

SUR LA CORRESPONDANCE DE SIMPSON p -ADIQUE. I : ÉTUDE LOCALE

AHMED ABBES ET MICHEL GROS

À la mémoire d'Osamu Hyodo

RÉSUMÉ. Nous développons une nouvelle approche pour la correspondance de Simpson p -adique, intimement liée à l'approche originelle de Faltings, mais aussi inspirée du travail d'Ogus et Vologodsky sur un analogue en caractéristique $p > 0$. Ce premier article est consacré aux aspects locaux de la théorie.

We develop a new approach for the p -adic Simpson correspondence, closely related to the original approach of Faltings, but also inspired by the work of Ogus and Vologodsky on an analogue in characteristic $p > 0$. This first article is devoted to the local aspects of the theory.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	1
2. Notations et conventions	10
3. Lexique de géométrie logarithmique	19
4. Le théorème de pureté de Faltings	25
5. L'extension de Faltings	35
6. Cohomologie galoisienne	49
7. Épaississements infinitésimaux p -adiques de Fontaine	61
8. Le torseur des relèvements du revêtement universel	67
9. Cohomologie galoisienne II	78
10. Représentations de Dolbeault entières	87
11. Représentations petites	90
12. Représentations de Dolbeault rationnelles	102
13. Représentations de Hodge-Tate	119
Références	122

1. INTRODUCTION

1.1. En 1965, généralisant et précisant un résultat antérieur de Weil, Narasimhan et Seshadri [31] établissaient une correspondance bijective entre l'ensemble des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles du groupe fondamental d'une surface de Riemann compacte X de genre ≥ 2 , et l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels stables de degré 0 sur X .

La correspondance fut ensuite étendue pour toute variété complexe projective et lisse par Donaldson. L'analogie pour les représentations linéaires quelconques est dû à Simpson ; pour obtenir une correspondance du même type que celle de Narasimhan et Seshadri, nous avons besoin d'ajouter au fibré vectoriel une structure supplémentaire. C'est la notion de fibré de Higgs qui fut d'abord introduite par Hitchin pour les courbes algébriques : si X est un schéma, $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_X$ -module et $\mathcal{A}$ une $\mathcal{O}_X$ -algèbre, un $\mathcal{A}$ -module de Higgs à coefficients dans $\mathcal{E}$ est un couple $(\mathcal{M}, \theta)$ formé d'un $\mathcal{A}$ -module $\mathcal{M}$ et d'un morphisme $\mathcal{A}$ -linéaire $\theta: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}$ tel que $\theta \wedge \theta = 0$. Lorsque X est une variété complexe projective et lisse, qui est le cas considéré par Simpson, on s'intéresse exclusivement aux $\mathcal{O}_X$ -modules de Higgs à coefficients dans $\Omega_{X/\mathbb{C}}^1$; on les appellera simplement modules de Higgs. Mais nous aurons besoin dans la suite de considérer des modules de Higgs plus généraux.

1.2. Le résultat principal de Simpson [36, 37, 38, 39] établit des équivalences de catégories entre la catégorie des représentations linéaires (à valeurs complexes) du groupe fondamental d'une variété complexe projective et lisse X (ou, ce qui revient au même, la catégorie des systèmes locaux sur X), celle des fibrés à connexion intégrables et celle des fibrés de Higgs semi-stables de classes de Chern nulles. Ceci se traduit, quand on fixe le rang r , par l'existence de trois espaces de modules grossiers classifiant de tels objets.

$$(1.2.1) \quad \begin{array}{ccc} M_B(r) & \xrightarrow{\quad} & M_{dR}(r) \\ & \searrow \textcircled{1} \quad \swarrow \textcircled{2} & \\ & M_{Dol}(r) & \end{array}$$

Ces variétés algébriques ont même ensemble de points fermés, mais les structures algébriques diffèrent, ce qui montre la nature nécessairement non-algébrique de la construction. Il est d'usage d'appeler *correspondance de Simpson* les deux correspondances représentées par les côtés du triangle de sommet $M_{Dol}(r)$; on passe de l'une à l'autre par la correspondance de Riemann-Hilbert (représentée par le troisième côté du triangle). Quand il faut préciser, nous appelons première (resp. seconde) correspondance de Simpson, la correspondance représentée par le coté $\textcircled{1}$ (resp. $\textcircled{2}$) du triangle.

1.3. La correspondance de Simpson présente une forte analogie avec la théorie de Hodge, qui se manifeste à plusieurs niveaux. Le premier niveau consiste à interpréter, pour une variété complexe projective et lisse X munie d'un point x , le groupe de cohomologie singulière $H^1(X^{\text{an}}, \mathbb{C})$ comme le groupe des caractères du groupe fondamental $\pi_1(X, x)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Le théorème de Hodge donne alors une décomposition canonique

$$(1.3.1) \quad H^1(X^{\text{an}}, \mathbb{C}) \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X) \oplus H^0(X, \Omega_{X/\mathbb{C}}^1).$$

En d'autres termes, une classe de cohomologie correspond bijectivement à un couple (e, ω) où $e \in H^1(X, \mathcal{O}_X)$ et ω est une 1-forme différentielle holomorphe sur X . La correspondance de Simpson donne un analogue pour les classes de conjugaison des représentations $\pi_1(X, x) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

Le second niveau d'analogie se voit dans la fonctorialité de la correspondance de Simpson par image directe. En effet, pour un système local V sur X^{an} , correspondant à un fibré de Higgs $(\mathcal{M}, \theta)$, Simpson construit, pour tout entier $n \geq 0$, un isomorphisme naturel

$$(1.3.2) \quad H^n(X^{\text{an}}, V) \simeq H^n(X, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/\mathbb{C}}^\bullet),$$

où $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/\mathbb{C}}^\bullet$ est le complexe $\mathcal{O}_X$ -linéaire défini par θ , appelé *complexe de Dolbeault*. C'est un substitut (et même un analogue lorsque $\theta = 0$) du théorème de décomposition de Hodge.

1.4. Un cas particulier, historiquement et conceptuellement important, dans lequel la correspondance entre représentations linéaires du groupe fondamental et fibrés de Higgs peut être décrite assez explicitement est celui des variations de structure de Hodge provenant d'une famille de variétés projectives et lisses. Plus précisément, soit $f: Y \rightarrow X$ un morphisme projectif et lisse entre variétés complexes projectives et lisses. Pour tout entier $m \geq 0$, on sait que le système local $R^m f_*(\mathbb{C})$ correspond à la cohomologie de de Rham relative $R^m f_* \Omega_{Y/X}^\bullet$ munie de la connexion de Gauss-Manin ∇ . Cette dernière est munie de la filtration de Hodge dont les gradués associés sont canoniquement isomorphes à la cohomologie de Hodge $R^{m-i} f_* \Omega_{Y/X}^i$ (avec $0 \leq i \leq m$). La connexion de Gauss-Manin induit sur les gradués des morphismes $\mathcal{O}_X$ -linéaires

$$R^{m-i} f_* \Omega_{Y/X}^i \rightarrow R^{m-i+1} f_* \Omega_{Y/X}^{i-1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_{X/\mathbb{C}}^1,$$

qui coïncident avec les cup-produits avec la classe de Kodaira-Spencer de f , considérée comme section

$$\rho \in H^0(X, R^1 f_*(\text{Der}(Y/X)) \otimes \Omega_{X/\mathbb{C}}^1).$$

Le fibré de Higgs associé à $R^m f_*(\mathbb{C})$ est alors égal au fibré vectoriel

$$\bigoplus_{0 \leq i \leq m} R^{m-i} f_* \Omega_{Y/X}^i,$$

muni du champ de Higgs θ défini par ρ . La correspondance de Simpson peut être considérée comme une généralisation de cette construction à tous les systèmes locaux.

1.5. Faltings a dégagé récemment un analogue p -adique de la première correspondance de Simpson. Son approche généralise des résultats antérieurs de Tate, Sen et Fontaine, et repose sur sa théorie des extensions presque-étales [16]. Elle s'inscrit dans le prolongement de ses travaux en théorie de Hodge p -adique, en particulier, ceux qui établissent l'existence de décompositions de Hodge-Tate [15]. Nous développons dans cet article une nouvelle approche de cette *correspondance de Simpson p -adique*, intimement liée à celle de Faltings, et inspirée du travail d'Ogus et Vologodsky [33] sur un analogue en caractéristique p de la seconde correspondance de Simpson. Le besoin de reprendre et de développer la construction de Faltings s'est fait sentir au regard, d'une part du nombre de résultats esquissés dans un article assez court et extrêmement dense [17], et d'autre part des conditions assez restrictives qui limitent aujourd'hui son champ d'applications. En effet, les images directes supérieures du faisceau constant par un morphisme propre et lisse au-dessus d'une base de dimension ≥ 2 , rentrent rarement dans le cadre de la construction de Faltings, ce qui ne permet pas de développer un analogue p -adique de 1.4. Notre approche le permet. Plus précisément, la correspondance que nous développons généralise simultanément celle de Faltings et une construction de Hyodo pour les systèmes locaux de Hodge-Tate [24], fournissant ainsi un analogue p -adique de 1.4. Signalons aussi que Tsuji a développé une autre approche pour la correspondance de Simpson p -adique [43]. Par ailleurs, Deninger et Werner [14] ont développé un analogue partiel de la théorie de Narasimhan et Seshadri pour les courbes p -adiques, qui correspond aux fibrés de Higgs à champ nul dans la correspondance de Simpson p -adique.

1.6. Soient K un corps de valuation discrète complet de caractéristique 0, à corps résiduel parfait k de caractéristique $p > 0$, $\bar{K}$ une clôture algébrique de K . On note $\mathcal{O}_K$ l'anneau de valuation de K , $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ la clôture intégrale de $\mathcal{O}_K$ dans $\bar{K}$, $\mathcal{O}_C$ le séparé complété p -adique de $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ et C le corps des fractions de $\mathcal{O}_C$. On désigne par $G_K = \text{Gal}(\bar{K}/K)$ le groupe de Galois de $\bar{K}$ sur K et par $\mathbb{Z}_p(1)$ le module de Tate du groupe multiplicatif sur $\mathcal{O}_K$, *i.e.*, le $\mathbb{Z}[G_K]$ -module

$$\mathbb{Z}_p(1) = \varprojlim_{n \geq 0} \mu_{p^n}(\mathcal{O}_{\bar{K}}).$$

Pour tout $\mathbb{Z}_p[G_K]$ -module M et tout entier n , on pose $M(n) = M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(1)^{\otimes n}$.

1.7. Faltings construit un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des représentations p -adiques du groupe fondamental géométrique d’une courbe propre, lisse et géométriquement connexe X sur K (relativement à un point géométrique $\bar{x}$ de X) dans la catégorie des $(\mathcal{O}_{X_C})$ -fibres de Higgs à coefficients dans $\Omega_{X/K}^1(-1)$. Ce foncteur est en fait naturellement défini sur une catégorie strictement plus large que celle des représentations p -adiques de $\pi_1(X_{\bar{K}}, \bar{x})$, appelée catégorie des *représentations généralisées* de $\pi_1(X_{\bar{K}}, \bar{x})$, et est alors une équivalence de catégories entre cette nouvelle catégorie et celle des $(\mathcal{O}_{X_C})$ -fibres de Higgs à coefficients dans $\Omega_{X/K}^1(-1)$. Faltings montre que les modules de Higgs associés aux “vraies” représentations p -adiques de $\pi_1(X_{\bar{K}}, \bar{x})$ sont semi-stables de pente nulle, et formule l’espoir que tous les modules de Higgs semi-stables de pente nulle s’obtiennent ainsi. Cet énoncé correspondrait à la partie difficile du résultat de Simpson dans le cas complexe.

1.8. La pierre angulaire de la construction de Faltings, valable en toute dimension, traite d’une classe de représentations généralisées qualifiées de *petites*, au-dessus d’un schéma affine ayant une présentation assez simple au-dessus de $\mathcal{O}_K$ (qualifié aussi de *petit*). La correspondance dans le cas général se déduit du cas petit par recollement et descente. Cette dernière étape n’a été développée par Faltings que pour les courbes.

Nous suivrons les mêmes lignes. Dans la première partie de ce travail, nous traitons une classe de représentations généralisées au-dessus d’un petit schéma affine, que nous appelons *représentations de Dolbeault*. Celle-ci contient les représentations petites et les représentations généralisées provenant de représentations de Hodge-Tate définies par Hyodo [24]. On notera qu’une représentation de Hodge-Tate induit rarement une petite représentation généralisée. La seconde partie de ce travail sera consacrée au recollement et à la descente [2]; le lecteur trouvera dans son introduction une présentation détaillée de ces deux aspects. Notons toutefois d’emblée que notre approche semble se prêter mieux à la descente que celle de Faltings, et donne donc un fort espoir de pouvoir étendre la construction en dimensions supérieures au-delà des représentations de Dolbeault.

Le présent article est entièrement consacré à l’étude locale des représentations de Dolbeault. Nous l’abordons par l’intermédiaire des représentations petites auxquelles nous consacrons une partie importante du travail.

1.9. La correspondance de Simpson p -adique est à la théorie de Hodge p -adique ce que la correspondance de Simpson complexe est à la théorie de Hodge classique (1.3). On dispose par exemple pour les représentations de Dolbeault d’un analogue de l’isomorphisme (1.3.2). Le précurseur pour ce résultat, qui est aussi le premier germe dans la construction de Faltings, est le fait bien connu que la cohomologie d’une représentation discrète du groupe profini $\mathbb{Z}_p$ se calcule par un complexe de Koszul (cf. 6.1 et 6.2).

1.10. L’exemple type de schéma affine petit de Faltings est un schéma affine $X = \text{Spec}(R)$ étale au-dessus du tore $\mathbb{G}_{m, \mathcal{O}_K}^d = \text{Spec}(\mathcal{O}_K[T_1^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}])$ dont les fibres géométriques au-dessus de $\text{Spec}(\mathcal{O}_K)$ sont intègres et non vides. Suivant [16], nous considérons dans cet article une situation logarithmique plus générale, qui s’avère nécessaire même pour définir la correspondance de Simpson p -adique pour une courbe propre et lisse sur $\mathcal{O}_K$. En effet, dans la seconde étape de descente, nous sommes amenés à considérer des revêtements finis de sa fibre générique, ce qui nous ramène au cas d’un schéma semi-stable sur $\mathcal{O}_K$. Toutefois, pour simplifier la présentation, nous nous limitons dans cette introduction au cas lisse ci-dessus (cf. 4.2 pour le cas logarithmique lisse). On notera t_i l’image de T_i dans R ($1 \leq i \leq d$).

1.11. Le groupe fondamental Δ de $\text{Spec}(R_{\overline{K}})$ (relativement à un point géométrique générique $\overline{\kappa}$) a des quotients isomorphes à $\mathbb{Z}_p(1)^d$. Le choix, pour tout $1 \leq i \leq d$, d'un système compatible $(t_i^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de racines d'ordre p^n de t_i dans le corps résiduel de $\overline{\kappa}$, détermine un tel quotient Δ_∞ . La principale vertu des petites représentations généralisées de Δ est leur bon comportement par descente à Δ_∞ . C'est une conséquence du profond théorème de pureté de Faltings (cf. 4.14; [16] § 2b). Plus précisément, le groupe Δ se décrit explicitement de la façon suivante. Soient F le corps des fractions de R , F^a une clôture algébrique de F contenant $\overline{K}$, $\overline{F}$ l'union des extensions finies L de F contenues dans F^a telles que la clôture intégrale de R dans L soit étale au-dessus de $\text{Spec}(R_K)$ et $\overline{R}$ la clôture intégrale de R dans $\overline{F}$. Le groupe Δ est alors le groupe de Galois de $\overline{R}$ sur $R_1 = R \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{\overline{K}}$. Notons, pour tout $\mathbb{Z}_p$ -module A , $\widehat{A}$ son séparé complété p -adique. Dans ce contexte, les *représentations généralisées* de Δ sont les $\widehat{R}$ -représentations continues de Δ (c'est à dire, les représentations semi-linéaires continues de Δ à valeurs dans des $\widehat{R}$ -modules) dont le $\widehat{R}$ -module sous-jacent est projectif de type fini. Une telle représentation M est dite *petite* si M est un $\widehat{R}$ -module libre de type fini ayant une base formée d'éléments Δ -invariants modulo $p^{2\alpha}M$ pour un nombre rationnel $\alpha > \frac{1}{p-1}$. On définit de même la notion de $\widehat{R}_1$ -représentation petite de Δ_∞ . Alors le foncteur

$$(1.11.1) \quad M \mapsto M \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R}$$

de la catégorie des $\widehat{R}_1$ -représentations petites de Δ_∞ dans celle des $\widehat{R}$ -représentations petites de Δ est une équivalence de catégories (cf. 11.12).

1.12. Si (M, φ) est une petite $\widehat{R}_1$ -représentation de Δ_∞ , on peut considérer le logarithme de φ qui est un homomorphisme de Δ_∞ dans $\text{End}_{\widehat{R}_1}(M)$. Fixant une $\mathbb{Z}_p$ -base ζ de $\mathbb{Z}_p(1)$, ce dernier s'écrit uniquement sous la forme

$$(1.12.1) \quad \log \circ \varphi = \sum_{i=1}^d \theta_i \otimes \chi_i \otimes \zeta^{-1},$$

où ζ^{-1} est la base duale de $\mathbb{Z}_p(-1)$, χ_i est le caractère de Δ_∞ à valeurs dans $\mathbb{Z}_p(1)$ qui donne son action sur le système $(t_i^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ et θ_i est un endomorphisme $\widehat{R}_1$ -linéaire de M . Il est immédiat de voir que

$$(1.12.2) \quad \theta = \sum_{i=1}^d \theta_i \otimes d \log(t_i) \otimes \zeta^{-1}$$

est un $\widehat{R}_1$ -champ de Higgs sur M à coefficients dans $\Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1(-1)$. La correspondance $(M, \varphi) \mapsto (M, \theta)$ ainsi définie est en fait une *équivalence de catégories* entre la catégorie des petites $\widehat{R}_1$ -représentations de Δ_∞ et celle des *petits* $\widehat{R}_1$ -modules de Higgs à coefficients dans $\Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1(-1)$ (c'est à dire, la catégorie des $\widehat{R}_1$ -modules de Higgs à coefficients dans $\Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1(-1)$ dont le $\widehat{R}_1$ -module sous-jacent est projectif de type fini et dont le champ de Higgs est nul modulo $p^{2\alpha}$ pour un entier $\alpha > \frac{1}{p-1}$). Combinée avec l'énoncé précédent de descente (1.11.1), on obtient une équivalence entre la catégorie des petites $\widehat{R}$ -représentations de Δ et celle des *petits* $\widehat{R}_1$ -modules de Higgs à coefficients dans $\Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1(-1)$. L'inconvénient de cette construction est sa dépendance en les $(t_i^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ ($1 \leq i \leq d$), qui exclut toute globalisation. Pour remédier à ce défaut, Faltings propose

une autre définition, équivalente, mais dépendante d'un autre choix qui se globalise facilement. Notre approche, qui fait l'objet de la suite de cette introduction, est inspirée de cette construction.

1.13. Rappelons que Fontaine a introduit une $W(k)$ -extension p -adique canonique $\mathcal{A}_2(\widehat{R})$ de $\widehat{R}$ par un $\widehat{R}$ -module libre de rang un, de sorte qu'on a une suite exacte

$$(1.13.1) \quad 0 \rightarrow \xi \widehat{R} \rightarrow \mathcal{A}_2(\widehat{R}) \xrightarrow{\theta} \widehat{R} \rightarrow 0,$$

où ξ est une $\widehat{R}$ -base du noyau de l'augmentation canonique θ (cf. 7.4). La formation de cette extension est fonctorielle en la paire $(R, \overline{R})$; en particulier, le groupe de Galois de $\overline{R}$ sur R agit naturellement sur $\mathcal{A}_2(\widehat{R})$. Posons $\overline{S} = \text{Spec}(\mathcal{O}_C)$, $\overline{X} = \text{Spec}(\widehat{R})$, $\mathcal{A}_2(\overline{S}) = \text{Spec}(\mathcal{A}_2(\mathcal{O}_C))$ et $\mathcal{A}_2(\overline{X}) = \text{Spec}(\mathcal{A}_2(\widehat{R}))$. On se donne dans la suite une $\mathcal{A}_2(\overline{S})$ -déformation lisse $\tilde{X}$ de $X \times_S \overline{S}$, c'est à dire, un $\mathcal{A}_2(\overline{S})$ -schéma lisse $\tilde{X}$ qui s'insère dans un diagramme cartésien

$$(1.13.2) \quad \begin{array}{ccc} X \times_S \overline{S} & \longrightarrow & \tilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{S} & \longrightarrow & \mathcal{A}_2(\overline{S}) \end{array}$$

C'est la donnée supplémentaire qui remplace les $(t_i^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ ($1 \leq i \leq d$); d'ailleurs, ces derniers fournissent une telle déformation, notée dans la suite $\tilde{X}_0$.

Soit U un ouvert de $\overline{X}$. On note $\tilde{U}$ l'ouvert de $\mathcal{A}_2(\overline{X})$ défini par U . On désigne par $\mathcal{L}_{\tilde{X}}(U)$ l'ensemble des flèches pointillées qui complètent le diagramme

$$(1.13.3) \quad \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \tilde{U} \\ \downarrow & & \vdots \\ X \times_S \overline{S} & \longrightarrow & \tilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{S} & \longrightarrow & \mathcal{A}_2(\overline{S}) \end{array} \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \downarrow \end{array}$$

de façon à le laisser commutatif. Le foncteur $U \mapsto \mathcal{L}_{\tilde{X}}(U)$ est un toreleur pour la topologie de Zariski de $\overline{X}$ sous le $\widehat{R}$ -module $T = \text{Hom}_{\widehat{R}}(\Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}, \xi \widehat{R})$. Il est donc représentable par un $\overline{X}$ -schéma affine

$$(1.13.4) \quad \mathbf{L}_{\tilde{X}} = \text{Spec}(\mathcal{D}_{\tilde{X}}).$$

Le complété faible $\mathcal{D}_{\tilde{X}}^\dagger$ de $\mathcal{D}_{\tilde{X}}$ (cf. 9.1) nous sert de pont entre les représentation généralisées et les modules de Higgs, suivant le schéma classique des correspondances introduites par Fontaine (ou encore plus classique de la correspondance de Riemann Hilbert analytique complexe). Il lui est donc naturellement associée une notion d'admissibilité; c'est la notion de représentation généralisée de Dolbeault. En effet, Δ agit naturellement sur $\mathcal{D}_{\tilde{X}}$ et donc sur $\mathcal{D}_{\tilde{X}}^\dagger$. D'autre part, la dérivation universelle de $\mathcal{D}_{\tilde{X}}$ sur $\widehat{R}$ induit par continuité une $\widehat{R}$ -dérivation $d_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}^\dagger}$ de $\mathcal{D}_{\tilde{X}}^\dagger$, qui est en fait un $\widehat{R}$ -champ de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1$. On peut donc définir les deux foncteurs suivants.

Pour toute $\widehat{R}$ -représentation M de Δ , on note $H_{\widehat{X}}(M)$ le $\widehat{R}_1$ -module de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1$ défini par

$$(1.13.5) \quad H_{\widehat{X}}(M) = (M \otimes_{\widehat{R}} \mathcal{D}_{\widehat{X}}^\dagger)^\Delta.$$

Pour tout $\widehat{R}_1$ -module de Higgs (N, θ) à coefficients dans $\xi^{-1}\Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1$, on désigne par $V_{\widehat{X}}(N)$ la $\widehat{R}$ -représentation de Δ définie par

$$(1.13.6) \quad V_{\widehat{X}}(N) = (N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{D}_{\widehat{X}}^\dagger)^{\theta_{\text{tot}}=0},$$

où $\theta_{\text{tot}} = \theta \otimes \text{id} + \text{id} \otimes d_{\mathcal{D}_{\widehat{X}}^\dagger}$ est le $\widehat{R}_1$ -champ de Higgs total sur $N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{D}_{\widehat{X}}^\dagger$.

Pour pouvoir exploiter pleinement ces foncteurs, nous établissons des résultats d'acyclicité de $\mathcal{D}_{\widehat{X}}^\dagger \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ pour la cohomologie de Dolbeault (9.8) et pour la cohomologie continue de Δ (9.9), généralisant légèrement des résultats antérieurs de Tsuji [43].

1.14. Une $\widehat{R}$ -représentation continue M de Δ est dite *de Dolbeault* si elle satisfait aux conditions suivantes (cf. 10.7) :

- (i) M est un $\widehat{R}$ -module projectif de type fini, muni de la topologie p -adique ;
- (ii) $H_{\widehat{X}}(M)$ est un $\widehat{R}_1$ -module projectif de type fini ;
- (iii) le morphisme canonique

$$(1.14.1) \quad H_{\widehat{X}}(M) \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{D}_{\widehat{X}}^\dagger \rightarrow M \otimes_{\widehat{R}} \mathcal{D}_{\widehat{X}}^\dagger$$

est un isomorphisme.

On définit de même la notion duale de $\widehat{R}_1$ -module de Higgs *soluble* à coefficients dans $\xi^{-1}\Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1$ (cf. 10.10). Il est immédiat de voir que les foncteurs $V_{\widehat{X}}$ et $H_{\widehat{X}}$ induisent des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre, entre la catégorie des $\widehat{R}$ -représentations de Dolbeault de Δ et celle des $\widehat{R}_1$ -modules de Higgs solubles à coefficients dans $\xi^{-1}\Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1$ (cf. 10.13). Nous montrons (11.22) que les petites $\widehat{R}$ -représentations de Δ sont de Dolbeault, que les petits $\widehat{R}_1$ -modules de Higgs sont solubles, et que $V_{\widehat{X}}$ et $H_{\widehat{X}}$ induisent des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre entre les catégories de ces objets. On retrouve en fait la correspondance définie dans 1.12, à une renormalisation près (cf. 11.21).

1.15. On définit les notions de $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentation de *Dolbeault* de Δ et de $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -module de Higgs *soluble* à coefficients dans $\xi^{-1}\Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1$ en calquant les définitions dans les cas entiers (cf. 12.1 et 12.2). Nous montrons que les foncteurs $V_{\widehat{X}}$ et $H_{\widehat{X}}$ induisent des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre, entre la catégorie des $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentations de Dolbeault de Δ et celle des $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -modules de Higgs solubles à coefficients dans $\xi^{-1}\Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1$ (cf. 12.13). Ce résultat est beaucoup plus difficile que son analogue entier (1.14). En effet, il n'est même pas évident a priori que pour un $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -module de Higgs soluble (N, θ) à coefficients dans $\xi^{-1}\Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1$, la représentation $V_{\widehat{X}}(N)$ de Δ est continue pour la topologie p -adique. Pour ce faire, nous procédons par descente pour se ramener à des petits objets, anticipant sur un des thèmes de la seconde partie de cet article.

1.16. Les fonctions “affines” sur le torseur $\mathbf{L}_{\tilde{X}}$ (1.13.4) forment une extension canonique de $\widehat{R}$ -représentations continues de Δ

$$(1.16.1) \quad 0 \rightarrow \widehat{R} \rightarrow \mathcal{F}_{\tilde{X}} \rightarrow \xi^{-1} \Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R} \rightarrow 0,$$

qui détermine entièrement le torseur (cf. 8.7). En effet, l’injection $\mathcal{F}_{\tilde{X}} \rightarrow \mathcal{D}_{\tilde{X}}$ induit un isomorphisme Δ -équivariant de $\widehat{R}$ -algèbres

$$(1.16.2) \quad \lim_{\substack{\longrightarrow \\ n \geq 0}} \mathrm{Sym}_{\widehat{R}}^n(\mathcal{F}_{\tilde{X}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{\tilde{X}},$$

où le système inductif à gauche est défini pour $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{F}_{\tilde{X}}$ par

$$(1.16.3) \quad [x_1 \otimes \dots \otimes x_n] \mapsto [1 \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_n].$$

D’autre part, Faltings a défini une extension canonique de $\widehat{R}$ -représentations de Γ

$$(1.16.4) \quad 0 \rightarrow \rho^{-1} \widehat{R} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}(-1) \rightarrow 0,$$

où ρ est un élément de $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ de valuation $\geq \frac{1}{p-1}$ (cf. 5.21), qui joue un rôle important dans son approche de la théorie de Hodge p -adique. Nous montrons dans 8.21 qu’il existe un morphisme $\widehat{R}$ -linéaire et Δ -équivariant

$$(1.16.5) \quad p^{-\frac{1}{p-1}} \mathcal{F}_{\tilde{X}} \rightarrow \mathcal{E}$$

qui s’insère dans un diagramme commutatif

$$(1.16.6) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & p^{-\frac{1}{p-1}} \widehat{R} & \longrightarrow & p^{-\frac{1}{p-1}} \mathcal{F}_{\tilde{X}} & \longrightarrow & p^{-\frac{1}{p-1}} \xi^{-1} \Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow -c \\ 0 & \longrightarrow & \rho^{-1} \widehat{R} & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}(-1) \longrightarrow 0 \end{array}$$

où c provient d’un isomorphisme canonique $\widehat{R}(1) \xrightarrow{\sim} p^{\frac{1}{p-1}} \xi \widehat{R}$ (7.7.1). Le morphisme (1.16.5) est canonique si l’on prend pour $\tilde{X}$ la déformation $\tilde{X}_0$ (1.13). Il est important de noter que dans le cadre logarithmique qui sera considéré dans cet article, l’extension de Faltings change légèrement de forme puisque le facteur $\rho^{-1} \widehat{R}$ est remplacé par $(\pi\rho)^{-1} \widehat{R}$, où π est une uniformisante de K .

1.17. Partant de l’extension $\mathcal{E}$ de Faltings (1.16.4), Hyodo [24] définit une $\widehat{R}$ -algèbre $\mathcal{S}$ par une limite inductive analogue à (1.16.2). On notera que p étant inversible dans $\mathcal{S}$, il revient au même de partir de $\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$, ce qui correspond à la définition originelle de Hyodo. Pour une $\mathbb{Q}_p$ -représentation continue V de Γ et tout entier i , Hyodo définit le $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -module $D^i(V)$ par

$$(1.17.1) \quad D^i(V) = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{S}(i))^\Gamma.$$

La représentation V est dite de *Hodge-Tate* si elle satisfait aux conditions suivantes :

- (i) V est un $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel de dimension finie, muni de la topologie p -adique.
- (ii) Le morphisme canonique

$$(1.17.2) \quad \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} D^i(V) \otimes_{\widehat{R}[\frac{1}{p}]} \mathcal{S}(-i) \rightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{S}$$

est un isomorphisme.

