sur $P^{\mathrm{cycl}}_{\mathbb{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\mathfrak{K}_\infty/\mathfrak{K})$ à valeurs dans $\mathfrak{D}_0(U, t\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{K}^+_{Mp^\infty}))$.

4.4.3 Descente de $\mathfrak{K}_{Mp^\infty}$ à $\mathfrak{K}_M$

D'après ce qui précède, $z_{M,A}$ est la classe du 1-cocycle

$$\gamma \mapsto \int_U \frac{1}{(k-2)!}(a_p e_1 + b_p e_2)^{k-2}(\mu_\Psi * (\gamma - 1)),$$

qui est aussi la classe du 1-cocycle par "la trace de Tate normalisée" :

$$\gamma \mapsto \mathbf{R}_M\left(\int_U \frac{1}{(k-2)!}(a_p e_1 + b_p e_2)^{k-2}(\mu_\Psi * (\gamma - 1))\right).$$

Le lemme suivant se démontre par un calcul facile, qui est un analogue de [8, lemme 5.13].

Lemme 4.12. *Si $(a,b) \notin p\mathbb{Z}_p^2$, alors on a*

$$\mathbf{R}_M(\log(\theta(\tilde{q}, \tilde{q}^a_{Mp^n}\tilde{\zeta}^b_{Mp^n}))) = p^{-n}\log(\theta(\tilde{q}^{p^n}, \tilde{q}^a_M\tilde{\zeta}^b_M)).$$

Proposition 4.13. *Si on note*

$$\log^{(n),\gamma}_{a,b} = \log((u^2 - \langle u\rangle)\theta(\tilde{q}^{p^n}, \tilde{q}^a_M\tilde{\zeta}^b_M)) * (\gamma - 1),$$

alors $z_{M,A}$ est représentée par le 1-cocycle

$$\gamma \mapsto \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(k-2)!p^n} \sum (ae_1 + be_2)^{k-2} \log_{a,b}^{(n),\gamma},$$

la somme portant sur l'ensemble

$$U^{(n)} = \{(a,b) \in \{1, \cdots Mp^n\}^2 : a \equiv \alpha, b \equiv \beta \mod M\}.$$

Démonstration. $z_{M,A}$ est représentée par le 1-cocycle

$$\gamma \mapsto \mathbf{R}_M \left(\int_U \frac{1}{(k-2)!} (a_p e_1 + b_p e_2)^{k-2} (\mu_\Psi * (\gamma - 1)) \right).$$

Par la définition de l'intégration sur U, on a

$$\int_U \frac{1}{(k-2)!}(a_p e_1 + b_p e_2)^{k-2}(\mu_\Psi * (\gamma - 1)) = \lim_{n\to\infty} \sum_{(a,b)\in U^{(n)}} \frac{1}{(k-2)!}(ae_1 + be_2)^{k-2} \int \psi_{a,b}^{(n)} (\mu_\Psi * (\gamma - 1)).$$

Comme $\mathbf{R}_M$ commute avec l'action de $P_{\mathfrak{K}_M}$, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbf{R}_M \left(\int_U \frac{1}{(k-2)!} (a_p e_1 + b_p e_2)^{k-2} (\mu_\Psi * (\gamma - 1)) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{(a,b)\in U^{(n)}} \frac{1}{(k-2)!} (ae_1 + be_2)^{k-2} \mathbf{R}_M \left(\int \psi_{a,b}^{(n)} (\mu_\Psi * (\gamma - 1)) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{(a,b)\in U^{(n)}} \frac{1}{(k-2)!} (ae_1 + be_2)^{k-2} r_u \left(\mathbf{R}_M (\log \theta(\tilde{q}, \tilde{q}_{Mp^n}^a \tilde{\zeta}_{Mp^n}^b) * (\gamma - 1)) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{(a,b)\in U^{(n)}} \frac{1}{(k-2)!p^n} (ae_1 + be_2)^{k-2} \log_{a,b}^{(n),\gamma}.
\end{aligned} \tag{3}$$

□

4.4.4 Passage à l'algèbre de Lie

Comme le 1-cocycle $\gamma \mapsto \lim_{n\to\infty} p^{-n} \sum \frac{1}{(k-2)!}(ae_1 + be_2)^{k-2} \log_{a,b}^{(n),\gamma}$ est la limite de 1-cocycles analytiques à valeurs dans $t\mathfrak{K}_M^+ \otimes S_k$, on utilise les techniques différentielles pour calculer son image dans $\mathcal{K}_M^+$.

Si $f(x_1, x_2)$ est une fonction en deux variables, on note D_2 l'opérateur $x_2 \frac{d}{dx_2}$. Si $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{Z}$, on pose $f_{a,b}^{(n)} = f(\tilde{q}^{p^n}, \tilde{q}_M^a \tilde{\zeta}_M^b)$.

