

SUR LA CORRESPONDANCE DE SIMPSON p -ADIQUE. 0 : UNE VUE D'ENSEMBLE

AHMED ABBES ET MICHEL GROS

À la mémoire d'Osamu Hyodo

RÉSUMÉ. Nous développons une nouvelle approche pour la correspondance de Simpson p -adique, intimement liée à l'approche originelle de Faltings, mais aussi inspirée du travail d'Ogus et Vologodsky sur un analogue en caractéristique $p > 0$.

We develop a new approach for the p -adic Simpson correspondence, closely related to the original approach of Faltings, but also inspired by the work of Ogus and Vologodsky on an analogue in characteristic $p > 0$.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	1
2. Notations et conventions	4
3. Petites représentations généralisées	6
4. Le torseur des déformations	8
5. Topos annelé de Faltings	14
6. Modules de Dolbeault	20
Références	27

1. INTRODUCTION

1.1. En 1965, généralisant et précisant un résultat de Weil, Narasimhan et Seshadri [12] établissaient une correspondance bijective entre l'ensemble des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles du groupe fondamental d'une surface de Riemann compacte X de genre ≥ 2 , et l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels stables de degré 0 sur X . La correspondance fut ensuite étendue pour toute variété complexe projective et lisse par Donaldson [6]. L'analogue pour les représentations linéaires quelconques est dû à Simpson ; pour obtenir une correspondance du même type que celle de Narasimhan et Seshadri, on a besoin d'ajouter au fibré vectoriel une structure supplémentaire. C'est la notion de fibré de Higgs qui fut d'abord introduite par Hitchin pour les courbes algébriques. Si X est un schéma lisse séparé et de type fini sur un corps K , un *fibré de Higgs* sur X est un couple (M, θ) formé d'un $\mathcal{O}_X$ -module localement libre de type fini M et d'un morphisme $\mathcal{O}_X$ -linéaire $\theta: M \rightarrow M \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/K}^1$ tel que $\theta \wedge \theta = 0$; nous aurons besoin plus loin d'une variante plus générale (2.3). Le résultat principal de Simpson [14, 15, 16, 17] établit une équivalence de catégories entre la catégorie des représentations linéaires de dimension finie (à valeurs complexes) du groupe fondamental d'une variété complexe projective et lisse et celle des fibrés de Higgs semi-stables de classes de Chern nulles (cf. [11]).

1.2. Les résultats de Simpson et les développements qu'ils ont suscités ont amené depuis quelques années la recherche d'un analogue p -adique. Les premiers exemples d'une telle construction (qui n'utilisait pas encore la terminologie de fibrés de Higgs) se trouvent rétrospectivement chez Hyodo [10] qui avait traité le cas conceptuellement important des variations de structures de Hodge p -adiques, baptisées *systèmes locaux de Hodge-Tate*. L'approche la plus avancée au stade actuel est due à Faltings [9]. Elle généralise des résultats antérieurs de Tate, Sen et Fontaine, et repose sur sa théorie des extensions presque-étales [8]. Elle s'inscrit dans le prolongement de ses travaux en théorie de Hodge p -adique, en particulier, ceux qui établissent l'existence de décompositions de Hodge-Tate [7]. Achievée, la *correspondance de Simpson p -adique* devrait ainsi naturellement fournir les meilleurs énoncés du type Hodge-Tate en théorie de Hodge p -adique. Mais au stade actuel, la construction de Faltings n'apparaît satisfaisante que pour les courbes, et même dans ce cas, de nombreuses questions, fondamentales, demeurent ouvertes.

1.3. Nous développons dans ce travail [1, 2, 3] une nouvelle approche de cette correspondance de Simpson p -adique, intimement liée à celle de Faltings, et inspirée du travail d'Ogus et Vologodsky [13] sur un analogue en caractéristique p de la correspondance de Simpson complexe. Le besoin de reprendre et de développer la construction de Faltings s'est fait sentir au regard, d'une part du nombre de résultats esquissés dans un article assez court et extrêmement dense [9], et d'autre part des conditions assez restrictives qui limitent aujourd'hui son champ d'applications. En effet, les systèmes locaux de Hodge-Tate les plus simples, comme les images directes supérieures du faisceau constant par un morphisme propre et lisse au-dessus d'une base de dimension ≥ 2 , rentrent rarement dans le cadre de la construction de Faltings. Notre approche les inclus. Plus précisément, la correspondance que nous développons généralise simultanément celle de Faltings et la construction de Hyodo. Signalons aussi que Tsuji a développé une autre approche pour la correspondance de Simpson p -adique [18]. Par ailleurs, Deninger et Werner [5] ont développé un analogue partiel de la théorie de Narasimhan et Seshadri pour les courbes p -adiques, qui correspond aux fibrés de Higgs à champ nul dans la correspondance de Simpson p -adique.

1.4. Soient K un corps de valuation discrète complet de caractéristique 0, à corps résiduel parfait de caractéristique $p > 0$, $\bar{K}$ une clôture algébrique de K , C le complété de $\bar{K}$ pour la valeur absolue induite par la valuation de K . Soient X un K -schéma lisse, géométriquement intègre, séparé et de type fini, $\bar{x}$ un point géométrique de $X_{\bar{K}}$. On cherche à construire un foncteur de la catégorie des représentations p -adiques du groupe fondamental géométrique $\pi_1(X_{\bar{K}}, \bar{x})$ (i.e., les $\mathbb{Q}_p$ -représentations linéaires continues de dimension finie de $\pi_1(X_{\bar{K}}, \bar{x})$) dans la catégorie des fibrés de Higgs sur X_C (ou plutôt sur l'espace rigide associé X_C^{an}). Suivant la stratégie de Faltings, qui n'est que partiellement achevée au stade actuel, ce foncteur devrait s'étendre à une catégorie strictement plus large que celle des représentations p -adiques de $\pi_1(X_{\bar{K}}, \bar{x})$, appelée catégorie des *représentations généralisées* de $\pi_1(X_{\bar{K}}, \bar{x})$. Il serait alors une *équivalence de catégories* entre cette nouvelle catégorie et la catégorie des fibrés de Higgs. La motivation principale du présent travail est la construction d'une telle équivalence de catégories. Lorsque X est une courbe propre et lisse sur K , Faltings montre que les fibrés de Higgs associés aux "vraies" représentations p -adiques de $\pi_1(X_{\bar{K}}, \bar{x})$ sont semi-stables de pente nulle, et formule l'espoir que tous les fibrés de Higgs semi-stables de pente nulle s'obtiennent ainsi. Cet énoncé correspondrait à la partie difficile du résultat de Simpson dans le cas complexe.

1.5. La notion de représentation généralisée est due à Faltings. Ce sont, en termes simplifiés, des représentations *semi-linéaires* p -adiques continues de $\pi_1(X_{\bar{K}}, \bar{x})$ dans des modules sur un certain anneau p -adique muni d'une action continue de $\pi_1(X_{\bar{K}}, \bar{x})$. L'approche de Faltings dans [9] pour construire un foncteur $\mathcal{H}$ de la catégorie de ces représentations généralisées vers la catégorie des

fibrés de Higgs, comporte deux étapes. Il définit d'abord $\mathcal{H}$ pour les représentations généralisées qu'il qualifie de *petites*, une notion technique qui sera précisée un peu plus loin, mais qui ne semble pas de nature géométrique (comme par exemple la notion de Hodge-Tate). Cette première étape est achevée en toute dimension. Dans la seconde étape, réalisée seulement pour les courbes, il étend le foncteur $\mathcal{H}$ à toutes les représentations généralisées de $\pi_1(X_{\overline{K}}, \overline{x})$ par descente. En effet, toute représentation généralisée devient petite au-dessus d'un revêtement fini étale de $X_{\overline{K}}$. Notre nouvelle approche, valable en toute dimension, permet de définir directement le foncteur $\mathcal{H}$ sur une catégorie de représentations généralisées de $\pi_1(X_{\overline{K}}, \overline{x})$, baptisées représentations généralisées *de Dolbeault*, strictement plus large que la catégorie des petites représentations généralisées et contenant les représentations généralisées provenant de représentations de Hodge-Tate. Cette approche semble bien adaptée à la descente, et donne donc un fort espoir de pouvoir étendre la construction en dimensions supérieures au-delà des représentations de Dolbeault.

1.6. Nous procédons en deux étapes. Nous étudions d'abord dans [1] le cas d'un schéma affine d'un type particulier, aussi qualifié par Faltings de *petit*. Nous abordons ensuite dans [2] les aspects globaux de la théorie. La construction générale s'obtient à partir du cas affine par une technique de recollement recelant des difficultés inattendues. Nous utilisons pour ce faire le *topos de Faltings*, une variante fibrée de la notion de *topos co-évanescant* de Deligne que nous développons dans [3].

1.7. Cette introduction présente, dans une situation géométrique simplifiée pour la clarté de l'exposition, un résumé détaillé des grandes étapes conduisant à nos principaux résultats. Passons brièvement en revue son contenu. On commence dans § 3 par une courte digression sur les petites représentations généralisées dans le cas affine qui serviront comme intermédiaire pour l'étude des représentations de Dolbeault. La section 4 résume la première partie [1]. On introduit la notion de représentation généralisée de Dolbeault pour un petit schéma affine et la notion compagnon de module de Higgs soluble, puis on construit une équivalence naturelle entre ces deux catégories. On développe en fait deux variantes, une entière et une rationnelle plus subtile et plus difficile. On fait aussi le lien avec la théorie de Hyodo [10]. La seconde partie [2] est résumée dans les sections 5 et 6. Après une brève introduction au topos annelé de Faltings dans § 5, on introduit l'*algèbre de Higgs-Tate* (5.13), principale nouveauté de notre approche par rapport à celle de Faltings. La notion de *module de Dolbeault* qui globalise celle de représentation généralisée de Dolbeault, et la notion compagnon de *fibré de Higgs soluble* sont définies dans 6.13. Notre principal résultat (6.18) est l'équivalence de ces deux catégories. Nous construisons en fait deux équivalences de catégories explicites et quasi-inverses l'une de l'autre. La preuve de ce résultat nécessite des énoncés d'acyclicité de l'algèbre de Higgs-Tate qu'on trouvera dans 6.5 et 6.8. Ces énoncés permettent également de montrer la compatibilité de cette équivalence au passage à la cohomologie (6.19). Nous étudions la fonctorialité de la correspondance par localisation étale (6.21) et nous montrons le caractère local pour la topologie de Zariski de X de la propriété Dolbeault (6.23). Nous terminons en construisant des exemples de modules de Dolbeault. On s'attend en effet à ce que les fibrés de Higgs petits (6.24) soient solubles et correspondent donc à des modules de Dolbeault. Nous démontrons (6.26) que c'est bien le cas si X est affine du type considéré dans la première partie [1]. Nous démontrons aussi (6.27) que c'est le cas en général si les modules de Dolbeault forment un champ.

Le lecteur trouvera au début des articles [1, 2] une description détaillée de leurs structures. L'article [3], étant d'un intérêt indépendant, a sa propre introduction.

Remerciements. Ce travail n'aurait évidemment pu voir le jour sans les travaux de G. Faltings, en premier lieu celui sur la correspondance de Simpson p -adique [9]. Nous lui exprimons notre profonde reconnaissance. La genèse de ce travail est immédiatement postérieure à un groupe de

travail tenu à Rennes en 2008-09 sur son article [9]. Nous avons pu bénéficier à cette occasion du texte de l'exposé d'O. Brinon [4] et du travail de T. Tsuji [18] présentant sa propre approche de la correspondance de Simpson p -adique. Ces deux textes nous ont été extrêmement utiles et nous sommes reconnaissants à leurs auteurs de les avoir spontanément mis à notre disposition. Nous remercions aussi O. Brinon, G. Faltings et T. Tsuji pour tous les échanges que nous avons eus avec eux sur des questions relatives à ce travail, et A. Ogus pour les discussions éclairantes que nous avons eues avec lui sur son travail avec V. Vologodsky [13]. Le premier auteur (A.A.) remercie le Centre Émile Borel, l'Institut des Hautes Études Scientifiques et l'Université de Tokyo pour leur hospitalité. Il remercie également les auditeurs d'un cours qu'il a donné sur ce sujet à l'Université de Tokyo durant l'automne 2010 et l'hiver 2011 dont les questions et remarques ont été précieuses pour mettre au point ce travail. Le second auteur (M.G.) remercie l'Institut des Hautes Études Scientifiques et l'Université de Tokyo pour leur hospitalité. Enfin, nous remercions les participants de l'école d'été *Higgs bundles on p -adic curves and Representation theory* qui s'est tenue à Mainz en septembre 2012 et au cours de laquelle nos principaux résultats ont été exposés pour leurs remarques et leur intérêt stimulant. Ce travail a bénéficié du soutien du programme ANR Théorie de Hodge p -adique et Développements (ThéHopaD) ANR-11-BS01-005.

2. NOTATIONS ET CONVENTIONS

Tous les anneaux considérés dans cet article possèdent un élément unité; les homomorphismes d'anneaux sont toujours supposés transformer l'élément unité en l'élément unité. Nous considérons surtout des anneaux commutatifs, et lorsque nous parlons d'anneau sans préciser, il est sous-entendu qu'il s'agit d'un anneau commutatif; en particulier, il est sous-entendu, lorsque nous parlons d'un topos annelé (X, A) sans préciser, que A est commutatif.

2.1. Dans cette introduction, K désigne un corps de valuation discrète complet de caractéristique 0, à corps résiduel parfait k de caractéristique $p > 0$, $\mathcal{O}_K$ l'anneau de valuation de K , $\overline{K}$ une clôture algébrique de K , $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ la clôture intégrale de $\mathcal{O}_K$ dans $\overline{K}$, $\mathcal{O}_C$ le séparé complété p -adique de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ et C le corps des fractions de $\mathcal{O}_C$. À partir de § 5, on supposera k algébriquement clos. On pose $S = \text{Spec}(\mathcal{O}_K)$, $\overline{S} = \text{Spec}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ et $\check{S} = \text{Spec}(\mathcal{O}_C)$. On note s (resp. η , resp. $\bar{\eta}$) le point fermé de S (resp. générique de S , resp. générique de $\overline{S}$). Pour tout entier $n \geq 1$ et tout S -schéma X , on pose $S_n = \text{Spec}(\mathcal{O}_K/p^n \mathcal{O}_K)$,

$$(2.1.1) \quad X_n = X \times_S S_n, \quad \overline{X} = X \times_S \overline{S} \quad \text{et} \quad \check{X} = X \times_S \check{S}.$$

Pour tout groupe abélien M , on note $\widehat{M}$ son séparé complété p -adique.

2.2. Soient G un groupe profini, A un anneau topologique muni d'une action continue de G par des homomorphismes d'anneaux. Une A -représentation de G est la donnée d'un A -module M et d'une action A -semi-linéaire de G sur M , i.e., telle que pour tous $g \in G$, $a \in A$ et $m \in M$, on ait $g(am) = g(a)g(m)$. On dit que la A -représentation est *continue* si M est un A -module topologique et si l'action de G sur M est continue. Soient M, N deux A -représentations (resp. deux A -représentations continues) de G . Un morphisme de M dans N est la donnée d'un morphisme A -linéaire et G -équivariant (resp. A -linéaire, continu et G -équivariant) de M dans N .