Le morphisme (1.16.5) explique alors le lien entre notre approche et celle de Hyodo. Il montre que $\mathcal{D}_{\widehat{X}}$ est un modèle entier $\mathcal{S}$. Nous en déduisons dans 13.7 que si V est une $\mathbb{Q}_p$ -représentation de Hodge-Tate de Γ , alors $V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \widehat{R}$ est une $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentation de Dolbeault de Δ , et on a un isomorphisme $\widehat{R}_1$ -linéaire canonique et fonctoriel

$$(1.17.3) \quad H_{\widehat{X}_0}(V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \widehat{R}) \xrightarrow{\sim} \oplus_{i \in \mathbb{Z}} D^i(V) \otimes_{\widehat{R}} \widehat{R}_1(-1),$$

le champ de Higgs sur $H_{\widehat{X}_0}(V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \widehat{R})$ étant induit par les morphismes $\widehat{R}$ -linéaires

$$(1.17.4) \quad D^i(V) \rightarrow D^{i-1}(V) \otimes_R \Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1$$

déduits de la dérivation universelle de $\mathcal{S}$ sur $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$.

En fait, Hyodo a déjà considéré les complexes $\widehat{R}$ -linéaires

$$(1.17.5) \quad D^i(V) \rightarrow D^{i-1}(V) \otimes_R \Omega_{R/\mathcal{O}_K}^1 \rightarrow D^{i-2}(V) \otimes_R \Omega_{R/\mathcal{O}_K}^2 \rightarrow \dots$$

induits par le complexe de de Rham de $\mathcal{S}$ sur $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$, qui prolongent les morphismes (1.17.4). Il a montré que si $f: Y \rightarrow X$ est un morphisme propre et lisse, pour tout entier $m \geq 0$, le faisceau $R^m f_{K*}(\mathbb{Q}_p)$ est de Hodge-Tate de poids compris entre 0 et m ; pour tout $0 \leq i \leq m$, on a un isomorphisme canonique

$$(1.17.6) \quad D^i(R^m f_*(\mathbb{Q}_p)) \xrightarrow{\sim} (R^{m-i} f_* \Omega_{Y/X}^i) \otimes_R \widehat{R};$$

et le complexe (1.17.5) est induit par la classe de Kodaira-Spencer de f . Il s'ensuit en particulier que la correspondance de Simpson p -adique jouit de la même propriété que (1.4).

Nous reprendrons et généraliserons la stratégie de Hyodo dans la seconde partie de ce travail comme suit. Il est facile de définir les images directes supérieures par f des modules de Higgs sur Y , à la Katz-Oda. Nous montrerons alors que la correspondance de Simpson p -adique pour les représentations de Dolbeault est compatible aux images directes supérieures. Nous établissons dans cet article un cas particulier de ce résultat, à savoir le cas absolu (12.22) : la cohomologie du groupe Δ à coefficients dans une $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentation de Dolbeault M s'identifie à la cohomologie du complexe de Dolbeault du $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -module de Higgs associé $H_{\widehat{X}_0}(M)$. C'est l'analogue de l'isomorphisme (1.3.2). Le cas des représentations petites a été établi précédemment par Faltings ([17] §3) et Tsuji ([43] 6.1).

1.18. Cet article est organisé comme suit. La section 2 contient les principales notations et conventions générales. On trouvera en particulier dans 2.16 les définitions relatives aux modules de Higgs. Nous rappelons dans la section 3 quelques notions de géométrie logarithmique qui joueront un rôle important dans la suite du travail, afin de fixer les notations et de donner des repères aux lecteurs non familiers avec cette théorie. Dans la section 4, nous introduisons le cadre logarithmique (4.2), la tour d'anneaux R_n , R_∞ et $\overline{R}$ (4.7), et les groupes de Galois Δ , Δ_∞ et Σ (4.9) utilisés tout le long de l'article. Nous rappelons aussi l'énoncé du théorème de pureté de Faltings (4.14) et nous en déduisons quelques corollaires. La section 5 est consacrée à l'extension de Faltings : la variante au-dessus de $\widehat{R}_\infty$ est donnée dans (5.16.2), et celle au-dessus de $\widehat{R}$ dans (5.21.2). Pour la commodité du lecteur, nous reprenons dans la section 6, avec un peu de détails, le calcul de cohomologie galoisienne dû à Faltings. Nous introduisons dans la section 7 les épaissements infinitésimaux p -adiques de Fontaine, et nous les munissons de structures logarithmiques suivant Tsuji (7.15). La partie la plus originale de cet article commence à partir de la section 8, par l'introduction du toiseur $\mathbf{L}_{\widehat{X}} = \text{Spec}(\mathcal{D}_{\widehat{X}})$ des relèvements du revêtement universel de $\text{Spec}(R \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_C)$ (8.5.3). Le

théorème 8.20 établit un important lien entre ce torseur et l'extension de Faltings. On note $\mathcal{C}$ la $\widehat{R}$ -algèbre du groupe affine sous-jacent au torseur $\mathbf{L}_{\widehat{X}}$. La section 9 est consacrée à l'étude des cohomologies de de Rham et galoisienne du complété faible $\mathcal{C}^\dagger$ de $\mathcal{C}$ (9.8 et 9.9). Dans la section 10, nous définissons les foncteurs $H_{\widehat{X}}$ (10.5.2) et $V_{\widehat{X}}$ (10.8.2) reliant la catégorie des $\widehat{R}$ -représentations de Δ à celle des $\widehat{R}_1$ -modules de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$. Nous y introduisons aussi les notions entières de représentation de Dolbeault (10.7) et de module de Higgs soluble (10.10). La section 11 est consacrée à l'étude des petites représentations entières de Δ (11.1) et des petits $\widehat{R}_1$ -modules de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ (11.2). Elle suit de près l'approche de Faltings [17]. Nous introduisons et étudions les variantes rationnelles des quatre notions précédentes dans la section 12. Nous démontrons en particulier le théorème 12.12 établissant une équivalence entre la catégorie des $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentations de Dolbeault de Δ et la catégorie des $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -modules de Higgs solubles à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$. La dernière section fait le lien avec la théorie de Hyodo pour les représentations de Hodge Tate de Δ .

Remerciements. Cet article n'aurait évidemment pu voir le jour sans les travaux de G. Faltings, en premier lieu celui sur la correspondance de Simpson p -adique [17]. Nous lui exprimons notre profonde reconnaissance. La genèse de ce travail est immédiatement postérieure à un groupe de travail tenu à Rennes en 2008-2009 sur son article [17]. Nous avons pu bénéficier à cette occasion du texte de l'exposé d'O. Brinon [13] et du travail de T. Tsuji [43] présentant sa propre approche de la correspondance de Simpson p -adique. Ces deux textes nous ont été extrêmement utiles et nous sommes reconnaissants à leurs auteurs de les avoir spontanément mis à notre disposition. Nous remercions aussi O. Brinon, G. Faltings et T. Tsuji pour tous les échanges que nous avons eus avec eux sur des questions relatives à ce travail, et A. Ogus pour les discussions éclairantes que nous avons eues avec lui sur son travail avec V. Vologodsky [33]. Le premier auteur (A.A.) remercie le Centre Émile Borel à Institut Henri Poincaré, l'Institut des Hautes Études Scientifiques et l'Université de Tokyo pour leur hospitalité. Il remercie également les auditeurs d'un cours qu'il a donné sur ce sujet à l'Université de Tokyo durant l'automne 2010 dont les questions et remarques ont été précieuses pour mettre au point ce travail.

2. NOTATIONS ET CONVENTIONS

Tous les anneaux considérés dans cet article possèdent un élément unité; les homomorphismes d'anneaux sont toujours supposés transformer l'élément unité en l'élément unité; un sous-anneau d'un anneau A est supposé contenir l'élément unité de A . Nous considérons surtout des anneaux commutatifs, et lorsque nous parlons d'anneau sans préciser, il est sous-entendu qu'il s'agit d'un anneau commutatif.

2.1. Dans cet article, p désigne un nombre premier, K un corps de valuation discrète complet de caractéristique 0, à corps résiduel parfait k de caractéristique p , $\overline{K}$ une clôture algébrique de K . On note $\mathcal{O}_K$ l'anneau de valuation de K , $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ la clôture intégrale de $\mathcal{O}_K$ dans $\overline{K}$, $\mathfrak{m}_{\overline{K}}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$, $\overline{k}$ le corps résiduel de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ et v la valuation de $\overline{K}$ normalisée par $v(p) = 1$. On désigne par $\mathcal{O}_C$ le séparé complété p -adique de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$, par C son corps de fractions et par $\mathfrak{m}_C$ son idéal maximal.

On choisit un système compatible $(\beta_n)_{n>0}$ de racines n -ièmes de p dans $\mathcal{O}_{\overline{K}}$. Pour tout nombre rationnel $\varepsilon > 0$, on pose $p^\varepsilon = (\beta_n)^{\varepsilon n}$ où n est entier > 0 tel que εn soit entier.

On désigne par $G_K = \text{Gal}(\overline{K}/K)$ le groupe de Galois de $\overline{K}$ sur K et par $\widehat{\mathbb{Z}}(1)$ et $\mathbb{Z}_p(1)$ les $\mathbb{Z}[G_K]$ -modules

$$(2.1.1) \quad \widehat{\mathbb{Z}}(1) = \varprojlim_{n \geq 1} \mu_n(\mathcal{O}_{\overline{K}}),$$

$$(2.1.2) \quad \mathbb{Z}_p(1) = \varprojlim_{n \geq 0} \mu_{p^n}(\mathcal{O}_{\overline{K}}),$$

où $\mu_n(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ désigne le sous-groupe des racines n -ièmes de l'unité dans $\mathcal{O}_{\overline{K}}$. Pour tout $\mathbb{Z}_p[G_K]$ -module M et tout entier n , on pose $M(n) = M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(1)^{\otimes n}$.

2.2. Pour tout anneau A , on note $\text{Mod}(A)$ la catégorie des A -modules. Pour tout groupe abélien M , on note $\widehat{M}$ son séparé complété p -adique.

2.3. On munit $\mathbb{Z}_p$ de la topologie p -adique, ainsi que toutes les $\mathbb{Z}_p$ -algèbres adiques (*i.e.*, les $\mathbb{Z}_p$ -algèbres complètes et séparées pour la topologie p -adique). Soient A une $\mathbb{Z}_p$ -algèbre adique, $i: A \rightarrow A[\frac{1}{p}]$ l'homomorphisme canonique. On appelle *topologie p -adique* sur $A[\frac{1}{p}]$ l'unique topologie compatible avec sa structure de groupe additif pour laquelle les sous-groupes $i(p^n A)$, pour $n \in \mathbb{N}$, forment un système fondamental de voisinages de 0 ([11] chap. III §1.2, prop. 1). Soient M un $A[\frac{1}{p}]$ -module de type fini, M° un sous- A -module de type fini de M qui l'engendre sur $A[\frac{1}{p}]$. On appelle *topologie p -adique* sur M l'unique topologie compatible avec sa structure de groupe additif pour laquelle les sous-groupes $p^n M^\circ$, pour $n \in \mathbb{N}$, forment un système fondamental de voisinages de 0. Cette topologie ne dépend pas du choix de M° . En effet, si M' est un autre sous- A -module de type fini de M qui l'engendre sur $A[\frac{1}{p}]$, alors il existe $m \geq 0$ tel que $p^m M^\circ \subset M'$ et $p^m M' \subset M^\circ$. Il est clair que M est un $A[\frac{1}{p}]$ -module topologique.

2.4. Soient G un groupe topologique, A un anneau topologique muni d'une action continue de G par des homomorphismes d'anneaux. Une A -représentation de G est la donnée d'un A -module M et d'une action A -semi-linéaire de G sur M , *i.e.*, telle que pour tous $g \in G$, $a \in A$ et $m \in M$, on ait

$$(2.4.1) \quad g(am) = g(a)g(m).$$

On dit que la A -représentation est continue si M est un A -module topologique et si l'action de G est continue. Soient M, N deux A -représentations (resp. deux A -représentations continues) de G . Un morphisme de M dans N est la donnée d'un morphisme A -linéaire et G -équivariant (resp. A -linéaire, continu et G -équivariant) de M dans N . Les A -représentations de G forment une catégorie, et les A -représentations continues de G forment une sous-catégorie; on les note respectivement $\text{Rep}_A(G)$ et $\text{Rep}_A^{\text{cont}}(G)$. Si M et N sont deux A -représentations de G , les A -modules $M \otimes_A N$ et $\text{Hom}_A(M, N)$ sont naturellement des A -représentations de G .

2.5. Soient G un groupe profini, A un anneau que l'on munit de la topologie discrète et de l'action triviale de G . Les objets de $\text{Rep}_A^{\text{cont}}(G)$ sont appelés des A - G -modules topologiques. Un A - G -module topologique dont la topologie est discrète est appelé A - G -module discret. On désigne par $\text{Rep}_A^{\text{disc}}(G)$ la sous-catégorie pleine de $\text{Rep}_A^{\text{cont}}(G)$ formée des A - G -modules discrets. Soit M un A - G -module topologique. On note $C_{\text{cont}}^\bullet(G, M)$ le complexe de *cochaînes continues* de G dans M : $C_{\text{cont}}^n(G, M)$ est l'ensemble de toutes les applications continues de G^n dans M , et la différentielle

$d: C_{\text{cont}}^n(G, M) \rightarrow C_{\text{cont}}^{n+1}(G, M)$ est définie par la formule

$$(2.5.1) \quad \begin{aligned} d(f)(g_1, \dots, g_{n+1}) &= g_1 \cdot f(g_2, \dots, g_{n+1}) \\ &+ \sum_{i=1}^n f(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{n+1}) \\ &+ (-1)^{n+1} f(g_1, \dots, g_n). \end{aligned}$$

Les groupes de cohomologie $H_{\text{cont}}^q(G, M)$ de $C_{\text{cont}}^\bullet(G, M)$ sont appelés les groupes de *cohomologie continue* de G à coefficients dans M . Lorsque la topologie de M est discrète, on omet l'indice “cont” des notations. On a alors un isomorphisme canonique fonctoriel dans $\mathbf{D}^+(\text{Mod}(A))$

$$(2.5.2) \quad R\Gamma(G, M) \xrightarrow{\sim} C^\bullet(G, M).$$

Lemme 2.6. *Soient A un anneau, G un groupe profini, M un A - G -module discret, N un A -module plat. Alors le morphisme canonique*

$$(2.6.1) \quad H^q(G, M) \otimes_A N \rightarrow H^q(G, M \otimes_A N)$$

est un isomorphisme pour tout $q \geq 0$.

En effet, comme N est A -plat, pour tout sous-groupe H de G , le morphisme canonique

$$M^H \otimes_A N \rightarrow (M \otimes_A N)^H$$

est un isomorphisme. D'autre part, pour tout $q \geq 0$, on a un isomorphisme canonique

$$H^q(G, M) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_H H^q(G/H, M^H),$$

où H parcourt l'ensemble des sous-groupes ouverts distingués de G ; et de même pour $M \otimes_A N$. On peut donc se réduire au cas où G est fini. Soit

$$\cdots \rightarrow P_i \rightarrow P_{i-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

une résolution du $\mathbb{Z}[G]$ -module $\mathbb{Z}$ par des $\mathbb{Z}[G]$ -modules libres de type fini. Alors $H^*(G, M)$ s'identifie à la cohomologie du complexe de cochaînes $\text{Hom}_G(P_\bullet, M)$. La proposition résulte du fait que pour tout $i \geq 0$, le morphisme canonique

$$\text{Hom}_G(P_i, M) \otimes_A N \rightarrow \text{Hom}_G(P_i, M \otimes_A N)$$

est un isomorphisme puisque P_i est libre de type fini sur $\mathbb{Z}[G]$.

2.7. Soit G un groupe profini. Un G -ensemble est un espace topologique discret muni d'une action continue de G . Les G -ensembles forment naturellement une catégorie. Un G -groupe M est un groupe de cette catégorie. On lui associe son sous-groupe des G -invariants $H^0(G, M) = M^G$ et son premier ensemble de cohomologie $H^1(G, M)$; on renvoie à ([34] I §5) pour la définition et les principales propriétés de cet ensemble pointé.

2.8. Soient G un groupe profini, A un anneau muni de la topologie discrète et d'une action continue de G , M un A -module libre de rang $r \geq 1$, muni de la topologie discrète, $(e_1, \dots, e_r)$ une base de M sur A . On note $\text{Mat}_r(A)$ la A -algèbre des matrices carrées de taille r à coefficients dans A et $\text{GL}_r(A)$ le groupe des éléments inversibles de $\text{Mat}_r(A)$. On observera que $\text{GL}_r(A)$ est naturellement un G -groupe. La donnée d'une A -représentation continue ρ de G sur M est équivalente à la donnée pour tout $g \in G$ d'un élément U_g de $\text{GL}_r(A)$ tel que l'application $g \mapsto U_g$ soit continue et que pour tout $g, h \in G$, on ait

$$(2.8.1) \quad U_{gh} = U_g \cdot {}^g U_h.$$

La matrice U_g exprime alors les coordonnées des vecteurs $e_1, \dots, e_r$ dans la base $g(e_1), \dots, g(e_r)$. Un changement de la base $(e_i)_{1 \leq i \leq r}$ change le cocycle $g \mapsto U_g$ en un cocycle cohomologue. L'application qui à ρ associe la classe $[\rho]$ du cocycle $g \mapsto U_g$ dans $H^1(G, \mathrm{GL}_r(A))$ est une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphismes de A -représentations continues de G sur M , dans l'ensemble $H^1(G, \mathrm{GL}_r(A))$. La A -représentation de G sur M qui fixe les $(e_i)_{1 \leq i \leq r}$ correspond à l'élément distingué de $H^1(G, \mathrm{GL}_r(A))$.

Soient $a \in A^G$ tel que a soit nilpotent dans A , ρ une A -représentation de G sur M telle que $\rho(g)(e_i) - e_i \in aM$ pour tous $g \in G$ et $1 \leq i \leq r$. Alors le cocycle $g \mapsto U_g$ défini ci-dessus prend ses valeurs dans le sous-groupe $\mathrm{id}_r + a\mathrm{Mat}_r(A)$ de $\mathrm{GL}_r(A)$. Si on change la base $(e_i)_{1 \leq i \leq r}$ en une base $(e'_i)_{1 \leq i \leq r}$ telle que $e'_i - e_i \in aM$ pour tout $1 \leq i \leq r$, le cocycle $g \mapsto U_g$ se transforme en un cocycle cohomologue dans $\mathrm{id}_r + a\mathrm{Mat}_r(A)$. L'application qui à ρ associe la classe $[\rho]$ du cocycle $g \mapsto U_g$ dans $H^1(G, \mathrm{id}_r + a\mathrm{Mat}_r(A))$ est une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphismes de A -représentations continues de G sur M qui fixent e_i modulo aM pour tout $1 \leq i \leq r$, par des isomorphismes qui fixent e_i modulo aM pour tout $1 \leq i \leq r$, dans l'ensemble $H^1(G, \mathrm{id}_r + a\mathrm{Mat}_r(A))$.

2.9. Soient G un groupe profini, A un anneau muni d'une action de G , $a \in A^G$, m, n, q, r des entiers ≥ 1 tels que $q \geq n \geq m$ et $m + n \geq q$. Supposons que l'action de G sur A soit continue pour la topologie a -adique et que la multiplication par a^n dans A induise un isomorphisme

$$(2.9.1) \quad A/a^{q-n}A \xrightarrow{\sim} a^n A/a^q A.$$

La seconde condition est remplie par exemple si a n'est pas un diviseur dans A . Considérons la suite exacte canonique de G -groupes

$$(2.9.2) \quad 1 \rightarrow \mathrm{id}_r + a^n \mathrm{Mat}_r(A/a^q A) \rightarrow \mathrm{id}_r + a^m \mathrm{Mat}_r(A/a^q A) \rightarrow \mathrm{id}_r + a^m \mathrm{Mat}_r(A/a^n A) \rightarrow 1.$$

Alors $\mathrm{id}_r + a^n \mathrm{Mat}_r(A/a^q A)$ est contenu dans le centre de $\mathrm{id}_r + a^m \mathrm{Mat}_r(A/a^q A)$. D'autre part, d'après (2.9.1), on a un isomorphisme canonique de G -groupes abéliens

$$(2.9.3) \quad \mathrm{Mat}_r(A/a^{q-n}A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_r + a^n \mathrm{Mat}_r(A/a^q A).$$

D'après ([34] I prop. 43), on a une suite exacte canonique d'ensembles pointés

$$(2.9.4) \quad H^1(G, \mathrm{Mat}_r(A/a^{q-n}A)) \longrightarrow H^1(G, \mathrm{id}_r + a^m \mathrm{Mat}_r(A/a^q A)) \longrightarrow H^1(G, \mathrm{id}_r + a^m \mathrm{Mat}_r(A/a^n A)) \xrightarrow{\partial} H^2(G, \mathrm{Mat}_r(A/a^{q-n}A)).$$

2.10. Conservons les hypothèses de (2.9), soient de plus N un $(A/a^q A)$ -module libre de rang r , $f_1, \dots, f_r$ une base de N , ρ, ρ' deux représentations continues de G sur N (muni de la topologie discrète) telles que $\rho(g)(f_i) - f_i \in a^m N$ et $\rho'(g)(f_i) - f_i \in a^m N$ pour tous $g \in G$ et $1 \leq i \leq r$. Notons $g \mapsto V_g$ et $g \mapsto V'_g$ les cocycles de G à valeurs dans $\mathrm{id}_r + a^m \mathrm{Mat}_r(A/a^q A)$ associés à N et N' , respectivement, par le choix de la base $(f_i)_{1 \leq i \leq r}$. En vertu de (2.9.4) et ([34] I prop. 42), les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe un automorphisme A -linéaire

$$(2.10.1) \quad u: N/a^n N \xrightarrow{\sim} N/a^n N$$

tel que $u \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ u$ pour tout $g \in G$ et que $u(f_i) - f_i \in a^m N$ pour tout $1 \leq i \leq r$.

(ii) Il existe un cocycle $g \mapsto W_g$ de G à valeurs dans $\mathrm{Mat}_r(A/a^{q-n}A)$ et une matrice $U \in \mathrm{id}_r + a^m \mathrm{Mat}_r(A/a^q A)$ tels que pour tout $g \in G$, on ait (2.9.3)

$$(2.10.2) \quad V'_g = U^{-1}(\mathrm{id}_r + a^n W_g)V_g^g U.$$

Nous dirons alors que ρ' est déduit de ρ par torsion par le cocycle $g \mapsto W_g$. Deux cocycles cohomologues définissent des représentations isomorphes par un isomorphisme compatible à (2.10.1). Nous dirons alors aussi que ρ' est déduit de ρ par torsion par la classe $\mathfrak{c} \in H^1(G, \text{Mat}_r(A/a^{q-n}A))$ du cocycle $g \mapsto W_g$.

Soient n', m', q' des entiers ≥ 1 tels que $n \geq n' \geq m'$, $m \geq m' \geq q - n$ et $q' = q - n + n'$. Supposons que la multiplication par $a^{n'}$ dans A induise un isomorphisme

$$(2.10.3) \quad A/a^{q'-n'}A \xrightarrow{\sim} a^{n'}A/a^{q'}A.$$

On a alors un diagramme commutatif

$$(2.10.4) \quad \begin{array}{ccccc} \text{Mat}_r(A/a^{q-n}A) & \longrightarrow & \text{id}_r + a^m \text{Mat}_r(A/a^qA) & \longrightarrow & \text{id}_r + a^m \text{Mat}_r(A/a^nA) \\ \downarrow \cdot a^{n-n'} & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ \text{Mat}_r(A/a^{q'-n'}A) & \longrightarrow & \text{id}_r + a^{m'} \text{Mat}_r(A/a^{q'}A) & \longrightarrow & \text{id}_r + a^{m'} \text{Mat}_r(A/a^{n'}A) \end{array}$$

où les lignes correspondent aux suites exactes (2.9.2) et α et β sont induits par les homomorphismes de réduction $A/a^qA \rightarrow A/a^{q'}A$ et $A/a^nA \rightarrow A/a^{n'}A$. Par suite, si ρ' se déduit de ρ par torsion par une classe $\mathfrak{c} \in H^1(G, \text{Mat}_r(A/a^{q-n}A))$, la représentation induite par ρ' sur $N/a^{q'}N$ se déduit de celle induite par ρ sur $N/a^{q'}N$ par torsion par la classe

$$(2.10.5) \quad a^{n-n'} \cdot \mathfrak{c} \in H^1(G, \text{Mat}_r(A/a^{q'-n'}A)).$$

2.11. Conservons les hypothèses de (2.9), soient de plus M un (A/a^nA) -module libre de rang r , $e_1, \dots, e_r$ une base de M , ρ une représentation continue de G sur M (muni de la topologie discrète) telle que $\rho(g)(e_i) - e_i \in a^mM$ pour tous $g \in G$ et tous $1 \leq i \leq r$. On note $g \mapsto U_g$ le cocycle de G à valeurs dans $\text{id}_r + a^m \text{Mat}_r(A/a^nA)$ associé à M par le choix de la base $(e_i)_{1 \leq i \leq r}$, et $[M]$ sa classe dans $H^1(G, \text{id}_r + a^m \text{Mat}_r(A/a^nA))$. En vertu de (2.9.4) et ([34] I prop. 41), la classe

$$(2.11.1) \quad \partial([M]) \in H^2(G, \text{Mat}_r(A/a^{q-n}A))$$

est l'obstruction à relever M en une (A/a^qA) -représentation continue de G dont le (A/a^qA) -module sous-jacent est libre de type fini.

Soient n' un entier tel que $n \geq n' \geq m$, $q' = q - n + n'$ et que la multiplication par $a^{n'}$ dans A induise un isomorphisme

$$(2.11.2) \quad A/a^{q'-n'}A \xrightarrow{\sim} a^{n'}A/a^{q'}A.$$

On note

$$(2.11.3) \quad \partial' : H^1(G, \text{id}_r + a^m \text{Mat}_r(A/a^{n'}A)) \rightarrow H^2(G, \text{End}_A(M/a^{q'-n'}M))$$

l'application bord définie comme dans (2.9.4). Par functorialit  , on a

$$(2.11.4) \quad \partial'([M/a^{n'}M]) = a^{n-n'} \partial([M]).$$

2.12. Pour toute catégorie abélienne $\mathcal{A}$, on note $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ la catégorie des systèmes projectifs de $\mathcal{A}$ indexés par l'ensemble ordonné $\mathbb{N}$. Alors $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ est une catégorie abélienne, dont les noyaux et les conoyaux se calculent composante par composante. Si $\mathcal{A}$ a suffisamment d'injectifs, il en est de même de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ ([26] 1.1) ; un objet $(A_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ est injectif si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n est injectif et $d_n : A_{n+1} \rightarrow A_n$ est inversible à gauche.

Soit $h : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur exact à gauche entre catégories abéliennes. On note $h^{\mathbb{N}} : \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ son prolongement naturel. Supposons que $\mathcal{A}$ ait suffisamment d'injectifs. Alors $R^i h^{\mathbb{N}} = (R^i h)^{\mathbb{N}}$

pour tout $i \geq 0$ ([26] 1.2). Supposons de plus que les limites projectives indexées par $\mathbb{N}$ soient représentables dans $\mathcal{B}$. On désigne alors par

$$(2.12.1) \quad \lim_{\leftarrow n} h: \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{B}$$

le foncteur qui associe à $(A_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la limite projective

$$(2.12.2) \quad \lim_{\leftarrow n} (h(A_n), h(d_n)),$$

et par

$$(2.12.3) \quad R^+(\lim_{\leftarrow n} h)$$

son foncteur dérivé à droite. Si h transforme les injectifs en injectifs, il en est de même de $h^{\mathbb{N}}$. Si de plus le foncteur dérivé à droite $R^+(\lim_{\leftarrow n})$ du foncteur

$$(2.12.4) \quad \lim_{\leftarrow n}: \mathcal{B}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{B}$$

existe, on a alors un isomorphisme canonique

$$(2.12.5) \quad R^+(\lim_{\leftarrow n} h) \xrightarrow{\sim} R^+(\lim_{\leftarrow n}) \circ (R^+h)^{\mathbb{N}}.$$

2.13. Soient G un groupe topologique, A un anneau. Les catégories $\text{Mod}(A)$ et $\text{Rep}_A^{\text{disc}}(G)$ admettent suffisamment d'injectifs. Les limites projectives dans $\text{Mod}(A)$ sont représentables, le foncteur

$$(2.13.1) \quad \lim_{\leftarrow n}: \text{Mod}(A)^{\mathbb{N}} \rightarrow \text{Mod}(A)$$

admet un foncteur dérivé à droite, et on a $R^i(\lim_{\leftarrow n}) = 0$ pour tout $i \geq 2$ (cf. [26] 1.4). Si $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système projectif de A -modules vérifiant la condition de Mittag-Leffler, on a ([26] 1.15)

$$(2.13.2) \quad R^1 \lim_{\leftarrow n} N_n = 0.$$

On désigne par

$$(2.13.3) \quad \Gamma(G, -): (\text{Rep}_A^{\text{disc}}(G))^{\mathbb{N}} \rightarrow \text{Mod}(A)$$

le foncteur $\lim_{\leftarrow n} \Gamma(G, -)$ (2.12.1) et par $R^+ \Gamma(G, -)$ son foncteur dérivé à droite. Pour tout système projectif $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\text{Rep}_A^{\text{disc}}(G)$ et pour tout entier $i \geq 0$, on a, d'après (2.12.5), une suite exacte

$$(2.13.4) \quad 0 \rightarrow R^1 \lim_{\leftarrow n} H^{i-1}(G, M_n) \rightarrow H^i(G, (M_n)_{n \in \mathbb{N}}) \rightarrow \lim_{\leftarrow n} H^i(G, M_n) \rightarrow 0.$$

Supposons que $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la condition de Mittag-Leffler et notons M sa limite projective en tant que A - G -module topologique. D'après ([26] 2.2), on a un isomorphisme canonique dans $\mathbf{D}^+(\text{Mod}(A))$

$$(2.13.5) \quad C_{\text{cont}}^{\bullet}(G, M) \xrightarrow{\sim} R^+ \Gamma(G, (M_n)_{n \in \mathbb{N}}).$$

2.14. Soient A un anneau, L un A -module, $u: L \rightarrow A$ une forme linéaire, $\wedge(L)$ l'algèbre extérieure de L . Pour tout $x \in \wedge(L)$, on note $d_u(x)$ le produit intérieur de x et u ([8] III § 11.7 exemple page 161). D'après (*loc. cit.* page 162), on a

$$(2.14.1) \quad d_u(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} u(x_i) x_1 \wedge \cdots \wedge x_{i-1} \wedge x_{i+1} \wedge \cdots \wedge x_n$$

pour $x_1, \dots, x_n \in L$. L'application $d_u: \wedge(L) \rightarrow \wedge(L)$ est une anti-dérivation de degré -1 et de carré nul ([8] III § 11.8 exemple page 165). L'algèbre $\wedge(L)$ munie de l'anti-dérivation d_u s'appelle algèbre (ou complexe) de Koszul de u . On la note $\mathbb{K}_\bullet^A(u)$; on a donc $\mathbb{K}_n^A(u) = \wedge^n L$ et les différentielles de $\mathbb{K}_\bullet^A(u)$ sont de degré -1 (cf. [9] § 9.1).