Lemme 4.14. *On note $\delta_{a,b}^{(1)} = \delta^{(1)}(\log_{a,b}^{(n),\gamma})$. On a*

$$\delta_{a,b}^{(1)} = \frac{at}{M} D_2 \log(r_u \theta_{a,b}^{(n)}).$$

Démonstration. Soit $f_{a,b}^{(n)}$ définie comme ci-dessus. Alors l'action de $(u,v) \in \mathrm{P}_m$ sur $f_{a,b}^{(n)}$ est

$$(u,v) f_{a,b}^{(n)} = f(\tilde{q}^{p^n}, \tilde{q}_M^a \tilde{\zeta}_M^b) + u\frac{at}{M} D_2 f_{a,b}^{(n)} + v\frac{bt}{M} D_2 f_{a,b}^{(n)} + O((u,v)^2);$$

donc l'action de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & u \\ 0 & e^v \end{smallmatrix}\right) - 1$ sur $f_{a,b}^{(n)}$ est donnée par la formule :

$$f_{a,b}^{(n)} * \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & u \\ 0 & e^v \end{smallmatrix}\right) - 1\right) = \frac{au+bv}{M} t D_2 f_{a,b}^{(n)} + O((u,v)^2). \tag{4}$$

On déduit de la définition de l'application $\delta^{(1)}$ que $\delta_{a,b}^{(1)} = \frac{at}{M} D_2 \log(r_u \theta_{a,b}^{(n)})$. □

Le corollaire suivant nous permet de terminer la démonstration de la proposition 4.9.

Corollaire 4.15. *On a*

$$\mathrm{res}_k \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(k-2)! p^n} \sum (ae_1 + be_2)^{k-2} \delta_{a,b}^{(1)} \right) = \frac{1}{(k-2)!} M^{k-2} F_{u,\frac{\alpha}{M},\frac{\beta}{M}}^{(k)}. \tag{5}$$

Démonstration. Par la définition de l'application res_k (cf. recette 4.8), on a

$$\mathrm{res}_k \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(k-2)! p^n} \sum_{\substack{a\equiv\alpha[M] \\ b\equiv\beta[M] \\ 1\le a,b\le Mp^n}} (ae_1 + be_2)^{k-2} \delta_{a,b}^{(1)} \right) = \lim_{n\to\infty} \sum \frac{1}{(k-2)! p^n} \frac{a^{k-1}}{M} D_2 \log(r_u \theta_{a,b}^{(n)}).$$

Comme $\partial_z E_{u,\alpha,\beta}^{(k)} = E_{u,\alpha,\beta}^{k+1}$ pour $k \ge 0$, on a

$$D_2 \log(r_u \theta_{a,b}^{(n)}) = E_{u,1}(q^{p^n}, q_M^a \zeta_M^b) = E_{u,1}(q^{p^n}, q_M^a \zeta_M^\beta).$$

Ceci implique que

$$\mathrm{res}_k \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(k-2)! p^n} \sum_{\substack{a\equiv\alpha[M] \\ b\equiv\beta[M] \\ 1\le a,b\le Mp^n}} (ae_1 + be_2)^{k-2} \delta_{a,b}^{(1)} \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{a\equiv\alpha[M] \\ 1\le a\le Mp^n}} \frac{1}{(k-2)!} \frac{a^{k-1}}{M} E_{u,1}(q^{p^n}, q_M^a \zeta_M^\beta).$$

Par ailleurs, on a la formule (cf. [8, lemme 5.18]) suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{a\equiv\alpha[M] \\ 1\le a\le Mp^n}} a^r E_{u,1}(q^{p^n}, q_M^a \zeta_M^\beta) = M^r F_{u,\alpha/M,\beta/M}^{(r+1)}.$$

Ceci permet de conclure le corollaire.

□

Références

[1] K. Bannai, G. Kings, p-adic elliptic polylogarithm, p-adic Eisenstein series and Katz measure. American J. Math. 132, no. 6 (2010), 1609-1654.

[2] P. Colmez, La Conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer p-adique, *Astérisque* **294** (2004).

[3] K. Kato, p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms, Astérisque **295** (2004).

[4] G. Kings, The Tamagawa number conjecture for CM elliptic curves, Invent. Math. 143 (2001), no. 3, 571–627.

[5] G. Kings, Eisenstein classes, elliptic Soulé elements and the l-adic elliptic polylogarithm, http ://arxiv.org/abs/1304.7161

[6] J. Neukirch, A.Schmidt, K.Wingberg, *Cohomology of number fields*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **323**, Springer-Verlag, Berlin (2000)

[7] René Scheider : Cours "The de Rham realisation of the polylogarithm" à Padoue 2013.

[8] S. Wang, Le système d'Euler de Kato, à paraître dans Journal de Théorie des nombres de Bordeaux Tome 25 n° 3 (2013) p. 697-778.

[9] S. Wang, Le système d'Euler de Kato en famille (I), à paraître dans Commentarii Mathematici Helvetici.

[10] A. Weil, Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker, Classics in Mathematics.

Francesco Lemma,
Université Paris 7 - Denis Diderot
Institut de Mathématiques de Jussieu - Paris Rive Gauche
UMR7586
Bâtiment Sophie Germain
Case 7012
75205 PARIS Cedex 13
France
Courrier électronique : lemma@math.univ-paris-diderot.fr

Shanwen Wang
Institut de mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France
Courrier électronique : wetiron1984@gmail.com