2.3. Soit (X, A) un topos annelé, E un A -module. Un A -module de Higgs à coefficients dans E est un couple (M, θ) formé d'un A -module M et d'un morphisme A -linéaire $\theta: M \rightarrow M \otimes_A E$ tel que $\theta \wedge \theta = 0$ (cf. [1] 2.8). Suivant Simpson ([15] page 24), on appelle complexe de Dolbeault de (M, θ) et l'on note $\mathbb{K}^\bullet(M, \theta)$ le complexe de cochaînes de A -modules

$$(2.3.1) \quad M \rightarrow M \otimes_A E \rightarrow M \otimes_A \wedge^2 E \dots$$

déduit de θ (cf. [1] 2.8.2).

2.4. Soient (X, A) un topos annelé, B une A -algèbre, M un B -module, $\lambda \in \Gamma(X, A)$. Une λ -connexion sur M relativement à l'extension B/A est la donnée d'un morphisme A -linéaire

$$(2.4.1) \quad \nabla: M \rightarrow \Omega_{B/A}^1 \otimes_B M$$

tel que pour toutes sections locales x de B et s de M , on ait

$$(2.4.2) \quad \nabla(xs) = \lambda d(x) \otimes s + x \nabla(s).$$

Elle est *intégrable* si $\nabla \circ \nabla = 0$ (cf. [1] 2.10). On omettra l'extension B/A de la terminologie lorsqu'il n'y a aucun risque de confusion.

Soient (M, ∇) , (M', ∇') deux modules à λ -connexions. Un morphisme de (M, ∇) dans (M', ∇') est la donnée d'un morphisme B -linéaire $u: M \rightarrow M'$ tel que $(\text{id} \otimes u) \circ \nabla = \nabla' \circ u$.

Les 1-connexions sont classiquement appelées *connexions*. Les 0-connexions intégrables sont les B -champs de Higgs à coefficients dans $\Omega_{B/A}^1$.

Remarque 2.5. Soient (X, A) un topos annelé, B une A -algèbre, $\lambda \in \Gamma(X, A)$, (M, ∇) un module à λ -connexion relativement à l'extension B/A . Supposons qu'il existe un A -module E et un isomorphisme B -linéaire $\gamma: E \otimes_A B \xrightarrow{\sim} \Omega_{B/A}^1$ tels que pour toute section locale ω de E , on ait $d(\gamma(\omega \otimes 1)) = 0$. Pour que la λ -connexion ∇ soit intégrable, il faut et il suffit que le morphisme $\theta: M \rightarrow E \otimes_A M$ induit par ∇ et γ , soit un A -champ de Higgs sur M à coefficients dans E (cf. [1] 2.12).

2.6. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie additive, on désigne par $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ et l'on appelle *catégorie des objets de $\mathcal{C}$ à isogénie près*, la catégorie ayant mêmes objets que $\mathcal{C}$, et telle que l'ensemble des flèches entre deux objets soit donné par

$$(2.6.1) \quad \text{Hom}_{\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}}(E, F) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(E, F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

La catégorie $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ n'est autre que la catégorie localisée de $\mathcal{C}$ par rapport au système multiplicatif des *isogénies* de $\mathcal{C}$ (cf. [2] 5.1). On désigne par

$$(2.6.2) \quad \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{Q}}, \quad M \mapsto M_{\mathbb{Q}}$$

le foncteur de localisation.

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie abélienne, la catégorie $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ est abélienne et le foncteur de localisation (2.6.2) est exact. En fait, $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ s'identifie canoniquement à la catégorie quotient de $\mathcal{C}$ par la sous-catégorie épaisse des objets d'exposant fini ([2] 5.1.4).

2.7. Soit (X, A) un topos annelé. On désigne par $\mathbf{Mod}(A)$ la catégorie des A -modules de X et par $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(A)$, au lieu de $\mathbf{Mod}(A)_{\mathbb{Q}}$, la catégorie des A -modules à isogénie près (2.6). Le produit tensoriel des A -modules induit un bifoncteur

$$(2.7.1) \quad \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(A) \times \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(A) \rightarrow \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(A), \quad (M, N) \mapsto M \otimes_{A_{\mathbb{Q}}} N,$$

faisant de $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(A)$ une catégorie monoïdale symétrique, ayant $A_{\mathbb{Q}}$ pour objet unité. Les objets de $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(A)$ seront aussi appelés des $A_{\mathbb{Q}}$ -modules. Cette terminologie se justifie en considérant $A_{\mathbb{Q}}$ comme un monoïde de $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(A)$.

2.8. Soient (X, A) un topos annelé, E un A -module. On appelle *A-isogénie de Higgs à coefficients dans E* la donnée d'un quadruplet

$$(2.8.1) \quad (M, N, u: M \rightarrow N, \theta: M \rightarrow N \otimes_A E)$$

formé de deux A -modules M et N et de deux morphismes A -linéaires u et θ vérifiant la propriété suivante : il existe un entier $n \neq 0$ et un morphisme A -linéaire $v: N \rightarrow M$ tels que $v \circ u = n \cdot \text{id}_M$, $u \circ v = n \cdot \text{id}_N$ et que $(M, (v \otimes \text{id}_E) \circ \theta)$ et $(N, \theta \circ v)$ soient des A -modules de Higgs à coefficients dans E (2.3). On notera que u induit une isogénie de modules de Higgs de $(M, (v \otimes \text{id}_E) \circ \theta)$ dans $(N, \theta \circ v)$ ([3] 5.1), d'où la terminologie. Soient (M, N, u, θ) , (M', N', u', θ') deux A -isogénies de Higgs à coefficients dans E . Un morphisme de (M, N, u, θ) dans (M', N', u', θ') est la donnée de deux morphismes A -linéaires $\alpha: M \rightarrow M'$ et $\beta: N \rightarrow N'$ tels que $\beta \circ u = u' \circ \alpha$ et $(\beta \otimes \text{id}_E) \circ \theta = \theta' \circ \alpha$. On désigne par $\mathbf{IH}(A, E)$ la catégorie des A -isogénies de Higgs à coefficients dans E . C'est une catégorie additive. On note $\mathbf{IH}_{\mathbb{Q}}(A, E)$ la catégorie des objets de $\mathbf{IH}(A, E)$ à isogénie près.

2.9. Soient (X, A) un topos annelé, B une A -algèbre, $\lambda \in \Gamma(X, A)$. On appelle *λ -isoconnexion relativement à l'extension B/A* (ou simplement *λ -isoconnexion* lorsqu'il n'y a aucun risque de confusion) la donnée d'un quadruplet

$$(2.9.1) \quad (M, N, u: M \rightarrow N, \nabla: M \rightarrow \Omega_{B/A}^1 \otimes_B N)$$

où M et N sont des B -modules, u est une isogénie de B -modules ([2] 5.1) et ∇ est un morphisme A -linéaire tel que pour toutes sections locales x de B et t de M , on ait

$$(2.9.2) \quad \nabla(xt) = \lambda d(x) \otimes u(t) + x \nabla(t).$$

Pour tout morphisme B -linéaire $v: N \rightarrow M$ pour lequel il existe un entier n tels que $u \circ v = n \cdot \text{id}_N$ et $v \circ u = n \cdot \text{id}_M$, les couples $(M, (\text{id} \otimes v) \circ \nabla)$ et $(N, \nabla \circ v)$ sont des modules à $(n\lambda)$ -connexions (2.2), et u est un morphisme de $(M, (\text{id} \otimes v) \circ \nabla)$ dans $(N, \nabla \circ v)$. On dit que la λ -isoconnexion (M, N, u, ∇) est *intégrable* s'il existe un morphisme B -linéaire $v: N \rightarrow M$ et un entier $n \neq 0$ tels que $u \circ v = n \cdot \text{id}_N$, $v \circ u = n \cdot \text{id}_M$ et que les $(n\lambda)$ -connexions $(\text{id} \otimes v) \circ \nabla$ sur M et $\nabla \circ v$ sur N soient intégrables.

Soient (M, N, u, ∇) , (M', N', u', ∇') deux λ -isoconnexions. Un morphisme de (M, N, u, ∇) dans (M', N', u', ∇') est la donnée de deux morphismes B -linéaires $\alpha: M \rightarrow M'$ et $\beta: N \rightarrow N'$ tels que $\beta \circ u = u' \circ \alpha$ et $(\text{id} \otimes \beta) \circ \nabla = \nabla' \circ \alpha$.

3. PETITES REPRÉSENTATIONS GÉNÉRALISÉES

3.1. Dans cette section, on se donne un S -schéma affine lisse $X = \text{Spec}(R)$ tel que $X_{\overline{\eta}}$ soit connexe et que X_s soit non-vide, un entier $d \geq 1$ et un S -morphisme étale

$$(3.1.1) \quad X \rightarrow \mathbb{G}_{m,S}^d = \text{Spec}(\mathcal{O}_K[T_1^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}]).$$

C'est l'exemple type de petit schéma affine de Faltings. L'hypothèse de connexité de $X_{\overline{\eta}}$ n'est pas nécessaire mais permet de simplifier la présentation. Le lecteur reconnaîtra la nature logarithmique de la donnée (3.1.1). D'ailleurs, suivant [9], nous considérons dans ce travail une situation logarithmique lisse plus générale, qui s'avère nécessaire même pour définir la correspondance de Simpson p -adique pour une courbe propre et lisse sur S . En effet, dans la seconde étape de descente, nous serons amenés à considérer des revêtements finis de sa fibre générique, ce qui nous ramène au cas d'un schéma semi-stable sur S . Toutefois, pour simplifier la présentation, nous nous limitons dans cette introduction au cas lisse au sens usuel (cf. [1] 6.2 pour le cas affine logarithmique lisse). On note t_i l'image de T_i dans R ($1 \leq i \leq d$) et on pose

$$(3.1.2) \quad R_1 = R \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{\overline{K}}.$$

3.2. Soient $\bar{y}$ un point géométrique de $X_{\bar{y}}$, $(V_i)_{i \in I}$ un revêtement universel de $X_{\bar{y}}$ en $\bar{y}$. Notons Δ le groupe fondamental géométrique $\pi_1(X_{\bar{y}}, \bar{y})$. Pour tout $i \in I$, on désigne par $\bar{X}_i = \text{Spec}(R_i)$ la clôture intégrale de $\bar{X}$ dans V_i et on pose

$$(3.2.1) \quad \bar{R} = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ i \in I}} R_i.$$

Dans ce contexte, les *représentations généralisées* de Δ sont les $\widehat{\bar{R}}$ -représentations continues de Δ à valeurs dans des $\widehat{\bar{R}}$ -modules projectifs de type fini, munis de leurs topologies p -adiques (2.2). Une telle représentation M est dite *petite* si M est un $\widehat{\bar{R}}$ -module libre de type fini ayant une base formée d'éléments Δ -invariants modulo $p^{2\alpha}M$ pour un nombre rationnel $\alpha > \frac{1}{p-1}$. La principale vertu des petites représentations généralisées de Δ est leur bon comportement par descente pour certains quotients de Δ isomorphes à $\mathbb{Z}_p(1)^d$. Fixons un tel quotient Δ_∞ en choisissant, pour tout $1 \leq i \leq d$, un système compatible $(t_i^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de racines d'ordre p^n de t_i dans $\bar{R}$. On définit de même la notion de $\widehat{\bar{R}}_1$ -représentation petite de Δ_∞ . Le foncteur

$$(3.2.2) \quad M \mapsto M \otimes_{\widehat{\bar{R}}_1} \widehat{\bar{R}}$$

de la catégorie des petites $\widehat{\bar{R}}_1$ -représentations de Δ_∞ dans celle des petites $\widehat{\bar{R}}$ -représentations de Δ est alors une équivalence de catégories (cf. [1] 13.11). C'est une conséquence du profond théorème de pureté de Faltings (cf. [1] 6.15; [8] § 2b).

3.3. Si (M, φ) est une petite $\widehat{\bar{R}}_1$ -représentation de Δ_∞ , on peut considérer le logarithme de φ qui est un homomorphisme de Δ_∞ dans $\text{End}_{\widehat{\bar{R}}_1}(M)$. Fixant une $\mathbb{Z}_p$ -base ζ de $\mathbb{Z}_p(1)$, ce dernier s'écrit de manière unique sous la forme

$$(3.3.1) \quad \log(\varphi) = \sum_{i=1}^d \theta_i \otimes \chi_i \otimes \zeta^{-1},$$

où ζ^{-1} est la base duale de $\mathbb{Z}_p(-1)$, χ_i est le caractère de Δ_∞ à valeurs dans $\mathbb{Z}_p(1)$ qui donne son action sur le système $(t_i^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ et θ_i est un endomorphisme $\widehat{\bar{R}}_1$ -linéaire de M . Il est immédiat de voir que

$$(3.3.2) \quad \theta = \sum_{i=1}^d \theta_i \otimes d \log(t_i) \otimes \zeta^{-1}$$

est un $\widehat{\bar{R}}_1$ -champ de Higgs sur M à coefficients dans $\Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{\bar{R}}_1(-1)$ (2.3) (nous dirons pour simplifier à coefficients dans $\Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1(-1)$). La correspondance $(M, \varphi) \mapsto (M, \theta)$ ainsi définie est en fait une *équivalence de catégories* entre la catégorie des petites $\widehat{\bar{R}}_1$ -représentations de Δ_∞ et celle des *petits* $\widehat{\bar{R}}_1$ -modules de Higgs à coefficients dans $\Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1(-1)$ (c'est-à-dire, la catégorie des $\widehat{\bar{R}}_1$ -modules de Higgs à coefficients dans $\Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1(-1)$ dont le $\widehat{\bar{R}}_1$ -module sous-jacent est libre de type fini et dont le champ de Higgs est nul modulo $p^{2\alpha}$ pour un entier $\alpha > \frac{1}{p-1}$). Combinée avec l'énoncé précédent de descente (3.2.2), on obtient une équivalence entre la catégorie des petites $\widehat{\bar{R}}$ -représentations de Δ et celle des *petits* $\widehat{\bar{R}}_1$ -modules de Higgs à coefficients dans $\Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1(-1)$. L'inconvénient de cette construction est sa dépendance en les $(t_i^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ ($1 \leq i \leq d$), qui exclut toute globalisation. Pour remédier à ce défaut, Faltings propose une autre définition, équivalente,

mais dépendante d'un autre choix qui se globalise facilement. Notre approche, qui fait l'objet de la suite de cette introduction, est inspirée de cette construction.

4. LE TORSEUR DES DÉFORMATIONS

4.1. Dans cette section, on se donne un S -schéma affine lisse $X = \text{Spec}(R)$ tel que $X_{\bar{\eta}}$ soit connexe, que X_s soit non-vide, et qu'il existe un entier $d \geq 1$ et un S -morphisme étale $X \rightarrow \mathbb{G}_{m,S}^d$ (mais on ne fixe pas un tel morphisme). On se donne aussi un point géométrique $\bar{y}$ de $X_{\bar{\eta}}$ et un revêtement universel $(V_i)_{i \in I}$ de $X_{\bar{\eta}}$ en $\bar{y}$, et on reprend les notations de 3.2 : $\Delta = \pi_1(X_{\bar{\eta}}, \bar{y})$, $R_1 = R \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{\bar{K}}$ et $\bar{R}$ (3.2.1).

4.2. Rappelons que Fontaine associe fonctoriellement à toute $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbre A l'anneau

$$(4.2.1) \quad \mathcal{R}_A = \varprojlim_{x \mapsto x^p} A/pA,$$

et un homomorphisme θ de l'anneau $W(\mathcal{R}_A)$ des vecteurs de Witt de $\mathcal{R}_A$ dans le séparé complété p -adique $\hat{A}$ de A (cf. [1] 9.3). On pose

$$(4.2.2) \quad \mathcal{A}_2(A) = W(\mathcal{R}_A) / \ker(\theta)^2$$

et on note encore $\theta : \mathcal{A}_2(\mathcal{R}_A) \rightarrow \hat{A}$ l'homomorphisme induit par θ .