Pour tout complexe de A -modules C , on définit le complexe de chaînes ([9] § 5.1)

$$(2.14.2) \quad \mathbb{K}_\bullet^A(u, C) = \mathbb{K}_\bullet^A(u) \otimes_A C$$

et le complexe de cochaînes

$$(2.14.3) \quad \mathbb{K}_A^\bullet(u, C) = \text{Homgr}_A(\mathbb{K}_\bullet^A(u), C).$$

D'après ([9] § 9.1 cor. 2 de prop. 1), si $\text{Ann}(C)$ est l'annulateur de C , alors $u(L) + \text{Ann}(C)$ annule $H^*(\mathbb{K}_A^\bullet(u, C))$ et $H_*(\mathbb{K}_\bullet^A(u, C))$.

Supposons que L soit somme directe de $L_1, \dots, L_r$ et notons $u_i: L_i \rightarrow A$ la restriction de u à L_i . Alors l'isomorphisme canonique ([8] III § 7.7 prop. 10)

$$(2.14.4) \quad {}^g\otimes_{1 \leq i \leq r} \wedge(L_i) \xrightarrow{\sim} \wedge(L)$$

est un isomorphisme de complexes $\otimes_{1 \leq i \leq r} \mathbb{K}_\bullet^A(u_i) \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}_\bullet^A(u)$, où le symbole ${}^g\otimes$ désigne le produit tensoriel gauche (cf. [8] III § 4.7 remarques page 49).

Comme d_u est une anti-dérivation, le produit dans l'algèbre $\wedge(L)$ induit un morphisme de complexes

$$(2.14.5) \quad \mathbb{K}_\bullet^A(u) \otimes_A \mathbb{K}_\bullet^A(u) \rightarrow \mathbb{K}_A^\bullet(A).$$

Supposant L projectif de rang n et composant avec le morphisme canonique $\mathbb{K}_A^\bullet(A) \rightarrow \wedge^n L[-n]$, on en déduit un morphisme de complexes

$$(2.14.6) \quad \mathbb{K}_\bullet^A(u) \rightarrow \text{Homgr}_A(\mathbb{K}_\bullet^A(u), \wedge^n L[-n]),$$

qui est bijectif ([8] III § 7.8 page 87). Pour tout complexe de A -modules C , on en déduit un isomorphisme de complexes ([9] § 9.1 page 149)

$$(2.14.7) \quad \mathbb{K}_\bullet^A(u, C) \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}_A^\bullet(u, C \otimes_A \wedge^n L[-n]).$$

Par passage à l'homologie, on a donc, pour tout entier i , un isomorphisme

$$(2.14.8) \quad H_i(\mathbb{K}_\bullet^A(u, C)) \xrightarrow{\sim} H^{n-i}(\mathbb{K}_A^\bullet(u, C \otimes_A \wedge^n L)).$$

2.15. Soient A un anneau, L un A -module, $S(L)$ l'algèbre symétrique de L , $u: S(L) \otimes_A L \rightarrow S(L)$ la forme linéaire telle que $u(s \otimes x) = sx$ pour $s \in S(L)$ et $x \in L$. Par l'isomorphisme canonique ([8] III § 7.5 prop. 8)

$$(2.15.1) \quad \wedge(S(L) \otimes_A L) \xrightarrow{\sim} S(L) \otimes_A \wedge(L),$$

la différentielle de $\mathbb{K}_{\bullet}^{S(L)}(u)$ est transportée en l'application $d: S(L) \otimes_A \wedge(L) \rightarrow S(L) \otimes_A \wedge(L)$ définie pour $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$ de L par

$$(2.15.2) \quad d((x_1 \dots x_n) \otimes (y_1 \wedge \dots \wedge y_m)) \\ = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+1} y_i x_1 \dots x_n \otimes (y_1 \wedge \dots \wedge y_{i-1} \wedge y_{i+1} \wedge \dots \wedge y_m).$$

Pour tout complexe de $S(L)$ -modules C , on pose

$$(2.15.3) \quad \mathbb{K}_{\bullet}^{S(L)}(C) = \mathbb{K}_{\bullet}^{S(L)}(u, C),$$

$$(2.15.4) \quad \mathbb{K}_{S(L)}^{\bullet}(C) = \mathbb{K}_{S(L)}^{\bullet}(u, C),$$

(le morphisme u étant canonique, peut être omis de la notation).

Soient L' un A -module, $u': S(L') \otimes_A L' \rightarrow S(L')$ la forme linéaire telle que $u'(s' \otimes x') = s'x'$ pour $s' \in S(L')$ et $x' \in L'$. L'isomorphisme (2.14.4) induit un isomorphisme

$$(2.15.5) \quad (S(L) \otimes_A \wedge(L))^g \boxtimes_A (S(L') \otimes_A \wedge(L')) \xrightarrow{\sim} S(L \oplus L') \otimes_A \wedge(L \oplus L'),$$

où le produit tensoriel extérieur gauche est pris relativement au diagramme co-cartésien canonique

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & S(L) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S(L') & \longrightarrow & S(L \oplus L') \end{array}$$

Il résulte de (2.15.2) que (2.15.5) est un isomorphisme de complexes

$$(2.15.6) \quad \mathbb{K}_{\bullet}^{S(L)}(u)^g \boxtimes_A \mathbb{K}_{\bullet}^{S(L')}(u') \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}_{\bullet}^{S(L \oplus L')}(u \oplus u').$$

On en déduit, pour tout complexe de $S(L \oplus L')$ -modules C , des isomorphismes de complexes

$$(2.15.7) \quad \mathbb{K}_{\bullet}^{S(L \oplus L')}(C) \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}_{\bullet}^{S(L)}(\mathbb{K}_{\bullet}^{S(L')}(C)),$$

$$(2.15.8) \quad \mathbb{K}_{S(L \oplus L')}^{\bullet}(C) \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}_{S(L)}^{\bullet}(\mathbb{K}_{S(L')}^{\bullet}(C)).$$

Définition 2.16. Soient X un schéma, $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_X$ -module, $\mathcal{A}$ une $\mathcal{O}_X$ -algèbre.

(i) On appelle $\mathcal{A}$ -module de Higgs à coefficients dans $\mathcal{E}$ un couple $(\mathcal{M}, \theta)$ formé d'un $\mathcal{A}$ -module $\mathcal{M}$ et d'un morphisme $\mathcal{A}$ -linéaire

$$(2.16.1) \quad \theta: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}$$

tel que $\theta \wedge \theta = 0$. On dit alors que θ est un $\mathcal{A}$ -champ de Higgs sur $\mathcal{M}$ à coefficients dans $\mathcal{E}$.

(ii) Si $(\mathcal{M}_1, \theta_1)$ et $(\mathcal{M}_2, \theta_2)$ sont deux $\mathcal{A}$ -modules de Higgs, un morphisme de $(\mathcal{M}_1, \theta_1)$ dans $(\mathcal{M}_2, \theta_2)$ est un morphisme $\mathcal{A}$ -linéaire $u: \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ tel que $(u \otimes \text{id}_{\mathcal{E}}) \circ \theta_1 = \theta_2 \circ u$.

Les $\mathcal{A}$ -modules de Higgs à coefficients dans $\mathcal{E}$ forment une catégorie que l'on note $\text{MH}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A})$. On peut compléter la terminologie et faire les remarques suivantes.

2.16.2. Soit $(\mathcal{M}, \theta)$ un $\mathcal{A}$ -module de Higgs à coefficients dans $\mathcal{E}$. Pour tout $i \geq 1$, on pose

$$(2.16.3) \quad \theta_i: \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \wedge^i \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \wedge^{i+1} \mathcal{E}$$

le morphisme $\mathcal{A}$ -linéaire défini pour toutes sections locales m de $\mathcal{M}$ et ω de $\wedge^i \mathcal{E}$ par $\theta_i(m \otimes \omega) = \theta(m) \wedge \omega$. On a $\theta_{i+1} \circ \theta_i = 0$. On appelle complexe de Dolbeault de $(\mathcal{M}, \theta)$ et l'on note $\mathbb{K}^{\bullet}(\mathcal{M}, \theta)$ le complexe de cochaînes de $\mathcal{A}$ -modules

$$(2.16.4) \quad \mathcal{M} \xrightarrow{\theta} \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \xrightarrow{\theta_1} \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \wedge^2 \mathcal{E} \dots,$$

où $\mathcal{M}$ est placé en degré 0 et les différentielles sont de degré 1.

2.16.5. Soient $(\mathcal{M}, \theta)$ un $\mathcal{A}$ -module de Higgs à coefficients dans $\mathcal{E}$ tel que $\mathcal{M}$ soit un $\mathcal{A}$ -module projectif de type fini. Considérons, pour un entier $i \geq 1$, le morphisme composé

$$(2.16.6) \quad \wedge^i \mathcal{M} \xrightarrow{\wedge^i \theta} \wedge^i (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}) \longrightarrow \wedge^i \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} S^i \mathcal{E},$$

où le second morphisme est le morphisme canonique ([25] V 4.5). On appelle *i-ième invariant caractéristique* de θ et l'on note $\lambda_i(\theta)$ la trace du morphisme (2.16.6) vue comme section de

$$(2.16.7) \quad \Gamma(X, \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} S^i \mathcal{E}).$$

2.16.8. Soient $(\mathcal{M}_1, \theta_1), (\mathcal{M}_2, \theta_2)$ deux $\mathcal{A}$ -modules de Higgs à coefficients dans $\mathcal{E}$. On appelle champ de Higgs *total* sur $\mathcal{M}_1 \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}_2$ le morphisme $\mathcal{A}$ -linéaire

$$(2.16.9) \quad \theta_{\text{tot}} : \mathcal{M}_1 \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{M}_1 \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}_2 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}$$

défini par

$$(2.16.10) \quad \theta_{\text{tot}} = \theta_1 \otimes_{\mathcal{A}} \text{id}_{\mathcal{M}_2} + \text{id}_{\mathcal{M}_1} \otimes_{\mathcal{A}} \theta_2.$$

On dit que $(\mathcal{M}_1 \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}_2, \theta_{\text{tot}})$ est le *produit tensoriel* de $(\mathcal{M}_1, \theta_1)$ et $(\mathcal{M}_2, \theta_2)$.

2.16.11. Supposons $\mathcal{E}$ localement libre de type fini sur $\mathcal{O}_X$ et posons $\mathcal{F} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)$. Pour tout $\mathcal{A}$ -module $\mathcal{M}$, le morphisme canonique

$$(2.16.12) \quad \mathcal{E}nd_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E})$$

étant un isomorphisme, la donnée d'un $\mathcal{A}$ -champ de Higgs θ sur $\mathcal{M}$ est équivalente à la donnée d'une structure de $S(\mathcal{F})$ -module sur $\mathcal{M}$ compatible avec sa structure de $\mathcal{O}_X$ -module. D'autre part, en vertu de ([8] § 11.5 prop. 7), le $\mathcal{O}_X$ -module $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\wedge(\mathcal{F}), \mathcal{O}_X)$ s'identifie à l'algèbre duale graduée de $\wedge(\mathcal{F})$, et on a un isomorphisme canonique d'algèbres graduées

$$(2.16.13) \quad \wedge(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\wedge(\mathcal{F}), \mathcal{O}_X).$$

On vérifie que celui-ci induit un isomorphisme de complexes de $\mathcal{A}$ -modules

$$(2.16.14) \quad \mathbb{K}^\bullet(\mathcal{M}, \theta) \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}_{S(\mathcal{F})}^\bullet(\mathcal{M}).$$

2.17. Soit X une variété projective lisse complexe. Un fibré harmonique sur X est la donnée d'un triplet $(M, D, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, où M est un fibré vectoriel complexe de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X , D est une connexion intégrable sur M et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une métrique hermitienne sur M , satisfaisant à une condition décrite plus bas ([29] §1). On peut écrire de manière unique $D = \nabla + \alpha$, où ∇ est une connexion hermitienne et α est une forme différentielle de degré 1, à valeurs dans $\text{End}_{\mathcal{O}_X}(M)$, auto-adjointe par rapport à $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On décompose ∇ et α selon leurs types

$$(2.17.1) \quad \nabla = \partial + \bar{\partial}, \quad \alpha = \theta + \theta^*,$$

où ∂ et $\bar{\partial}$ sont de type $(1, 0)$ et $(0, 1)$, respectivement, et θ est une forme différentielle de type $(1, 0)$ à valeurs dans $\text{End}_{\mathcal{O}_X}(M)$. La condition requise est que l'opérateur $D'' = \bar{\partial} + \theta$ est intégrable, *i.e.*, $D''^2 = 0$. Cette condition équivaut à dire que $\bar{\partial}^2 = 0$, $\bar{\partial}\theta = 0$ et $\theta \wedge \theta = 0$. Ainsi l'opérateur $\bar{\partial}$ définit sur M une structure de fibré vectoriel holomorphe, et θ est alors un champ de Higgs sur M à coefficients dans $\Omega_{X/\mathbb{C}}^1$. Le complexe de Dolbeault de (M, θ)

$$(2.17.2) \quad 0 \rightarrow A^0(M) \xrightarrow{D''} A^1(M) \xrightarrow{D''} \dots$$

s'obtient en prolongeant D'' aux formes différentielles de classe $\mathcal{C}^\infty$. Il induit par restriction aux formes différentielles holomorphes le complexe $\mathbb{K}(M, \theta)$; d'où la terminologie.

3. LEXIQUE DE GÉOMÉTRIE LOGARITHMIQUE

Nous rappelons quelques notions de géométrie logarithmique qui joueront un rôle important dans la suite de cet article, dans le but de fixer les notations et de donner des repères aux lecteurs non familiers avec cette théorie. Nous renvoyons à [27, 28, 21, 32] pour les développements systématiques de la théorie.

3.1. On sous-entend par *monoïde* un monoïde commutatif et unitaire. Si M est un monoïde, on désigne par M^{gp} le groupe associé, par $M^\times$ le groupe des unités de M , par $M^\sharp$ l'ensemble des orbites $M/M^\times$ (qui est aussi le quotient de M par $M^\times$ dans la catégorie des monoïdes) et par $i_M: M \rightarrow M^{\text{gp}}$ l'homomorphisme canonique. On pose $M^{\text{int}} = i_M(M)$ et

$$(3.1.1) \quad M^{\text{sat}} = \{x \in M^{\text{gp}} \mid x^n \in i_M(M) \text{ pour un entier } n \geq 1\}.$$

On dit qu'un monoïde M est *intègre* si l'homomorphisme canonique $i_M: M \rightarrow M^{\text{gp}}$ est injectif, que M est *fin* s'il est intègre et de type fini, que M est *saturé* s'il est intègre et est égal à M^{sat} et que M est *torique* s'il est fin et saturé et si M^{gp} est libre sur $\mathbb{Z}$.

Si M est intègre, $M^\sharp$ est intègre, et pour que M soit saturé, il faut et il suffit que $M^\sharp$ soit saturé.

On dit qu'un morphisme de monoïdes $u: M \rightarrow N$ est *strict* si le morphisme induit $u^\sharp: M^\sharp \rightarrow N^\sharp$ est un isomorphisme.

3.2. Soit $u: M \rightarrow N$ un morphisme de monoïdes intègres. On dit que u est *exact* si le diagramme

$$(3.2.1) \quad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{u} & N \\ \downarrow & & \downarrow \\ M^{\text{gp}} & \xrightarrow{u^{\text{gp}}} & N^{\text{gp}} \end{array}$$

est cartésien. On dit que u est *intègre* si pour tout monoïde intègre M' et tout homomorphisme $v: M \rightarrow M'$, la somme amalgamée $M' \oplus_M N$ est intègre. On dit que u est *saturé* s'il est intègre et si pour tout monoïde saturé M' et tout homomorphisme $v: M \rightarrow M'$, la somme amalgamée $M' \oplus_M N$ est saturée.

3.3. Si M est un monoïde et A un anneau commutatif, on désigne par $A[M]$ la A -algèbre du monoïde définie par M et par $e: M \rightarrow A[M]$ l'homomorphisme canonique, où $A[M]$ est considéré comme un monoïde multiplicatif. Pour tout $x \in M$, on notera e^x au lieu de $e(x)$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne (abusivement) par $\varpi_n: M \rightarrow M$ l'homomorphisme de Frobenius d'ordre n de M (*i.e.*, l'élévation à la puissance n dans M en notation multiplicative).

3.4. Soit T un topos. On désigne par $\mathbf{Mon}_T$ la catégorie des monoïdes (commutatifs et unitaires) de T et par $\mathbf{Ab}_T$ la catégorie des groupes abéliens de T . Le foncteur d'injection canonique de $\mathbf{Ab}_T$ dans $\mathbf{Mon}_T$ admet un adjoint à droite

$$(3.4.1) \quad \mathbf{Mon}_T \rightarrow \mathbf{Ab}_T, \quad \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}^\times.$$

Il est immédiat de voir que pour tout $U \in \text{Ob}(T)$, le morphisme d'adjonction $\mathcal{M}^\times(U) \rightarrow \mathcal{M}(U)$ induit un isomorphisme $\mathcal{M}^\times(U) \simeq \mathcal{M}(U)^\times$. On dit qu'un monoïde $\mathcal{M}$ de T est *affûté* (*sharp* en anglais) si $\mathcal{M}^\times = 1_T$. Le foncteur d'injection canonique de la sous-catégorie pleine des monoïdes affûtés de T dans $\mathbf{Mon}_T$ admet un adjoint à gauche

$$(3.4.2) \quad \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}^\sharp = \mathcal{M} / \mathcal{M}^\times.$$

Le foncteur d'injection canonique de $\mathbf{Ab}_T$ dans $\mathbf{Mon}_T$ admet un adjoint à gauche

$$(3.4.3) \quad \mathbf{Mon}_T \rightarrow \mathbf{Ab}_T, \quad \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}^{\text{gp}}.$$

On dit qu'un monoïde $\mathcal{M}$ de T est *intègre* si le morphisme d'adjonction $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^{\text{gp}}$ est un monomorphisme. On désigne par $\mathbf{Mon}_{T,\text{int}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Mon}_T$ formée des monoïdes intègres de T . Le foncteur d'injection canonique de $\mathbf{Mon}_{T,\text{int}}$ dans $\mathbf{Mon}_T$ admet un adjoint à gauche

$$(3.4.4) \quad \mathbf{Mon}_T \rightarrow \mathbf{Mon}_{T,\text{int}}, \quad \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}^{\text{int}}.$$

3.5. Soient $\mathcal{C}$ un site, $\widehat{\mathcal{C}}$ le topos des faisceaux d'ensembles sur $\mathcal{C}$ (relativement à un univers fixé). Pour tout préfaisceau de monoïdes $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{C}$, on désigne par $\mathcal{P}^{\text{gp}}$ (resp. $\mathcal{P}^{\text{int}}$) le préfaisceau de monoïdes sur $\mathcal{C}$ qui à $U \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ associe le monoïde $\mathcal{P}(U)^{\text{gp}}$ (resp. $\mathcal{P}(U)^{\text{int}}$) et par $\mathcal{P}^a$ le faisceau de monoïdes associé à $\mathcal{P}$. On a alors un isomorphisme canonique fonctoriel

$$(3.5.1) \quad (\mathcal{P}^{\text{gp}})^a \xrightarrow{\sim} (\mathcal{P}^a)^{\text{gp}}.$$

Comme le foncteur $\mathcal{P} \mapsto \mathcal{P}^a$ est exact, il transforme les préfaisceaux de monoïdes intègres sur $\mathcal{C}$ en des monoïdes intègres de $\widehat{\mathcal{C}}$. On a un isomorphisme canonique fonctoriel

$$(3.5.2) \quad (\mathcal{P}^{\text{int}})^a \xrightarrow{\sim} (\mathcal{P}^a)^{\text{int}}.$$

Par suite, pour qu'un monoïde $\mathcal{M}$ de $\widehat{\mathcal{C}}$ soit intègre, il faut et il suffit que pour tout $U \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, le monoïde $\mathcal{M}(U)$ soit intègre.

3.6. Soit T un topos. On dit qu'un morphisme de monoïdes intègres $u: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ de T est *exact* si le diagramme canonique

$$(3.6.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{u} & \mathcal{N} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}^{\text{gp}} & \xrightarrow{u^{\text{gp}}} & \mathcal{N}^{\text{gp}} \end{array}$$

est cartésien. Il revient au même de demander que pour tout $U \in \text{Ob}(T)$, l'homomorphisme $u(U): \mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{N}(U)$ soit exact. En effet, si le diagramme (3.6.1) est cartésien, il en est de même des diagrammes obtenus en l'évaluant en tout $U \in \text{Ob}(T)$. Par suite, le diagramme

$$(3.6.2) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{M}(U) & \xrightarrow{u} & \mathcal{N}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}(U)^{\text{gp}} & \xrightarrow{u^{\text{gp}}} & \mathcal{N}(U)^{\text{gp}} \end{array}$$

est cartésien car le morphisme canonique $\mathcal{M}(U)^{\text{gp}} \rightarrow \mathcal{M}^{\text{gp}}(U)$ est injectif (et il en est de même pour $\mathcal{N}$). L'implication réciproque résulte de (3.5.1) et du fait que le foncteur $\mathcal{P} \mapsto \mathcal{P}^a$ est exact.

Soient $\mathcal{M}$ un monoïde intègre de T , n un entier ≥ 1 . On dit que $\mathcal{M}$ est *n-saturé* si l'endomorphisme d'élévation à la puissance n dans $\mathcal{M}$, défini par $x \mapsto x^n$, est exact. On dit que $\mathcal{M}$ est *saturé* s'il est n -saturé pour tout entier $n \geq 1$. Il revient au même de demander que pour tout $U \in \text{Ob}(T)$, le monoïde $\mathcal{M}(U)$ est saturé. On désigne par $\mathbf{Mon}_{T,\text{sat}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Mon}_T$ formée des monoïdes saturés de T . Le foncteur d'injection canonique de $\mathbf{Mon}_{T,\text{sat}}$ dans $\mathbf{Mon}_T$ admet un adjoint à gauche

$$(3.6.3) \quad \mathbf{Mon}_T \rightarrow \mathbf{Mon}_{T,\text{sat}}, \quad \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}^{\text{sat}}.$$

3.7. Soient $\mathcal{C}$ un site, $\widehat{\mathcal{C}}$ le topos des faisceaux d'ensembles sur $\mathcal{C}$ (relativement à un univers fixé). Pour tout préfaisceau de monoïdes $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{C}$, on désigne par $\mathcal{P}^{\text{sat}}$ le préfaisceau de monoïdes saturés défini, pour $U \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, par $U \mapsto \mathcal{P}(U)^{\text{sat}}$. Alors le foncteur “faisceau de monoïdes associé”, $\mathcal{P} \mapsto \mathcal{P}^a$, transforme les préfaisceaux de monoïdes saturés sur $\mathcal{C}$ en des monoïdes saturés de $\widehat{\mathcal{C}}$, et on a un isomorphisme canonique fonctoriel

$$(3.7.1) \quad (\mathcal{P}^{\text{sat}})^a \xrightarrow{\sim} (\mathcal{P}^a)^{\text{sat}}.$$

Par suite, pour qu'un monoïde $\mathcal{M}$ de $\widehat{\mathcal{C}}$ soit saturé, il faut et il suffit que pour tout $U \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, le monoïde $\mathcal{M}(U)$ soit saturé.

3.8. Soient $f: T' \rightarrow T$ un morphisme de topos, $\mathcal{M}$ un monoïde de T .

(i) Si $\mathcal{M}$ est intègre (resp. saturé), il en est de même de $f^*(\mathcal{M})$.

(ii) On a des isomorphismes canoniques fonctoriels

$$(3.8.1) \quad f^*(\mathcal{M})^{\text{gp}} \xrightarrow{\sim} f^*(\mathcal{M}^{\text{gp}}),$$

$$(3.8.2) \quad f^*(\mathcal{M})^{\text{int}} \xrightarrow{\sim} f^*(\mathcal{M}^{\text{int}}).$$

Si de plus $\mathcal{M}$ est intègre, on a un isomorphisme canonique

$$(3.8.3) \quad f^*(\mathcal{M})^{\text{sat}} \xrightarrow{\sim} f^*(\mathcal{M}^{\text{sat}}).$$

(iii) Si $u: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ est un morphisme exact de monoïdes intègres de T , alors $f^*(u): f^*(\mathcal{M}) \rightarrow f^*(\mathcal{N})$ est exact.

3.9. Soit T un topos.

(i) Si M est un monoïde intègre (resp. saturé), le faisceau de monoïdes constant M_T de valeur M sur T est intègre (resp. saturé).

(ii) Supposons que T ait suffisamment de points. Pour qu'un monoïde $\mathcal{M}$ de T soit intègre (resp. saturé), il faut et il suffit que pour tout point p de T , le monoïde $\mathcal{M}_p$ soit intègre (resp. saturé). Pour qu'un morphisme de monoïdes intègres $u: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ de T soit exact, il faut et il suffit que pour tout point p de T , l'homomorphisme $u_p: \mathcal{M}_p \rightarrow \mathcal{N}_p$ soit exact.

(iii) Soit $\mathcal{M}$ un monoïde intègre de T . Alors $\mathcal{M}^\#$ est intègre, et pour que $\mathcal{M}$ soit saturé, il faut et il suffit que $\mathcal{M}^\#$ soit saturé.

3.10. Une structure *pré-logarithmique* sur un schéma X est une paire $(\mathcal{P}, \beta)$, où $\mathcal{P}$ est un faisceau de monoïdes abéliens sur le site étale de X et β est un homomorphisme de $\mathcal{P}$ dans le monoïde multiplicatif $\mathcal{O}_X$. Une structure pré-logarithmique $(\mathcal{P}, \beta)$ est dite *logarithmique* si β induit un isomorphisme $\beta^{-1}(\mathcal{O}_X^\times) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X^\times$. Les structures pré-logarithmiques sur X forment naturellement une catégorie qui contient la sous-catégorie pleine des structures logarithmiques sur X . L'injection canonique de la catégorie des structures logarithmiques sur X dans celle des structures pré-logarithmiques sur X admet un adjoint à gauche. Il associe à une structure pré-logarithmique $(\mathcal{P}, \beta)$ la structure logarithmique $(\mathcal{M}, \alpha)$, où $\mathcal{M}$ est défini par le diagramme co-cartésien

$$(3.10.1) \quad \begin{array}{ccc} \beta^{-1}(\mathcal{O}_X^\times) & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_X^\times & \longrightarrow & \mathcal{M} \end{array}$$

On dit que $(\mathcal{M}, \alpha)$ est la structure logarithmique *associée* à $(\mathcal{P}, \beta)$.

3.11. Soient $f: X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas. Nous utilisons pour les faisceaux de monoïdes la notation f^{-1} pour désigner l'image inverse au sens des faisceaux de monoïdes et nous réservons la notation f^* pour l'image inverse au sens des structures logarithmiques définie comme suit. L'image inverse par f d'une structure logarithmique $(\mathcal{M}, \alpha)$ sur Y est la structure logarithmique $(f^*(\mathcal{M}), \beta)$ sur X associée à la structure pré-logarithmique définie par l'homomorphisme composé $f^{-1}(\mathcal{M}) \rightarrow f^{-1}(\mathcal{O}_Y) \rightarrow \mathcal{O}_X$. Il résulte aussitôt de la définition que l'homomorphisme canonique

$$(3.11.1) \quad f^{-1}(\mathcal{M}^\#) \rightarrow (f^*(\mathcal{M}))^\#$$

est un isomorphisme.

3.12. Un schéma pré-logarithmique (resp. logarithmique) est un triplet $(X, \mathcal{M}_X, \alpha_X)$ formé d'un schéma X et d'une structure pré-logarithmique (resp. logarithmique) $(\mathcal{M}_X, \alpha_X)$ sur X . Lorsqu'il n'y a aucun risque d'ambiguïté, on se permettra d'omettre α_X et même $\mathcal{M}_X$ des notations. Un morphisme de schémas pré-logarithmiques (resp. logarithmiques) $(X, \mathcal{M}_X, \alpha_X) \rightarrow (Y, \mathcal{M}_Y, \alpha_Y)$ est la donnée d'une paire $(f, f^\flat)$ formée d'un morphisme de schémas $f: X \rightarrow Y$ et d'un homomorphisme $f^\flat: f^{-1}(\mathcal{M}_Y) \rightarrow \mathcal{M}_X$ tels que le diagramme

$$(3.12.1) \quad \begin{array}{ccc} f^{-1}(\mathcal{M}_Y) & \xrightarrow{f^{-1}(\alpha_Y)} & f^{-1}(\mathcal{O}_Y) \\ f^\flat \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}_X & \xrightarrow{\alpha_X} & \mathcal{O}_X \end{array}$$

soit commutatif.