Dans la suite de cet article, on fixe une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ telle que $p_0 = p$ et $p_{n+1}^p = p_n$ pour tout $n \geq 0$. On désigne par $\underline{p}$ l'élément de $\mathcal{R}_{\mathcal{O}_{\bar{K}}}$ induit par la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on pose

$$(4.2.3) \quad \xi = [\underline{p}] - p \in W(\mathcal{R}_{\mathcal{O}_{\bar{K}}}),$$

où $[\]$ est le représentant multiplicatif. La suite

$$(4.2.4) \quad 0 \longrightarrow W(\mathcal{R}_{\mathcal{O}_{\bar{K}}}) \xrightarrow{\cdot \xi} W(\mathcal{R}_{\mathcal{O}_{\bar{K}}}) \xrightarrow{\theta} \mathcal{O}_C \longrightarrow 0$$

est exacte ([1] 9.5). Elle induit une suite exacte

$$(4.2.5) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_C \xrightarrow{\cdot \xi} \mathcal{A}_2(\mathcal{O}_{\bar{K}}) \xrightarrow{\theta} \mathcal{O}_C \longrightarrow 0,$$

où on a encore noté $\cdot \xi$ le morphisme déduit de la multiplication par ξ dans $\mathcal{A}_2(\mathcal{O}_{\bar{K}})$. L'idéal $\ker(\theta)$ de $\mathcal{A}_2(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ est de carré nul. C'est un $\mathcal{O}_C$ -module libre de base ξ . Il sera noté $\xi \mathcal{O}_C$. On observera que contrairement à ξ , ce module ne dépend pas du choix de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On note $\xi^{-1} \mathcal{O}_C$ le $\mathcal{O}_C$ -module dual de $\xi \mathcal{O}_C$. Pour tout $\mathcal{O}_C$ -module M , on désigne les $\mathcal{O}_C$ -modules $M \otimes_{\mathcal{O}_C} (\xi \mathcal{O}_C)$ et $M \otimes_{\mathcal{O}_C} (\xi^{-1} \mathcal{O}_C)$ simplement par ξM et $\xi^{-1} M$, respectivement.

De même, on a une suite exacte ([1] 8.11)

$$(4.2.6) \quad 0 \longrightarrow \hat{\bar{R}} \xrightarrow{\cdot \xi} \mathcal{A}_2(\bar{R}) \xrightarrow{\theta} \hat{\bar{R}} \longrightarrow 0.$$

L'idéal $\ker(\theta)$ de $\mathcal{A}_2(\bar{R})$ est de carré nul. C'est un $\hat{\bar{R}}$ -module libre de base ξ , canoniquement isomorphe à $\hat{\xi} \hat{\bar{R}}$. Le groupe Δ agit par functorialité sur $\mathcal{A}_2(\bar{R})$.

Posons $\mathcal{A}_2(\bar{S}) = \text{Spec}(\mathcal{A}_2(\mathcal{O}_{\bar{K}}))$, $Y = \text{Spec}(\bar{R})$, $\hat{Y} = \text{Spec}(\hat{\bar{R}})$ et $\mathcal{A}_2(Y) = \text{Spec}(\mathcal{A}_2(\bar{R}))$.

4.3. On se donne dans la suite une $\mathcal{A}_2(\bar{S})$ -déformation lisse $\tilde{X}$ de $\check{X}$, c'est-à-dire, un $\mathcal{A}_2(\bar{S})$ -schéma lisse $\tilde{X}$ qui s'insère dans un diagramme cartésien

$$(4.3.1) \quad \begin{array}{ccc} \check{X} & \longrightarrow & \tilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \check{S} & \longrightarrow & \mathcal{A}_2(\bar{S}) \end{array}$$

Cette donnée supplémentaire remplace la donnée d'un S -morphisme étale $X \rightarrow \mathbb{G}_{m,S}^d$; d'ailleurs, un tel morphisme fournit une déformation.

On pose

$$(4.3.2) \quad \mathbf{T} = \mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(\Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}, \xi \widehat{R}).$$

On identifie le $\widehat{R}$ -module dual à $\xi^{-1}\Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}$ (4.2) et on note $\mathbf{T}$ le $\widehat{Y}$ -fibré vectoriel associé, autrement dit,

$$(4.3.3) \quad \mathbf{T} = \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}_{\widehat{R}}(\xi^{-1}\Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R})).$$

Soient U un ouvert de $\widehat{Y}$, $\tilde{U}$ l'ouvert de $\mathcal{A}_2(Y)$ défini par U . On désigne par $\mathcal{L}(U)$ l'ensemble des flèches pointillées qui complètent le diagramme

$$(4.3.4) \quad \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \tilde{U} \\ \downarrow & & \downarrow \text{ (pointillée) } \\ \check{X} & \longrightarrow & \tilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \check{S} & \longrightarrow & \mathcal{A}_2(\bar{S}) \end{array}$$

de façon à le laisser commutatif. Le foncteur $U \mapsto \mathcal{L}(U)$ est un T -torseur pour la topologie de Zariski de $\widehat{Y}$. On désigne par $\mathcal{F}$ le $\widehat{R}$ -module des fonctions affines sur $\mathcal{L}$ (cf. [1] 4.9). Celui-ci s'insère dans une suite exacte canonique ([1] (4.9.1))

$$(4.3.5) \quad 0 \rightarrow \widehat{R} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \xi^{-1}\Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R} \rightarrow 0.$$

Cette suite induit pour tout entier $n \geq 1$ une suite exacte

$$(4.3.6) \quad 0 \rightarrow \mathrm{Sym}_{\widehat{R}}^{n-1}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathrm{Sym}_{\widehat{R}}^n(\mathcal{F}) \rightarrow \mathrm{Sym}_{\widehat{R}}^n(\xi^{-1}\Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}) \rightarrow 0.$$

Les $\widehat{R}$ -modules $(\mathrm{Sym}_{\widehat{R}}^n(\mathcal{F}))_{n \in \mathbb{N}}$ forment donc un système inductif filtrant dont la limite inductive

$$(4.3.7) \quad \mathcal{C} = \varinjlim_{n \geq 0} \mathrm{Sym}_{\widehat{R}}^n(\mathcal{F})$$

est naturellement munie d'une structure de $\widehat{R}$ -algèbre. D'après ([1] 4.10), le $\widehat{Y}$ -schéma

$$(4.3.8) \quad \mathbf{L} = \mathrm{Spec}(\mathcal{C})$$

est naturellement un $\mathbf{T}$ -fibré principal homogène sur $\widehat{Y}$ qui représente canoniquement $\mathcal{L}$.

L'action naturelle de Δ sur le schéma $\mathcal{A}_2(Y)$ induit une action $\widehat{R}$ -semi-linéaire de Δ sur $\mathcal{F}$, telle que les morphismes de la suite (4.3.5) soient Δ -équivariants. On en déduit une action de

Δ sur $\mathcal{C}$ par des automorphismes d'anneaux, compatible avec son action sur $\widehat{R}$, que l'on appelle *action canonique*. Ces actions sont continues pour les topologies p -adiques ([1] 12.4). La $\widehat{R}$ -algèbre $\mathcal{C}$, munie de l'action canonique de Δ , est appelée *l'algèbre de Higgs-Tate* associée à $\widetilde{X}$. La $\widehat{R}$ -représentation $\mathcal{F}$ de Δ est appelée *l'extension de Higgs-Tate* associée à $\widetilde{X}$.

4.4. Soit (M, θ) un *petit* $\widehat{R}_1$ -module de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1$ (c'est-à-dire, un $\widehat{R}_1$ -module de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}_1$ dont le $\widehat{R}_1$ -module sous-jacent est libre de type fini et dont le champ de Higgs est nul modulo p^α pour un entier $\alpha > \frac{1}{p-1}$) et soit $\psi \in \mathcal{L}(\widehat{Y})$. Pour tout $\sigma \in \Delta$, on note $\sigma\psi$ la section de $\mathcal{L}(\widehat{Y})$ définie par le diagramme commutatif

$$(4.4.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{L} & \xrightarrow{\sigma} & \mathbf{L} \\ \psi \uparrow & & \downarrow \sigma\psi \\ \widehat{Y} & \xrightarrow{\sigma} & \widehat{Y} \end{array}$$

La différence $D_\sigma = \psi - \sigma\psi$ est un élément de $\text{Hom}_{\widehat{R}}(\xi^{-1}\Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}, \widehat{R})$. L'endomorphisme $\exp((D_\sigma \otimes \text{id}_M) \circ \theta)$ de $M \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R}$ est bien défini, compte tenu de la petitesse de θ . On obtient alors une petite $\widehat{R}$ -représentation de Δ sur $M \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R}$. La correspondance ainsi définie est en fait une équivalence de catégories de la catégorie des petits $\widehat{R}_1$ -modules de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1$ dans celle des petites $\widehat{R}$ -représentations de Δ . C'est essentiellement un quasi-inverse de l'équivalence de catégories définie dans 3.3.

Pour éviter le choix d'une section ψ de $\mathcal{L}(\widehat{Y})$, on peut effectuer le changement de base de $\widehat{R}$ à $\mathcal{C}$ et utiliser le plongement diagonal de $\mathbf{L}$. La construction précédente dans ce cadre peut alors s'interpréter suivant le schéma classique des correspondances introduites par Fontaine (ou encore plus classique de la correspondance de Riemann-Hilbert analytique complexe) en prenant pour anneau de périodes faisant le pont entre les représentations généralisées et les modules de Higgs un complété p -adique faible $\mathcal{C}^\dagger$ de $\mathcal{C}$ (la complétion est rendue nécessaire par l'exponentielle). À cet anneau est naturellement associée une notion d'admissibilité ; c'est la notion de *représentation généralisée de Dolbeault*. Ce point de vue, qui est au centre de notre approche, aboutit à une construction plus générale que celle de Faltings. Avant de le développer, nous dirons quelques mots sur l'anneau $\mathcal{C}$ qui peut lui-même servir d'anneau de périodes entre représentations généralisées et modules de Higgs. En fait, $\mathcal{C}$ est un *modèle entier de l'anneau de Hyodo* (cf. (4.6.1) et [1] 15.6), ce qui explique le lien entre notre approche et celle de Hyodo.

4.5. On rappelle que Faltings a défini une extension canonique de $\widehat{R}$ -représentations de $\pi_1(X, \bar{y})$

$$(4.5.1) \quad 0 \rightarrow \rho^{-1}\widehat{R} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}(-1) \rightarrow 0,$$

où ρ est un élément de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ de valuation $\geq \frac{1}{p-1}$, qui joue un rôle important dans son approche de la théorie de Hodge p -adique (cf. [1] 7.22). Nous montrons dans ([1] 10.19) qu'il existe un morphisme $\widehat{R}$ -linéaire et Δ -équivariant

$$(4.5.2) \quad p^{-\frac{1}{p-1}} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$$

qui s'insère dans un diagramme commutatif

$$(4.5.3) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & p^{-\frac{1}{p-1}} \widehat{R} & \longrightarrow & p^{-\frac{1}{p-1}} \mathcal{F} & \longrightarrow & p^{-\frac{1}{p-1}} \xi^{-1} \Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow -c \\ 0 & \longrightarrow & \rho^{-1} \widehat{R} & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}(-1) \longrightarrow 0 \end{array}$$

où c est l'isomorphisme induit par un isomorphisme canonique $\widehat{R}(1) \xrightarrow{\sim} p^{\frac{1}{p-1}} \xi \widehat{R}$ ([1] 9.18). Le morphisme (4.5.2) est canonique si l'on prend pour $\tilde{X}$ la déformation induite par un S -morphisme étale $X \rightarrow \mathbb{G}_{m,S}^d$. Il est important de noter que dans le cadre logarithmique qui sera considéré dans ce travail, l'extension de Faltings change légèrement de forme puisque le facteur $\rho^{-1} \widehat{R}$ est remplacé par $(\pi\rho)^{-1} \widehat{R}$, où π est une uniformisante de K .

4.6. Partant de l'extension $\mathcal{E}$ de Faltings (4.5.1), Hyodo [10] définit une $\widehat{R}$ -algèbre $\mathcal{C}_{\text{HT}}$ par une limite inductive analogue à (4.3.7). On notera que p étant inversible dans $\mathcal{C}_{\text{HT}}$, il revient au même de partir de $\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$, ce qui correspond à la définition originelle de Hyodo. Le morphisme (4.5.2) induit donc un isomorphisme Δ -équivariant de $\widehat{R}$ -algèbres

$$(4.6.1) \quad \mathcal{C}[\frac{1}{p}] \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_{\text{HT}}.$$

Pour toute $\mathbb{Q}_p$ -représentation continue V de $\Gamma = \pi_1(X, \bar{y})$ et tout entier i , Hyodo définit le $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -module $D^i(V)$ par

$$(4.6.2) \quad D^i(V) = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{C}_{\text{HT}}(i))^{\Gamma}.$$

La représentation V est dite de *Hodge-Tate* si elle satisfait aux conditions suivantes :

- (i) V est un $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel de dimension finie, muni de la topologie p -adique.
- (ii) Le morphisme canonique

$$(4.6.3) \quad \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} D^i(V) \otimes_{\widehat{R}[\frac{1}{p}]} \mathcal{C}_{\text{HT}}(-i) \rightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{C}_{\text{HT}}$$

est un isomorphisme.

4.7. Pour tout nombre rationnel $r \geq 0$, on note $\mathcal{F}^{(r)}$ la $\widehat{R}$ -représentation de Δ déduite de $\mathcal{F}$ par image inverse par la multiplication par p^r sur $\xi^{-1} \Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}$, de sorte qu'on a une suite exacte

$$(4.7.1) \quad 0 \rightarrow \widehat{R} \rightarrow \mathcal{F}^{(r)} \rightarrow \xi^{-1} \Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R} \rightarrow 0.$$

Cette suite induit pour tout entier $n \geq 1$, une suite exacte

$$(4.7.2) \quad 0 \rightarrow \text{Sym}_{\widehat{R}}^{n-1}(\mathcal{F}^{(r)}) \rightarrow \text{Sym}_{\widehat{R}}^n(\mathcal{F}^{(r)}) \rightarrow \text{Sym}_{\widehat{R}}^n(\xi^{-1} \Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}) \rightarrow 0.$$

Les $\widehat{R}$ -modules $(\text{Sym}_{\widehat{R}}^n(\mathcal{F}^{(r)}))_{n \in \mathbb{N}}$ forment donc un système inductif filtrant, dont la limite inductive

$$(4.7.3) \quad \mathcal{C}^{(r)} = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ n \geq 0}} \text{S}_{\widehat{R}}^n(\mathcal{F}^{(r)})$$

est naturellement munie d'une structure de $\widehat{R}$ -algèbre. L'action de Δ sur $\mathcal{F}^{(r)}$ induit une action sur $\mathcal{C}^{(r)}$ par des automorphismes d'anneaux, compatible avec son action sur $\widehat{R}$, que l'on appelle *action canonique*. La $\widehat{R}$ -algèbre $\mathcal{C}^{(r)}$ munie de cette action est appelée *l'algèbre de Higgs-Tate d'épaisseur*

r associée à $\tilde{X}$. On note $\widehat{\mathcal{C}}^{(r)}$ le séparé complété p -adique de $\mathcal{C}^{(r)}$ que l'on suppose toujours muni de la topologie p -adique.

Pour tous nombres rationnels $r \geq r' \geq 0$, on a un $\widehat{R}$ -homomorphisme canonique injectif et Δ -équivariant $\alpha^{r,r'} : \mathcal{C}^{(r')} \rightarrow \mathcal{C}^{(r)}$. On vérifie aussitôt que l'homomorphisme induit $\widehat{\alpha}^{r,r'} : \widehat{\mathcal{C}}^{(r')} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}^{(r)}$ est injectif. On pose

$$(4.7.4) \quad \mathcal{C}^\dagger = \varinjlim_{r \in \mathbb{Q}_{>0}} \widehat{\mathcal{C}}^{(r)},$$

que l'on identifie à une sous- $\widehat{R}$ -algèbre de $\widehat{\mathcal{C}} = \widehat{\mathcal{C}}^{(0)}$. Le groupe Δ agit naturellement sur $\mathcal{C}^\dagger$ par des automorphismes d'anneaux, d'une façon compatible avec ses actions sur $\widehat{R}$ et sur $\widehat{\mathcal{C}}$.

On désigne par

$$(4.7.5) \quad d_{\mathcal{C}^{(r)}} : \mathcal{C}^{(r)} \rightarrow \xi^{-1} \Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \mathcal{C}^{(r)}$$

la $\widehat{R}$ -dérivation universelle de $\mathcal{C}^{(r)}$ et par

$$(4.7.6) \quad d_{\widehat{\mathcal{C}}^{(r)}} : \widehat{\mathcal{C}}^{(r)} \rightarrow \xi^{-1} \Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{\mathcal{C}}^{(r)}$$

son prolongement aux complétés (on notera que le R -module $\Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1$ est libre de type fini). Les dérivations $d_{\mathcal{C}^{(r)}}$ et $d_{\widehat{\mathcal{C}}^{(r)}}$ sont Δ -équivariantes. Elles sont également des $\widehat{R}$ -champs de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1} \Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1$ puisque $\xi^{-1} \Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R} = d_{\mathcal{C}^{(r)}}(\mathcal{F}^{(r)}) \subset d_{\mathcal{C}^{(r)}}(\mathcal{C}^{(r)})$ (cf. 2.5).

Pour tous nombres rationnels $r \geq r' \geq 0$, on a

$$(4.7.7) \quad p^{r'} (\text{id} \times \alpha^{r,r'}) \circ d_{\mathcal{C}^{(r')}} = p^r d_{\mathcal{C}^{(r)}} \circ \alpha^{r,r'}.$$

Les dérivations $p^r d_{\mathcal{C}^{(r)}}$ induisent donc une $\widehat{R}$ -dérivation

$$(4.7.8) \quad d_{\mathcal{C}^\dagger} : \mathcal{C}^\dagger \rightarrow \xi^{-1} \Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \mathcal{C}^\dagger,$$

qui n'est autre que la restriction de $d_{\widehat{\mathcal{C}}}$ à $\mathcal{C}^\dagger$.

4.8. Pour toute $\widehat{R}$ -représentation M de Δ , on note $\mathbb{H}(M)$ le $\widehat{R}_1$ -module de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1} \Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1$ défini par

$$(4.8.1) \quad \mathbb{H}(M) = (M \otimes_{\widehat{R}} \mathcal{C}^\dagger)^\Delta$$

et le champ de Higgs induit par $d_{\mathcal{C}^\dagger}$. Pour tout $\widehat{R}_1$ -module de Higgs (N, θ) à coefficients dans $\xi^{-1} \Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1$, on désigne par $\mathbb{V}(N)$ la $\widehat{R}$ -représentation de Δ définie par

$$(4.8.2) \quad \mathbb{V}(N) = (N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{C}^\dagger)^{\theta_{\text{tot}}=0},$$

où $\theta_{\text{tot}} = \theta \otimes \text{id} + \text{id} \otimes d_{\mathcal{C}^\dagger}$, et l'action de Δ induite par son action canonique sur $\mathcal{C}^\dagger$. Pour pouvoir exploiter pleinement ces foncteurs, nous établissons des résultats d'acyclicité de $\mathcal{C}^\dagger \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ pour la cohomologie de Dolbeault ([1] 12.3) et pour la cohomologie continue de Δ ([1] 12.5), généralisant légèrement des résultats antérieurs de Tsuji [18].

Une $\widehat{R}$ -représentation continue M de Δ est dite *de Dolbeault* si elle satisfait aux conditions suivantes (cf. [1] 12.10) :

- (i) M est un $\widehat{R}$ -module projectif de type fini, muni de la topologie p -adique;
- (ii) $\mathbb{H}(M)$ est un $\widehat{R}_1$ -module projectif de type fini;

(iii) le morphisme $\mathcal{C}^\dagger$ -linéaire canonique

$$(4.8.3) \quad \mathbb{H}(M) \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{C}^\dagger \rightarrow M \otimes_{\widehat{R}} \mathcal{C}^\dagger$$

est un isomorphisme.

Un $\widehat{R}_1$ -module de Higgs (N, θ) à coefficients dans $\xi^{-1}\Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1$ est dit *soluble* s'il satisfait aux conditions suivantes (cf. [1] 12.13) :

- (i) N est un $\widehat{R}_1$ -module projectif de type fini ;
- (ii) $\mathbb{V}(N)$ est un $\widehat{R}$ -module projectif de type fini ;
- (iii) le morphisme $\mathcal{C}^\dagger$ -linéaire canonique

$$(4.8.4) \quad \mathbb{V}(N) \otimes_{\widehat{R}} \mathcal{C}^\dagger \rightarrow N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{C}^\dagger$$

est un isomorphisme.

Il est immédiat de voir que les foncteurs $\mathbb{V}$ et $\mathbb{H}$ induisent des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre, entre la catégorie des $\widehat{R}$ -représentations de Dolbeault de Δ et celle des $\widehat{R}_1$ -modules de Higgs solubles à coefficients dans $\xi^{-1}\Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1$ ([1] 12.16). Nous montrons ([1] 13.23) que les petites $\widehat{R}$ -représentations de Δ sont de Dolbeault, que les petits $\widehat{R}_1$ -modules de Higgs sont solubles, et que $\mathbb{V}$ et $\mathbb{H}$ induisent des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre entre les catégories de ces objets. On retrouve en fait la correspondance définie dans 3.3, à une renormalisation près (cf. [1] 13.22).

4.9. On définit les notions de $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentation de Dolbeault de Δ et de $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -module de Higgs soluble à coefficients dans $\xi^{-1}\Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1$ en calquant les définitions dans les cas entiers (cf. [1] 14.1 et 14.3). Nous montrons que les foncteurs $\mathbb{V}$ et $\mathbb{H}$ induisent des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre, entre la catégorie des $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentations de Dolbeault de Δ et celle des $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -modules de Higgs solubles à coefficients dans $\xi^{-1}\Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1$ ([1] 14.15). Ce résultat est plus difficile que son analogue entier (4.8). En effet, il n'est même pas évident a priori que pour un $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -module de Higgs soluble (N, θ) à coefficients dans $\xi^{-1}\Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1$, la représentation $\mathbb{V}(N)$ de Δ soit continue pour la topologie p -adique. Pour ce faire, nous procédons par descente pour se ramener à des petits objets.

Proposition 4.10 ([1] 14.24). *Soient M une $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentation de Dolbeault de Δ , $(\mathbb{H}(M), \theta)$ le $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -module de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1$ associé. On a alors un isomorphisme canonique fonctoriel dans $\mathbf{D}^+(\mathbf{Mod}(\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]))$*

$$(4.10.1) \quad \mathbf{C}_{\text{cont}}^\bullet(\Delta, M) \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^\bullet(\mathbb{H}(M), \theta),$$

où $\mathbf{C}_{\text{cont}}^\bullet(\Delta, M)$ est le complexe de cochaînes continues de Δ dans M et $\mathbb{K}^\bullet(\mathbb{H}(M), \theta)$ est le complexe de Dolbeault (2.3).

Le cas des petites représentations est dû à Faltings ([9] §3) et Tsuji ([18] 6.1).

4.11. Il résulte de (4.6.1) que si V est une $\mathbb{Q}_p$ -représentation de Hodge-Tate de Γ , alors $V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \widehat{R}$ est une $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentation de Dolbeault de Δ ; on a un isomorphisme $\widehat{R}_1$ -linéaire fonctoriel

$$(4.11.1) \quad \mathbb{H}(V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \widehat{R}) \xrightarrow{\sim} \oplus_{i \in \mathbb{Z}} D^i(V) \otimes_{\widehat{R}} \widehat{R}_1(-i);$$

et le champ de Higgs sur $\mathbb{H}(V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \widehat{R})$ est induit par les morphismes $\widehat{R}$ -linéaires

$$(4.11.2) \quad D^i(V) \rightarrow D^{i-1}(V) \otimes_R \Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1$$

déduits de la dérivation universelle de $\mathcal{C}_{\text{HT}}$ sur $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ (cf. [1] 15.7). De plus, l'isomorphisme (4.11.1) est canonique si l'on prend pour $\widetilde{X}$ la déformation induite par un S -morphisme étale $X \rightarrow \mathbb{G}_{m,S}^d$.

Hyodo ([10] 3.6) a montré que si $f: Y \rightarrow X$ est un morphisme propre et lisse, pour tout entier $m \geq 0$, le faisceau $R^m f_{\eta*}(\mathbb{Q}_p)$ est de Hodge-Tate de poids compris entre 0 et m ; pour tout $0 \leq i \leq m$, on a un isomorphisme canonique

$$(4.11.3) \quad D^i(R^m f_{\eta*}(\mathbb{Q}_p)) \xrightarrow{\sim} (R^{m-i} f_{\eta*}(\Omega_{Y/X}^i)) \otimes_R \widehat{R};$$

et le morphisme (4.11.2) est induit par la classe de Kodaira-Spencer de f . Il s'ensuit que le fibré de Higgs associé à $R^m f_{\eta*}(\mathbb{Q}_p)$ est égal au fibré vectoriel

$$(4.11.4) \quad \bigoplus_{0 \leq i \leq m} R^{m-i} f_{\eta*}(\Omega_{Y/X}^i),$$

muni du champ de Higgs θ défini par la classe de Kodaira-Spencer de f .

5. TOPOS ANNELÉ DE FALTINGS

5.1. Nous aborderons dans [2] les aspects globaux de la théorie dans un cadre logarithmique. Toutefois, pour maintenir une présentation simplifiée, nous nous limitons ici encore au cas lisse au sens usuel (cf. [2] 3.9 pour le cas logarithmique lisse). Dans la suite de cette introduction, on suppose k algébriquement clos et on désigne par X un S -schéma lisse, séparé et de type fini. À partir de 5.12, on supposera de plus qu'il existe une $\mathcal{A}_2(\overline{S})$ -déformation lisse $\widetilde{X}$ de $\overline{X}$ que l'on fixera.

5.2. La première difficulté pour recoller la construction locale décrite dans § 4 est de faisceautiser la notion de représentation généralisée. Nous utilisons pour ce faire le *topos de Faltings*, une variante fibrée de la notion de *topos co-évanescent* de Deligne que nous développons dans [3]. On désigne par E la catégorie des morphismes de schémas $V \rightarrow U$ au-dessus du morphisme canonique $X_{\overline{\eta}} \rightarrow X$, *i.e.*, les diagrammes commutatifs

$$(5.2.1) \quad \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{\overline{\eta}} & \longrightarrow & X \end{array}$$

tels que le morphisme $U \rightarrow X$ soit étale et que le morphisme $V \rightarrow U_{\overline{\eta}}$ soit fini étale. Elle est fibrée au-dessus de la catégorie $\mathbf{\acute{E}t}_X$ des X -schémas étales, par le foncteur

$$(5.2.2) \quad \pi: E \rightarrow \mathbf{\acute{E}t}_X, \quad (V \rightarrow U) \mapsto U.$$

La fibre de π au-dessus d'un X -schéma étale U est la catégorie $\mathbf{\acute{E}t}_{f/U_{\overline{\eta}}}$ des schémas finis étales au-dessus de $U_{\overline{\eta}}$, que l'on équipe de la topologie étale. On désigne par $U_{\overline{\eta}, \text{fét}}$ le topos des faisceaux d'ensembles sur $\mathbf{\acute{E}t}_{f/U_{\overline{\eta}}}$ (cf. [3] 9.2). Si $U_{\overline{\eta}}$ est connexe et si $\overline{y}$ est un point géométrique de $U_{\overline{\eta}}$, notant $\mathbf{B}_{\pi_1(U_{\overline{\eta}}, \overline{y})}$ le topos classifiant du groupe fondamental $\pi_1(U_{\overline{\eta}}, \overline{y})$, on a une équivalence canonique de catégories ([3] (9.7.4))

$$(5.2.3) \quad \nu_{\overline{y}}: U_{\overline{\eta}, \text{fét}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{B}_{\pi_1(U_{\overline{\eta}}, \overline{y})}.$$

Nous équipons E de la *topologie co-évanescente* engendrée par les recouvrements $\{(V_i \rightarrow U_i) \rightarrow (V \rightarrow U)\}_{i \in I}$ des deux types suivants :

(v) $U_i = U$ pour tout $i \in I$, et $(V_i \rightarrow V)_{i \in I}$ est un recouvrement.

(c) $(U_i \rightarrow U)_{i \in I}$ est un recouvrement et $V_i = U_i \times_U V$ pour tout $i \in I$.

Le site co-évanescent E ainsi défini est aussi appelé *site de Faltings* de X . On désigne par $\tilde{E}$ et l'on appelle *topos de Faltings* de X , le topos des faisceaux d'ensembles sur E . On renvoie à [3] pour une étude détaillée de ce topos. Signalons ici une description commode et simple de $\tilde{E}$.

Proposition 5.3 ([3] 5.8). *La donnée d'un faisceau F sur E est équivalente à la donnée pour tout objet U de $\mathbf{\acute{E}t}_X$ d'un faisceau F_U de $U_{\bar{\eta}, \text{fét}}$ et pour tout morphisme $f: U' \rightarrow U$ de $\mathbf{\acute{E}t}_X$ d'un morphisme $F_U \rightarrow f_{\text{fét}*}(F_{U'})$, ces morphismes étant soumis à des relations de compatibilité, tels que pour toute famille couvrante $(f_n: U_n \rightarrow U)_{n \in \Sigma}$ de $\mathbf{\acute{E}t}_X$, si pour tout $(m, n) \in \Sigma^2$, on pose $U_{mn} = U_m \times_U U_n$ et on note $f_{mn}: U_{mn} \rightarrow U$ le morphisme canonique, la suite de morphismes de faisceaux de $U_{\bar{\eta}, \text{fét}}$*

$$(5.3.1) \quad F_U \rightarrow \prod_{n \in \Sigma} (f_{n, \bar{\eta}})_{\text{fét}*}(F_{U_n}) \rightrightarrows \prod_{(m, n) \in \Sigma^2} (f_{mn, \bar{\eta}})_{\text{fét}*}(F_{U_{mn}})$$

soit exacte.

On identifiera dans la suite tout faisceau F sur E au foncteur $\{U \mapsto F_U\}$ associé, le faisceau F_U étant la restriction de F à la fibre $\mathbf{\acute{E}t}_{f/U_{\bar{\eta}}}$ de π au-dessus de U .