On dit qu'un schéma logarithmique $(X, \mathcal{M}_X, \alpha_X)$ est *intègre* (resp. *saturé*) si $\mathcal{M}_X$ est intègre (resp. saturé). On dit qu'un morphisme de schémas logarithmiques $f: (X, \mathcal{M}_X, \alpha_X) \rightarrow (Y, \mathcal{M}_Y, \alpha_Y)$ est *strict* si $(\mathcal{M}_X, \alpha_X)$ est l'image inverse de $(\mathcal{M}_Y, \alpha_Y)$ par f , ou de façon équivalente, si l'homomorphisme canonique $f^{-1}(\mathcal{M}_Y^\#) \rightarrow \mathcal{M}_X^\#$ est un isomorphisme.

3.13. Soient $(X, \mathcal{M}_X)$ un schéma logarithmique, M un monoïde, M_X le faisceau (étales) constant de monoïdes de valeur M sur X . On désigne par $B[M]$ le schéma $\text{Spec}(\mathbb{Z}[M])$ muni de la structure logarithmique induite par la structure pré-logarithmique $M \rightarrow \mathbb{Z}[M]$. Les données suivantes sont équivalentes :

- (i) un homomorphisme $\gamma: M \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{M}_X)$;
- (ii) un homomorphisme $\tilde{\gamma}: M_X \rightarrow \mathcal{M}_X$;
- (iii) un morphisme de schémas logarithmiques $\gamma^*: (X, \mathcal{M}_X) \rightarrow B[M]$.

De plus, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) $\mathcal{M}_X$ est associé à la structure pré-logarithmique qu'il induit sur M_X ;
- (b) Le morphisme $(X, \mathcal{M}_X) \rightarrow B[M]$ est strict.

On dit alors que (M, γ) est une *carte* pour $(X, \mathcal{M}_X)$. On dit que la carte (M, γ) est *cohérente* (resp. *intègre*, resp. *fine*, resp. *saturée*, resp. *torique*) si le monoïde M est de type fini (resp. intègre, resp. fin, resp. saturé, resp. torique).

3.14. Soit $f: (X, \mathcal{M}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{M}_Y)$ un morphisme de schémas logarithmiques. Une *carte* pour f est un triplet $((M, \gamma), (N, \delta), \theta: N \rightarrow M)$ formé d'une carte (M, γ) pour $(X, \mathcal{M}_X)$, d'une carte

(N, δ) pour $(Y, \mathcal{M}_Y)$ et d'un homomorphisme $\theta: N \rightarrow M$ tels que le diagramme

$$(3.14.1) \quad \begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\delta} & \Gamma(Y, \mathcal{M}_Y) \\ \theta \downarrow & & \downarrow f^b \\ M & \xrightarrow{\gamma} & \Gamma(X, \mathcal{M}_X) \end{array}$$

soit commutatif, ou ce qui revient au même que le diagramme de morphismes de schémas logarithmiques

$$(3.14.2) \quad \begin{array}{ccc} (X, \mathcal{M}_X) & \xrightarrow{\gamma^*} & B[M] \\ f \downarrow & & \downarrow \theta^* \\ (Y, \mathcal{M}_Y) & \xrightarrow{\delta^*} & B[N] \end{array}$$

soit commutatif. On dit que la carte $((M, \gamma), (N, \delta), \theta: N \rightarrow M)$ est *cohérente* si M et N sont de type fini.

3.15. Soit $(X, \mathcal{M}_X)$ un schéma logarithmique. On dit que $(X, \mathcal{M}_X)$ est *cohérent* si chaque point géométrique $\bar{x}$ de X admet un voisinage étale U dans X tel que $(U, \mathcal{M}_X|_U)$ admette une carte cohérente. On dit que $(X, \mathcal{M}_X)$ est *fin* s'il est cohérent et intègre.

Pour que $(X, \mathcal{M}_X)$ soit fin (resp. fin et saturé), il faut et il suffit que tout point géométrique $\bar{x}$ de X admette un voisinage étale U dans X tel que $(U, \mathcal{M}_X|_U)$ admette une carte fine (resp. fine et saturée).

On dit que $(X, \mathcal{M}_X)$ est *torique* si chaque point géométrique $\bar{x}$ de X admet un voisinage étale U dans X tel que $(U, \mathcal{M}_X|_U)$ admette une carte torique.

3.16. Soit $f: (X, \mathcal{M}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{M}_Y)$ un morphisme de schémas pré-logarithmiques. On pose

$$(3.16.1) \quad \Omega_{(X, \mathcal{M}_X)/(Y, \mathcal{M}_Y)}^1 = \frac{\Omega_{X/Y}^1 \oplus (\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{M}_X^{\text{gp}})}{\mathcal{F}},$$

où $\Omega_{X/Y}^1$ est le $\mathcal{O}_X$ -module des 1-différentielles relatives de X sur Y et $\mathcal{F}$ est le sous- $\mathcal{O}_X$ -module engendré localement par les sections de la forme

(i) $(d(\alpha_X(a)), 0) - (0, \alpha_X(a) \otimes a)$ pour toute section locale a de $\mathcal{M}_X$;

(ii) $(0, 1 \otimes a)$ pour toute section locale a de l'image de l'homomorphisme $f^b: f^{-1}(\mathcal{M}_Y) \rightarrow \mathcal{M}_X$.

On note aussi

$$(3.16.2) \quad d: \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_{(X, \mathcal{M}_X)/(Y, \mathcal{M}_Y)}^1$$

le morphisme induit par la dérivation universelle $d: \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_{X/Y}^1$, et on désigne par

$$(3.16.3) \quad d\log: \mathcal{M}_X \rightarrow \Omega_{(X, \mathcal{M}_X)/(Y, \mathcal{M}_Y)}^1$$

l'homomorphisme défini pour une section locale a de $\mathcal{M}_X$ par

$$(3.16.4) \quad d\log(a) = 1 \otimes a.$$

Alors le triplet $(\Omega_{(X, \mathcal{M}_X)/(Y, \mathcal{M}_Y)}^1, d, d\log)$ est universel pour les dérivations logarithmiques. On appelle $\Omega_{(X, \mathcal{M}_X)/(Y, \mathcal{M}_Y)}^1$ le $\mathcal{O}_X$ -module des 1-différentielles *logarithmiques* de $(X, \mathcal{M}_X)$ sur $(Y, \mathcal{M}_Y)$ (ou de f). Il satisfait aux mêmes propriétés de fonctorialité que le module $\Omega_{X/Y}^1$.

Si $\mathcal{M}_X^a$ (resp. $\mathcal{M}_Y^a$) désigne la structure logarithmique sur X (resp. Y) associée à $\mathcal{M}_X$ (resp. $\mathcal{M}_Y$), alors f induit un morphisme $f^a: (X, \mathcal{M}_X^a) \rightarrow (Y, \mathcal{M}_Y^a)$, et on a un isomorphisme canonique

$$(3.16.5) \quad \Omega_{(X, \mathcal{M}_X)/(Y, \mathcal{M}_Y)}^1 \xrightarrow{\sim} \Omega_{(X, \mathcal{M}_X^a)/(Y, \mathcal{M}_Y^a)}^1.$$

Si f est un morphisme de schémas logarithmiques cohérents, alors $\Omega_{(X, \mathcal{M}_X)/(Y, \mathcal{M}_Y)}^1$ est un $\mathcal{O}_X$ -module quasi-cohérent. Si, de plus, le morphisme de schémas sous-jacent à f est localement de présentation finie, alors $\Omega_{(X, \mathcal{M}_X)/(Y, \mathcal{M}_Y)}^1$ est un $\mathcal{O}_X$ -module de présentation finie.

Si f est un morphisme strict de schémas logarithmiques, le morphisme canonique

$$(3.16.6) \quad \Omega_{X/Y}^1 \rightarrow \Omega_{(X, \mathcal{M}_X)/(Y, \mathcal{M}_Y)}^1$$

est un isomorphisme.

3.17. Un morphisme de schémas logarithmiques $f: (X, \mathcal{M}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{M}_Y)$ est une *immersion fermée* (resp. *immersion fermée exacte*) si le morphisme de schémas sous-jacents $X \rightarrow Y$ est une immersion fermée et si le morphisme $f^*(\mathcal{M}_Y) \rightarrow \mathcal{M}_X$ est un épimorphisme (resp. un isomorphisme).

3.18. Considérons un diagramme commutatif de morphismes de schémas logarithmiques

$$(3.18.1) \quad \begin{array}{ccc} (Z', \mathcal{M}_{Z'}) & \xrightarrow{u'} & (X, \mathcal{M}_X) \\ j \downarrow & \nearrow u & \downarrow f \\ (Z, \mathcal{M}_Z) & \xrightarrow{g} & (Y, \mathcal{M}_Y) \end{array}$$

où Z' est un sous-schéma fermé de Z défini par un idéal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_Z$ de carré nul et j est une immersion fermée exacte. On désigne par $P_f(j, u')$ l'ensemble des $(Y, \mathcal{M}_Y)$ -morphisms $u: (Z, \mathcal{M}_Z) \rightarrow (X, \mathcal{M}_X)$ tels que $u' = u \circ j$. Alors $P_f(j, u')$ est un pseudo-torseur sous

$$(3.18.2) \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{Z'}}(u'^* \Omega_{(X, \mathcal{M}_X)/(Y, \mathcal{M}_Y)}^1, \mathcal{I}).$$

Plus précisément ([27] 3.9), si $P_f(j, u')$ est non vide, tout élément $u \in P_f(j, u')$ détermine uniquement un isomorphisme

$$(3.18.3) \quad \varphi_u: P_f(j, u') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{Z'}}(u'^* \Omega_{(X, \mathcal{M}_X)/(Y, \mathcal{M}_Y)}^1, \mathcal{I})$$

tel que pour tout $v \in P_f(j, u')$, toute section locale a de $\mathcal{O}_X$ et toute section locale b de $\mathcal{M}_X$, on ait

$$(3.18.4) \quad \varphi_u(v)(u'^*(da)) = v^*(a) - u^*(a),$$

$$(3.18.5) \quad \varphi_u(v)(u'^*(d \log b)) = \beta - 1,$$

où β est l'unique section locale de $\mathcal{O}_Z^\times \subset \mathcal{M}_Z$ telle que $j^*(\beta) = 1$ et $v^*(b) = \beta \cdot u^*(b)$.

3.19. Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas logarithmiques. On dit que f est *formellement lisse* (resp. *formellement étale*) si pour tout schéma logarithmique Y dont le schéma sous-jacent est affine, toute immersion fermée exacte d'idéal nilpotent $j: Y'_0 \rightarrow Y'$, et tout morphisme $Y' \rightarrow Y$, l'application

$$(3.19.1) \quad \mathrm{Hom}_Y(Y', X) \rightarrow \mathrm{Hom}(Y'_0, X)$$

déduite de j , est surjective (resp. bijective). On dit que f est *lisse* (resp. *étale*) s'il est formellement lisse (resp. formellement étale), si les schémas logarithmiques X et Y sont cohérents et si le morphisme de schémas sous-jacent à f est localement de présentation finie.

3.20. Soient $f: (X, \mathcal{M}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{M}_Y)$ un morphisme de schémas logarithmiques fins, (N, δ) une carte fine pour $(Y, \mathcal{M}_Y)$. D'après ([27] 3.5), pour que f soit lisse (resp. étale), il faut et il suffit que localement pour la topologie étale sur X , f admette une carte $((M, \gamma), (N, \delta), \theta: N \rightarrow M)$ (3.14) satisfaisant aux conditions suivantes :

- (i) le noyau et le sous-groupe de torsion du conoyau (resp. le noyau et le conoyau) de l'homomorphisme $\theta^{\text{gp}}: N^{\text{gp}} \rightarrow M^{\text{gp}}$ sont finis d'ordres inversibles dans X ;
- (ii) le morphisme induit $X \rightarrow Y \times_{B[N]} B[M]$ (3.14.2) est étale dans le sens classique.

3.21. Soit $f: (X, \mathcal{M}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{M}_Y)$ un morphisme de schémas logarithmiques intègres. On dit que f est *intègre* (resp. *saturé*) si pour tout point géométrique $\bar{x}$ de X , l'homomorphisme $\mathcal{M}_{Y, f(\bar{x})} \rightarrow \mathcal{M}_{X, \bar{x}}$ est intègre (resp. saturé), ou ce qui revient au même, si l'homomorphisme $\mathcal{M}_{Y, f(\bar{x})}^{\sharp} \rightarrow \mathcal{M}_{X, \bar{x}}^{\sharp}$ est intègre (resp. saturé).

3.22. Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas logarithmiques intègres (resp. fins). Pour que f soit intègre, il faut et il suffit que pour tout schéma logarithmique intègre (resp. fin) Z et tout morphisme $Z \rightarrow Y$, le produit fibré dans la catégorie des schémas logarithmiques $Z \times_Y X$ soit intègre (resp. fin) ([27] 4.3.1).

3.23. Soit $f: X \rightarrow Y$ un morphisme de schémas logarithmiques fins et saturés. Pour que f soit saturé, il faut et il suffit que pour tout schéma logarithmique fin et saturé Z et tout morphisme $Z \rightarrow Y$, le produit fibré dans la catégorie des schémas logarithmiques $Z \times_Y X$ soit fin et saturé ([41] II 2.13 page 24).

4. LE THÉORÈME DE PURETÉ DE FALTINGS

4.1. On pose $S = \text{Spec}(\mathcal{O}_K)$ et on note η (resp. s) son point générique (resp. fermé) et $\bar{\eta}$ le point géométrique générique correspondant à $\bar{K}$. On munit S de la structure logarithmique $\mathcal{M}_S$ définie par son point fermé, autrement dit, $\mathcal{M}_S = j_*(\mathcal{O}_{\eta}^{\times}) \cap \mathcal{O}_S$, où $j: \eta \rightarrow S$ est l'injection canonique. On fixe une uniformisante π de $\mathcal{O}_K$ et on désigne par $\iota: \mathbb{N} \rightarrow \Gamma(S, \mathcal{M}_S)$ l'homomorphisme défini par $\iota(1) = \pi$, qui est une carte pour $(S, \mathcal{M}_S)$.

4.2. Dans la suite de cet article, on considère un schéma logarithmique torique $(X, \mathcal{M}_X)$, un morphisme $f: (X, \mathcal{M}_X) \rightarrow (S, \mathcal{M}_S)$, une carte torique (P, γ) pour $(X, \mathcal{M}_X)$ et un homomorphisme $\theta: \mathbb{N} \rightarrow P$ tels que les conditions suivantes soient remplies :

- (C₁) Le schéma $X = \text{Spec}(R)$ est affine.
- (C₂) Le schéma $X \otimes_{\mathcal{O}_K} \bar{K}$ est connexe et le schéma $X \otimes_{\mathcal{O}_K} \bar{k}$ est connexe et non-vide.
- (C₃) Le diagramme

$$(4.2.1) \quad \begin{array}{ccc} (X, \mathcal{M}_X) & \xrightarrow{\gamma^*} & B[P] \\ f \downarrow & & \downarrow \theta^* \\ (S, \mathcal{M}_S) & \xrightarrow{\iota^*} & B[\mathbb{N}] \end{array}$$

est commutatif, de sorte que $((P, \gamma), (\mathbb{N}, \iota), \theta)$ est une carte pour f (3.14).

- (C₄) L'homomorphisme θ est saturé (3.2).
- (C₅) L'homomorphisme $\theta^{\text{gp}}: \mathbb{Z} \rightarrow P^{\text{gp}}$ est injectif, le sous-groupe de torsion de $\text{coker}(\theta^{\text{gp}})$ est d'ordre premier à p et le morphisme de schémas usuels

$$(4.2.2) \quad X \rightarrow S \times_{B[\mathbb{N}]} B[P]$$

déduit de (4.2.1) est étale.

(C₆) Posons $\lambda = \theta(1) \in P$,

$$(4.2.3) \quad L = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(P^{\text{gp}}, \mathbb{Z}),$$

$$(4.2.4) \quad H(P) = \text{Hom}(P, \mathbb{N}).$$

On notera que $H(P)$ est un monoïde fin, saturé et affûté et que l'homomorphisme canonique $H(P)^{\text{gp}} \rightarrow \text{Hom}((P^{\sharp})^{\text{gp}}, \mathbb{Z})$ est un isomorphisme ([32] 2.2.1). On suppose qu'il existe $h_1, \dots, h_r \in H(P)$, qui sont $\mathbb{Z}$ -linéairement indépendants dans L , tels que

$$(4.2.5) \quad \ker(\lambda) \cap H(P) = \left\{ \sum_{i=1}^r a_i h_i \mid (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{N}^r \right\},$$

où l'on considère λ comme un homomorphisme $L \rightarrow \mathbb{Z}$.

Les propriétés suivantes résultent des hypothèses ci-dessus.

(P₁) Le morphisme f est lisse et saturé, en particulier, X est plat sur S ([27] 4.5) et $X \otimes_{\mathcal{O}_K} \bar{k}$ est réduit ([41] chap. II 4.2).

(P₂) Le schéma X est normal ([28] 8.2 et 4.1 ; cf. aussi [40] 1.5.1). Il est donc intègre car $X \otimes_{\mathcal{O}_K} K$ est connexe.

(P₃) Le schéma $X \otimes_{\mathcal{O}_K} \bar{\mathcal{O}_K}$ est normal (cela résulte de (P₁) comme dans (P₂)). Il est donc intègre car $X \otimes_{\mathcal{O}_K} \bar{K}$ est connexe.

On rappelle que P^{gp} est un $\mathbb{Z}$ -module libre de type fini. On notera qu'on a

$$(4.2.6) \quad S \times_{B[\mathbb{N}]} B[P] = \text{Spec}(\mathcal{O}_K[P]/(\pi - e^\lambda)),$$

où $\lambda = \theta(1)$ (cf. 3.3 pour les notations). Posons

$$(4.2.7) \quad L_\lambda = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(P^{\text{gp}}/\lambda\mathbb{Z}, \mathbb{Z}).$$

On identifie L_λ au noyau de l'homomorphisme $L \rightarrow \mathbb{Z}$ donné par $y \mapsto \langle y, \lambda \rangle$ (4.2.3). On note d le rang de L_λ , qui est aussi la dimension relative de X sur S .

On désigne par X° le sous-schéma ouvert maximal de X où la structure logarithmique $\mathcal{M}_X$ est triviale. On a $X^\circ = X \times_{B[P]} B[P^{\text{gp}}]$. Donc X° est un sous-schéma ouvert affine de X_η ; notons R° son anneau.

Lemme 4.3. *Le schéma (usuel) $X \times_S \eta$ est lisse sur η , $X^\circ \times_S \eta$ est l'ouvert complémentaire dans $X \times_S \eta$ d'un diviseur à croisements normaux D et $\mathcal{M}_X|(X \times_S \eta)$ est la structure logarithmique sur $X \times_S \eta$ définie par D .*

Soit F la face de P engendrée par λ , c'est à dire l'ensemble des éléments $x \in P$ tels qu'il existe $y \in P$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $x + y = n\lambda$ ([32] 1.4.2). On note $F^{-1}P$ la localisation de P le long de F ([32] 1.4.4). Il résulte aussitôt des propriétés universelles des localisations de monoïdes et d'anneaux que l'homomorphisme canonique $\mathbb{Z}[P] \rightarrow \mathbb{Z}[F^{-1}P]$ induit un isomorphisme

$$(4.3.1) \quad \mathbb{Z}[P]_\lambda \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[F^{-1}P].$$

Soient P/F (resp. Λ) le conoyau dans la catégorie des monoïdes de l'injection canonique $F \rightarrow P$ (resp. de l'homomorphisme $\theta: \mathbb{N} \rightarrow P$) (cf. [32] 1.1.5). On a des isomorphismes canoniques

$$(4.3.2) \quad \Lambda^\sharp \xrightarrow{\sim} P/F \xrightarrow{\sim} (F^{-1}P)^\sharp.$$

L'homomorphisme canonique

$$(4.3.3) \quad \text{Hom}(P/F, \mathbb{N}) \rightarrow \ker(\lambda) \cap H(P)$$

est donc un isomorphisme. En tant que somme amalgamée de l'homomorphisme saturé θ et de $\mathbb{N} \rightarrow 0$, Λ est saturé (3.2). Par suite, P/F est saturé (4.3.2). Donc en vertu de ([32] 2.2.1), on a un isomorphisme canonique

$$(4.3.4) \quad P/F \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(\text{Hom}(P/F, \mathbb{N}), \mathbb{N}).$$

La condition 4.2(C₆) implique alors que P/F est un monoïde libre de type fini. Par suite, il existe un homomorphisme $P/F \rightarrow F^{-1}P$ qui relève l'isomorphisme canonique $P/F \xrightarrow{\sim} (F^{-1}P)^\#$ (4.3.2), de sorte que l'homomorphisme induit $P/F \rightarrow \mathbb{Z}[F^{-1}P]$ est une carte pour $B[F^{-1}P]$ ([40] 1.3.1). On en déduit par (4.3.1) une carte

$$(4.3.5) \quad (X \times_S \eta, \mathcal{M}_X|(X \times_S \eta)) \rightarrow B[P/F].$$

D'autre part, le schéma logarithmique $(X, \mathcal{M}_X)$ est régulier en vertu de 4.2(P₁) et ([28] 8.2). Il résulte alors de ([23] 0.16.3.7 et 0.17.1.7) et de la définition ([28] 2.1) que le schéma $X \times_S \eta$ est régulier et donc lisse sur η , que $X^\circ \times_S \eta$ est l'ouvert complémentaire dans $X \times_S \eta$ d'un diviseur à croisements normaux D et que $\mathcal{M}_X|(X \times_S \eta)$ est la structure logarithmique sur $X \times_S \eta$ définie par D .

4.4. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$(4.4.1) \quad \mathcal{O}_{K_n} = \mathcal{O}_K[\xi]/(\xi^n - \pi),$$

qui est un anneau de valuation discrète. On note K_n le corps des fractions de $\mathcal{O}_{K_n}$ et π_n la classe de ξ dans $\mathcal{O}_{K_n}$, qui est une uniformisante de $\mathcal{O}_{K_n}$. On pose $S_n = \text{Spec}(\mathcal{O}_{K_n})$ que l'on munit de la structure logarithmique $\mathcal{M}_{S_n}$ définie par son point fermé. On désigne par $\tau_n: (S_n, \mathcal{M}_{S_n}) \rightarrow (S, \mathcal{M}_S)$ le morphisme canonique et par $\iota_n: \mathbb{N} \rightarrow \Gamma(S_n, \mathcal{M}_{S_n})$ l'homomorphisme défini par $\iota_n(1) = \pi_n$. On notera que ι_n est une carte pour $(S_n, \mathcal{M}_{S_n})$ et que le diagramme

$$(4.4.2) \quad \begin{array}{ccc} (S_n, \mathcal{M}_{S_n}) & \xrightarrow{\iota_n^*} & B[\mathbb{N}] \\ \tau_n \downarrow & & \downarrow \varpi_n^* \\ (S, \mathcal{M}_S) & \xrightarrow{\iota^*} & B[\mathbb{N}] \end{array}$$

est cartésien (cf. 3.3 pour les notations).

Pour tous entiers $m, n \geq 1$, on a $\varpi_{mn} = \varpi_m \circ \varpi_n$. On en déduit un morphisme canonique

$$(4.4.3) \quad \tau_{m,n}: (S_{mn}, \mathcal{M}_{S_{mn}}) \rightarrow (S_n, \mathcal{M}_{S_n})$$

tel que $\tau_{mn} = \tau_n \circ \tau_{m,n}$. Pour tous entiers $r, m, n \geq 1$, on a $\tau_{rm,n} = \tau_{m,n} \circ \tau_{r,mn}$. Donc les schémas logarithmiques $(S_n, \mathcal{M}_{S_n})$ pour $n \geq 1$ forment un système projectif cofiltrant indexé par l'ensemble $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ ordonné par la relation de divisibilité.

4.5. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$(4.5.1) \quad (X_n, \mathcal{M}_{X_n}) = (X, \mathcal{M}_X) \times_{B[P], \varpi_n^*} B[P],$$

et on note $\rho_n: (X_n, \mathcal{M}_{X_n}) \rightarrow (X, \mathcal{M}_X)$ la projection canonique (cf. 3.3 pour les notations). Alors le morphisme ρ_n est fini, le schéma X_n est affine d'anneau

$$(4.5.2) \quad A_n = R \otimes_{\mathbb{Z}[P], \varpi_n} \mathbb{Z}[P],$$

et la projection canonique $(X_n, \mathcal{M}_{X_n}) \rightarrow B[P]$ est stricte. Comme le diagramme (4.4.2) est cartésien, il existe un unique morphisme

$$(4.5.3) \quad f_n: (X_n, \mathcal{M}_{X_n}) \rightarrow (S_n, \mathcal{M}_{S_n}),$$

qui s'insère dans le diagramme commutatif

$$(4.5.4) \quad \begin{array}{ccccc} (X_n, \mathcal{M}_{X_n}) & \xrightarrow{\quad} & & & B[P] \\ & \searrow f_n & & \swarrow \theta^* & \downarrow \varpi_n^* \\ & (S_n, \mathcal{M}_{S_n}) & \longrightarrow & B[\mathbb{N}] & \\ & \downarrow & & \downarrow \varpi_n^* & \\ & (S, \mathcal{M}_S) & \longrightarrow & B[\mathbb{N}] & \\ & \nearrow f & & \nwarrow \theta^* & \\ (X, \mathcal{M}_X) & \xrightarrow{\quad} & & & B[P] \end{array}$$

On désigne par X_n° le sous-schéma ouvert maximal de X_n où la structure logarithmique $\mathcal{M}_{X_n}$ est triviale. On a $X_n^\circ = X_n \times_{B[P]} B[P^{\text{gp}}]$ et $f_n(X_n^\circ) = \text{Spec}(K_n)$.

Pour tous entiers $m, n \geq 1$, on a $\varpi_{mn} = \varpi_m \circ \varpi_n$. On en déduit un morphisme canonique

$$(4.5.5) \quad \rho_{m,n}: (X_{mn}, \mathcal{M}_{X_{mn}}) \rightarrow (X_n, \mathcal{M}_{X_n})$$

tel que $\rho_{mn} = \rho_n \circ \rho_{m,n}$. Pour tous entiers $r, m, n \geq 1$, on a $\rho_{rm,n} = \rho_{m,n} \circ \rho_{r,mn}$. Donc les schémas logarithmiques $(X_n, \mathcal{M}_{X_n})$ forment un système projectif cofiltrant indexé par l'ensemble $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ ordonné par la relation de divisibilité.

Proposition 4.6. *Soit n un entier ≥ 1 .*

(i) *Le morphisme de schémas usuels $X_n \rightarrow S_n \times_{B[\mathbb{N}]} B[P]$ déduit de (4.5.4) est étale, et le morphisme de schémas logarithmiques f_n est lisse et saturé.*

(ii) *Le schéma X_n est normal, Cohen-Macaulay et plat sur S_n et le schéma $X_n \otimes_{\mathcal{O}_{K_n}} \mathcal{O}_{\overline{K}}$ est normal.*

(iii) *Le morphisme $X_n \otimes_{\mathcal{O}_{K_n}} K_n \rightarrow X \otimes_{\mathcal{O}_K} K$ déduit de ρ_n est plat. Si, de plus, X est régulier, ρ_n est plat.*

(iv) *Si n est une puissance de p , le schéma $X_n \otimes_{\mathcal{O}_{K_n}} \mathcal{O}_{\overline{K}}$ est intègre.*

(v) *Les carrés du diagramme commutatif canonique*

$$(4.6.1) \quad \begin{array}{ccccc} X_n & \longleftarrow & X_n^\circ & \longrightarrow & B[P^{\text{gp}}] \\ \rho_n \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \varpi_n^* \\ X & \longleftarrow & X^\circ & \longrightarrow & B[P^{\text{gp}}] \end{array}$$

sont cartésiens. En particulier, X_n° est un tore pour la topologie étale de X° sous le groupe $L \otimes_{\mathbb{Z}} \mu_n(\overline{K})$.

(i) En effet, les carrés du diagramme commutatif de morphismes de schémas usuels

$$(4.6.2) \quad \begin{array}{ccccc} X_n & \longrightarrow & S_n \times_{B[\mathbb{N}]} B[P] & \longrightarrow & B[P] \\ \rho_n \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \varpi_n^* \\ X & \longrightarrow & S \times_{B[\mathbb{N}]} B[P] & \longrightarrow & B[P] \end{array}$$

déduit de (4.5.4) sont cartésiens.

(ii) Cela résulte de (i) et ([27] 4.5, [28] 8.2 et 4.1 ; cf. aussi [40] 1.5.1).

(iii) Cela résulte de ([23] 0.17.3.5) car $X \otimes_{\mathcal{O}_K} K$ est régulier en vertu de 4.3, X_n est Cohen-Macaulay d'après (ii) et ρ_n est fini.

(iv) D'après (4.6.2), on a un diagramme cartésien de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ -morphisms

$$(4.6.3) \quad \begin{array}{ccc} X_n \otimes_{\mathcal{O}_{K_n}} \mathcal{O}_{\overline{K}} & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\overline{K}}[P]/(\pi_n - e^\lambda)) \\ \beta_n \downarrow & & \downarrow \alpha_n \\ X \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{\overline{K}} & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\overline{K}}[P]/(\pi - e^\lambda)) \end{array}$$

où α_n est induit par l'homomorphisme ϖ_n de P et β_n par ρ_n . Il résulte des hypothèses et de (ii) que $X \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{\overline{K}}$ est intègre et normal, de fibre spéciale $X \otimes_{\mathcal{O}_K} \overline{k}$ non-vide. Soit x un point de $X \otimes_{\mathcal{O}_K} \overline{k}$. Comme n est une puissance de p , le morphisme $\alpha_n \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{K}}} \overline{k}$ est un homéomorphisme universel. Donc $\beta_n^{-1}(x)$ contient un seul point qu'on note x_n . D'autre part, X_n étant plat sur S_n , tout point générique de X_n est un point générique de $X_n \otimes_{\mathcal{O}_{K_n}} K_n$; donc son image par ρ_n est le point générique de X en vertu de (iii). Par suite, l'image de tout point générique de $X_n \otimes_{\mathcal{O}_{K_n}} \mathcal{O}_{\overline{K}}$ par β_n est le point générique de $X \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{\overline{K}}$. Comme β_n est fermé, on en déduit que x_n est une spécialisation de tous les points génériques de $X_n \otimes_{\mathcal{O}_{K_n}} \mathcal{O}_{\overline{K}}$. Comme $X_n \otimes_{\mathcal{O}_{K_n}} \mathcal{O}_{\overline{K}}$ est normal d'après (ii), il est intègre.