5.4. Le foncteur d'injection canonique $\mathbf{\acute{E}t}_{f/X_{\bar{\eta}}} \rightarrow E$ est continu et exact à gauche ([3] 5.30). Il définit donc un morphisme de topos

$$(5.4.1) \quad \beta: \tilde{E} \rightarrow Y_{\text{fét}}.$$

De même, le foncteur

$$(5.4.2) \quad \sigma^+: \mathbf{\acute{E}t}_X \rightarrow E, \quad U \mapsto (U_{\bar{\eta}} \rightarrow U)$$

est continu et exact à gauche ([3] 5.30). Il définit donc un morphisme de topos

$$(5.4.3) \quad \sigma: \tilde{E} \rightarrow X_{\text{ét}}.$$

5.5. Soient $\bar{x}$ un point géométrique de X , X' le localisé strict de X en $\bar{x}$. On démontre ([2] 3.7) que $\bar{X}'$ est normal et strictement local (et en particulier intègre). On désigne par E' le site de Faltings associé à X' , par $\tilde{E}'$ le topos des faisceaux d'ensembles sur E' et par

$$(5.5.1) \quad \beta': \tilde{E}' \rightarrow X'_{\bar{\eta}, \text{fét}}$$

le morphisme canonique (5.4.1). On démontre dans ([3] 10.27) que le foncteur β'_* est exact. Cette propriété est cruciale pour l'étude des principaux faisceaux du topos de Faltings considérés dans ce travail.

Soient $\bar{y}$ un point géométrique de $X'_{\bar{\eta}}$ (qui est intègre), $\mathbf{B}_{\pi_1(X'_{\bar{\eta}}, \bar{y})}$ le topos classifiant du groupe fondamental $\pi_1(X'_{\bar{\eta}}, \bar{y})$,

$$(5.5.2) \quad \nu_{\bar{y}}: X'_{\bar{\eta}, \text{fét}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{B}_{\pi_1(X'_{\bar{\eta}}, \bar{y})}$$

le foncteur fibre en $\bar{y}$ ([3] (9.7.4)). Le morphisme canonique $X' \rightarrow X$ induit par fonctorialité un morphisme de topos ([3] 10.12)

$$(5.5.3) \quad \Phi: \tilde{E}' \rightarrow \tilde{E}.$$

On note

$$(5.5.4) \quad \varphi_{\bar{x}}: \tilde{E} \rightarrow X'_{\bar{\eta}, \text{fét}}$$

le foncteur composé $\beta'_* \circ \Phi^*$. Le foncteur composé

$$(5.5.5) \quad \tilde{E} \xrightarrow{\varphi_{\bar{x}}} X'_{\bar{\eta}, \text{fét}} \xrightarrow{\nu_{\bar{y}}} \mathbf{B}_{\pi_1(X'_{\bar{\eta}}, \bar{y})} \longrightarrow \mathbf{Ens}$$

où la dernière flèche est le foncteur oubli de l'action de $\pi_1(X'_{\bar{\eta}}, \bar{y})$, est un foncteur fibre ([3] 10.30 et 9.8). Il correspond à un point d'origine géométrique du topos $\tilde{E}$, noté $\rho(\bar{y} \rightsquigarrow \bar{x})$ (cf. [2] 7.6).

On désigne par $\mathfrak{E}_{\bar{x}}$ la catégorie des X -schémas étales $\bar{x}$ -pointés, ou ce qui revient au même, la catégorie des voisinages de $\bar{x}$ dans le site $\mathbf{\acute{E}t}/X$. Pour tout $U \in \text{Ob}(\mathfrak{E}_{\bar{x}})$, on note

$$(5.5.6) \quad t_U: X'_{\bar{\eta}} \rightarrow U_{\bar{\eta}}$$

le morphisme canonique. On démontre dans ([3] 10.35) que pour tout faisceau $F = \{U \mapsto F_U\}$ de $\tilde{E}$, on a un isomorphisme canonique fonctoriel

$$(5.5.7) \quad \varphi_{\bar{x}}(F) \xrightarrow{\sim} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ U \in \mathfrak{E}_{\bar{x}}}} (t_U)_{\text{fét}}^*(F_U).$$

Théorème 5.6 ([3] 10.31). *Sous les hypothèses de (5.5), pour tout faisceau abélien F de $\tilde{E}$ et tout entier $i \geq 0$, on a un isomorphisme canonique fonctoriel (5.4.3)*

$$(5.6.1) \quad R^i \sigma_*(F)_{\bar{x}} \xrightarrow{\sim} H^i(X'_{\bar{\eta}, \text{fét}}, \varphi_{\bar{x}}(F)).$$

Corollaire 5.7. *Sous les hypothèses de (5.5), pour tout faisceau abélien F de $\tilde{E}$ et tout entier $i \geq 0$, on a un isomorphisme canonique fonctoriel*

$$(5.7.1) \quad R^i \sigma_*(F)_{\bar{x}} \xrightarrow{\sim} H^i(\pi_1(X'_{\bar{\eta}}, \bar{y}), \nu_{\bar{y}}(\varphi_{\bar{x}}(F))).$$

Proposition 5.8 ([3] 10.38). *La famille des foncteurs $\varphi_{\bar{x}}$ (5.5.4), lorsque $\bar{x}$ décrit l'ensemble des points géométriques de X , est conservative.*

5.9. Pour chaque objet $(V \rightarrow U)$ de E , on note $\bar{U}^V$ la clôture intégrale de $\bar{U} = U \times_S \bar{S}$ dans V et on pose

$$(5.9.1) \quad \overline{\mathcal{B}}(V \rightarrow U) = \Gamma(\bar{U}^V, \mathcal{O}_{\bar{U}^V}).$$

On définit ainsi un préfaisceau d'anneaux sur E , qui se trouve être un *faisceau* ([2] 7.16). On notera que $\overline{\mathcal{B}}$ n'est pas en général un faisceau pour la topologie de E définie originellement par Faltings dans ([8] page 214) (cf. [2] 7.18). Pour tout $U \in \text{Ob}(\mathbf{\acute{E}t}/X)$, on note $\overline{\mathcal{B}}_U$ la restriction de $\overline{\mathcal{B}}$ à la fibre $\mathbf{\acute{E}t}_{f/U_{\bar{\eta}}}$ de π au-dessus de U , de sorte que $\overline{\mathcal{B}} = \{U \rightarrow \overline{\mathcal{B}}_U\}$. On donne dans 5.10 ci-dessous une description explicite de ce faisceau. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$(5.9.2) \quad \overline{\mathcal{B}}_n = \overline{\mathcal{B}}/p^n \overline{\mathcal{B}},$$

$$(5.9.3) \quad \overline{\mathcal{B}}_{U,n} = \overline{\mathcal{B}}_U/p^n \overline{\mathcal{B}}_U.$$

On notera que la correspondance $\{U \mapsto \overline{\mathcal{B}}_{U,n}\}$ forme naturellement un préfaisceau sur E dont le faisceau associé est canoniquement isomorphe à $\overline{\mathcal{B}}_n$. Il est en général difficile, voir impossible, de décrire explicitement les restrictions de $\overline{\mathcal{B}}_n$ aux fibres du foncteur π (5.2.2). Toutefois, ses images par les foncteurs fibres (5.5.5) sont accessibles (cf. [2] (9.9.4)).

On note $h: \bar{X} \rightarrow X$ la projection canonique (2.1.1) et

$$(5.9.4) \quad h_*(\mathcal{O}_{\bar{X}}) \rightarrow \sigma_*(\overline{\mathcal{B}})$$

l'homomorphisme défini pour tout $U \in \text{Ob}(\mathbf{\acute{E}t}/X)$ par l'homomorphisme canonique

$$(5.9.5) \quad \Gamma(\bar{U}, \mathcal{O}_{\bar{U}}) \rightarrow \Gamma(\bar{U}^{U_{\bar{\eta}}}, \mathcal{O}_{\bar{U}^{U_{\bar{\eta}}}}).$$

Sauf mention explicite du contraire, on considère $\sigma: \tilde{E} \rightarrow X_{\text{ét}}$ (5.4.3) comme un morphisme de topos annelés, respectivement par $\overline{\mathcal{B}}$ et $\hbar_*(\mathcal{O}_{\overline{X}})$.

5.10. Soient U un objet de $\mathbf{\acute{E}t}/X$, $\overline{y}$ un point géométrique de $U_{\overline{\eta}}$, V la composante connexe de $U_{\overline{\eta}}$ contenant $\overline{y}$. On désigne par $\mathbf{B}_{\pi_1(V, \overline{y})}$ le topos classifiant du groupe fondamental $\pi_1(V, \overline{y})$, par $(V_i)_{i \in I}$ le revêtement universel normalisé de V en $\overline{y}$ ([3] 9.7) et par

$$(5.10.1) \quad \nu_{\overline{y}}: V_{\text{fét}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{B}_{\pi_1(V, \overline{y})}, \quad F \mapsto \lim_{\substack{\longrightarrow \\ i \in I^\circ}} F(V_i)$$

le foncteur fibre en $\overline{y}$. Pour tout $i \in I$, $(V_i \rightarrow U)$ est naturellement un objet de E . On peut donc considérer le système projectif des schémas $(\overline{U}^{V_i})_{i \in I}$. On pose

$$(5.10.2) \quad \overline{R}_U^{\overline{y}} = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ i \in I^\circ}} \Gamma(\overline{U}^{V_i}, \mathcal{O}_{\overline{U}^{V_i}}),$$

qui est un anneau de $\mathbf{B}_{\pi_1(V, \overline{y})}$. D'après ([2] 7.15), on a un isomorphisme canonique de $\mathbf{B}_{\pi_1(V, \overline{y})}$

$$(5.10.3) \quad \nu_{\overline{y}}(\overline{\mathcal{B}}_U|V) \xrightarrow{\sim} \overline{R}_U^{\overline{y}}.$$

5.11. Comme X_η est un ouvert de $X_{\text{ét}}$ (*i.e.*, un sous-objet de l'objet final X), $\sigma^*(X_\eta)$ est un ouvert de $\tilde{E}$. On note

$$(5.11.1) \quad \gamma: \tilde{E}_{/\sigma^*(X_\eta)} \rightarrow \tilde{E}$$

le morphisme de localisation de $\tilde{E}$ en $\sigma^*(X_\eta)$. On désigne par $\tilde{E}_s$ le sous-topos fermé de $\tilde{E}$ complémentaire de l'ouvert $\sigma^*(X_\eta)$, c'est-à-dire la sous-catégorie pleine de $\tilde{E}$ formée des faisceaux F tels que $\gamma^*(F)$ soit un objet final de $\tilde{E}_{/\sigma^*(X_\eta)}$, et par

$$(5.11.2) \quad \delta: \tilde{E}_s \rightarrow \tilde{E}$$

le plongement canonique, c'est-à-dire le morphisme de topos tel que $\delta_*: \tilde{E}_s \rightarrow \tilde{E}$ soit le foncteur d'injection canonique. Il existe un morphisme

$$(5.11.3) \quad \sigma_s: \tilde{E}_s \rightarrow X_{s, \text{ét}}$$

unique à isomorphisme près tel que le diagramme

$$(5.11.4) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{E}_s & \xrightarrow{\sigma_s} & X_{s, \text{ét}} \\ \delta \downarrow & & \downarrow \iota_{\text{ét}} \\ \tilde{E} & \xrightarrow{\sigma} & X_{\text{ét}} \end{array}$$

où $\iota: X_s \rightarrow X$ est l'injection canonique, soit commutatif à isomorphisme près (cf. [2] 8.8).

Pour tout entier $n \geq 1$, identifiant les topos étales de X_s et $\overline{X}_n$ (2.1.1) (k étant algébriquement clos), le morphisme σ_s et l'homomorphisme (5.9.4) induisent un morphisme de topos annelés ([2] 8.9)

$$(5.11.5) \quad \sigma_n: (\tilde{E}_s, \overline{\mathcal{B}}_n) \rightarrow (X_{s, \text{ét}}, \mathcal{O}_{\overline{X}_n}).$$

5.12. Dans la suite de cette introduction, on suppose qu'il existe une $\mathcal{A}_2(\bar{S})$ -déformation lisse $\tilde{X}$ de $\tilde{\tilde{X}}$ que l'on fixe (cf. (2.1.1) et 4.2 pour les notations) :

$$(5.12.1) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{\tilde{X}} & \longrightarrow & \tilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{\tilde{S}} & \longrightarrow & \mathcal{A}_2(\bar{S}) \end{array}$$

Soit $Y = \text{Spec}(R)$ un objet affine connexe de $\mathbf{\hat{E}t}_X$ admettant un S -morphisme étale vers $\mathbb{G}_{m,S}^d$ pour un entier $d \geq 1$ et tel que $Y_s \neq \emptyset$ (autrement dit, Y vérifie les hypothèses de 4.1) et soit $\tilde{Y} \rightarrow \tilde{X}$ l'unique morphisme étale qui relève $\tilde{\tilde{Y}} \rightarrow \tilde{\tilde{X}}$. Pour tout point géométrique $\bar{y}$ de $Y_{\bar{\eta}}$, on désigne par $Y'_{\bar{\eta}}$ la composante connexe de $Y_{\bar{\eta}}$ contenant $\bar{y}$, par

$$(5.12.2) \quad \nu_{\bar{y}}: Y'_{\bar{\eta},\text{fét}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{B}_{\pi_1(Y'_{\bar{\eta}},\bar{y})}$$

le foncteur fibre en $\bar{y}$, et par $\mathcal{F}_{\tilde{Y}}^{\bar{y}}$ la $\widehat{R}_{\tilde{Y}}^{\bar{y}}$ -extension de Higgs-Tate associée à $(Y, \tilde{Y})$ (4.3).

Pour tout entier $n \geq 0$, il existe un $\overline{\mathcal{B}}_{Y,n}$ -module $\mathcal{F}_{Y,n}$, où $\overline{\mathcal{B}}_{Y,n} = \overline{\mathcal{B}}_Y/p^n \overline{\mathcal{B}}_Y$ (5.9.3), unique à isomorphisme canonique près, tel que pour tout point géométrique $\bar{y}$ de $Y_{\bar{\eta}}$, on ait un isomorphisme canonique de $\overline{R}_Y^{\bar{y}}$ -modules (5.10.3)

$$(5.12.3) \quad \nu_{\bar{y}}(\mathcal{F}_{Y,n}|_{Y'_{\bar{\eta}}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{\tilde{Y}}^{\bar{y}}/p^n \mathcal{F}_{\tilde{Y}}^{\bar{y}}.$$

La suite exacte (4.3.5) induit une suite exacte canonique de $\overline{\mathcal{B}}_{Y,n}$ -modules

$$(5.12.4) \quad 0 \rightarrow \overline{\mathcal{B}}_{Y,n} \rightarrow \mathcal{F}_{Y,n} \rightarrow \xi^{-1}\Omega_{X/S}^1(Y) \otimes_{\mathcal{O}_X(Y)} \overline{\mathcal{B}}_{Y,n} \rightarrow 0.$$

Pour tout nombre rationnel $r \geq 0$, on note $\mathcal{F}_{Y,n}^{(r)}$ l'extension de $\overline{\mathcal{B}}_{Y,n}$ -modules de $Y_{\bar{\eta},\text{fét}}$ déduite de $\mathcal{F}_{Y,n}$ par image inverse par le morphisme de multiplication par p^r sur $\xi^{-1}\Omega_{X/S}^1(Y) \otimes_{\mathcal{O}_X(Y)} \overline{\mathcal{B}}_{Y,n}$, de sorte qu'on a une suite exacte canonique de $\overline{\mathcal{B}}_{Y,n}$ -modules

$$(5.12.5) \quad 0 \rightarrow \overline{\mathcal{B}}_{Y,n} \rightarrow \mathcal{F}_{Y,n}^{(r)} \rightarrow \xi^{-1}\Omega_{X/S}^1(Y) \otimes_{\mathcal{O}_X(Y)} \overline{\mathcal{B}}_{Y,n} \rightarrow 0.$$

Celle-ci induit pour tout entier $m \geq 1$, une suite exacte de $\overline{\mathcal{B}}_{Y,n}$ -modules

$$0 \rightarrow S_{\overline{\mathcal{B}}_{Y,n}}^{m-1}(\mathcal{F}_{Y,n}^{(r)}) \rightarrow S_{\overline{\mathcal{B}}_{Y,n}}^m(\mathcal{F}_{Y,n}^{(r)}) \rightarrow S_{\overline{\mathcal{B}}_{Y,n}}^m(\xi^{-1}\Omega_{X/S}^1(Y) \otimes_{\mathcal{O}_X(Y)} \overline{\mathcal{B}}_{Y,n}) \rightarrow 0.$$

Les $\overline{\mathcal{B}}_{Y,n}$ -modules $(S_{\overline{\mathcal{B}}_{Y,n}}^m(\mathcal{F}_{Y,n}^{(r)}))_{m \in \mathbb{N}}$ forment donc un système inductif dont la limite inductive

$$(5.12.6) \quad \mathcal{C}_{Y,n}^{(r)} = \lim_{m \geq 0} S_{\overline{\mathcal{B}}_{Y,n}}^m(\mathcal{F}_{Y,n}^{(r)})$$

est naturellement munie d'une structure de $\overline{\mathcal{B}}_{Y,n}$ -algèbre de $Y_{\bar{\eta},\text{fét}}$.