(v) Montrons que le diagramme canonique

$$(4.6.4) \quad \begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\varpi_n} & P \\ \downarrow & & \downarrow \\ P^{\mathrm{gp}} & \xrightarrow{\varpi_n} & P^{\mathrm{gp}} \end{array}$$

est co-cartésien. En effet ([32] 1.1.4), la somme amalgamée $P^{\mathrm{gp}} \oplus_{P, \varpi_n} P$ est le quotient de $P^{\mathrm{gp}} \oplus P$ par la relation de congruence E définie par l'ensemble des paires $((y, x), (y', x'))$ d'éléments de $P^{\mathrm{gp}} \oplus P$ telles qu'il existe $z, z' \in P$ tels que $y + z = y' + z' \in P^{\mathrm{gp}}$ et $x + nz = x' + nz' \in P$. Il suffit donc de montrer que E est la relation de congruence définie par l'homomorphisme

$$(4.6.5) \quad P^{\mathrm{gp}} \oplus P \rightarrow P^{\mathrm{gp}}, \quad (y, x) \mapsto x - ny.$$

Si $((y, x), (y', x')) \in E$ alors $x - ny = x' - ny'$. Inversement, supposons $x = x' + n(y - y') \in P^{\mathrm{gp}}$. Comme P est intègre, il existe $z, z' \in P$ tels que $y + z = y' + z' \in P^{\mathrm{gp}}$; on a donc $x + nz = x' + nz' \in P$, ce qui prouve l'assertion. Par suite, le diagramme

$$(4.6.6) \quad \begin{array}{ccc} B[P^{\mathrm{gp}}] & \longrightarrow & B[P] \\ \varpi_n^* \downarrow & & \downarrow \varpi_n^* \\ B[P^{\mathrm{gp}}] & \longrightarrow & B[P] \end{array}$$

induit par (4.6.4) est cartésien. Donc les carrés du diagramme (4.6.1) sont cartésiens. La seconde assertion résulte de la première et du fait que le noyau de l'isogénie étale $\varpi_n^*: \eta[P^{\mathrm{gp}}] \rightarrow \eta[P^{\mathrm{gp}}]$ correspond au $\mathbb{Z}[G_K]$ -module $L \otimes_{\mathbb{Z}} \mu_n(\overline{K})$.

4.7. On note F le corps des fractions de R . Soient F^a une clôture algébrique de F contenant $\overline{K}$, $\overline{F}$ l'union des extensions finies L de F , contenues dans F^a , telles que la clôture intégrale de R dans L soit étale au-dessus de X° . On désigne par $\overline{R}$ la clôture intégrale de R dans $\overline{F}$ et on pose

$$(4.7.1) \quad R_1 = R \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{\overline{K}}.$$

D'après 4.2(P₃), l'anneau R_1 est intègre et normal et l'homomorphisme canonique $R_1 \rightarrow \overline{R}$ est injectif.

Pour tous entiers $m, n \geq 1$, le morphisme $\rho_{m,n}: X_{mn} \rightarrow X_n$ est fini et surjectif. Par suite, en vertu de ([23] 8.3.8(i)), il existe un X -morphisme

$$(4.7.2) \quad \mathrm{Spec}(F^a) \rightarrow \varprojlim_{n \geq 1} X_n,$$

où la limite projective est indexée par l'ensemble $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ ordonné par la relation de divisibilité. On se donne un tel morphisme qu'on suppose fixé dans toute la suite de cet article. L'ensemble des entiers $n!$, pour $n \geq 0$, étant cofinal dans $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ pour la relation de divisibilité, il revient au même de se donner un morphisme

$$(4.7.3) \quad \mathrm{Spec}(F^a) \rightarrow \varprojlim_{n \geq 0} X_{n!},$$

où la limite projective est indexée par l'ensemble $\mathbb{N}$ ordonné par la relation d'ordre habituelle. D'après 4.6(v), le morphisme (4.7.2) se factorise à travers un X -morphisme

$$(4.7.4) \quad \mathrm{Spec}(\overline{R}) \rightarrow \varprojlim_{n \geq 1} X_n.$$

On en déduit un système inductif de R -homomorphismes $u_n: A_n \rightarrow \overline{R}$, indexé par l'ensemble $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ ordonné par la relation de divisibilité. On note B_n l'image de u_n et on pose

$$(4.7.5) \quad B_\infty = \varinjlim_{n \geq 1} B_n,$$

que l'on identifie à une sous- R -algèbre de $\overline{R}$. On note H_∞ le corps des fractions de B_∞ .

D'autre part, le morphisme (4.7.2) induit un morphisme

$$(4.7.6) \quad \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\overline{K}}) \rightarrow \varprojlim_{n \geq 1} S_n.$$

On peut donc étendre les u_n en un système inductif de R_1 -homomorphismes $v_n: A_n \otimes_{\mathcal{O}_{K_n}} \mathcal{O}_{\overline{K}} \rightarrow \overline{R}$, indexé par l'ensemble $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ ordonné par la relation de divisibilité. On note R_n l'image de v_n et on pose

$$(4.7.7) \quad R_\infty = \varinjlim_{n \geq 1} R_n,$$

que l'on identifie à une sous- R_1 -algèbre de $\overline{R}$. On note F_∞ le corps des fractions de R_∞ . On pose

$$(4.7.8) \quad R_{p^\infty} = \varinjlim_{n \geq 0} R_{p^n},$$

où la limite projective est indexée par l'ensemble $\mathbb{N}$ ordonné par la relation d'ordre habituelle. On identifie R_{p^∞} à une sous- R_1 -algèbre de R_∞ , et on note F_{p^∞} le corps des fractions de R_{p^∞} .

Proposition 4.8. (i) *Pour tout $n \geq 1$, $\mathrm{Spec}(B_n)$ est une composante connexe de X_n et $\mathrm{Spec}(R_n)$ est une composante connexe de $X_n \otimes_{\mathcal{O}_{K_n}} \mathcal{O}_{\overline{K}}$.*

(ii) *Pour tout $n \geq 0$, $\mathrm{Spec}(B_{p^n}) = X_{p^n}$ et $\mathrm{Spec}(R_{p^n}) = X_{p^n} \otimes_{\mathcal{O}_{K_{p^n}}} \mathcal{O}_{\overline{K}}$.*

(iii) *Les anneaux B_n , R_n ($n \geq 1$), B_∞ , R_∞ et R_{p^∞} sont normaux.*

(iv) *Les extensions F_∞ et F_{p^∞} de F sont galoisiennes et on a des homomorphismes injectifs canoniques (4.2.7)*

$$(4.8.1) \quad \mathrm{Gal}(F_\infty/F \otimes_K \overline{K}) \rightarrow L_\lambda \otimes \widehat{\mathbb{Z}}(1),$$

$$(4.8.2) \quad \mathrm{Gal}(F_{p^\infty}/F \otimes_K \overline{K}) \xrightarrow{\sim} L_\lambda \otimes \mathbb{Z}_p(1),$$

le second étant un isomorphisme. De plus, le diagramme

$$(4.8.3) \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{Gal}(F_\infty/F \otimes_K \overline{K}) & \longrightarrow & L_\lambda \otimes \widehat{\mathbb{Z}}(1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Gal}(F_{p^\infty}/F \otimes_K \overline{K}) & \longrightarrow & L_\lambda \otimes \mathbb{Z}_p(1) \end{array}$$

où les flèches verticales sont les morphismes canoniques est commutatif.

Pour tout entier $n \geq 1$, le morphisme (4.7.2) induit un point géométrique

$$(4.8.4) \quad \mathrm{Spec}(F^a) \rightarrow X_n^\circ \otimes_{K_n} \overline{K}$$

au-dessus d'un point générique $\tilde{\kappa}_n$ de $X_n^\circ \otimes_{K_n} \overline{K}$. Notons κ_n l'image de $\tilde{\kappa}_n$ dans X_n° (qui est un point générique).

(i) Comme X_n et $X_n \otimes_{\mathcal{O}_{K_n}} \mathcal{O}_{\overline{K}}$ sont normaux d'après 4.6(ii), $\mathrm{Spec}(B_n)$ est la composante connexe de X_n contenant κ_n , et $\mathrm{Spec}(R_n)$ est la composante connexe de $X_n \otimes_{\mathcal{O}_{K_n}} \mathcal{O}_{\overline{K}}$ contenant $\tilde{\kappa}_n$.

(ii) En effet, le schéma $X_{p^n} \otimes_{\mathcal{O}_{K_{p^n}}} \mathcal{O}_{\overline{K}}$ est intègre en vertu de 4.6(iv).

(iii) Il résulte de (i) et 4.6(ii) que B_n et R_n sont normaux pour tout $n \geq 1$. Par suite, B_∞ , R_∞ et R_{p^∞} sont normaux.

(iv) Pour tout entier $n \geq 1$, notons H_n le corps résiduel de X_n en κ_n , et F_n le corps résiduel de $X_n \otimes_{K_n} \overline{K}$ en $\tilde{\kappa}_n$. Donc F_n est le corps des fractions de R_n . Il résulte de 4.6(v) que H_n est une extension galoisienne de F , de groupe de Galois $\mathrm{Gal}(H_n/F)$ canoniquement isomorphe à un sous-groupe de $L \otimes_{\mathbb{Z}} \mu_n(\mathcal{O}_{\overline{K}})$; plus précisément, $\mathrm{Gal}(H_n/F)$ est le sous-groupe de décomposition de κ_n . D'après 4.6(iv), si n est une puissance de p , on a

$$(4.8.5) \quad \mathrm{Gal}(H_n/F) = L \otimes_{\mathbb{Z}} \mu_n(\mathcal{O}_{\overline{K}}).$$

Comme $F_n = H_n \otimes_{K_n} \overline{K}$, F_n est une extension galoisienne de F et on a un isomorphisme canonique

$$(4.8.6) \quad \mathrm{Gal}(F_n/F \otimes_K \overline{K}) \simeq \mathrm{Gal}(H_n/F \otimes_K K_n).$$

Le diagramme

$$(4.8.7) \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{Gal}(H_n/F) & \longrightarrow & L \otimes_{\mathbb{Z}} \mu_n(\mathcal{O}_{\overline{K}}) \\ \downarrow & & \downarrow \lambda \\ \mathrm{Gal}(F \otimes_K K_n/F) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Gal}(K_n/K) \xrightarrow{\sim} \mu_n(\mathcal{O}_{\overline{K}}) \end{array}$$

où les flèches non libellées sont les morphismes canoniques est commutatif. On en déduit que $\mathrm{Gal}(F_n/F \otimes_K \overline{K})$ est canoniquement isomorphe à un sous-groupe de $L_\lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mu_n(\mathcal{O}_{\overline{K}})$. Si n est une puissance de p , on a

$$(4.8.8) \quad \mathrm{Gal}(F_n/F \otimes_K \overline{K}) = L_\lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mu_n(\mathcal{O}_{\overline{K}}).$$

La proposition s'ensuit.

4.9. On pose $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{R}/R)$, $\Gamma_\infty = \mathrm{Gal}(R_\infty/R)$, $\Gamma_{p^\infty} = \mathrm{Gal}(R_{p^\infty}/R)$, $\Delta = \mathrm{Gal}(\overline{R}/R_1)$, $\Delta_\infty = \mathrm{Gal}(R_\infty/R_1)$, $\Delta_{p^\infty} = \mathrm{Gal}(R_{p^\infty}/R_1)$, $\Sigma = \mathrm{Gal}(\overline{R}/R_\infty)$ et $\Sigma_0 = \mathrm{Gal}(R_\infty/R_{p^\infty})$.

$$(4.9.1) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & \Gamma & & & \\ & & & \Delta_\infty & & & \\ & & & \Delta_{p^\infty} & & & \\ R & \xrightarrow{\quad} & R_1 & \xrightarrow{\quad} & R_{p^\infty} & \xrightarrow{\Sigma_0} & R_\infty \xrightarrow{\Sigma} \bar{R} \\ & \uparrow & \uparrow & & & & \\ \mathcal{O}_K & \xrightarrow{G_K} & \mathcal{O}_{\bar{K}} & & & & \end{array}$$

D'après 4.8(iv), Δ_∞ est canoniquement isomorphe à un sous-groupe de $L_\lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}(1)$, Δ_{p^∞} est canoniquement isomorphe à $L_\lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p(1)$, et Σ_0 est un groupe profini d'ordre premier à p .

4.10. Soit M un $\mathbb{Z}\text{-}\Delta_\infty$ -module discret de torsion p -primaire. Comme la p -dimension cohomologique de Σ_0 est nulle ([34] I cor. 2 de prop. 14), pour tout $q \geq 0$, le morphisme canonique

$$(4.10.1) \quad H^q(\Delta_{p^\infty}, M^{\Sigma_0}) \rightarrow H^q(\Delta_\infty, M)$$

est un isomorphisme. Par suite, la p -dimension cohomologique de Δ_∞ est égale à celle de Δ_{p^∞} , c'est à dire, au rang d de L_λ ([34] I prop. 21).

Remarque 4.11. Pour tout $\mathbb{Z}_p$ -module M complet et séparé pour la topologie p -adique, les homomorphismes canoniques

$$(4.11.1) \quad \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\Delta_{p^\infty}, M) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Delta_{p^\infty}, M) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Delta_\infty, M)$$

sont bijectifs. En effet, comme la multiplication par p dans Σ_0 est un isomorphisme, pour tout homomorphisme $\psi: \Sigma_0 \rightarrow M$, on a $\psi(\Sigma_0) \subset \cap_{n \geq 0} p^n M = 0$.

Supposons de plus que M soit un A -module, où A est une $\mathbb{Z}_p$ -algèbre complète et séparée pour la topologie p -adique. Comme Δ_{p^∞} est un $\mathbb{Z}_p$ -module libre de type fini, il résulte de (4.11.1) que le morphisme canonique

$$(4.11.2) \quad M \otimes_A \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Delta_\infty, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Delta_\infty, M)$$

est bijectif.

Lemme 4.12. Les anneaux $\widehat{R}_1$, $\widehat{R}_{p^\infty}$, $\widehat{R}_\infty$ et $\widehat{\bar{R}}$ sont plats sur $\mathcal{O}_C$ et les homomorphismes canoniques $\widehat{R}_1 \rightarrow \widehat{R}_{p^\infty}$, $\widehat{R}_{p^\infty} \rightarrow \widehat{R}_\infty$ et $\widehat{R}_\infty \rightarrow \widehat{\bar{R}}$ sont injectifs.

Comme R_1 , R_{p^∞} et R_∞ sont normaux d'après 4.8(iii), on a, pour tout $n \geq 0$,

$$p^n R_1 = (p^n R_{p^\infty}) \cap R_1, \quad p^n R_{p^\infty} = (p^n R_\infty) \cap R_{p^\infty} \quad \text{et} \quad p^n R_\infty = (p^n \bar{R}) \cap R_\infty.$$

On en déduit que les homomorphismes canoniques $\widehat{R}_1 \rightarrow \widehat{R}_{p^\infty}$, $\widehat{R}_{p^\infty} \rightarrow \widehat{R}_\infty$ et $\widehat{R}_\infty \rightarrow \widehat{\bar{R}}$ sont injectifs. D'autre part, on a, pour tout $n \geq 0$,

$$(4.12.1) \quad \widehat{R}_1 / p^n \widehat{R}_1 \simeq R_1 / p^n R_1,$$

et de même pour $\widehat{R}_\infty$ et $\widehat{\bar{R}}$ ([10] chap. III §2.11 prop. 14 et cor. 1). Soient $x \in \widehat{R}_1$ tel que $px = 0$, $\bar{x}$ la classe de x dans $\widehat{R}_1 / p^n \widehat{R}_1$ ($n \geq 1$). Comme R_1 est plat sur $\mathbb{Z}_p$, il résulte de (4.12.1) que $\bar{x} \in p^{n-1} \widehat{R}_1 / p^n \widehat{R}_1$. On en déduit que $x \in \cap_{n \geq 0} p^n \widehat{R}_1 = \{0\}$ puisque $\widehat{R}_1$ est séparé pour la topologie p -adique. Par suite, p n'est pas diviseur de zéro dans $\widehat{R}_1$, et donc $\widehat{R}_1$ est plat sur $\mathcal{O}_C$ en vertu de ([1] 1.9.12). Le même argument montre que $\widehat{R}_\infty$, $\widehat{R}_{p^\infty}$ et $\widehat{\bar{R}}$ sont plats sur $\mathcal{O}_C$.

Proposition 4.13. L'anneau $\widehat{R}_1$ est intègre et normal.

On note d'abord que $\widehat{R}_1$ est une $\mathcal{O}_C$ -algèbre topologiquement de présentation finie ([1] 1.10.4), et par suite que $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ est une algèbre affinoïde sur C .

Montrons que $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ est normal. On identifie $\widehat{R}_1$ au séparé complété p -adique de $B = R \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_C$ et on note $\varphi: B \rightarrow \widehat{R}_1$ l'homomorphisme canonique. Soient $\mathfrak{q}$ un idéal maximal de $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$, $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$. En vertu de ([1] 1.12.18), l'homomorphisme canonique $B_{\mathfrak{p}} \rightarrow (\widehat{R}_1)_{\mathfrak{q}}$ induit un isomorphisme entre les séparés complétés de ces anneaux locaux pour les topologies définies par leurs idéaux maximaux respectifs. Le schéma $\mathrm{Spec}(B[\frac{1}{p}])$ muni de la structure logarithmique image inverse de $\mathcal{M}_X$ est lisse sur $\mathrm{Spec}(C)$ muni de la structure logarithmique triviale. Par suite, $B[\frac{1}{p}]$ est normal en vertu de ([28] 4.1 et 8.2). Comme $B[\frac{1}{p}]$ est un anneau excellent, on déduit de ce qui précède que les séparés complétés de $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ en chacun de ses idéaux maximaux sont normaux ([23] 7.8.3(v)). Comme $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ est un anneau excellent ([5] 3.3.3), ses localisés en chacun de ses idéaux maximaux sont normaux ([23] 7.8.3(v)). Par suite, $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ est normal ([23] 7.8.3(iv)).

Pour tout $h \in \widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$, posons

$$(4.13.1) \quad |h|_{\mathrm{sup}} = \sup_{x \in \mathrm{Max}(\widehat{R}_1[\frac{1}{p}])} |h(x)|,$$

où $\mathrm{Max}(\widehat{R}_1[\frac{1}{p}])$ est le spectre maximal de $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$, ou ce qui revient au même, l'ensemble des points rigides de $\mathrm{Spf}(\widehat{R}_1)$ ([1] 3.3.2). C'est une semi-norme multiplicative sur $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ ([6] 6.2.1/1). Posons

$$(4.13.2) \quad B_{\mathrm{sup}} = \{h \in \widehat{R}_1[\frac{1}{p}] \mid |h|_{\mathrm{sup}} \leq 1\}.$$

Comme $\widehat{R}_1$ est $\mathcal{O}_C$ -plat (4.12) et que $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ est réduit, on a $\widehat{R}_1 \subset B_{\mathrm{sup}}$ et B_{sup} est la fermeture intégrale de $\widehat{R}_1$ dans $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ ([6] 6.3.4/1 et 6.2.2/3). Comme $R \otimes_{\mathcal{O}_K} \bar{k}$ est réduit d'après 4.2(P₁), $\widehat{R}_1 = B_{\mathrm{sup}}$ en vertu de ([6] 6.4.3/4; cf. aussi [7] 1.1). Donc $\widehat{R}_1$ est intégralement clos dans $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ et est par suite normal. Comme $R \otimes_{\mathcal{O}_K} \bar{k}$ est connexe, $\widehat{R}_1$ est connexe et donc intègre.

Théorème 4.14 (Faltings, [16] § 2b). *Pour toute extension finie L de H_{∞} contenue dans $\overline{F}$, la clôture intégrale de B_{∞} dans L est presque-étale sur B_{∞} (4.7.5).*

Corollaire 4.15. *L'extension $\overline{F}$ de F_{∞} est la réunion d'un système inductif filtrant de sous-extensions finies L de F_{∞} telles que la clôture intégrale de R_{∞} dans L soit presque-étale sur R_{∞} (4.7.7).*

Soient L une extension finie de H_{∞} contenue dans $\overline{F}$, L' l'image de l'homomorphisme canonique $F_{\infty} \otimes_{H_{\infty}} L \rightarrow \overline{F}$, D (resp. D') la clôture intégrale de R dans L (resp. L'). On sait (4.14) que D est presque-étale sur B_{∞} . Donc $D \otimes_{B_{\infty}} R_{\infty}$ est presque-étale sur R_{∞} d'après ([42] 2.6.4). Par suite, D' est presque-étale sur R_{∞} en vertu de ([42] 2.6.11 et 2.6.4), d'où la proposition.

Corollaire 4.16. *Pour tout sous-anneau A de R_{∞} , le morphisme canonique*

$$(4.16.1) \quad \Omega_{R_{\infty}/A}^1 \otimes_{R_{\infty}} \overline{R} \rightarrow \Omega_{\overline{R}/A}^1$$

est un presque-isomorphisme.

Cela résulte de 4.15 et ([15] I 2.4(i)).

Corollaire 4.17. *Soit M un $\overline{R}$ -module muni d'une action $\overline{R}$ -semi-linéaire continue de Σ pour la topologie discrète de M . Alors $H^i(\Sigma, M)$ est presque nul pour tout $i \geq 1$, et le morphisme canonique $M^{\Sigma} \otimes_{R_{\infty}} \overline{R} \rightarrow M$ est un presque-isomorphisme.*

Soient L une extension galoisienne finie de F_∞ contenue dans $\overline{F}$, D la clôture intégrale de R_∞ dans L , $G = \text{Gal}(L/F_\infty)$, $\Sigma_L = \text{Gal}(\overline{F}/L)$. Supposons que D soit presque-étale sur R_∞ . Alors D est un presque G -torseur sur R_∞ ([42] 2.10.9). On en déduit par ([42] 2.10.5 et 2.10.8) que, pour tout $i \geq 1$, $H^i(G, M^{\Sigma_L})$ est presque nul, et le morphisme canonique $M^\Sigma \otimes_{R_\infty} D \rightarrow M^{\Sigma_L}$ est un presque-isomorphisme. La proposition s'ensuit par passage à la limite inductive en vertu de 4.15.

Corollaire 4.18. *Soit M un $\overline{R}$ -module muni d'une action $\overline{R}$ -semi-linéaire continue de Δ pour la topologie discrète de M . Alors le morphisme canonique $H^i(\Delta_\infty, M^\Sigma) \rightarrow H^i(\Delta, M)$ est un presque-isomorphisme pour tout $i \geq 0$.*

Cela résulte de 4.17 et de la suite spectrale

$$(4.18.1) \quad E_1^{ij} = H^i(\Delta_\infty, H^j(\Sigma, M)) \Rightarrow H^{i+j}(\Delta, M).$$

Corollaire 4.19. *Soient $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système projectif de $\widehat{R}$ -représentations de Σ (2.4), M sa limite projective. On suppose que, pour tout $n \geq 0$, M_n est annulé par une puissance de p , que l'action de Σ sur M_n est continue pour la topologie discrète et que le morphisme $M_{n+1} \rightarrow M_n$ est surjectif. Alors $H_{\text{cont}}^i(\Sigma, M)$ est presque nul pour tout entier $i \geq 1$.*

En effet, d'après (2.13.4) et (2.13.5), on a

$$(4.19.1) \quad 0 \rightarrow \varprojlim_n H^{i-1}(\Sigma, M_n) \rightarrow H_{\text{cont}}^i(\Sigma, M) \rightarrow \varprojlim_n H^i(\Sigma, M_n) \rightarrow 0.$$

Pour tout $q \geq 1$, $\varprojlim_n H^q(\Sigma, M_n)$ et $\varprojlim_n H^q(\Sigma, M_n)$ sont presque nuls en vertu de 4.17 et ([20] 2.4.2(ii)). Pour tout $n \geq 0$, notons C_n le noyau du morphisme surjectif $M_{n+1} \rightarrow M_n$, de sorte que l'on a une suite exacte

$$(4.19.2) \quad M_{n+1}^\Sigma \xrightarrow{\psi_n} M_n^\Sigma \longrightarrow H^1(\Sigma, C_n).$$

Alors $\text{coker}(\psi_n)$ est presque nul d'après 4.17. On en déduit que $\varprojlim_n M_n^\Sigma$ est presque nul en vertu de ([20] 2.4.2(iii) et 2.4.3), d'où la proposition.

Corollaire 4.20. *Pour tout $a \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$, l'homomorphisme canonique*

$$(4.20.1) \quad R_\infty/aR_\infty \rightarrow (\overline{R}/a\overline{R})^\Sigma$$

est un presque-isomorphisme.

Soient L une extension galoisienne finie de F_∞ contenue dans $\overline{F}$, D la clôture intégrale de R_∞ dans L , $G = \text{Gal}(L/F_\infty)$, Tr_G l'endomorphisme R_∞ -linéaire de D (ou de D/aD) induit par $\sum_{\sigma \in G} \sigma$. Comme on a $D = \overline{R} \cap L$ et $R_\infty = D \cap F_\infty$ d'après 4.8(iii), les homomorphismes $R_\infty/aR_\infty \rightarrow D/aD \rightarrow \overline{R}/a\overline{R}$ sont injectifs. Supposons que D soit presque-étale sur R_∞ . Alors D est un presque G -torseur sur R_∞ en vertu de ([42] 2.10.9). Par suite, le quotient

$$\frac{(D/aD)^G}{\text{Tr}_G(D/aD)}$$

est presque nul d'après ([42] 2.10.8). Comme $\text{Tr}_G(D) \subset R_\infty$, l'homomorphisme $R_\infty/aR_\infty \rightarrow (D/aD)^G$ est un presque-isomorphisme. La proposition s'en déduit par passage à la limite inductive en vertu de 4.15.

Corollaire 4.21. *L'homomorphisme canonique $\widehat{R_\infty} \rightarrow \widehat{\overline{R}}^\Sigma$ est un presque-isomorphisme.*

En effet, l'homomorphisme en question est la limite projective des homomorphismes ($r \geq 0$)

$$(4.21.1) \quad R_\infty/p^r R_\infty \rightarrow (\overline{R}/p^r \overline{R})^\Sigma.$$

Cela se vérifie aisément ou se déduit de (2.13.5). La proposition résulte donc de 4.20 et ([20] 2.4.2(ii)).

Corollaire 4.22. *Pour tout élément non nul a de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ et tout entier $i \geq 0$, le morphisme canonique*

$$(4.22.1) \quad H^i(\Delta_\infty, R_\infty/aR_\infty) \rightarrow H^i(\Delta, \overline{R}/a\overline{R})$$

est un presque-isomorphisme.

Cela résulte de 4.18 et 4.20.

Corollaire 4.23. *Pour tout entier $i \geq 0$, le morphisme canonique*

$$(4.23.1) \quad H_{\text{cont}}^i(\Delta_\infty, \widehat{R_\infty}) \rightarrow H_{\text{cont}}^i(\Delta, \widehat{\overline{R}})$$

est un presque-isomorphisme.

Pour tout entier $r \geq 0$, notons

$$(4.23.2) \quad \psi_r: H^i(\Delta_\infty, R_\infty/p^r R_\infty) \rightarrow H^i(\Delta, \overline{R}/p^r \overline{R})$$

l'homomorphisme canonique et A_r (resp. C_r) son noyau (resp. conoyau). On sait que les $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ -modules A_r et C_r sont presque nuls d'après 4.22. Donc les $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ -modules

$$\varprojlim_{r \geq 0} A_r, \quad \varprojlim_{r \geq 0} C_r, \quad \mathrm{R}^1 \varprojlim_{r \geq 0} A_r, \quad \mathrm{R}^1 \varprojlim_{r \geq 0} C_r$$

sont presque nuls en vertu de ([20] 2.4.2(ii)). On en déduit que les morphismes

$$\varprojlim_{r \geq 0} \psi_r \quad \text{et} \quad \mathrm{R}^1 \varprojlim_{r \geq 0} \psi_r$$

sont des presque-isomorphismes, ce qui implique la proposition compte tenu de (2.13.4) et (2.13.5).

5. L'EXTENSION DE FALTINGS

5.1. Soient K_0 le corps des fractions de l'anneau $W(k)$ des vecteurs de Witt à coefficients dans k , $\mathcal{D}_{K/K_0}$ la différentielle de l'extension K/K_0 . D'après ([18] théo. 1'), il existe une et une unique application $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ -linéaire et G_K -équivariante

$$(5.1.1) \quad \phi: \overline{K} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(1) \rightarrow \Omega_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K}^1,$$

telle que pour tous $\zeta \in \mathbb{Z}_p(1)$, $a \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$ et $r \in \mathbb{N}$, si $\zeta_r \in \mu_{p^r}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ est l'image canonique de ζ , on ait

$$(5.1.2) \quad \phi(p^{-r}a \otimes \zeta) = a \cdot d \log(\zeta_r).$$

Elle est surjective de noyau $\rho^{-1} \mathcal{O}_{\overline{K}}(1)$, où ρ est un élément de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ de valuation $\frac{1}{p-1} + v(\mathcal{D}_{K/K_0})$.

5.2. Le morphisme (4.7.6) induit un $\mathcal{O}_K$ -homomorphisme

$$(5.2.1) \quad \lim_{\substack{\longrightarrow \\ n \geq 1}} \mathcal{O}_{K_n} \rightarrow \mathcal{O}_{\overline{K}},$$

où la limite inductive est indexée par l'ensemble $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ ordonné par la relation de divisibilité. Pour tout $n \geq 1$, on identifie dans la suite $\mathcal{O}_{K_n}$ à une sous- $\mathcal{O}_K$ -algèbre de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$; en particulier, on considère π_n comme un élément de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ (4.4). On a $\pi_1 = \pi$ et $\pi_{mn}^m = \pi_n$ pour tous $m, n \geq 1$.