Pour tous nombres rationnels $r \geq r' \geq 0$, on a un morphisme $\overline{\mathcal{B}}_{Y,n}$ -linéaire canonique

$$(5.12.7) \quad \mathbf{a}_{Y,n}^{r,r'}: \mathcal{F}_{Y,n}^{(r)} \rightarrow \mathcal{F}_{Y,n}^{(r')}$$

qui relève la multiplication par $p^{r'-r}$ sur $\xi^{-1}\Omega_{X/S}^1(Y) \otimes_{\mathcal{O}_X(Y)} \overline{\mathcal{B}}_{Y,n}$ et qui étend l'identité sur $\overline{\mathcal{B}}_{Y,n}$ (5.12.5). Il induit un homomorphisme de $\overline{\mathcal{B}}_{Y,n}$ -algèbres

$$(5.12.8) \quad \alpha_{Y,n}^{r,r'}: \mathcal{C}_{Y,n}^{(r)} \rightarrow \mathcal{C}_{Y,n}^{(r')}.$$

On notera que $\mathcal{C}_{Y,n}^{(r)}$ et $\mathcal{F}_{Y,n}^{(r)}$ dépendent du choix de la déformation $\tilde{X}$.

On étend les définitions précédentes aux objets affines connexes Y de $\mathbf{\acute{E}t}/X$ tels que $Y_s = \emptyset$ en posant $\mathcal{C}_{Y,n}^{(r)} = \mathcal{F}_{Y,n}^{(r)} = 0$.

5.13. Soient n entier ≥ 0 , r un nombre rationnel ≥ 0 . Les correspondances $\{Y \mapsto \mathcal{F}_{Y,n}^{(r)}\}$ et $\{Y \mapsto \mathcal{C}_{Y,n}^{(r)}\}$ forment naturellement des préfaisceaux sur la sous-catégorie pleine de E formée des objets $(V \rightarrow Y)$ tels que Y soit affine, connexe et admette un morphisme étale vers $\mathbb{G}_{m,S}^d$ pour un entier $d \geq 1$ ([2] 9.19). Cette sous-catégorie étant clairement topologiquement génératrice dans E , on peut considérer les faisceaux associés dans $\tilde{E}$

$$(5.13.1) \quad \mathcal{F}_n^{(r)} = \{Y \mapsto \mathcal{F}_{Y,n}^{(r)}\}^a,$$

$$(5.13.2) \quad \mathcal{C}_n^{(r)} = \{Y \mapsto \mathcal{C}_{Y,n}^{(r)}\}^a.$$

Ce sont en fait un $\overline{\mathcal{B}}_n$ -module et une $\overline{\mathcal{B}}_n$ -algèbre de $\tilde{E}_s$ ([2] 9.22). On appelle $\mathcal{F}_n^{(r)}$ la $\overline{\mathcal{B}}_n$ -extension de Higgs-Tate d'épaisseur r et $\mathcal{C}_n^{(r)}$ la $\overline{\mathcal{B}}_n$ -algèbre de Higgs-Tate d'épaisseur r associés à $\tilde{X}$. On a une suite exacte canonique de $\overline{\mathcal{B}}_n$ -modules (5.11.5)

$$(5.13.3) \quad 0 \rightarrow \overline{\mathcal{B}}_n \rightarrow \mathcal{F}_n^{(r)} \rightarrow \sigma_n^*(\xi^{-1}\Omega_{\tilde{X}_n/\overline{S}_n}^1) \rightarrow 0.$$

On décrit explicitement dans ([2] 9.25) les images de $\mathcal{F}_n^{(r)}$ et $\mathcal{C}_n^{(r)}$ par les foncteurs fibres (5.5.4).

Pour tous nombres rationnels $r \geq r' \geq 0$, les homomorphismes (5.12.8) induisent un homomorphisme de $\overline{\mathcal{B}}_n$ -algèbres

$$(5.13.4) \quad \alpha_n^{r,r'} : \mathcal{C}_n^{(r)} \rightarrow \mathcal{C}_n^{(r')}.$$

Pour tous nombres rationnels $r \geq r' \geq r'' \geq 0$, on a

$$(5.13.5) \quad \alpha_n^{r,r''} = \alpha_n^{r',r''} \circ \alpha_n^{r,r'}.$$

On a un isomorphisme $\mathcal{C}_n^{(r)}$ -linéaire canonique

$$(5.13.6) \quad \Omega_{\mathcal{C}_n^{(r)}/\overline{\mathcal{B}}_n}^1 \xrightarrow{\sim} \sigma_n^*(\xi^{-1}\Omega_{\tilde{X}_n/\overline{S}_n}^1) \otimes_{\overline{\mathcal{B}}_n} \mathcal{C}_n^{(r)}.$$

La $\overline{\mathcal{B}}_n$ -dérivation universelle de $\mathcal{C}_n^{(r)}$ correspond via cet isomorphisme à l'unique $\overline{\mathcal{B}}_n$ -dérivation

$$(5.13.7) \quad d_n^{(r)} : \mathcal{C}_n^{(r)} \rightarrow \sigma_n^*(\xi^{-1}\Omega_{\tilde{X}_n/\overline{S}_n}^1) \otimes_{\overline{\mathcal{B}}_n} \mathcal{C}_n^{(r)}$$

qui prolonge le morphisme canonique $\mathcal{F}_n^{(r)} \rightarrow \sigma_n^*(\xi^{-1}\Omega_{\tilde{X}_n/\overline{S}_n}^1)$. Pour tous nombres rationnels $r \geq r' \geq 0$, on a

$$(5.13.8) \quad p^{r-r'}(\text{id} \otimes \alpha_n^{r,r'}) \circ d_n^{(r)} = d_n^{(r')} \circ \alpha_n^{r,r'}.$$

5.14. Les système projectifs d'objets de $\tilde{E}_s$ (5.4) indexés par l'ensemble ordonné des entiers naturels $\mathbb{N}$, forment un topos que l'on note $\tilde{E}_s^{\mathbb{N}^\circ}$. On trouvera dans ([2] § 6) des sorites utiles sur ce type de topos. On désigne par $\check{\overline{\mathcal{B}}}$ l'anneau $(\overline{\mathcal{B}}_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ de $\tilde{E}_s^{\mathbb{N}^\circ}$, par $\check{\mathcal{O}}_{\tilde{X}}$ l'anneau $(\mathcal{O}_{\tilde{X}_{n+1}})_{n \in \mathbb{N}}$ de $X_{s,\text{ét}}^{\mathbb{N}^\circ}$, et par $\xi^{-1}\Omega_{\tilde{X}/\check{\overline{S}}}^1$ le $\check{\mathcal{O}}_{\tilde{X}}$ -module $(\xi^{-1}\Omega_{\tilde{X}_{n+1}/\overline{S}_{n+1}}^1)_{n \in \mathbb{N}}$ de $X_{s,\text{ét}}^{\mathbb{N}^\circ}$. Les morphismes $(\sigma_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ (5.11.5) induisent un morphisme de topos annelés

$$(5.14.1) \quad \check{\sigma} : (\tilde{E}_s^{\mathbb{N}^\circ}, \check{\overline{\mathcal{B}}}) \rightarrow (X_{s,\text{ét}}^{\mathbb{N}^\circ}, \check{\mathcal{O}}_{\tilde{X}}).$$

On dit qu'un $\check{\overline{\mathcal{B}}}$ -module $(M_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ de $\tilde{E}_s^{\mathbb{N}^\circ}$ est *adique* si pour tous entiers m et n tels que $m \geq n \geq 1$, le morphisme $M_m \otimes_{\overline{\mathcal{B}}_m} \overline{\mathcal{B}}_n \rightarrow M_n$ déduit du morphisme de transition $M_m \rightarrow M_n$ est un isomorphisme.

Soit r un nombre rationnel ≥ 0 . Pour tous entiers $m \geq n \geq 1$, on a un morphisme $\overline{\mathcal{B}}_m$ -linéaire canonique $\mathcal{F}_m^{(r)} \rightarrow \mathcal{F}_n^{(r)}$ et un homomorphisme canonique de $\overline{\mathcal{B}}_m$ -algèbres $\mathcal{C}_m^{(r)} \rightarrow \mathcal{C}_n^{(r)}$ tels que les morphismes induits

$$(5.14.2) \quad \mathcal{F}_m^{(r)} \otimes_{\overline{\mathcal{B}}_m} \overline{\mathcal{B}}_n \rightarrow \mathcal{F}_n^{(r)} \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_m^{(r)} \otimes_{\overline{\mathcal{B}}_m} \overline{\mathcal{B}}_n \rightarrow \mathcal{C}_n^{(r)}$$

soient des isomorphismes. Ces morphismes forment des systèmes compatibles lorsque m et n varient, de sorte que $(\mathcal{F}_{n+1}^{(r)})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\mathcal{C}_{n+1}^{(r)})_{n \in \mathbb{N}}$ sont des systèmes projectifs. On appelle *$\check{\mathcal{B}}$ -extension de Higgs-Tate d'épaisseur r* associée à $\tilde{X}$, et l'on note $\check{\mathcal{F}}^{(r)}$, le $\check{\mathcal{B}}$ -module $(\mathcal{F}_{n+1}^{(r)})_{n \in \mathbb{N}}$ de $\tilde{E}_s^{\text{No}}$. On appelle *$\check{\mathcal{B}}$ -algèbre de Higgs-Tate d'épaisseur r* associée à $\tilde{X}$, et l'on note $\check{\mathcal{C}}^{(r)}$, la $\check{\mathcal{B}}$ -algèbre $(\mathcal{C}_{n+1}^{(r)})_{n \in \mathbb{N}}$ de $\tilde{E}_s^{\text{No}}$. Ce sont des $\check{\mathcal{B}}$ -modules adiques. On a une suite exacte de $\check{\mathcal{B}}$ -modules

$$(5.14.3) \quad 0 \rightarrow \check{\mathcal{B}} \rightarrow \check{\mathcal{F}}^{(r)} \rightarrow \check{\sigma}^*(\xi^{-1}\Omega_{\tilde{X}/\tilde{S}}^1) \rightarrow 0.$$

Pour tous nombres rationnels $r \geq r' \geq 0$, les homomorphismes $(\alpha_n^{r,r'})_{n \in \mathbb{N}}$ induisent un homomorphisme de $\check{\mathcal{B}}$ -algèbres

$$(5.14.4) \quad \check{\alpha}^{r,r'} : \check{\mathcal{C}}^{(r)} \rightarrow \check{\mathcal{C}}^{(r')}.$$

Pour tous nombres rationnels $r \geq r' \geq r'' \geq 0$, on a

$$(5.14.5) \quad \check{\alpha}^{r,r''} = \check{\alpha}^{r',r''} \circ \check{\alpha}^{r,r'}.$$

Les dérivations $(d_{n+1}^{(r)})_{n \in \mathbb{N}}$ définissent un morphisme

$$(5.14.6) \quad \check{d}^{(r)} : \check{\mathcal{C}}^{(r)} \rightarrow \check{\sigma}^*(\xi^{-1}\Omega_{\tilde{X}/\tilde{S}}^1) \otimes_{\check{\mathcal{B}}} \check{\mathcal{C}}^{(r)},$$

qui n'est autre que la $\check{\mathcal{B}}$ -dérivation universelle de $\check{\mathcal{C}}^{(r)}$. Pour tous nombres rationnels $r \geq r' \geq 0$, on a

$$(5.14.7) \quad p^{r-r'}(\text{id} \otimes \check{\alpha}^{r,r'}) \circ \check{d}^{(r)} = \check{d}^{(r')} \circ \check{\alpha}^{r,r'}.$$

6. MODULES DE DOLBEAULT

6.1. Les hypothèses et notations de § 5 sont en vigueur dans cette section. On pose $\mathcal{S} = \text{Spf}(\mathcal{O}_C)$ et on note $\mathfrak{X}$ le schéma formel complété p -adique de $\overline{X}$, et $\xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1$ le complété p -adique du $\mathcal{O}_{\overline{X}}$ -module $\xi^{-1}\Omega_{\overline{X}/\tilde{S}}^1 = \xi^{-1}\Omega_{X/S}^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{\overline{X}}$. On désigne par

$$(6.1.1) \quad \check{u} : (X_{s,\text{ét}}^{\text{No}}, \mathcal{O}_{\check{X}}) \rightarrow (X_{s,\text{zar}}^{\text{No}}, \mathcal{O}_{\check{X}})$$

le morphisme canonique de topos annelés ([2] 2.9), par

$$(6.1.2) \quad \lambda : (X_{s,\text{zar}}^{\text{No}}, \mathcal{O}_{\check{X}}) \rightarrow (X_{s,\text{zar}}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$$

le morphisme de topos annelés dont le foncteur image directe correspondant est la limite projective ([2] 6.4), et par

$$(6.1.3) \quad \top : (\tilde{E}_s^{\text{No}}, \check{\mathcal{B}}) \rightarrow (\mathfrak{X}_{\text{zar}}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$$

le morphisme composé de topos annelés $\lambda \circ \check{u} \circ \check{\sigma}$ (5.14.1). Nous utilisons pour les modules la notation $\top^{-1}$ pour désigner l'image inverse au sens des faisceaux abéliens et nous réservons la notation $\top^*$ pour l'image inverse au sens des modules; de même pour $\check{\sigma}$.