Pour tout entier $n \geq 1$, il existe un élément de $\Omega_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K}^1$, que l'on note $d \log(\pi_n)$, tel que pour tout entier $m \geq 1$, divisible par p , on ait

$$(5.2.2) \quad d \log(\pi_n) = \frac{m}{\pi_{mn}} d\pi_{mn} \in \Omega_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K}^1.$$

En effet, $m \in \pi_{mn} \mathcal{O}_{K_{mn}}$, de sorte que $m/\pi_{mn} \in \mathcal{O}_{K_{mn}}$, et pour tout $m' \geq 1$, on a

$$(5.2.3) \quad \frac{m}{\pi_{mn}} d\pi_{mn} = \frac{m}{\pi_{mn}} m' \pi_{mm'n}^{m'-1} d\pi_{mm'n} = \frac{mm'}{\pi_{mm'n}} d\pi_{mm'n} \in \Omega_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K}^1.$$

On prendra garde que l'élément $d \log(\pi_n)$ ne dépend pas seulement de π_n , mais aussi de l'homomorphisme (5.2.1).

Pour tous entiers $m, n \geq 1$, on a

$$(5.2.4) \quad \pi_n d \log(\pi_n) = d\pi_n,$$

$$(5.2.5) \quad d \log(\pi_n) = m d \log(\pi_{mn}).$$

Comme les morphismes canoniques $\Omega_{\mathcal{O}_{K_n}/\mathcal{O}_K}^1 \rightarrow \Omega_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K}^1$ sont injectifs ([18] 2.4 lem. 4), pour tout entier $n \geq 1$, l'annulateur de $d \log(\pi_n)$ dans $\Omega_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K}^1$ est $n\pi \mathcal{O}_{\overline{K}}$ ([18] 2.1 lem. 1).

5.3. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\mathbb{N}^{(n)}$ le monoïde au-dessus de $\mathbb{N}$ défini par le couple $(\mathbb{N}, \varpi_n)$, autrement dit, $\mathbb{N}^{(n)}$ est le monoïde $\mathbb{N}$ et le morphisme structural $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^{(n)}$ est l'homomorphisme de Frobenius d'ordre n de $\mathbb{N}$. On note $a_n : \mathbb{N}^{(n)} \rightarrow \mathcal{O}_{\overline{K}}$ l'homomorphisme défini par $a_n(1) = \pi_n$. On notera $\mathbb{N}^{(1)}$ (resp. a_1) simplement $\mathbb{N}$ (resp. a). Pour tous entiers $m, n \geq 1$, le diagramme

$$(5.3.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^{(n)} & \xrightarrow{a_n} & \mathcal{O}_{\overline{K}} \\ \varpi_m \downarrow & & \parallel \\ \mathbb{N}^{(mn)} & \xrightarrow{a_{mn}} & \mathcal{O}_{\overline{K}} \end{array}$$

est commutatif. Les monoïdes $\mathbb{N}^{(n)}$ forment un système inductif indexé par l'ensemble $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ ordonné par la relation de divisibilité; notons $\mathbb{N}_{\infty}$ sa limite inductive

$$(5.3.2) \quad \mathbb{N}_{\infty} = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ n \geq 1}} \mathbb{N}^{(n)}.$$

Les homomorphismes a_n définissent par passage à la limite inductive un homomorphisme

$$(5.3.3) \quad a_{\infty} : \mathbb{N}_{\infty} \rightarrow \mathcal{O}_{\overline{K}}.$$

Lemme 5.4. Soit n un entier ≥ 1 . Alors :

(i) On a des isomorphismes canoniques

$$(5.4.1) \quad \Omega_{(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N}^{(n)})/(\mathcal{O}_K, \mathbb{N})}^1 \simeq \frac{\Omega_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K}^1 \oplus \mathcal{O}_{\overline{K}}/n\mathcal{O}_{\overline{K}}}{(d\pi_n - \pi_n)\mathcal{O}_{\overline{K}}},$$

$$(5.4.2) \quad \Omega_{(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N}^{(n)})/(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N})}^1 \simeq \mathcal{O}_{\overline{K}}/(n\mathcal{O}_{\overline{K}} + \pi_n\mathcal{O}_{\overline{K}}).$$

(ii) Si p divise n , le noyau du morphisme canonique

$$(5.4.3) \quad \Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K} \rightarrow \Omega^1_{(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N}^{(n)})/(\mathcal{O}_K, \mathbb{N})}$$

est engendré par $d \log(\pi)$ (5.2.2).

(i) On a un diagramme commutatif à carré cartésien

$$(5.4.4) \quad \begin{array}{ccccc} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\overline{K}}) & \xrightarrow{j_n} & \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\overline{K}}[\xi]/(\xi^n - \pi)) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\overline{K}}[\mathbb{N}^{(n)}]) \\ & \searrow & \downarrow & \square & \downarrow \\ & & \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K[\mathbb{N}]) \end{array}$$

où j_n est l'immersion fermée définie par l'équation $\xi - \pi_n$. D'autre part, on a un isomorphisme canonique

$$(5.4.5) \quad \Omega^1_{(\mathcal{O}_{\overline{K}}[\mathbb{N}^{(n)}], \mathbb{N}^{(n)})/(\mathcal{O}_{\overline{K}}[\mathbb{N}], \mathbb{N})} \simeq \Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K} \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{K}}} \mathcal{O}_{\overline{K}}[\mathbb{N}^{(n)}] \oplus \mathcal{O}_{\overline{K}}[\mathbb{N}^{(n)}]/n\mathcal{O}_{\overline{K}}[\mathbb{N}^{(n)}].$$

L'isomorphisme (5.4.1) s'en déduit aussitôt. L'isomorphisme (5.4.2) se démontre par un diagramme analogue à (5.4.4).

(ii) Soit $\omega \in \Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K}$ tel que son image dans $\Omega^1_{(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N}^{(n)})/(\mathcal{O}_K, \mathbb{N})}$ soit nulle. D'après (5.4.1), il existe $x \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$ tel que $\omega = x(d\pi_n - \pi_n) \in \Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K} \oplus \mathcal{O}_{\overline{K}}/n\mathcal{O}_K$. Par suite, $x\pi_n \in n\mathcal{O}_{\overline{K}}$ et $\omega = xd\pi_n \in \mathcal{O}_{\overline{K}}d \log(\pi)$. Inversement, on a

$$(5.4.6) \quad d \log(\pi) = (n/\pi_n)(d\pi_n - \pi_n) \in \Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K} \oplus \mathcal{O}_{\overline{K}}/n\mathcal{O}_K.$$

Donc l'image de $d \log(\pi)$ par le morphisme (5.4.3) est nulle en vertu de (5.4.1).

Proposition 5.5. *Le morphisme canonique*

$$(5.5.1) \quad \Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K} \rightarrow \Omega^1_{(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N}_{\infty})/(\mathcal{O}_K, \mathbb{N})}$$

est surjectif et son noyau est engendré par $d \log(\pi)$. En particulier, le morphisme ϕ (5.1.1) induit un morphisme $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ -linéaire surjectif

$$(5.5.2) \quad \overline{K} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(1) \rightarrow \Omega^1_{(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N}_{\infty})/(\mathcal{O}_K, \mathbb{N})},$$

de noyau $(\pi\rho)^{-1}\mathcal{O}_{\overline{K}}(1)$.

On notera d'abord que la seconde proposition est une conséquence immédiate de la première et de 5.1. Montrons la première proposition. Par la propriété universelle des modules de 1-différentielles logarithmiques, le morphisme canonique

$$(5.5.3) \quad \lim_{n \geq 1} \Omega^1_{(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N}^{(n)})/(\mathcal{O}_K, \mathbb{N})} \rightarrow \Omega^1_{(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N}_{\infty})/(\mathcal{O}_K, \mathbb{N})}$$

où la limite inductive est indexée par l'ensemble $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ ordonné par la relation de divisibilité, est un isomorphisme. Il résulte donc de 5.4(ii) que le noyau du morphisme (5.5.1) est engendré par $d \log(\pi)$. D'autre part, on a un isomorphisme canonique

$$(5.5.4) \quad \lim_{n \geq 1} \Omega^1_{(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N}^{(n)})/(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N})} \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N}_{\infty})/(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N})}.$$

D'après (5.4.2), pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$(5.5.5) \quad \Omega^1_{(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N}^{(n)})/(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N})} = \begin{cases} 0 & \text{si } (n, p) = 1, \\ k_n \otimes_{\mathcal{O}_{K_n}} \mathcal{O}_{\overline{K}} & \text{si } p|n, \end{cases}$$

où k_n est le corps résiduel de $\mathcal{O}_{K_n}$. On notera que pour tous entiers $m, n \geq 1$, le morphisme canonique

$$(5.5.6) \quad \Omega^1_{(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N}^{(n)})/(\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathbb{N})} \rightarrow \Omega^1_{(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N}^{(nm)})/(\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathbb{N})}$$

s'identifie à m fois le morphisme canonique $k_n \otimes_{\mathcal{O}_{K_n}} \mathcal{O}_{\overline{K}} \rightarrow k_{mn} \otimes_{\mathcal{O}_{K_{mn}}} \mathcal{O}_{\overline{K}}$. On en déduit que $\Omega^1_{(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N}_{\infty})/(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N})} = 0$ et par suite que le morphisme (5.5.1) est surjectif.

Remarque 5.6. Pour tout entier $n \geq 1$, l'image canonique de l'élément $d \log(\pi_n) \in \Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K}$ (5.2.2) dans $\Omega^1_{(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N}_{\infty})/(\mathcal{O}_K, \mathbb{N})}$ est égale à l'élément $d \log(1^{(n)}) \in \Omega^1_{(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N}^{(n)})/(\mathcal{O}_K, \mathbb{N})}$, où $1^{(n)}$ désigne l'image de 1 par l'isomorphisme canonique $\mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}^{(n)}$. En effet, on a dans $\Omega^1_{(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N}^{(pn)})/(\mathcal{O}_K, \mathbb{N})}$

$$(5.6.1) \quad d \log(\pi_n) - d \log(1^{(n)}) = \frac{p}{\pi_{pn}} (d\pi_{pn} - \pi_{pn} d \log(1^{(pn)})) = 0.$$

On notera que l'égalité $d \log(\pi_n) = d \log(1^{(n)})$ vaut dans $\Omega^1_{(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N}^{(mn)})/(\mathcal{O}_K, \mathbb{N})}$ pour tout entier $m \geq 1$ divisible par p (mais en général elle ne vaut pas lorsque $m = 1$).

Lemme 5.7. Pour toute $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ -algèbre plate A , les $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ -modules

$$(5.7.1) \quad \Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K} \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{K}}} A \quad \text{et} \quad \Omega^1_{(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N}_{\infty})/(\mathcal{O}_K, \mathbb{N})} \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{K}}} A$$

n'ont pas de $\mathfrak{m}_{\overline{K}}$ -torsion non nulle.

Compte tenu de (5.1.1) et (5.5.2), il suffit de montrer que le $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ -module $A[\frac{1}{p}]/A$ n'a pas de $\mathfrak{m}_{\overline{K}}$ -torsion non nulle. La $\mathfrak{m}_{\overline{K}}$ -torsion étant contenue dans la p -torsion, il suffit encore de montrer que le $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ -module A/pA , n'a pas de $\mathfrak{m}_{\overline{K}}$ -torsion non nulle. Un calcul de valuations montre que $\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}$ n'a pas de $\mathfrak{m}_{\overline{K}}$ -torsion non nulle, autrement dit, le morphisme

$$(5.7.2) \quad \mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}} \rightarrow \bigoplus_{n \geq 1} \mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}, \quad x \mapsto (p^{1/n}x)_{n \geq 1}$$

est injectif. Il en est alors de même du morphisme obtenu par extension des scalaires de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ à A , d'où l'assertion.

5.8. Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par $P^{(n)}$ le monoïde au-dessus de P défini par le couple (P, ϖ_n) , autrement dit, $P^{(n)}$ est le monoïde P et le morphisme structural $P \rightarrow P^{(n)}$ est l'homomorphisme de Frobenius d'ordre n de P . On note $\alpha_n: P^{(n)} \rightarrow R_n$ l'homomorphisme induit par le morphisme strict canonique $(X_n, \mathcal{M}_{X_n}) \rightarrow B[P]$ (4.5.1). On notera $P^{(1)}$ (resp. α_1) simplement P (resp. α). Pour tous entiers $m, n \geq 1$, le diagramme

$$(5.8.1) \quad \begin{array}{ccc} P^{(n)} & \xrightarrow{\alpha_n} & R_n \\ \varpi_m \downarrow & & \downarrow \\ P^{(mn)} & \xrightarrow{\alpha_{mn}} & R_{mn} \end{array}$$

est commutatif. Les monoïdes $P^{(n)}$ forment un système inductif indexé par l'ensemble $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ ordonné par la relation de divisibilité; notons P_{∞} sa limite inductive.

$$(5.8.2) \quad P_{\infty} = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ n \geq 1}} P^{(n)}.$$

Les homomorphismes α_n définissent par passage à la limite inductive un homomorphisme

$$(5.8.3) \quad \alpha_{\infty}: P_{\infty} \rightarrow R_{\infty}.$$

On note encore $\alpha_{\infty}: P_{\infty} \rightarrow \overline{R}$ le composé de α_{∞} et de l'injection canonique $R_{\infty} \rightarrow \overline{R}$.

Pour tout $t \in P$, on note $t^{(n)} \in P^{(n)}$ son image par l'isomorphisme canonique

$$(5.8.4) \quad P \xrightarrow{\sim} P^{(n)}.$$

On a donc, pour tous $m, n \geq 1$,

$$(5.8.5) \quad (t^{(mn)})^m = t^{(n)} \in P_\infty.$$

Proposition 5.9. (i) *La suite canonique*

$$(5.9.1) \quad 0 \rightarrow \Omega_{(R,P)/(\mathcal{O}_K, \mathbb{N})}^1 \otimes_R R_\infty \rightarrow \Omega_{(R_\infty, P_\infty)/(\mathcal{O}_{\bar{K}}, \mathbb{N})}^1 \rightarrow \Omega_{(R_\infty, P_\infty)/(R_1, P)}^1 \rightarrow 0$$

est exacte.

(ii) *Pour tout entier $m \geq 0$, le morphisme*

$$(5.9.2) \quad \text{Hom}(p^{-m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}, \Omega_{(R_\infty, P_\infty)/(R_1, P)}^1) \rightarrow \Omega_{(R,P)/(\mathcal{O}_K, \mathbb{N})}^1 \otimes_R (R_\infty/p^m R_\infty)$$

déduit de (5.9.1) par le diagramme du serpent est un isomorphisme.

(iii) *Il existe un isomorphisme R_∞ -linéaire canonique*

$$(5.9.3) \quad (P^{\text{gp}}/\lambda\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (R_\infty[\frac{1}{p}]/R_\infty) \xrightarrow{\sim} \Omega_{(R_\infty, P_\infty)/(R_1, P)}^1.$$

(i) On a un isomorphisme canonique

$$(5.9.4) \quad \lim_{\substack{\longrightarrow \\ n \geq 1}} \Omega_{(R_n, P^{(n)})/(\mathcal{O}_{\bar{K}}, \mathbb{N})}^1 \xrightarrow{\sim} \Omega_{(R_\infty, P_\infty)/(\mathcal{O}_{\bar{K}}, \mathbb{N})}^1,$$

où la limite inductive est indexée par l'ensemble $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ ordonné par la relation de divisibilité. Il suffit donc de montrer que pour tout $n \geq 1$, le morphisme canonique

$$(5.9.5) \quad \Omega_{(R_1, P)/(\mathcal{O}_{\bar{K}}, \mathbb{N})}^1 \otimes_{R_1} R_n \rightarrow \Omega_{(R_n, P^{(n)})/(\mathcal{O}_{\bar{K}}, \mathbb{N})}^1$$

est injectif. Rappelons que $\text{Spec}(R_1) = X \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{\bar{K}}$, que $\text{Spec}(R_n)$ est une composante connexe de $X_n \otimes_{\mathcal{O}_{K_n}} \mathcal{O}_{\bar{K}}$ (4.8), que le morphisme canonique $X \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_K[P]/(\pi - e^\lambda))$ est étale (4.2.2) et qu'on a un diagramme cartésien de $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ -morphisms (4.6.3)

$$(5.9.6) \quad \begin{array}{ccc} X_n \otimes_{\mathcal{O}_{K_n}} \mathcal{O}_{\bar{K}} & \longrightarrow & \text{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}}[P^{(n)}]/(\pi_n - e^{\lambda^{(n)}})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{\bar{K}} & \longrightarrow & \text{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}}[P]/(\pi - e^\lambda)) \end{array}$$

où $\lambda^{(n)}$ est l'image de λ dans $P^{(n)}$ par l'isomorphisme (5.8.4). Considérons le diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$(5.9.7) \quad \begin{array}{ccccc} \text{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}}[P^{(n)}]/(\pi_n - e^{\lambda^{(n)}})) & \longrightarrow & \text{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}}[P^{(n)}]/(\pi - e^{n\lambda^{(n)}})) & \longrightarrow & \text{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}}[P^{(n)}]) \\ & \searrow & \downarrow & \square & \downarrow \varpi_n^* \\ & & \text{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}}[P]/(\pi - e^\lambda)) & \longrightarrow & \text{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}}[P]) \\ & & \downarrow & \square & \downarrow \\ & & \text{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}}) & \longrightarrow & \text{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}}[\mathbb{N}]) \end{array}$$

On a un isomorphisme canonique

$$(5.9.8) \quad \Omega_{(\mathcal{O}_{\bar{K}}[P], P)/(\mathcal{O}_{\bar{K}}[\mathbb{N}], \mathbb{N})}^1 \xrightarrow{\sim} (P^{\text{gp}}/\lambda\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\bar{K}}[P],$$

tel que pour tout $x \in P$, l'image de $d \log(x)$ soit la classe de x dans $P^{\text{gp}}/\lambda\mathbb{Z}$. Par suite, le morphisme

$$\Omega^1_{(\mathcal{O}_{\overline{K}}[P], P)/(\mathcal{O}_{\overline{K}}[\mathbb{N}], \mathbb{N})} \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{K}}[P]} \mathcal{O}_{\overline{K}}[P^{(n)}] \rightarrow \Omega^1_{(\mathcal{O}_{\overline{K}}[P^{(n)}], P^{(n)})/(\mathcal{O}_{\overline{K}}[\mathbb{N}], \mathbb{N})}$$

induit par ϖ_n^* s'identifie au morphisme $\mathcal{O}_{\overline{K}}[P^{(n)}]$ -linéaire

$$(5.9.9) \quad (P^{\text{gp}}/\lambda\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\overline{K}}[P^{(n)}] \rightarrow (P^{\text{gp}}/n\lambda\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\overline{K}}[P^{(n)}]$$

déduit de la multiplication par n sur P^{gp} .

Il résulte du diagramme (5.9.7) et de ce qui le précède qu'on a un isomorphisme canonique

$$(5.9.10) \quad \frac{(P^{\text{gp}}/n\lambda\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R_n}{\bar{\lambda} \otimes \pi_n R_n} \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{(R_n, P^{(n)})/(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N})},$$

où $\bar{\lambda}$ désigne la classe de λ dans $P^{\text{gp}}/n\lambda\mathbb{Z}$. On en déduit un morphisme surjectif canonique

$$(5.9.11) \quad \Omega^1_{(R_n, P^{(n)})/(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N})} \rightarrow (P^{\text{gp}}/\lambda\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R_n.$$

D'après (5.9.9), le composé des morphismes (5.9.5) et (5.9.11) s'identifie au morphisme de multiplication par n sur $(P^{\text{gp}}/\lambda\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R_n$, qui est injectif puisque le sous-groupe de torsion de $P^{\text{gp}}/\lambda\mathbb{Z}$ est d'ordre premier à p et que R_n est plat sur $\mathbb{Z}_p$ en vertu de 4.6(ii). Par suite, le morphisme (5.9.5) est injectif.

(ii) Il suffit de montrer que la multiplication par p^m dans $\Omega^1_{(R_{\infty}, P_{\infty})/(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N})}$ est un isomorphisme. Pour tous entiers $n, n' \geq 1$, on a un diagramme commutatif

$$(5.9.12) \quad \begin{array}{ccc} (P^{\text{gp}}/n\lambda\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R_n & \longrightarrow & (P^{\text{gp}}/nn'\lambda\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R_{nn'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega^1_{(R_n, P^{(n)})/(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N})} & \xrightarrow{u_{n, nn'}} & \Omega^1_{(R_{nn'}, P^{(nn')})/(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N})} \end{array}$$

où les flèches verticales sont les morphismes surjectifs déduits de (5.9.10), $u_{n, nn'}$ est le morphisme canonique et la flèche horizontale supérieure est induite par la multiplication par n' dans P^{gp} et l'homomorphisme canonique $R_n \rightarrow R_{nn'}$. On en déduit que

$$(5.9.13) \quad u_{n, nn'}(\Omega^1_{(R_n, P^{(n)})/(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N})}) \subset n' \cdot \Omega^1_{(R_{nn'}, P^{(nn')})/(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N})}.$$

Par suite, la multiplication par p^m dans $\Omega^1_{(R_{\infty}, P_{\infty})/(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N})}$ est surjective.

Soit $\omega \in \Omega^1_{(R_{\infty}, P_{\infty})/(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N})}$ tel que $p^m \omega = 0$. Il existe alors $n \geq 1$ tel que $\omega \in \Omega^1_{(R_n, P^{(n)})/(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N})}$ et que $p^m \omega = 0$ dans $\Omega^1_{(R_n, P^{(n)})/(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N})}$. Considérons la suite exacte canonique

$$(5.9.14) \quad \Omega^1_{(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N}^{(n)})/(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N})} \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{K}}} R_n \xrightarrow{h_n} \Omega^1_{(R_n, P^{(n)})/(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N})} \longrightarrow \Omega^1_{(R_n, P^{(n)})/(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N}^{(n)})} \longrightarrow 0.$$

Le R_n -module $\Omega^1_{(R_n, P^{(n)})/(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N}^{(n)})}$ est libre de type fini en vertu de 4.6(i). Il est donc $\mathbb{Z}_p$ -plat en vertu de 4.6(ii). Par suite, ω est dans l'image de h_n . Il résulte alors de (5.5.5) et (5.5.6) qu'il existe $n' \geq 1$ tel que l'image de ω dans $\Omega^1_{(R_{nn'}, P^{(nn')})/(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N})}$ soit nulle. Donc ω est nul dans $\Omega^1_{(R_{\infty}, P_{\infty})/(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N})}$.

(iii) On a un isomorphisme canonique

$$(5.9.15) \quad \lim_{\substack{\longrightarrow \\ n \geq 1}} \Omega^1_{(R_n, P^{(n)})/(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N})} \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{(R_{\infty}, P_{\infty})/(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N})},$$

où la limite inductive est indexée par l'ensemble $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ ordonné par la relation de divisibilité. Pour tout entier $n \geq 1$, il résulte du diagramme (5.9.7) et de ce qui le précède qu'on a un isomorphisme canonique

$$(5.9.16) \quad M_n = \frac{(P^{\text{gp}}/nP^{\text{gp}}) \otimes_{\mathbb{Z}} R_n}{\tilde{\lambda} \otimes \pi_n R_n} \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{(R_n, P^{(n)})/(R_1, P)},$$

où $\tilde{\lambda}$ est la classe de λ dans $P^{\text{gp}}/nP^{\text{gp}}$. On note $d\log(\lambda^{(n)})$ l'image de $\tilde{\lambda} \otimes 1$ dans M_n , ce qui se justifie par l'isomorphisme (5.9.16). Pour tout entier $m \geq 1$, la multiplication par m dans P^{gp} et l'homomorphisme canonique $R_n \rightarrow R_{mn}$ induisent un morphisme $M_n \rightarrow M_{mn}$. Les $(M_n)_{n \geq 1}$ forment un système inductif pour la relation de divisibilité, et on a un isomorphisme canonique

$$(5.9.17) \quad \lim_{\substack{\longrightarrow \\ n \geq 1}} M_n \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{(R_{\infty}, P_{\infty})/(R_1, P)}.$$

Soit n un entier ≥ 1 . On a dans M_{pn}

$$(5.9.18) \quad d\log(\lambda^{(n)}) = pd\log(\lambda^{(pn)}) = \frac{p}{\pi_{pn}} \pi_{pn} d\log(\lambda^{(pn)}) = 0.$$

Par suite, pour tout entier $m \geq 1$ divisible par p , le composé des morphismes canoniques

$$(5.9.19) \quad (P^{\text{gp}}/nP^{\text{gp}}) \otimes_{\mathbb{Z}} R_n \rightarrow M_n \rightarrow M_{mn}$$

se factorise à travers un morphisme R_n -linéaire

$$(5.9.20) \quad N_n = ((P^{\text{gp}}/\lambda\mathbb{Z})/n(P^{\text{gp}}/\lambda\mathbb{Z})) \otimes_{\mathbb{Z}} R_n \rightarrow M_{mn}.$$

D'autre part, on a un morphisme surjectif canonique

$$(5.9.21) \quad M_{mn} \rightarrow ((P^{\text{gp}}/\lambda\mathbb{Z})/mn(P^{\text{gp}}/\lambda\mathbb{Z})) \otimes_{\mathbb{Z}} R_{mn}.$$

Le composé de (5.9.20) et (5.9.21) est induit par la multiplication par m dans $P^{\text{gp}}/\lambda\mathbb{Z}$ et par l'homomorphisme canonique $R_n \rightarrow R_{mn}$. Comme le sous-groupe de torsion de $P^{\text{gp}}/\lambda\mathbb{Z}$ est d'ordre premier à p et que R_n est $\mathbb{Z}_p$ -plat en vertu de 4.6(ii), la multiplication par m induit un morphisme injectif

$$((P^{\text{gp}}/\lambda\mathbb{Z})/n(P^{\text{gp}}/\lambda\mathbb{Z})) \otimes_{\mathbb{Z}} R_n \rightarrow ((P^{\text{gp}}/\lambda\mathbb{Z})/mn(P^{\text{gp}}/\lambda\mathbb{Z})) \otimes_{\mathbb{Z}} R_n.$$

Comme R_n est intègre et normal d'après 4.8(iii), l'homomorphisme canonique $R_n/mnR_n \rightarrow R_{mn}/mnR_{mn}$ est injectif. On en déduit que le morphisme (5.9.20) est injectif.

Pour tous entiers $m, n \geq 1$, la multiplication par m dans $P^{\text{gp}}/\lambda\mathbb{Z}$ et l'homomorphisme canonique $R_n \rightarrow R_{mn}$ induisent un morphisme $N_n \rightarrow N_{mn}$. Les $(N_n)_{n \geq 1}$ forment un système inductif pour la relation de divisibilité. Par passage à la limite inductive sur les morphismes (5.9.20), d'abord relativement aux entiers $m \geq 1$ multiples de p , puis aux entiers $n \geq 1$, on obtient un isomorphisme

$$(5.9.22) \quad \lim_{\substack{\longrightarrow \\ n \geq 1}} N_n \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{(R_{\infty}, P_{\infty})/(R_1, P)}.$$

Il est clair que le morphisme canonique

$$(5.9.23) \quad \lim_{\substack{\longrightarrow \\ s \geq 0}} N_{p^s} \rightarrow \lim_{\substack{\longrightarrow \\ n \geq 1}} N_n,$$

où la première limite inductive est indexée par l'ensemble $\mathbb{N}$ ordonné par la relation d'ordre habituelle, est un isomorphisme. La proposition s'ensuit.

Corollaire 5.10. *Les $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ -modules $\Omega^1_{(R_{\infty}, P_{\infty})/(R_1, P)}$ et $\Omega^1_{(R_{\infty}, P_{\infty})/(R_1, P)} \otimes_{R_{\infty}} \overline{R}$ n'ont pas de $\mathfrak{m}_{\overline{K}}$ -torsion non nulle.*

Il suffit de calquer la preuve de 5.7 en tenant compte de (5.9.3) et du fait que R_∞ et $\bar{R}$ sont $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ -plats ([10] chap. VI §3.6 lem. 1).

Corollaire 5.11. *Tout élément de $\Omega_{(R_\infty, P_\infty)/(R, P)}^1$ (resp. $\Omega_{(\bar{R}, P_\infty)/(R, P)}^1$) est annulé par une puissance de p .*

Comme le morphisme canonique

$$(5.11.1) \quad \Omega_{(R_\infty, P_\infty)/(R, P)}^1 \otimes_{R_\infty} \bar{R} \rightarrow \Omega_{(\bar{R}, P_\infty)/(R, P)}^1$$

est un presque-isomorphisme en vertu de 4.16 et ([27] 1.7), il suffit de montrer l'assertion relative à R_∞ . Tout élément de $\Omega_{(R_\infty, P_\infty)/(R_1, P)}^1$ est annulé par une puissance de p d'après (5.9.3), et il en est de même de $\Omega_{\mathcal{O}_{\bar{K}}/\mathcal{O}_K}^1$ (5.1). L'assertion recherchée résulte alors de la suite exacte

$$(5.11.2) \quad \Omega_{\mathcal{O}_{\bar{K}}/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{K}}} R_\infty \rightarrow \Omega_{(R_\infty, P_\infty)/(R, P)}^1 \rightarrow \Omega_{(R_\infty, P_\infty)/(R_1, P)}^1 \rightarrow 0.$$

Remarque 5.12. L'isomorphisme (5.9.2) peut se déduire aussi de l'isomorphisme (5.9.3) comme suit. On notera d'abord qu'on a un isomorphisme canonique

$$(5.12.1) \quad (P^{\text{gp}}/\lambda\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R \xrightarrow{\sim} \Omega_{(R, P)/(\mathcal{O}_K, \mathbb{N})}^1.$$

Pour tout entier $m \geq 0$, la p^m -torsion de $R_\infty[\frac{1}{p}]/R_\infty$ est canoniquement isomorphe à $R_\infty/p^m R_\infty$. Comme le sous-groupe de torsion de $P^{\text{gp}}/\lambda\mathbb{Z}$ est d'ordre premier à p , (5.9.3) induit un isomorphisme

$$(5.12.2) \quad (P^{\text{gp}}/\lambda\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (R_\infty/p^m R_\infty) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(p^{-m}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}, \Omega_{(R_\infty, P_\infty)/(R_1, P)}^1).$$

Il ressort de la preuve de 5.9 que celui-ci est l'inverse de l'isomorphisme (5.9.2).

Proposition 5.13. (i) *Le noyau du morphisme canonique*

$$(5.13.1) \quad \Omega_{\mathcal{O}_{\bar{K}}/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{K}}} R_\infty \rightarrow \Omega_{(R_\infty, P_\infty)/(R, P)}^1$$

est engendré par $d\log(\pi)$ (5.2.2).

(ii) *La suite de morphismes canoniques*

$$(5.13.2) \quad 0 \rightarrow \Omega_{(\mathcal{O}_{\bar{K}}, \mathbb{N}_\infty)/(\mathcal{O}_K, \mathbb{N})}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{K}}} R_\infty \rightarrow \Omega_{(R_\infty, P_\infty)/(R, P)}^1 \rightarrow \Omega_{(R_\infty, P_\infty)/(R_1, P)}^1 \rightarrow 0$$

est exacte et scindée.

(i) On a un isomorphisme canonique

$$(5.13.3) \quad \lim_{n \geq 1} \Omega_{(R_n, P^{(n)})/(R, P)}^1 \xrightarrow{\sim} \Omega_{(R_\infty, P_\infty)/(R, P)}^1,$$

où la limite inductive est indexée par l'ensemble $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ ordonné par la relation de divisibilité. Il suffit donc de montrer que pour tout entier $n \geq 1$ tel que p divise n , le noyau du morphisme canonique

$$(5.13.4) \quad \Omega_{\mathcal{O}_{\bar{K}}/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{K}}} R_n \rightarrow \Omega_{(R_n, P^{(n)})/(R, P)}^1$$

est engendré par $d\log(\pi)$. Par fonctorialité, ce morphisme se factorise à travers le morphisme canonique

$$(5.13.5) \quad \Omega_{(\mathcal{O}_{\bar{K}}, \mathbb{N}^{(n)})/(\mathcal{O}_K, \mathbb{N})}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{K}}} R_n \rightarrow \Omega_{(R_n, P^{(n)})/(R, P)}^1.$$

Il résulte donc de 5.4(ii) que $d\log(\pi)$ appartient au noyau du morphisme (5.13.4).

Montrons inversement que le noyau du morphisme (5.13.4) est contenu dans $R_n d \log(\pi)$. Rappelons que $\text{Spec}(R_1) = X \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{\bar{K}}$, que $\text{Spec}(R_n)$ est une composante connexe de $X_n \otimes_{\mathcal{O}_{K_n}} \mathcal{O}_{\bar{K}}$ (4.8) et qu'on a un diagramme cartésien de $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ -morphisms (4.6.3)

$$(5.13.6) \quad \begin{array}{ccc} X_n \otimes_{\mathcal{O}_{K_n}} \mathcal{O}_{\bar{K}} & \longrightarrow & \text{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}}[P^{(n)}]/(\pi_n - e^{\lambda^{(n)}})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{\bar{K}} & \longrightarrow & \text{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}}[P]/(\pi - e^\lambda)) \end{array}$$

où $\lambda^{(n)}$ est l'image de λ dans $P^{(n)}$ par l'isomorphisme (5.8.4). Considérons le diagramme commutatif à carré cartésien

$$(5.13.7) \quad \begin{array}{ccccc} \text{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}}[P^{(n)}]/(\pi_n - e^{\lambda^{(n)}})) & \longrightarrow & \text{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}}[P^{(n)}]/(\pi - e^{n\lambda^{(n)}})) & \longrightarrow & \text{Spec}(\mathcal{O}_{\bar{K}}[P^{(n)}]) \\ & \searrow & \downarrow & \square & \downarrow \\ & & \text{Spec}(\mathcal{O}_K[P]/(\pi - e^\lambda)) & \longrightarrow & \text{Spec}(\mathcal{O}_K[P]) \end{array}$$

On a un isomorphisme canonique

$$(5.13.8) \quad \Omega_{(\mathcal{O}_{\bar{K}}[P^{(n)}], P^{(n)})/(\mathcal{O}_K[P], P)}^1 \xrightarrow{\sim} (P^{\text{gp}}/nP^{\text{gp}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\bar{K}}[P^{(n)}] \oplus \Omega_{\mathcal{O}_{\bar{K}}/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{K}}} \mathcal{O}_{\bar{K}}[P^{(n)}].$$

On en déduit un isomorphisme

$$(5.13.9) \quad \Omega_{(R_n, P^{(n)})/(R, P)}^1 \xrightarrow{\sim} \frac{(P^{\text{gp}}/nP^{\text{gp}}) \otimes_{\mathbb{Z}} R_n \oplus \Omega_{\mathcal{O}_{\bar{K}}/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{K}}} R_n}{(\bar{\lambda} \otimes \pi_n - d\pi_n)R_n},$$

où $\bar{\lambda}$ est la classe de λ dans $P^{\text{gp}}/nP^{\text{gp}}$. On notera pour la preuve de (ii) que pour tout entier $m \geq 1$, le morphisme canonique

$$(5.13.10) \quad \Omega_{(R_n, P^{(n)})/(R, P)}^1 \rightarrow \Omega_{(R_{mn}, P^{(mn)})/(R, P)}^1$$

est induit par le morphisme de multiplication par m dans P^{gp} , par l'identité de $\Omega_{\mathcal{O}_{\bar{K}}/\mathcal{O}_K}^1$ et par l'homomorphisme canonique $R_n \rightarrow R_{mn}$.

Soit $\omega \in \Omega_{\mathcal{O}_{\bar{K}}/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{K}}} R_n$ tel que son image par le morphisme (5.13.4) soit nulle. D'après (5.13.9), il existe $x \in R_n$ tel que

$$(5.13.11) \quad \omega = x(\bar{\lambda} \otimes \pi_n - d\pi_n) \in (P^{\text{gp}}/nP^{\text{gp}}) \otimes_{\mathbb{Z}} R_n \oplus \Omega_{\mathcal{O}_{\bar{K}}/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{K}}} R_n.$$

Par suite, $\bar{\lambda} \otimes \pi_n x = 0$ dans $(P^{\text{gp}}/nP^{\text{gp}}) \otimes_{\mathbb{Z}} R_n$. Comme le sous-groupe de torsion de $P^{\text{gp}}/\lambda\mathbb{Z}$ est d'ordre premier à p et que R_n est plat sur $\mathbb{Z}_p$ en vertu de 4.6(ii), l'homomorphisme

$$(5.13.12) \quad (\lambda\mathbb{Z}/n\lambda\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R_n \rightarrow (P^{\text{gp}}/nP^{\text{gp}}) \otimes_{\mathbb{Z}} R_n$$

est injectif. On en déduit que $\pi_n x \in nR_n$. Donc $x \in (n/\pi_n)R_n$ car R_n est plat sur $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ et p divise n . Il résulte alors de (5.13.11) que $\omega = -xd\pi_n \in R_n d \log(\pi)$.

(ii) La suite (5.13.2) est exacte en vertu de (i), de 5.5 et de la suite exacte canonique

$$(5.13.13) \quad \Omega_{\mathcal{O}_{\bar{K}}/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{K}}} R_\infty \rightarrow \Omega_{(R_\infty, P_\infty)/(R, P)}^1 \rightarrow \Omega_{(R_\infty, P_\infty)/(R_1, P)}^1 \rightarrow 0.$$

Il reste à construire un scindage de (5.13.2). On a un isomorphisme canonique

$$(5.13.14) \quad \lim_{\substack{\longrightarrow \\ n \geq 1}} \Omega_{(R_n, P^{(n)})/(R_1, P)}^1 \xrightarrow{\sim} \Omega_{(R_\infty, P_\infty)/(R_1, P)}^1,$$

où la limite inductive est indexée par l'ensemble $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ ordonné par la relation de divisibilité. Donc compte tenu de l'isomorphisme (5.13.3), il suffit de construire pour tout entier $n \geq 1$ tel que p divise n , un inverse à droite du morphisme canonique

$$(5.13.15) \quad \Omega_{(R_n, P^{(n)})/(R, P)}^1 \rightarrow \Omega_{(R_1, P)}^1,$$

tel que la famille de ces inverses à droite soit un morphisme de systèmes inductifs.

Il résulte du diagramme (5.9.7) et de ce qui le précède qu'on a un isomorphisme

$$(5.13.16) \quad \Omega_{(R_n, P^{(n)})/(R_1, P)}^1 \xrightarrow{\sim} \frac{(P^{\text{gp}}/nP^{\text{gp}}) \otimes_{\mathbb{Z}} R_n}{\bar{\lambda} \otimes \pi_n R_n},$$

où $\bar{\lambda}$ est la classe de λ dans $P^{\text{gp}}/nP^{\text{gp}}$. Pour tout entier $m \geq 1$, le morphisme canonique

$$(5.13.17) \quad \Omega_{(R_n, P^{(n)})/(R, P)}^1 \rightarrow \Omega_{(R_{mn}, P^{(mn)})/(R, P)}^1$$

est induit par le morphisme de multiplication par m dans P^{gp} et par l'homomorphisme canonique $R_n \rightarrow R_{mn}$. Compte tenu de (5.13.9) et (5.13.16), le morphisme (5.13.15) est induit par la projection canonique

$$(5.13.18) \quad (P^{\text{gp}}/nP^{\text{gp}}) \otimes_{\mathbb{Z}} R_n \oplus \Omega_{\mathcal{O}_{\bar{K}}/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{K}}} R_n \rightarrow (P^{\text{gp}}/nP^{\text{gp}}) \otimes_{\mathbb{Z}} R_n.$$

Comme le sous-groupe de torsion de $P^{\text{gp}}/\lambda\mathbb{Z}$ est d'ordre premier à p et que R_n est plat sur $\mathbb{Z}_p$ en vertu de 4.6(ii), le morphisme R_n -linéaire

$$(5.13.19) \quad R_n \rightarrow P^{\text{gp}} \otimes_{\mathbb{Z}} R_n$$

défini par λ , admet un inverse à gauche R_n -linéaire $u: P^{\text{gp}} \otimes_{\mathbb{Z}} R_n \rightarrow R_n$. Considérons le morphisme

$$(5.13.20) \quad v_n: P^{\text{gp}} \otimes_{\mathbb{Z}} R_n \rightarrow (P^{\text{gp}}/nP^{\text{gp}}) \otimes_{\mathbb{Z}} R_n \oplus \Omega_{\mathcal{O}_{\bar{K}}/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{K}}} R_n$$

défini pour $x \in P^{\text{gp}} \otimes_{\mathbb{Z}} R_n$, de classe $\bar{x}$ dans $(P^{\text{gp}}/nP^{\text{gp}}) \otimes_{\mathbb{Z}} R_n$, par

$$(5.13.21) \quad v_n(x) = \bar{x} - d\log(\pi_n) \otimes u(x),$$

où $d\log(\pi_n)$ est l'élément de $\Omega_{\bar{K}/K}^1$ défini dans (5.2.2). Compte tenu de (5.13.9), v_n induit un morphisme R_n -linéaire

$$(5.13.22) \quad w_n: P^{\text{gp}} \otimes_{\mathbb{Z}} R_n \rightarrow \Omega_{(R_n, P^{(n)})/(R, P)}^1.$$

Pour tout $t \in P^{\text{gp}}$, on a $w_n(nt) = -nu(t)d\log(\pi_n) = -u(t)d\log(\pi)$ (5.2.5). Comme p divise n , l'image de $d\log(\pi)$ dans $\Omega_{(R_n, P^{(n)})/(R, P)}^1$ est nulle d'après la preuve de (i); donc $w_n(nt) = 0$. D'autre part, en vertu de (5.2.4), on a

$$(5.13.23) \quad w_n(\lambda \otimes \pi_n) = \bar{\lambda} \otimes \pi_n - \pi_n d\log(\pi_n) = \bar{\lambda} \otimes \pi_n - d\pi_n = 0.$$

Par suite, compte tenu de (5.13.16), w_n induit un morphisme R_n -linéaire

$$(5.13.24) \quad \omega_n: \Omega_{(R_n, P^{(n)})/(R_1, P)}^1 \rightarrow \Omega_{(R_n, P^{(n)})/(R, P)}^1,$$

inverse à droite du morphisme canonique (5.13.15). Comme $md\log(\pi_{mn}) = d\log(\pi_n)$ pour tout $m \geq 1$, les ω_n forment un morphisme de systèmes inductifs pour la relation de divisibilité, ce qui achève la preuve.

5.14. Il existe une unique application

$$(5.14.1) \quad \langle \cdot, \cdot \rangle : \Gamma_\infty \times P_\infty \rightarrow \mu_\infty(\mathcal{O}_{\overline{K}}) = \varinjlim_{n \geq 1} \mu_n(\mathcal{O}_{\overline{K}}),$$

où la limite inductive est indexée par l'ensemble $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ ordonné par la relation de divisibilité, telle que pour tout $g \in \Gamma_\infty$ et tout $x \in P^{(n)}$ ($n \geq 1$), on ait $\langle g, x \rangle \in \mu_n(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ et

$$(5.14.2) \quad g(\alpha_\infty(x)) = \langle g, x \rangle \cdot \alpha_\infty(x),$$

où α_∞ est l'homomorphisme (5.8.3). En effet, R_∞ est intègre, et on a $\alpha_\infty(x)^n = \alpha(x) \in R$, qui est donc invariant par Γ_∞ . Pour tout $g \in \Gamma_\infty$, l'application $x \mapsto \langle g, x \rangle$ est un morphisme de monoïdes de P_∞ dans $\mu_\infty(\mathcal{O}_{\overline{K}})$. Pour tout $x \in P_\infty$, l'application $g \mapsto \langle g, x \rangle$ est un 1-cocycle, autrement dit, pour tous $g, g' \in \Gamma_\infty$, on a

$$(5.14.3) \quad \langle gg', x \rangle = g(\langle g', x \rangle) \cdot \langle g, x \rangle.$$

Soit n un entier ≥ 1 . Rappelons qu'on a un isomorphisme canonique $P^{(n)} \simeq P$ (5.8.4) et que Δ_∞ est canoniquement isomorphe à un sous-groupe de $L_\lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}(1)$ (4.8.1). On a donc un homomorphisme canonique $\Delta_\infty \rightarrow L \otimes_{\mathbb{Z}} \mu_n(\mathcal{O}_{\overline{K}})$. D'après 4.6(v), le diagramme

$$(5.14.4) \quad \begin{array}{ccc} \Delta_\infty \times P^{(n)} & \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} & \mu_n(\mathcal{O}_{\overline{K}}) \\ \downarrow & \nearrow & \\ (L \otimes_{\mathbb{Z}} \mu_n(\mathcal{O}_{\overline{K}})) \times P & & \end{array}$$

où la flèche oblique est induite par l'accouplement canonique $L \otimes_{\mathbb{Z}} P^{\text{gp}} \rightarrow \mathbb{Z}$, est commutatif.

5.15. Soit $\mathcal{M}_\infty$ la structure logarithmique sur $\text{Spec}(R_\infty)$ associée à la structure pré-logarithmique définie par $(P_\infty, \alpha_\infty)$ (5.8). Pour tout $g \in \Gamma_\infty$, notons τ_g l'automorphisme de $\text{Spec}(R_\infty)$ induit par g . La structure logarithmique $\tau_g^*(\mathcal{M}_\infty)$ sur $\text{Spec}(R_\infty)$ est associée à la structure pré-logarithmique définie par $(P_\infty, g \circ \alpha_\infty)$. L'homomorphisme

$$(5.15.1) \quad P_\infty \rightarrow \Gamma(\text{Spec}(R_\infty), \mathcal{M}_\infty), \quad x \mapsto \langle g, x \rangle \cdot x$$

induit un morphisme de structures logarithmiques sur $\text{Spec}(R_\infty)$

$$(5.15.2) \quad a_g : \tau_g^*(\mathcal{M}_\infty) \rightarrow \mathcal{M}_\infty.$$

De même, en vertu de (5.14.3), l'homomorphisme

$$(5.15.3) \quad P_\infty \rightarrow \Gamma(\text{Spec}(R_\infty), \tau_g^*(\mathcal{M}_\infty)), \quad x \mapsto g(\langle g^{-1}, x \rangle) \cdot x$$

induit un morphisme de structures logarithmiques sur $\text{Spec}(R_\infty)$

$$(5.15.4) \quad b_g : \mathcal{M}_\infty \rightarrow \tau_g^*(\mathcal{M}_\infty).$$

On voit aussitôt que a_g et b_g sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre (5.14.3), et que l'application $g \mapsto (\tau_{g^{-1}}, a_{g^{-1}})$ est une action à gauche de Γ_∞ sur $(\text{Spec}(R_\infty), \mathcal{M}_\infty)$.

On note $\mathcal{L}$ la structure logarithmique sur $\text{Spec}(\overline{R})$ image inverse de $\mathcal{M}_\infty$. Alors l'action précédente se relève en une action à gauche de Γ sur $(\text{Spec}(\overline{R}), \mathcal{L})$.

Soit $\mathcal{N}_\infty$ la structure logarithmique sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ associée à la structure pré-logarithmique définie par $(\mathbb{N}_\infty, a_\infty)$ (5.3.3). De même, la restriction de l'application (5.14.1) à $\Gamma_\infty \times \mathbb{N}_\infty$ définit une action à gauche de G_K sur le schéma logarithmique $(\text{Spec}(\mathcal{O}_{\overline{K}}), \mathcal{N}_\infty)$.

Soit $\mathcal{M}$ la structure logarithmique sur $\text{Spec}(R_1)$ associée à la structure pré-logarithmique définie par (P, α) (5.8). Pour tout $g \in G_K$, notons u_g l'automorphisme de $\text{Spec}(R_1)$ induit par g . La

structure logarithmique $u_g^*(\mathcal{M})$ sur $\text{Spec}(R_1)$ est associée à la structure pré-logarithmique définie par $(P, g \circ \alpha)$. Comme $g \circ \alpha = \alpha$, on en déduit un isomorphisme canonique

$$(5.15.5) \quad c_g : u_g^*(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}.$$

L'application $g \mapsto (u_{g^{-1}}, c_{g^{-1}})$ est une action à gauche de G_K sur le schéma logarithmique $(\text{Spec}(R_1), \mathcal{M})$.

Soit $\mathcal{N}$ la structure logarithmique sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ associée à la structure pré-logarithmique définie par $(\mathbb{N}, a)$ (5.3). On définit de même une action à gauche de G_K sur le schéma logarithmique $(\text{Spec}(\mathcal{O}_{\overline{K}}), \mathcal{N})$.

On notera que tous les morphismes du diagramme commutatif

$$(5.15.6) \quad \begin{array}{ccccc} (\text{Spec}(\overline{R}), \mathcal{L}) & \longrightarrow & (\text{Spec}(R_\infty), \mathcal{M}_\infty) & \longrightarrow & (\text{Spec}(\mathcal{O}_{\overline{K}}), \mathcal{N}_\infty) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & (\text{Spec}(R_1), \mathcal{M}) & \longrightarrow & (\text{Spec}(\mathcal{O}_{\overline{K}}), \mathcal{N}) \end{array}$$

sont équivariants.

5.16. On note $\mathcal{E}_\infty$ la $\widehat{R}_\infty$ -représentation de Γ_∞ définie par

$$(5.16.1) \quad \mathcal{E}_\infty = \text{Hom}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \Omega_{(R_\infty, P_\infty)/(R, P)}^1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(-1),$$

où l'action de Γ_∞ provient de son action sur $\Omega_{(R_\infty, P_\infty)/(R, P)}^1$ (5.15). Compte tenu de 5.5 et 5.9(ii), appliquant le foncteur $\text{Hom}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, -) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(-1)$ à la suite exacte scindée (5.13.2), on obtient une suite exacte de $\widehat{R}_\infty$ -représentations de Γ_∞

$$(5.16.2) \quad 0 \rightarrow (\pi\rho)^{-1}\widehat{R}_\infty \rightarrow \mathcal{E}_\infty \rightarrow \Omega_{(R, P)/(\mathcal{O}_K, \mathbb{N})}^1 \otimes_R \widehat{R}_\infty(-1) \rightarrow 0,$$

où l'on a écrit $(\pi\rho)^{-1}\widehat{R}_\infty$ au lieu de $(\pi\rho)^{-1}\mathcal{O}_C \otimes_{\mathcal{O}_C} \widehat{R}_\infty$, ce qui est justifié puisque $\widehat{R}_\infty$ est $\mathcal{O}_C$ -plat (4.12). On notera que $\Omega_{(R, P)/(\mathcal{O}_K, \mathbb{N})}^1$ est un R -module libre de type fini. Pour alléger les notations, on pose

$$(5.16.3) \quad \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 = \Omega_{(R, P)/(\mathcal{O}_K, \mathbb{N})}^1,$$

$$(5.16.4) \quad \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^i = \wedge^i \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1, \quad (i \geq 1).$$

La suite (5.16.2), comme la suite (5.13.2), sont scindées en tant que suites de $\widehat{R}_\infty$ -modules (sans actions de Γ_∞).

On désigne par

$$(5.16.5) \quad \delta : \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}_1 \rightarrow H_{\text{cont}}^1(\Delta_\infty, (\pi\rho)^{-1}\widehat{R}_\infty)(1)$$

le bord de la suite exacte longue de cohomologie obtenue en appliquant le foncteur $\Gamma(\Delta_\infty, -)(1)$ à la suite exacte (5.16.2). On montrera ultérieurement que $(\widehat{R}_\infty)^{\Delta_\infty} = \widehat{R}_1$ (6.20).

5.17. Pour tout $\zeta \in \mathbb{Z}_p(1)$, on désigne par $d\log(\zeta)$ l'élément de $\mathcal{E}_\infty(1)$ défini par

$$(5.17.1) \quad d\log(\zeta)(p^{-n}) = d\log(\zeta_n),$$

où ζ_n est l'image canonique de ζ dans $\mu_{p^n}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$. Il est clair que $d\log(\zeta)$ est l'image de $1 \otimes \zeta$ par l'injection $(\pi\rho)^{-1}\widehat{R}_\infty(1) \rightarrow \mathcal{E}_\infty(1)$ (5.16.2).

Pour tout $t \in P$, on désigne par $d\log(\tilde{t})$ l'élément de $\mathcal{E}_\infty(1)$ défini par

$$(5.17.2) \quad d\log(\tilde{t})(p^{-n}) = d\log(t^{(p^n)}),$$

où $t^{(p^n)}$ est l'image de t dans $P^{(p^n)}$ par l'isomorphisme (5.8.4). Cet élément est bien défini en vertu de (5.8.5). Il est clair que l'image de $d\log(\tilde{t})$ dans $\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R_\infty}$ est $d\log(t)$.

D'après (5.6), pour tout $n \geq 0$, $d\log(\tilde{\lambda})(p^{-n})$ est l'image canonique de l'élément $d\log(\pi_{p^n}) \in \Omega_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K}^1$ (5.2.2) dans $\tilde{\Omega}_{(R_\infty, P_\infty)/(R, P)}^1$. En particulier, $d\log(\tilde{\lambda}) \in (\pi\rho)^{-1}\widehat{R_\infty}(1) \subset \mathcal{E}_\infty(1)$ (5.16.2).

L'application $P \rightarrow \mathcal{E}_\infty(1)$ définie par $t \mapsto d\log(\tilde{t})$ est un homomorphisme; elle induit donc un homomorphisme que l'on note aussi

$$(5.17.3) \quad P^{\text{gp}} \rightarrow \mathcal{E}_\infty(1), \quad t \mapsto d\log(\tilde{t}).$$

Celui-ci s'insère dans un digramme commutatif

$$(5.17.4) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}\lambda & \longrightarrow & P^{\text{gp}} & \longrightarrow & P^{\text{gp}}/\mathbb{Z}\lambda \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & (\pi\rho)^{-1}\widehat{R_\infty}(1) & \longrightarrow & \mathcal{E}_\infty(1) & \longrightarrow & \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R_\infty} \longrightarrow 0 \end{array}$$

où la flèche verticale de droite provient de l'isomorphisme canonique (5.12.1). Il est utile de noter aussi

$$(5.17.5) \quad d\log: P^{\text{gp}} \rightarrow \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$$

l'homomorphisme induit par la dérivation logarithmique $d\log: P \rightarrow \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$.

5.18. Soit $t \in P$. On désigne par

$$(5.18.1) \quad \tilde{\chi}_t: \Gamma_\infty \rightarrow \mathbb{Z}_p(1)$$

l'application qui à tout $g \in \Gamma_\infty$ associe l'élément

$$(5.18.2) \quad \tilde{\chi}_t(g) = \lim_{\substack{\longleftarrow \\ n \geq 0}} \langle g, t^{(p^n)} \rangle,$$

où $t^{(p^n)}$ est l'image de t dans $P^{(p^n)}$ par l'isomorphisme (5.8.4) et $\langle g, t^{(p^n)} \rangle \in \mu_{p^n}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ est défini dans (5.14.1). D'après (5.14.3), pour tous $g, g' \in \Gamma_\infty$, on a

$$(5.18.3) \quad \tilde{\chi}_t(gg') = g(\tilde{\chi}_t(g'))\tilde{\chi}_t(g).$$

Donc la restriction de $\tilde{\chi}_t$ à Δ_∞ est un caractère à valeurs dans $\mathbb{Z}_p(1)$; on le note $\chi_t: \Delta_\infty \rightarrow \mathbb{Z}_p(1)$.

On a clairement $\tilde{\chi}_0 = 1$, et pour tous $t, t' \in P$,

$$(5.18.4) \quad \tilde{\chi}_{tt'} = \tilde{\chi}_t \cdot \tilde{\chi}_{t'}.$$

Par suite, l'application $P \rightarrow \text{Hom}(\Delta_\infty, \mathbb{Z}_p(1))$ définie par $t \mapsto \chi_t$ est un homomorphisme. Elle induit donc un homomorphisme que l'on note encore

$$(5.18.5) \quad P^{\text{gp}} \rightarrow \text{Hom}(\Delta_\infty, \mathbb{Z}_p(1)), \quad t \mapsto \chi_t.$$

Comme $\chi_\lambda = 1$, on en déduit un homomorphisme

$$(5.18.6) \quad P^{\text{gp}}/\mathbb{Z}\lambda \rightarrow \text{Hom}(\Delta_\infty, \mathbb{Z}_p(1)).$$

D'après (5.14.4), ce dernier est égal au composé

$$(5.18.7) \quad P^{\text{gp}}/\mathbb{Z}\lambda \rightarrow \text{Hom}(L_\lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p(1), \mathbb{Z}_p(1)) \rightarrow \text{Hom}(\Delta_\infty, \mathbb{Z}_p(1)),$$

où la première flèche est induite par le morphisme canonique (de bidualité) (4.2.7) et la seconde flèche par le morphisme canonique $\nu: \Delta_\infty \rightarrow L_\lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p(1)$ (4.8.1). Rappelons que ν induit un isomorphisme $\Delta_{p^\infty} \xrightarrow{\sim} L_\lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p(1)$ et qu'on a un isomorphisme canonique (4.11.1)

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\Delta_{p^\infty}, \mathbb{Z}_p(1)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Delta_\infty, \mathbb{Z}_p(1)).$$

Comme le sous-groupe de torsion de $P^{\mathrm{gp}}/\mathbb{Z}\lambda$ est d'ordre premier à p , l'homomorphisme (5.18.6) induit donc un isomorphisme

$$(5.18.8) \quad (P^{\mathrm{gp}}/\mathbb{Z}\lambda) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\Delta_\infty, \mathbb{Z}_p(1)).$$

On en déduit, compte tenu de (5.12.1) et (4.11.2), un isomorphisme $\widehat{R}_1$ -linéaire

$$(5.18.9) \quad \widetilde{\delta}: \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}_1 \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\Delta_\infty, \widehat{R}_1(1)).$$

5.19. Il résulte aussitôt des définitions que, pour tous $t \in P$ et $g \in \Gamma_\infty$, on a

$$(5.19.1) \quad g(d \log(\widetilde{t})) = d \log(\widetilde{t}) + d \log(\chi_t(g)).$$

Comme les deux membres de l'équation sont des homomorphismes de P dans $\mathcal{E}(1)$, l'égalité vaut pour tout $t \in P^{\mathrm{gp}}$. Par suite, le diagramme

$$(5.19.2) \quad \begin{array}{ccc} \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}_1 & \xrightarrow{\widetilde{\delta}} & \mathrm{Hom}(\Delta_\infty, \widehat{R}_1(1)) \\ \delta \downarrow & & \parallel \\ H_{\mathrm{cont}}^1(\Delta_\infty, (\pi\rho)^{-1}\widehat{R}_\infty(1)) & \longleftarrow & H_{\mathrm{cont}}^1(\Delta_\infty, \widehat{R}_1(1)) \end{array}$$

où δ est le morphisme (5.16.5), $\widetilde{\delta}$ est le morphisme (5.18.9) et la flèche horizontale inférieure est induite par l'injection canonique $\widehat{R}_1 \rightarrow (\pi\rho)^{-1}\widehat{R}_\infty$, est commutatif. En effet, comme $\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ est engendré sur R par les éléments de la forme $d \log(t)$ pour $t \in P$, il suffit de montrer la commutativité de ce diagramme pour ces éléments, ce qui résulte de (5.19.1).

5.20. Considérons le diagramme commutatif de morphismes canoniques

$$(5.20.1) \quad \begin{array}{ccccc} \Omega_{(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N}_\infty)/(\mathcal{O}_K, \mathbb{N})}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{K}}} \overline{R} & \xrightarrow{u} & \Omega_{(R_\infty, P_\infty)/(R, P)}^1 \otimes_{R_\infty} \overline{R} & \twoheadrightarrow & \Omega_{(R_\infty, P_\infty)/(R_1, P)}^1 \otimes_{R_\infty} \overline{R} \\ \parallel & & a \downarrow & & b \downarrow \\ \Omega_{(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N}_\infty)/(\mathcal{O}_K, \mathbb{N})}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{K}}} \overline{R} & \xrightarrow{u'} & \Omega_{(\overline{R}, P_\infty)/(R, P)}^1 & \twoheadrightarrow & \Omega_{(\overline{R}, P_\infty)/(R_1, P)}^1 \end{array}$$

Comme la suite (5.13.2) est exacte et scindée, u est injectif. D'autre part, le noyau de a est annulé par $\mathfrak{m}_{\overline{K}}$ en vertu de 4.16 et (3.16.1). Par suite, le noyau de u' est annulé par $\mathfrak{m}_{\overline{K}}$. Comme $\Omega_{(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N}_\infty)/(\mathcal{O}_K, \mathbb{N})}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{K}}} \overline{R}$ n'a pas de $\mathfrak{m}_{\overline{K}}$ -torsion non nulle d'après 5.7, u' est injectif.