On note

$$(6.1.4) \quad \delta : \xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1 \rightarrow \text{R}^1\top_*(\check{\mathcal{B}})$$

le morphisme $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -linéaire de $X_{s,\text{zar}}$ composé du morphisme d'adjonction (cf. [2] (10.2.5))

$$(6.1.5) \quad \xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1 \rightarrow \top_*(\check{\sigma}^*(\xi^{-1}\Omega_{\check{X}/\check{S}}^1))$$

et du morphisme bord de la suite exacte longue de cohomologie déduite de la suite exacte canonique

$$(6.1.6) \quad 0 \rightarrow \check{\mathcal{B}} \rightarrow \check{\mathcal{F}} \rightarrow \check{\sigma}^*(\xi^{-1}\Omega_{\check{X}/\check{S}}^1) \rightarrow 0.$$

On notera que le morphisme

$$(6.1.7) \quad \top^*(\xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1) \rightarrow \check{\sigma}^*(\xi^{-1}\Omega_{\check{X}/\check{S}}^1)$$

adjoint de (6.1.5) est un isomorphisme ([2] (10.2.6)).

Théorème 6.2 ([2] 10.8). *Il existe un et un unique isomorphisme de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -algèbres graduées*

$$(6.2.1) \quad \wedge (\xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1[\frac{1}{p}]) \xrightarrow{\sim} \oplus_{i \geq 0} \mathbf{R}^i \top_*(\check{\mathcal{B}})[\frac{1}{p}]$$

dont la composante en degré un est le morphisme $\delta \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ (6.1.4).

Cet énoncé est la clé de voûte de l'approche de Faltings en théorie de Hodge p -adique. On le retrouve ici et là sous différentes incarnations. Sa forme galoisienne locale ([1] 8.21) est une conséquence du théorème de pureté de Faltings ([1] 6.15). L'énoncé global a une variante entière ([2] 10.3) qui se déduit du cas local par localisation (5.7).

6.3. La suite exacte canonique (6.1.6) induit, pour tout entier $m \geq 1$, une suite exacte

$$(6.3.1) \quad 0 \rightarrow \text{Sym}_{\check{\mathcal{B}}}^{m-1}(\check{\mathcal{F}}) \rightarrow \text{Sym}_{\check{\mathcal{B}}}^m(\check{\mathcal{F}}) \rightarrow \check{\sigma}^*(\text{Sym}_{\check{X}}^m(\xi^{-1}\Omega_{\check{X}/\check{S}}^1)) \rightarrow 0.$$

Proposition 6.4 ([2] 10.12). *Soit m un entier ≥ 1 . Alors :*

(i) *Le morphisme*

$$(6.4.1) \quad \top_*(\text{Sym}_{\check{\mathcal{B}}}^{m-1}(\check{\mathcal{F}}))[\frac{1}{p}] \rightarrow \top_*(\text{Sym}_{\check{\mathcal{B}}}^m(\check{\mathcal{F}}))[\frac{1}{p}]$$

induit par (6.3.1) est un isomorphisme.

(ii) *Pour tout entier $q \geq 1$, le morphisme*

$$(6.4.2) \quad \mathbf{R}^q \top_*(\text{Sym}_{\check{\mathcal{B}}}^{m-1}(\check{\mathcal{F}}))[\frac{1}{p}] \rightarrow \mathbf{R}^q \top_*(\text{Sym}_{\check{\mathcal{B}}}^m(\check{\mathcal{F}}))[\frac{1}{p}]$$

induit par (6.3.1) est nul.

La variante galoisienne locale de cet énoncé est due à Hyodo ([10] 1.2). C'est le principal ingrédient dans la définition des systèmes locaux de Hodge-Tate.

Proposition 6.5 ([2] 10.18). *L'homomorphisme canonique*

$$(6.5.1) \quad \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}] \rightarrow \varinjlim_{r \in \mathbb{Q}_{>0}} \top_*(\mathcal{E}^{(r)})[\frac{1}{p}]$$

est un isomorphisme, et pour tout entier $q \geq 1$,

$$(6.5.2) \quad \varinjlim_{r \in \mathbb{Q}_{>0}} \mathbf{R}^q \top_*(\mathcal{E}^{(r)})[\frac{1}{p}] = 0.$$

La variante galoisienne locale de cet énoncé ([1] 12.5) est essentiellement due à Tsuji ([18] 6.2).

6.6. On note $\mathbf{Mod}(\check{\mathcal{B}})$ la catégorie des $\check{\mathcal{B}}$ -modules de $\check{E}_s^{\mathbb{N}^\circ}$, $\mathbf{Mod}^{\text{ad}}(\check{\mathcal{B}})$ (resp. $\mathbf{Mod}^{\text{atf}}(\check{\mathcal{B}})$) la sous-catégorie pleine formée des $\check{\mathcal{B}}$ -modules adiques (resp. adiques de type fini) (5.14) et $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\check{\mathcal{B}})$ (resp. $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\text{ad}}(\check{\mathcal{B}})$, resp. $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\text{atf}}(\check{\mathcal{B}})$) la catégorie des objets de $\mathbf{Mod}(\check{\mathcal{B}})$ (resp. $\mathbf{Mod}^{\text{ad}}(\check{\mathcal{B}})$, resp. $\mathbf{Mod}^{\text{atf}}(\check{\mathcal{B}})$) à isogénie près (2.6). La catégorie $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\check{\mathcal{B}})$ est abélienne et les foncteurs canoniques

$$(6.6.1) \quad \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\text{atf}}(\check{\mathcal{B}}) \rightarrow \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\text{ad}}(\check{\mathcal{B}}) \rightarrow \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\check{\mathcal{B}})$$

sont pleinement fidèles. On désigne par $\mathbf{Mod}^{\text{coh}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ (resp. $\mathbf{Mod}^{\text{coh}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}])$) la catégorie des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -modules (resp. $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -modules) cohérents de $X_{s,\text{zar}}$ et par $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\text{coh}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ la catégorie des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -modules cohérents à isogénie près. D'après ([2] 5.14), le foncteur canonique

$$(6.6.2) \quad \mathbf{Mod}^{\text{coh}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \rightarrow \mathbf{Mod}^{\text{coh}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]), \quad \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_{\mathbb{Q}_p} = \mathcal{F} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p,$$

induit une équivalence de catégories abéliennes

$$(6.6.3) \quad \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\text{coh}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Mod}^{\text{coh}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]).$$

6.7. Pour tout nombre rationnel $r \geq 0$, on note encore

$$(6.7.1) \quad \check{d}^{(r)}: \check{\mathcal{C}}^{(r)} \rightarrow \mathbb{T}^*(\xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1) \otimes_{\check{\mathcal{B}}} \check{\mathcal{C}}^{(r)}$$

la $\check{\mathcal{B}}$ -dérivation induite par $\check{d}^{(r)}$ (5.14.6) et l'isomorphisme (6.1.7), que l'on identifie à la $\check{\mathcal{B}}$ -dérivation universelle de $\check{\mathcal{C}}^{(r)}$. C'est un $\check{\mathcal{B}}$ -champ de Higgs à coefficients dans $\mathbb{T}^*(\xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1)$ (2.5). On désigne par $\mathbb{K}^\bullet(\check{\mathcal{C}}^{(r)}, p^r \check{d}^{(r)})$ le complexe de Dolbeault de $(\check{\mathcal{C}}^{(r)}, p^r \check{d}^{(r)})$ (2.3) et par $\mathbb{K}_{\mathbb{Q}}^\bullet(\check{\mathcal{C}}^{(r)}, p^r \check{d}^{(r)})$ son image dans $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\check{\mathcal{B}})$. D'après (5.14.7), pour tous nombres rationnels $r \geq r' \geq 0$, l'homomorphisme $\check{\alpha}^{r,r'}$ (5.14.4) induit un morphisme de complexes

$$(6.7.2) \quad \check{\nu}^{r,r'}: \mathbb{K}^\bullet(\check{\mathcal{C}}^{(r)}, p^r \check{d}^{(r)}) \rightarrow \mathbb{K}^\bullet(\check{\mathcal{C}}^{(r')}, p^{r'} \check{d}^{(r')}).$$

Proposition 6.8 ([2] 10.24). *Le morphisme canonique*

$$(6.8.1) \quad \check{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}} \rightarrow \varinjlim_{r \in \mathbb{Q}_{>0}} H^0(\mathbb{K}_{\mathbb{Q}}^\bullet(\check{\mathcal{C}}^{(r)}, p^r \check{d}^{(r)}))$$

est un isomorphisme, et pour tout entier $q \geq 1$,

$$(6.8.2) \quad \varinjlim_{r \in \mathbb{Q}_{>0}} H^q(\mathbb{K}_{\mathbb{Q}}^\bullet(\check{\mathcal{C}}^{(r)}, p^r \check{d}^{(r)})) = 0.$$

On notera que les limites inductives filtrantes ne sont pas a priori représentables dans la catégorie $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\check{\mathcal{B}})$.

6.9. Le foncteur $\mathbb{T}_*$ (6.1.3) induit un foncteur additif et exact à gauche que l'on note encore

$$(6.9.1) \quad \mathbb{T}_*: \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\check{\mathcal{B}}) \rightarrow \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]).$$

Pour tout entier $q \geq 0$, on note

$$(6.9.2) \quad R^q \mathbb{T}_*: \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\check{\mathcal{B}}) \rightarrow \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}])$$

le q -ième foncteur dérivé droit de $\mathbb{T}_*$. D'après (6.6.3), le foncteur image inverse $\mathbb{T}^*$ induit un foncteur additif que l'on note encore

$$(6.9.3) \quad \mathbb{T}^*: \mathbf{Mod}^{\text{coh}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]) \rightarrow \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\text{atf}}(\check{\mathcal{B}}).$$

Pour tout $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -module cohérent $\mathcal{F}$ et tout $\check{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -module $\mathcal{G}$, on a un homomorphisme canonique bifonctoriel

$$(6.9.4) \quad \text{Hom}_{\check{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{T}^*(\mathcal{F}), \mathcal{G}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]}(\mathcal{F}, \mathbb{T}_*(\mathcal{G})).$$

qui est injectif ([2] (11.1.5)).

6.10. On désigne par $\mathbf{IH}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}, \xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1)$ la catégorie des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -isogénies de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1$ (2.8) et par $\mathbf{IH}^{\text{coh}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}, \xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1)$ la sous-catégorie pleine formée des quadruplets $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, u, \theta)$ tels que $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ soient des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -modules cohérents. Ce sont des catégories additives. On note $\mathbf{IH}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}, \xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1)$ (resp. $\mathbf{IH}_{\mathbb{Q}}^{\text{coh}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}, \xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1)$) la catégorie des objets de $\mathbf{IH}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}, \xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1)$ (resp. $\mathbf{IH}^{\text{coh}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}, \xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1)$) à isogénie près (2.6).

On sous-entend par $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -module de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1$, un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -module de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1[\frac{1}{p}]$ (2.3). On désigne par $\mathbf{MH}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1)$ la catégorie de tels modules et par $\mathbf{MH}^{\text{coh}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1)$ la sous-catégorie pleine formée des modules de Higgs dont le $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -module sous-jacent est cohérent.

Le foncteur

$$(6.10.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{IH}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}, \xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1) & \rightarrow & \mathbf{MH}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1) \\ (\mathcal{M}, \mathcal{N}, u, \theta) & \mapsto & (\mathcal{M}_{\mathbb{Q}_p}, (\text{id} \otimes u_{\mathbb{Q}_p}^{-1}) \circ \theta_{\mathbb{Q}_p}) \end{array}$$

induit un foncteur

$$(6.10.2) \quad \mathbf{IH}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}, \xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1) \rightarrow \mathbf{MH}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1).$$

D'après ([2] 5.17), celui-ci induit une équivalence de catégories

$$(6.10.3) \quad \mathbf{IH}_{\mathbb{Q}}^{\text{coh}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}, \xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1) \xrightarrow{\sim} \mathbf{MH}^{\text{coh}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1).$$

Définition 6.11. On appelle $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -*fibré de Higgs à coefficients dans* $\xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1$ tout $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -module de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1$ dont le $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -module sous-jacent est localement projectif de type fini ([2] 2.8).

6.12. Soit r un nombre rationnel ≥ 0 . On désigne par Ξ^r la catégorie des p^r -isoconnexions intégrables relativement à l'extension $\check{\mathcal{C}}^{(r)}/\check{\mathcal{B}}$ (2.9) et par $\Xi_{\mathbb{Q}}^r$ la catégorie des objets de Ξ^r à isogénie près (2.6). On note $\mathfrak{S}^r$ le foncteur

$$(6.12.1) \quad \mathfrak{S}^r: \mathbf{Mod}(\check{\mathcal{B}}) \rightarrow \Xi^r, \quad \mathcal{M} \mapsto (\check{\mathcal{C}}^{(r)} \otimes_{\check{\mathcal{B}}} \mathcal{M}, \check{\mathcal{C}}^{(r)} \otimes_{\check{\mathcal{B}}} \mathcal{M}, \text{id}, p^r d^{(r)} \otimes \text{id}).$$

Celui-ci induit un foncteur que l'on note encore

$$(6.12.2) \quad \mathfrak{S}^r: \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\check{\mathcal{B}}) \rightarrow \Xi_{\mathbb{Q}}^r.$$

On note $\mathcal{K}^r$ le foncteur

$$(6.12.3) \quad \mathcal{K}^r: \Xi^r \rightarrow \mathbf{Mod}(\check{\mathcal{B}}), \quad (\mathcal{F}, \mathcal{G}, u, \nabla) \mapsto \ker(\nabla).$$

Celui-ci induit un foncteur que l'on note encore

$$(6.12.4) \quad \mathcal{K}^r : \Xi_{\mathbb{Q}}^r \rightarrow \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\check{\mathcal{B}}).$$

Il est clair que (6.12.1) est un adjoint à gauche de (6.12.3). Par suite, (6.12.2) est un adjoint à gauche de (6.12.4).

Si $(\mathcal{N}, \mathcal{N}', v, \theta)$ est une $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -isogénie de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1$,

$$(6.12.5) \quad (\mathcal{C}^{(r)} \otimes_{\check{\mathcal{B}}} \mathbb{T}^*(\mathcal{N}), \mathcal{C}^{(r)} \otimes_{\check{\mathcal{B}}} \mathbb{T}^*(\mathcal{N}'), \text{id} \otimes_{\check{\mathcal{B}}} \mathbb{T}^*(v), \text{id} \otimes \mathbb{T}^*(\theta) + p^r d^{(r)} \otimes \mathbb{T}^*(v))$$

est un objet de Ξ^r ([2] 5.12). On obtient ainsi un foncteur (6.10)

$$(6.12.6) \quad \mathbb{T}^{r+} : \mathbf{IH}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}, \xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1) \rightarrow \Xi^r.$$

D'après (6.10.3), celui-ci induit un foncteur que l'on note encore

$$(6.12.7) \quad \mathbb{T}^{r+} : \mathbf{MH}^{\text{coh}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1) \rightarrow \Xi_{\mathbb{Q}}^r.$$

Soit $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, u, \nabla)$ un objet de Ξ^r . D'après la formule de projection ([2] 11.4), ∇ induit un morphisme $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -linéaire :

$$(6.12.8) \quad \mathbb{T}_*(\nabla) : \mathbb{T}_*(\mathcal{F}) \rightarrow \xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathbb{T}_*(\mathcal{G}).$$

On voit aussitôt que $(\mathbb{T}_*(\mathcal{F}), \mathbb{T}_*(\mathcal{G}), \mathbb{T}_*(u), \mathbb{T}_*(\nabla))$ est une $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -isogénie de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1$. On obtient ainsi un foncteur

$$(6.12.9) \quad \mathbb{T}_+^r : \Xi^r \rightarrow \mathbf{IH}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}, \xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1),$$

qui est clairement un adjoint à droite de (6.12.6). Le composé des foncteurs (6.12.9) et (6.10.1) induit un foncteur que l'on note encore

$$(6.12.10) \quad \mathbb{T}_+^r : \Xi_{\mathbb{Q}}^r \rightarrow \mathbf{MH}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1).$$

Définition 6.13 ([2] 10.12). Soient $\mathcal{M}$ un objet de $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\text{atf}}(\check{\mathcal{B}})$, $\mathcal{N}$ un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -fibré de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1$.

(i) Soit r un nombre rationnel > 0 . On dit que $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont r -associés s'il existe un isomorphisme de $\Xi_{\mathbb{Q}}^r$

$$(6.13.1) \quad \alpha : \mathbb{T}^{r+}(\mathcal{N}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}^r(\mathcal{M}).$$

On dit alors aussi que le triplet $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, \alpha)$ est r -admissible.

(ii) On dit que $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont associés s'il existe un nombre rationnel $r > 0$ tel que $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ soient r -associés.

On notera que pour tous nombres rationnels $r \geq r' > 0$, si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont r -associés, ils sont r' -associés.

Définition 6.14. (i) On appelle $\check{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -module de Dolbeault tout objet de $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\text{atf}}(\check{\mathcal{B}})$ pour lequel il existe un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -fibré de Higgs associé à coefficients dans $\xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1$.

(ii) On dit qu'un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -fibré de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1$ est soluble s'il admet un module de Dolbeault associé.

On désigne par $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\text{Dolb}}(\check{\mathcal{B}})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\text{atf}}(\check{\mathcal{B}})$ formée des $\check{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -modules de Dolbeault, et par $\mathbf{MH}^{\text{sol}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{MH}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1)$ formée des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -fibrés de Higgs solubles à coefficients dans $\xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1$.

6.15. Pour tout $\check{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -module $\mathcal{M}$ et tous nombres rationnels $r \geq r' \geq 0$, on a un morphisme canonique de $\mathbf{MH}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1)$

$$(6.15.1) \quad \mathbb{T}_+^r(\mathfrak{S}^r(\mathcal{M})) \rightarrow \mathbb{T}_+^{r'}(\mathfrak{S}^{r'}(\mathcal{M})).$$

On obtient ainsi un système inductif filtrant $(\mathbb{T}_+^r(\mathfrak{S}^r(\mathcal{M})))_{r \in \mathbb{Q}_{\geq 0}}$. On désigne par $\mathcal{H}$ le foncteur

$$(6.15.2) \quad \mathcal{H}: \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\check{\mathcal{B}}) \rightarrow \mathbf{MH}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1), \quad \mathcal{M} \mapsto \lim_{r \in \mathbb{Q}_{> 0}} \mathbb{T}_+^r(\mathfrak{S}^r(\mathcal{M})).$$

Pour tout objet $\mathcal{N}$ de $\mathbf{MH}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1)$ et tous nombres rationnels $r \geq r' \geq 0$, on a un morphisme canonique de $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\check{\mathcal{B}})$

$$(6.15.3) \quad \mathcal{K}^r(\mathbb{T}^{r+}(\mathcal{N})) \rightarrow \mathcal{K}^{r'}(\mathbb{T}^{r'+}(\mathcal{N})).$$

On obtient ainsi un système inductif filtrant $(\mathcal{K}^r(\mathbb{T}^{r+}(\mathcal{N})))_{r \geq 0}$. On notera cependant que les limites inductives filtrantes ne sont pas a priori représentables dans la catégorie $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\check{\mathcal{B}})$.

Proposition 6.16 ([2] 11.18). *Pour tout $\check{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -module de Dolbeault $\mathcal{M}$, $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ (6.15.2) est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -fibré de Higgs soluble et associé à $\mathcal{M}$. En particulier, $\mathcal{H}$ induit un foncteur que l'on note encore*

$$(6.16.1) \quad \mathcal{H}: \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\text{Dolb}}(\check{\mathcal{B}}) \rightarrow \mathbf{MH}^{\text{sol}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1), \quad \mathcal{M} \mapsto \mathcal{H}(\mathcal{M}).$$

Proposition 6.17 ([2] 11.23). *On a un foncteur*

$$(6.17.1) \quad \mathcal{V}: \mathbf{MH}^{\text{sol}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1) \rightarrow \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\text{Dolb}}(\check{\mathcal{B}}), \quad \mathcal{N} \mapsto \lim_{r \in \mathbb{Q}_{> 0}} \mathcal{K}^r(\mathbb{T}^{r+}(\mathcal{N})).$$

De plus, pour tout objet $\mathcal{N}$ de $\mathbf{MH}^{\text{sol}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1)$, $\mathcal{V}(\mathcal{N})$ est associé à $\mathcal{N}$.

Théorème 6.18 ([2] 11.26). *Les foncteurs (6.16.1) et (6.17.1)*

$$(6.18.1) \quad \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\text{Dolb}}(\check{\mathcal{B}}) \xrightleftharpoons[\mathcal{V}]{\mathcal{H}} \mathbf{MH}^{\text{sol}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1)$$

sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre.

Théorème 6.19 ([2] 11.29). *Soient $\mathcal{M}$ un $\check{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -module de Dolbeault, q un entier ≥ 0 . Notons $\mathbb{K}^{\bullet}(\mathcal{H}(\mathcal{M}))$ le complexe de Dolbeault du $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -fibré de Higgs $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ (2.3). On a alors un isomorphisme canonique fonctoriel de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -modules (6.9.2)*

$$(6.19.1) \quad R^q \mathbb{T}_*(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} H^q(\mathbb{K}^{\bullet}(\mathcal{H}(\mathcal{M}))).$$

6.20. Soit $g: X' \rightarrow X$ un morphisme étale. Il existe essentiellement un unique morphisme étale $\tilde{g}: \tilde{X}' \rightarrow \tilde{X}$ qui s'insère dans un diagramme cartésien (2.1.1)

$$(6.20.1) \quad \begin{array}{ccc} \check{X}' & \longrightarrow & \tilde{X}' \\ \check{g} \downarrow & & \downarrow \tilde{g} \\ \check{X} & \longrightarrow & \tilde{X} \end{array}$$

de sorte que $\tilde{X}'$ est une $\mathcal{A}_2(\bar{S})$ -déformation lisse de $\tilde{X}'$. On associe à $(X', \tilde{X}')$ des objets analogues à ceux définis plus haut pour $(X, \tilde{X})$, qu'on note par les mêmes symboles affectés d'un exposant $'$. Le morphisme g définit par fonctorialité un morphisme de topos annelés ([2] 7.20)

$$(6.20.2) \quad \Phi: (\tilde{E}', \bar{\mathcal{B}}') \rightarrow (\tilde{E}, \bar{\mathcal{B}}).$$

On démontre dans ([2] 7.21) que Φ s'identifie au morphisme de localisation de $(\tilde{E}, \bar{\mathcal{B}})$ en $\sigma^*(X')$. Par ailleurs, Φ induit un morphisme de topos annelés

$$(6.20.3) \quad \check{\Phi}: (\tilde{E}'^{\text{N}^\circ}, \bar{\mathcal{B}}') \rightarrow (\tilde{E}^{\text{N}^\circ}, \bar{\mathcal{B}}).$$

On note $\mathfrak{g}: \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$ le prolongement de $\bar{g}: \bar{X}' \rightarrow \bar{X}$ aux complétés p -adiques.

Proposition 6.21 ([2] 12.9). *Les hypothèses étant celles de (6.20), soient, de plus, $\mathcal{M}$ un $\bar{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -module de Dolbeault, $\mathcal{N}$ un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -fibré de Higgs soluble à coefficients dans $\xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1$. Alors $\check{\Phi}^*(\mathcal{M})$ est un $\bar{\mathcal{B}}_{\mathbb{Q}}$ -module de Dolbeault et $\mathfrak{g}^*(\mathcal{N})$ est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}[\frac{1}{p}]$ -fibré de Higgs soluble à coefficients dans $\xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}'/\mathcal{S}}^1$. Si de plus, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont associés, $\check{\Phi}^*(\mathcal{M})$ et $\mathfrak{g}^*(\mathcal{N})$ sont associés.*

On démontre en fait que les diagrammes de foncteurs

$$(6.21.1) \quad \begin{array}{ccccc} \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\text{Dolb}}(\bar{\mathcal{B}}) & \xrightarrow{\mathcal{H}} & \mathbf{MH}^{\text{sol}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1) & \xrightarrow{\gamma} & \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\text{Dolb}}(\bar{\mathcal{B}}) \\ \check{\Phi}^* \downarrow & & \downarrow \mathfrak{g}^* & & \downarrow \check{\Phi}^* \\ \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\text{Dolb}}(\bar{\mathcal{B}}') & \xrightarrow{\mathcal{H}'} & \mathbf{MH}^{\text{sol}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}[\frac{1}{p}], \xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}'/\mathcal{S}}^1) & \xrightarrow{\gamma'} & \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\text{Dolb}}(\bar{\mathcal{B}}') \end{array}$$

sont commutatifs à isomorphismes canoniques près ([2] 12.11).

6.22. Il existe un unique morphisme de topos

$$(6.22.1) \quad \psi: \tilde{E}_s^{\text{N}^\circ} \rightarrow X_{\text{ét}}$$

tel que pour tout $U \in \text{Ob}(\dot{\mathbf{Et}}_X)$, $\psi^*(U)$ soit le système projectif constant $(\sigma_s^*(U_s))_{\mathbb{N}}$ (5.11.3). On note $\dot{\mathbf{Et}}_{\text{coh}/X}$ la sous-catégorie pleine de $\dot{\mathbf{Et}}_X$ formée des schémas étales de présentation finie sur X . On a une catégorie fibrée canonique

$$(6.22.2) \quad \text{MOD}_{\mathbb{Q}}(\bar{\mathcal{B}}) \rightarrow \dot{\mathbf{Et}}_{\text{coh}/X},$$

dont la fibre au-dessus d'un objet U de $\dot{\mathbf{Et}}_{\text{coh}/X}$ est la catégorie $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\bar{\mathcal{B}}|\psi^*(U))$ et le foncteur image inverse par un morphisme $U' \rightarrow U$ de $\dot{\mathbf{Et}}_{\text{coh}/X}$ est le foncteur de restriction (6.20.2)

$$(6.22.3) \quad \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\bar{\mathcal{B}}|\psi^*(U)) \rightarrow \mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}(\bar{\mathcal{B}}|\psi^*(U')), \quad \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}|_{\psi^*(U')}.$$

D'après 6.21, elle induit une catégorie fibrée

$$(6.22.4) \quad \text{MOD}_{\mathbb{Q}}^{\text{Dolb}}(\bar{\mathcal{B}}) \rightarrow \dot{\mathbf{Et}}_{\text{coh}/X}$$

dont la fibre au-dessus d'un objet U de $\dot{\mathbf{Et}}_{\text{coh}/X}$ est la catégorie $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\text{Dolb}}(\bar{\mathcal{B}}|\psi^*(U))$. On s'attend à ce que cette dernière soit un champ. On peut toutefois montrer le résultat partiel suivant.

Proposition 6.23 ([2] 12.16). *Soient $\mathcal{M}$ un objet de $\mathbf{Mod}_{\mathbb{Q}}^{\text{atf}}(\bar{\mathcal{B}})$, $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert (de Zariski) de X . Pour que $\mathcal{M}$ soit de Dolbeault, il faut et il suffit que pour tout $i \in I$, $\mathcal{M}|_{\psi^*(U_i)}$ soit de Dolbeault.*

Définition 6.24. On dit qu'un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -fibré de Higgs $(\mathcal{N}, \theta)$ à coefficients dans $\xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1$ est *petit* s'il existe un sous- $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ -module cohérent $\mathfrak{N}$ de $\mathcal{N}$ qui l'engendre sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ et un nombre rationnel $\epsilon > \frac{1}{p-1}$ tels que

$$(6.24.1) \quad \theta(\mathfrak{N}) \subset p^\epsilon \xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathfrak{N}.$$

Conjecture 6.25. *Tout petit $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}[\frac{1}{p}]$ -fibré de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\Omega_{\mathfrak{X}/\mathcal{S}}^1$ est soluble.*

Proposition 6.26 ([2] 13.3). *La conjecture (6.25) vaut si X est affine et connexe et s'il admet un S -morphisme étale dans $\mathbb{G}_{m,S}^d$ pour un entier $d \geq 1$.*

Proposition 6.27 ([2] 13.4). *Si la catégorie fibrée (6.22.4) est un champ, la conjecture (6.25) vaut.*

RÉFÉRENCES

- [1] A. ABBES, M. GROS, *Sur la correspondance de Simpson p -adique. I : étude locale*, pré-publication (2011, révisée en 2012), arXiv :1102.5466.
- [2] A. ABBES, M. GROS, *Sur la correspondance de Simpson p -adique. II : aspects globaux*, pré-publication (2012), arXiv :1301.0904.
- [3] A. ABBES, M. GROS, *Topos co-évanescents et généralisations*, pré-publication (2011, révisée en 2012), arXiv :1107.2380.
- [4] O. BRINON, *Fibré de Higgs et structure locale d'une petite représentation généralisée (d'après Faltings)*, notes d'un exposé au Groupe de Travail sur la Correspondance de Simpson p -adique d'après Faltings, Rennes (2009).
- [5] C. DENINGER, A. WERNER, *Vector bundles on p -adic curves and parallel transport*, Annales Scientifiques E.N.S. **38** (2005), 553-597.
- [6] S. DONALDSON, *Infinite determinants, stable bundles and curvature*, Duke Math. J. **54** (1987), 231-247.
- [7] G. FALTINGS, *p -adic Hodge theory*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), 255-299.
- [8] G. FALTINGS, *Almost étale extensions*, dans Cohomologies p -adiques et applications arithmétiques. II, Astérisque **279** (2002), 185-270.
- [9] G. FALTINGS, *A p -adic Simpson correspondence*, Adv. Math. **198** (2005), 847-862.
- [10] O. HYODO, *On variation of Hodge-Tate structures*, Math. Ann. **284** (1989), 7-22.
- [11] J. LE POTIER, *Fibrés de Higgs et systèmes locaux*, Séminaire Bourbaki, Exp. **737** (1991), Astérisque **201-203** (1992), 221-268.
- [12] M.S. NARASIMHAN, C.S. SESHADRI, *Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface*, Ann. of Math. **82** (1965), 540-567.
- [13] A. OGUS, V. VOLOGODSKY, *Non abelian Hodge theory in characteristic p* , Pub. Math. IHES **106** (2007), 1-138.
- [14] C. SIMPSON, *Constructing variations of Hodge structure using Yang-Mills theory and applications to uniformization*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), no. 4, 867-918.
- [15] C. SIMPSON, *Higgs bundles and local systems*, Pub. Math. IHÉS, **75** (1992), 5-95.
- [16] C. SIMPSON, *Moduli of representations of the fundamental group of a smooth variety I*, Pub. Math. IHÉS **79** (1994), 47-129.
- [17] C. SIMPSON, *Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety II*, Publ. Math. IHÉS **80** (1994), 5-79.
- [18] T. TSUJI, *Notes on p -adic Simpson correspondence and Galois cohomology*, preprint (2009).

A.A. CNRS, INSTITUT DES HAUTES ÉTUDES SCIENTIFIQUES, 35 ROUTE DE CHARTRES, 91440 BURES-SUR-YVETTE, FRANCE

M.G. CNRS UMR 6625, IRMAR, UNIVERSITÉ DE RENNES 1, CAMPUS DE BEAULIEU, 35042 RENNES CEDEX, FRANCE

E-mail address: abbes@ihes.fr

E-mail address: michel.gros@univ-rennes1.fr