Appliquant le foncteur “module de Tate” $T_p(-) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, -)$ au diagramme ci-dessus, on obtient un diagramme commutatif

$$(5.20.2) \quad \begin{array}{ccccc} T_p(\Omega_{(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N}_\infty)/(\mathcal{O}_K, \mathbb{N})}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{K}}} \overline{R}) & \hookrightarrow & T_p(\Omega_{(R_\infty, P_\infty)/(R, P)}^1 \otimes_{R_\infty} \overline{R}) & \xrightarrow{v} & T_p(\Omega_{(R_\infty, P_\infty)/(R_1, P)}^1 \otimes_{R_\infty} \overline{R}) \\ \parallel & & T_p(a) \downarrow & & T_p(b) \downarrow \\ T_p(\Omega_{(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N}_\infty)/(\mathcal{O}_K, \mathbb{N})}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{K}}} \overline{R}) & \hookrightarrow & T_p(\Omega_{(\overline{R}, P_\infty)/(R, P)}^1) & \xrightarrow{v'} & T_p(\Omega_{(\overline{R}, P_\infty)/(R_1, P)}^1) \end{array}$$

Comme la suite (5.13.2) est exacte et scindée, v est surjectif. D'autre part, le noyau et le conoyau de b sont annulés par $\mathfrak{m}_{\overline{K}}$, et $\Omega_{(R_\infty, P_\infty)/(R_1, P)}^1 \otimes_{R_\infty} \overline{R}$ n'a pas de $\mathfrak{m}_{\overline{K}}$ -torsion non nulle en vertu de 5.10. Par suite, b est injectif, et donc $T_p(b)$ est un isomorphisme. Il s'ensuit que v' est surjectif et que $T_p(a)$ est un isomorphisme.

Il résulte de (5.5.2) que le morphisme canonique

$$(5.20.3) \quad T_p(\Omega_{(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N}_\infty)/(\mathcal{O}_K, \mathbb{N})}^1) \otimes_{\mathcal{O}_K} \widehat{\overline{R}} \rightarrow T_p(\Omega_{(\mathcal{O}_{\overline{K}}, \mathbb{N}_\infty)/(\mathcal{O}_K, \mathbb{N})}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{K}}} \overline{R})$$

est un isomorphisme. De même, il résulte de (5.9.3) que le morphisme canonique

$$(5.20.4) \quad T_p(\Omega_{(R_\infty, P_\infty)/(R_1, P)}^1) \otimes_{\widehat{R_\infty}} \widehat{\overline{R}} \rightarrow T_p(\Omega_{(R_\infty, P_\infty)/(R_1, P)}^1 \otimes_{R_\infty} \overline{R})$$

est un isomorphisme. Par suite, le morphisme canonique

$$(5.20.5) \quad T_p(\Omega_{(R_\infty, P_\infty)/(R, P)}^1) \otimes_{\widehat{R_\infty}} \widehat{\overline{R}} \rightarrow T_p(\Omega_{(R_\infty, P_\infty)/(R, P)}^1 \otimes_{R_\infty} \overline{R})$$

est un isomorphisme.

5.21. On note $\mathcal{E}$ la $\widehat{\overline{R}}$ -représentation de Γ définie par

$$(5.21.1) \quad \mathcal{E} = \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \Omega_{(\overline{R}, P_\infty)/(R, P)}^1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(-1),$$

où l'action de Γ provient de son action sur $\Omega_{(\overline{R}, P_\infty)/(R, P)}^1$ (5.15). Il résulte de 5.20 et (5.16.2) qu'on a une suite exacte canonique de $\widehat{\overline{R}}$ -représentations de Γ

$$(5.21.2) \quad 0 \rightarrow (\pi\rho)^{-1}\widehat{\overline{R}} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{\overline{R}}(-1) \rightarrow 0,$$

dite *extension de Faltings*. On a un isomorphisme de $\widehat{\overline{R}}$ -représentations de Γ

$$(5.21.3) \quad \mathcal{E}_\infty \otimes_{\widehat{R_\infty}} \widehat{\overline{R}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E},$$

induisant un isomorphisme des extensions (5.16.2) et (5.21.2). En particulier, la suite (5.21.2) est scindée en tant que suite de $\widehat{\overline{R}}$ -modules (sans actions de Γ).

6. COHOMOLOGIE GALOISIENNE

Proposition 6.1. *Soient A une $\mathbb{Z}_p$ -algèbre, M un A - Δ_{p^∞} -module topologique, $e_1, \dots, e_d$ une $\mathbb{Z}_p$ -base de Δ_{p^∞} . Notons $\varphi: \Delta_{p^\infty} \rightarrow \mathrm{Aut}_A(M)$ la représentation de Δ_{p^∞} sur M , $S_A(\Delta_{p^\infty})$ l'algèbre symétrique du A -module $\Delta_{p^\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} A$ et $M^\flat$ le $S_A(\Delta_{p^\infty})$ -module dont le A -module sous-jacent est M et tel que l'action de e_i sur M soit donnée par $\varphi(e_i) - \mathrm{id}_M$. Supposons que l'une des conditions suivantes soit remplie :*

- (i) *M est un A - Δ_{p^∞} -module discret de torsion p -primaire.*
- (ii) *M est muni de la topologie p -adique et est complet et séparé pour cette topologie.*

Alors on a un isomorphisme canonique fonctoriel en M

$$(6.1.1) \quad C_{\mathrm{cont}}^\bullet(\Delta_{p^\infty}, M) \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}_{S_A(\Delta_{p^\infty})}^\bullet(M^\flat)$$

dans $\mathbf{D}^+(\mathrm{Mod}(A))$, où le complexe de gauche est défini dans (2.5) et celui de droite dans (2.15.4).

Supposons d'abord que M soit un A - Δ_{p^∞} -module discret de torsion p -primaire. Compte tenu de (2.15.8) et de la suite spectrale de Hochschild-Serre, on peut se réduire au cas où $d = 1$. Posons $G = \Delta_{p^\infty}$ et $e = e_1$ et notons $\mathrm{Ind}_{A, G}(M)$ le A -module des applications continues de G dans M . On

fait agir G sur $\text{Ind}_{A,G}(M)$ par la formule $(g \cdot f)(x) = f(xg)$ pour tout $(g, x) \in G^2$. Alors $\text{Ind}_{A,G}(M)$ est un A - G -module discret, et on a une suite de A - G -modules discrets ([42] 1.3.1)

$$(6.1.2) \quad 0 \rightarrow M \xrightarrow{\varepsilon} \text{Ind}_{A,G}(M) \xrightarrow{\alpha} \text{Ind}_{A,G}(M) \rightarrow 0,$$

où $\varepsilon(x)(g) = g(x)$ pour $x \in M$, $g \in G$, et $\alpha(f)(g) = ef(e^{-1}g) - f(g)$ pour $f \in \text{Ind}_{A,G}(M)$, $g \in G$, est exacte. D'autre part, l'application $M \rightarrow \Gamma(G, \text{Ind}_{A,G}(M))$ qui envoie x sur la fonction constante de G dans M de valeur x induit un isomorphisme ([42] 1.5.1)

$$(6.1.3) \quad M \xrightarrow{\sim} \text{R}\Gamma(G, \text{Ind}_{A,G}(M)).$$

L'isomorphisme (6.1.1) se déduit alors de la suite (6.1.2) en appliquant le foncteur $\text{R}\Gamma(G, -)$.

Supposons ensuite que M soit muni de la topologie p -adique et soit complet et séparé pour cette topologie ; posons $M_r = M/p^r M$ pour $r \geq 0$. D'après (2.13.5), on a un isomorphisme canonique dans $\mathbf{D}^+(\text{Mod}(A))$

$$(6.1.4) \quad \mathbf{C}_{\text{cont}}^\bullet(\Delta_{p^\infty}, M) \xrightarrow{\sim} \text{R}^+\Gamma(\Delta_{p^\infty}, (M_r)_{r \in \mathbb{N}}).$$

D'autre part, il résulte du cas (i) qu'on a un système compatible d'isomorphismes dans $\mathbf{D}^+(\text{Mod}(A))$

$$(6.1.5) \quad \text{R}\Gamma(\Delta_{p^\infty}, M_r) \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}_{S_A(\Delta_{p^\infty})}^\bullet(M^\flat/p^r M^\flat).$$

Comme pour tout $n \geq 0$, le système projectif $(\mathbb{K}_{S_A(\Delta_{p^\infty})}^n(M^\flat/p^r M^\flat))_{r \geq 0}$ vérifie la condition de Mittag-Leffler, on obtient, compte tenu de (2.12.5) et (2.13.2), un isomorphisme

$$(6.1.6) \quad \mathbf{C}_{\text{cont}}^\bullet(\Delta_{p^\infty}, M) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{r \geq 0} \mathbb{K}_{S_A(\Delta_{p^\infty})}^\bullet(M^\flat/p^r M^\flat).$$

La proposition s'ensuit car $\mathbb{K}_{S_A(\Delta_{p^\infty})}^n(M^\flat)$ est complet et séparé pour la topologie p -adique pour tout entier n .

Remarque 6.2. Conservons les hypothèses de (6.1). D'après 2.16.11, le $S_A(\Delta_{p^\infty})$ -module $M^\flat$ correspond à un A -champ de Higgs θ sur M à coefficients dans $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Delta_{p^\infty}, A)$, et on a un isomorphisme canonique de complexes

$$(6.2.1) \quad \mathbb{K}_{S_A(\Delta_{p^\infty})}^\bullet(M^\flat) \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^\bullet(M, \theta).$$

6.3. Soient n un entier ≥ 0 , $\nu: \Delta_{p^\infty} \rightarrow \mu_{p^n}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ un homomorphisme *surjectif*, $a \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$, A une $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ -algèbre *complète et séparée pour la topologie p -adique* et *plate* sur $\mathcal{O}_{\overline{K}}$. L'action de Δ_{p^∞} sur A donnée par ν définit un A - Δ_{p^∞} -module topologique que l'on note $A(\nu)$. Fixons une $\mathbb{Z}_p$ -base $e_1, \dots, e_d$ de Δ_{p^∞} . Le $S_A(\Delta_{p^\infty})$ -module $A(\nu)^\flat$ défini dans 6.1 est la $S_A(\Delta_{p^\infty})$ -algèbre définie par l'homomorphisme de A -algèbres

$$(6.3.1) \quad S_A(\Delta_{p^\infty}) \rightarrow A$$

qui envoie e_i sur $\nu(e_i) - 1$ pour $1 \leq i \leq d$. Considérons la forme linéaire

$$(6.3.2) \quad u: \Delta_{p^\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} A \rightarrow A$$

qui envoie $e_i \otimes 1$ sur $\nu(e_i) - 1$ pour $1 \leq i \leq d$. Il résulte aussitôt des définitions (2.14.3) et (2.15.3) qu'on a un isomorphisme canonique

$$(6.3.3) \quad \mathbb{K}_{S_A(\Delta_{p^\infty})}^\bullet((A(\nu)/aA(\nu))^\flat) \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}_A^\bullet(u, A/aA).$$

En vertu de 6.1, on en déduit un isomorphisme canonique dans $\mathbf{D}^+(\text{Mod}(A))$

$$(6.3.4) \quad \mathbf{C}_{\text{cont}}^\bullet(\Delta_{p^\infty}, A(\nu)/aA(\nu)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}_A^\bullet(u, A/aA).$$

Corollaire 6.4. *Conservons les hypothèses de (6.3), soient de plus ζ un générateur du groupe $\mu_{p^n}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$, $\mathfrak{q}$ l'idéal de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ engendré par a et $\zeta - 1$.*

(i) *Si $\nu = 1$ (i.e., $n = 0$), alors on a un isomorphisme canonique de A -algèbres graduées*

$$(6.4.1) \quad H_{\text{cont}}^*(\Delta_{p^\infty}, A(\nu)/aA(\nu)) \xrightarrow{\sim} \wedge(\text{Hom}(\Delta_{p^\infty}, A/aA)).$$

(ii) *Si $\nu \neq 1$ (i.e., $n \neq 0$), alors $H_{\text{cont}}^i(\Delta_{p^\infty}, A(\nu)/aA(\nu))$ est un $A/\mathfrak{q}A$ -module libre de type fini pour tout $i \geq 0$ et est nul pour tout $i \geq \text{rg}(L) = d + 1$.*

(iii) *Le système projectif $(H^*(\Delta_{p^\infty}, A(\nu)/p^r A(\nu)))_{r \geq 0}$ vérifie la condition de Mittag-Leffler uniformément en ν , autrement dit, si on note, pour tous entiers $r' \geq r \geq 0$,*

$$(6.4.2) \quad h_{r,r'}^\nu : H^*(\Delta_{p^\infty}, A(\nu)/p^{r'} A(\nu)) \rightarrow H^*(\Delta_{p^\infty}, A(\nu)/p^r A(\nu))$$

le morphisme canonique, alors pour tout entier $r \geq 1$, il existe un entier $r' \geq r$, dépendant de d mais pas de ν , tel que pour tout entier $r'' \geq r'$, les images de $h_{r,r'}^\nu$ et $h_{r,r''}^\nu$ soient égales.

(i) En effet, comme la forme linéaire u est nulle, on déduit de (6.3.4) un isomorphisme de A -algèbres graduées

$$(6.4.3) \quad H_{\text{cont}}^*(\Delta_{p^\infty}, A(\nu)/aA(\nu)) \xrightarrow{\sim} \text{Homgr}_A(\wedge(\Delta_{p^\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} A), A/aA).$$

Par ailleurs, on a un isomorphisme canonique de A -algèbres graduées ([8] § 11.5 prop. 7)

$$(6.4.4) \quad \text{Homgr}_A(\wedge(\Delta_{p^\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} A), A/aA) \xrightarrow{\sim} \wedge(\text{Hom}(\Delta_{p^\infty}, A/aA)).$$

Le composé de ces deux isomorphismes répond alors à la question.

(ii) Notons aussi u la forme linéaire $\Delta_{p^\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} (A/aA) \rightarrow (A/aA)$ déduite de u (6.3.2). En vertu de (6.3.4) et (2.14.8), il suffit de montrer que $H_i(\mathbb{K}_{\bullet}^{A/aA}(u))$ est un $(A/\mathfrak{q}A)$ -module libre de type fini pour tout $i \geq 0$ et est nul pour tout $i \geq d + 1$. La seconde proposition est évidente. On sait aussi que $H_i(\mathbb{K}_{\bullet}^{A/aA}(u))$ est annulé par $\mathfrak{q}$ (2.14). Pour $1 \leq j \leq d$, posons $\zeta_j = \nu(e_j)$. On peut supposer que $\zeta_1 = \zeta \neq 1$ et que (2.1)

$$v(\zeta_1 - 1) \leq v(\zeta_2 - 1) \leq \dots \leq v(\zeta_d - 1).$$

Procédons par récurrence sur d . La proposition pour $d = 1$ est une conséquence immédiate de la platitude de A sur $\mathcal{O}_{\overline{K}}$. Supposons $d \geq 2$ et l'assertion établie pour $d - 1$. Notons G le sous- $\mathbb{Z}_p$ -module de Δ_{p^∞} engendré par $e_1, \dots, e_{d-1}$ et $u' : G \otimes_{\mathbb{Z}_p} (A/aA) \rightarrow A/aA$ la restriction de u à $G \otimes_{\mathbb{Z}_p} (A/aA)$. D'après (2.14.4), on a un isomorphisme canonique

$$(6.4.5) \quad \mathbb{K}_{\bullet}^{A/aA}(\zeta_d - 1) \otimes \mathbb{K}_{\bullet}^{A/aA}(u') \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}_{\bullet}^{A/aA}(u),$$

où $\mathbb{K}_{\bullet}^{A/aA}(\zeta_d - 1)$ est le complexe de Koszul défini par la forme linéaire $\zeta_d - 1$ de A/aA . En vertu de ([22] 1.1.4.1), pour tout entier i , on a une suite exacte

$$(6.4.6) \quad 0 \rightarrow H_0(\mathbb{K}_{\bullet}^{A/aA}(\zeta_d - 1) \otimes H_i(\mathbb{K}_{\bullet}^{A/aA}(u'))) \rightarrow H_i(\mathbb{K}_{\bullet}^{A/aA}(u)) \rightarrow H_1(\mathbb{K}_{\bullet}^{A/aA}(\zeta_d - 1) \otimes H_{i-1}(\mathbb{K}_{\bullet}^{A/aA}(u'))) \rightarrow 0.$$

Par hypothèse de récurrence, $H_i(\mathbb{K}_{\bullet}^{A/aA}(u'))$ est un $(A/\mathfrak{q}A)$ -module libre de type fini pour tout $i \geq 0$. Comme $(\zeta_d - 1) \in \mathfrak{q}$, on en déduit une suite exacte

$$(6.4.7) \quad 0 \rightarrow H_i(\mathbb{K}_{\bullet}^{A/aA}(u')) \rightarrow H_i(\mathbb{K}_{\bullet}^{A/aA}(u)) \rightarrow H_{i-1}(\mathbb{K}_{\bullet}^{A/aA}(u')) \rightarrow 0.$$

Par suite, $H_i(\mathbb{K}_{\bullet}^{A/aA}(u))$ étant annulé par $\mathfrak{q}$, il est libre de type fini sur $A/\mathfrak{q}A$.

(iii) Il résulte de (i) que le système projectif $(H^*(\Delta_{p^\infty}, A(\nu)/p^r A(\nu)))_{r \geq 0}$ vérifie la condition de Mittag-Leffler lorsque $\nu = 1$. On peut donc se borner aux caractères $\nu \neq 1$. Posons $A_r = A/p^r A$ et notons aussi u la forme linéaire $u \otimes_A \text{id}_{A_r} : \Delta_{p^\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_r \rightarrow A_r$ (6.3.2). D'après (6.3.4) et (2.14.8),

il suffit de montrer la proposition analogue pour le système projectif $(H_i(\mathbb{K}_{\bullet}^{A_r}(u)))_{r \geq 1}$. Procédons par récurrence sur d . Supposons d'abord $d = 1$. L'homomorphisme canonique

$$(6.4.8) \quad H_1(\mathbb{K}_{\bullet}^{A_{r+1}}(u)) \rightarrow H_1(\mathbb{K}_{\bullet}^{A_r}(u))$$

est clairement bijectif, et comme $v(\zeta - 1) \leq 1$, l'homomorphisme canonique

$$(6.4.9) \quad H_0(\mathbb{K}_{\bullet}^{A_{r+1}}(u)) \rightarrow H_0(\mathbb{K}_{\bullet}^{A_r}(u))$$

est nul. L'assertion est donc satisfaite avec $r' = r + 1$. Supposons $d \geq 2$ et l'assertion établie pour $d - 1$. L'assertion pour d résulte alors facilement de la suite exacte (6.4.7) en prenant $a = p^r$ pour $r \geq 0$ (cf. la preuve de [22] 0.13.2.1).

Corollaire 6.5. *Sous les hypothèses de (6.3), l'homomorphisme canonique*

$$(6.5.1) \quad H_{\text{cont}}^*(\Delta_{p^\infty}, A(\nu)) \rightarrow \varprojlim_{r \geq 0} H^*(\Delta_{p^\infty}, A(\nu)/p^r A(\nu))$$

est un isomorphisme.

En effet, d'après (2.13.4) et (2.13.5), pour tout $i \geq 0$, on a une suite exacte

$$(6.5.2) \quad 0 \rightarrow \varprojlim_{r \geq 0} H^{i-1}(\Delta_{p^\infty}, A(\nu)/p^r A(\nu)) \rightarrow H_{\text{cont}}^i(\Delta_{p^\infty}, A(\nu)) \rightarrow \varprojlim_{r \geq 0} H^i(\Delta_{p^\infty}, A(\nu)/p^r A(\nu)) \rightarrow 0,$$

dont le terme de gauche est nul en vertu de 6.4(iii) et (2.13.2).

Remarque 6.6. Sous les hypothèses de (6.3), si $\nu \neq 1$, l'homomorphisme canonique

$$(6.6.1) \quad H_{\text{cont}}^*(\Delta_{p^\infty}, A(\nu)) \otimes_A A/p^r A \rightarrow H^*(\Delta_{p^\infty}, A(\nu)/p^r A(\nu))$$

n'est pas en général un isomorphisme.

Corollaire 6.7. *Conservons les hypothèses de (6.3), supposons de plus $\nu \neq 1$. Soient ζ un générateur du groupe $\mu_{p^n}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$, a un élément non nul de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$, α un nombre rationnel, N un (A/aA) -module, M un (A/aA) - Δ_{p^∞} -module discret. Supposons que les conditions suivantes soient remplies :*

- (i) $\inf(v(a), \alpha) > v(\zeta - 1)$;
- (ii) N est plat sur $\mathcal{O}_{\overline{K}}/a\mathcal{O}_{\overline{K}}$;
- (iii) M est projectif de type fini sur A/aA , et est engendré par un nombre fini d'éléments Δ_{p^∞} -invariants modulo $p^\alpha M$.

Munissons N de la topologie p -adique et de l'action triviale de Δ_{p^∞} et posons $N(\nu) = N \otimes_A A(\nu)$ et $b = a(\zeta - 1)^{-1}$. Alors pour tout $i \geq 0$, on a

$$(\zeta - 1) \cdot H^i(\Delta_{p^\infty}, (M/bM) \otimes_A N(\nu)) = 0.$$

Comme M est un facteur direct d'un (A/aA) -module libre de type fini, on peut se borner au cas où il est libre de type fini sur A/aA . Il admet donc une (A/aA) -base formée d'éléments Δ_{p^∞} -invariants modulo $p^\alpha M$. Posons $T = M \otimes_A N(\nu)$. En vertu de 6.1, on a un isomorphisme canonique dans $\mathbf{D}^+(\text{Mod}(A))$

$$(6.7.1) \quad C^\bullet(\Delta_{p^\infty}, T/bT) \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}_{S_A(\Delta_{p^\infty})}^\bullet((T/bT)^\flat).$$

Il existe $1 \leq i \leq d$ tel que $\nu(e_i)$ soit un générateur de $\mu_{p^n}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$; on peut supposer $\nu(e_i) = \zeta$. Notons $\varphi: \Delta_{p^\infty} \rightarrow \text{Aut}_A(M)$ la représentation de Δ_{p^∞} sur M . Il existe alors un endomorphisme A -linéaire

U de M tel que $\varphi(e_i) = \text{id}_M + p^\alpha U$. Posons $c = p^\alpha(\zeta - 1)^{-1} \in \mathfrak{m}_{\overline{K}}$ et $V = \text{id}_T + cU \otimes (\zeta \cdot \text{id}_N)$, qui est un automorphisme A -linéaire de T , de sorte qu'on a

$$(6.7.2) \quad \varphi(e_i) \otimes (\nu(e_i) \cdot \text{id}_N) - \text{id}_T = (\zeta - 1)V \in \text{End}_A(T).$$

Pour tout entier $1 \leq j \leq d$, on a

$$(6.7.3) \quad \begin{aligned} & (\varphi(e_j) \otimes (\nu(e_j) \cdot \text{id}_N) - \text{id}_T) \circ V^{-1} \\ &= V^{-1} \circ (\varphi(e_j) \otimes (\nu(e_j) \cdot \text{id}_N) - \text{id}_T) \in \text{End}_A(T/bT). \end{aligned}$$

En effet, Δ_{p^∞} étant abélien, les produits de ces endomorphismes par $\zeta - 1$ sont égaux dans $\text{End}_A(T)$, ce qui implique la relation (6.7.3) car T est plat sur $\mathcal{O}_{\overline{K}}/a\mathcal{O}_{\overline{K}}$. Donc V^{-1} est un automorphisme du $S_A(\Delta_{p^\infty})$ -module $(T/bT)^\flat$, et il induit, pour tout $q \geq 0$, un automorphisme $S_A(\Delta_{p^\infty})$ -linéaire de $H^q(\mathbb{K}_{S_A(\Delta_{p^\infty})}^\bullet((T/bT)^\flat))$. Or ce module est annulé par e_i (2.14). Par suite, pour tout $x \in H^q(\mathbb{K}_{S_A(\Delta_{p^\infty})}^\bullet((T/bT)^\flat))$, on a, en vertu de (6.7.2),

$$(6.7.4) \quad e_i \cdot V^{-1}(x) = (\zeta - 1)x = 0.$$

6.8. On désigne par Λ le conoyau dans la catégorie des monoïdes de l'homomorphisme $\theta: \mathbb{N} \rightarrow P$ et par $q: P \rightarrow \Lambda$ l'homomorphisme canonique. D'après ([32] 1.1.4), Λ est le quotient de P par la relation de congruence E formée des éléments $(x, y) \in P \times P$ pour lesquels il existe $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $x + a\lambda = y + b\lambda$. Dire que E est une relation de congruence signifie qu'elle est une relation d'équivalence et que E est un sous-monoïde de $P \times P$. Le groupe associé à Λ s'identifie canoniquement à $P^{\text{gp}}/\mathbb{Z}\lambda$. Comme P est intègre, Λ est intègre ; on peut donc l'identifier à l'image de P dans $P^{\text{gp}}/\mathbb{Z}\lambda$.

Lemme 6.9. *Conservons les notations de (6.8). Alors :*

- (i) *Le monoïde Λ est saturé.*
- (ii) *Pour tout $x \in \Lambda$, l'ensemble $q^{-1}(x)$ admet un unique élément minimal $\tilde{x}$ pour la relation de pré-ordre de P définie par sa structure de monoïde.*
- (iii) *Pour tout $x \in \Lambda$ et tout entier $n \geq 0$, on a $n\tilde{x} = n\tilde{x}$.*

(i) En effet, Λ est la somme amalgamée de l'homomorphisme saturé θ et de $\mathbb{N} \rightarrow 0$. Il est donc saturé (3.2).

(ii) On notera d'abord que deux éléments quelconques de $q^{-1}(x)$ sont nécessairement comparables (6.8). Montrons que l'ensemble $q^{-1}(x)$ admet un élément minimal $\tilde{x}$. Il revient au même de dire que pour tout $t \in P$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que l'élément $t - n\lambda$ de P^{gp} n'appartient pas à P . En effet, si ce n'était pas le cas, pour tout $n \geq 0$, l'élément $\alpha(t)/\pi^n$ de R_K appartient à R , où $\alpha: P \rightarrow R$ est l'homomorphisme défini par la carte (P, γ) (4.2). Comme $\alpha(t) \neq 0$ et que R est noethérien et intègre, on en déduit que π est inversible dans R , ce qui contredit l'hypothèse 4.2(C₂). Il s'ensuit aussi que $-\lambda$ n'appartient pas à P . Donc $\tilde{x}$ est nécessairement unique car P est intègre et P^{gp} est sans torsion.

(iii) Comme $-\lambda$ n'appartient pas à P , on a $\tilde{0} = 0$. On peut donc se borner au cas où n est un nombre premier. On notera d'abord que $q(n\tilde{x}) = q(\tilde{x})$. Si $n\tilde{x} \neq n\tilde{x}$, alors il existe $m \geq 1$ tel que $n\tilde{x} \geq m\lambda$. Comme l'homomorphisme θ est saturé, il existe alors $m' \in \mathbb{N}$ tel que $\tilde{x} \geq m'\lambda$ et $nm' \geq m$ en vertu de ([41] 4.1 page 11 ; cf. aussi [32] 4.4.10). Comme $m' \geq 1$, la relation $\tilde{x} \geq m'\lambda$ contredit le caractère minimal de $\tilde{x}$.

6.10. Conservons les notations de (6.8). Pour tout $n \geq 0$, on note $\Lambda^{(p^n)}$ le monoïde au-dessus de Λ défini par le couple (Λ, ϖ_{p^n}) , autrement dit, $\Lambda^{(p^n)}$ est le monoïde Λ et l'homomorphisme structural $\Lambda \rightarrow \Lambda^{(p^n)}$ est le Frobenius d'ordre p^n de Λ (3.3). On identifie naturellement $\Lambda^{(p^n)}$ au conoyau de

l'homomorphisme $\theta: \mathbb{N}^{(p^n)} \rightarrow P^{(p^n)}$ et on note aussi $q: P^{(p^n)} \rightarrow \Lambda^{(p^n)}$ l'homomorphisme canonique. Posons

$$P_{p^\infty} = \varinjlim_{\mathbb{N}} P^{(p^n)} \quad \text{et} \quad \Lambda_{p^\infty} = \varinjlim_{\mathbb{N}} \Lambda^{(p^n)}.$$

On identifie P_{p^∞} à un sous-monoïde de P_∞ (5.8.2). On note aussi $q: P_{p^\infty} \rightarrow \Lambda_{p^\infty}$ la limite inductive des homomorphismes canoniques $q: P^{(p^n)} \rightarrow \Lambda^{(p^n)}$.

Pour tout $t \in P_{p^\infty}$, l'application

$$(6.10.1) \quad \nu_t: \Delta_\infty \rightarrow \mu_{p^\infty}(\mathcal{O}_{\overline{K}}) = \varinjlim_{n \geq 0} \mu_{p^n}(\mathcal{O}_{\overline{K}}), \quad g \mapsto \langle g, t \rangle,$$

où $\langle g, t \rangle$ est défini dans (5.14.1), induit, compte tenu de (5.14.3), un homomorphisme

$$(6.10.2) \quad \nu_t: \Delta_{p^\infty} \rightarrow \mu_{p^\infty}(\mathcal{O}_{\overline{K}}).$$

Pour tout $g \in \Delta_{p^\infty}$, on a par définition

$$(6.10.3) \quad g(\alpha_\infty(t)) = \nu_t(g)\alpha_\infty(t).$$

Il est clair que l'application

$$(6.10.4) \quad P_{p^\infty} \rightarrow \text{Hom}(\Delta_{p^\infty}, \mu_{p^\infty}(\mathcal{O}_{\overline{K}})), \quad t \mapsto \nu_t$$

est un homomorphisme. Pour tout $n \geq 0$, notons $\lambda^{(p^n)}$ l'image de λ dans $P^{(p^n)}$ par l'isomorphisme (5.8.4). Comme $\nu_{\lambda^{(p^n)}} = 1$, (6.10.4) induit un homomorphisme que l'on note aussi

$$(6.10.5) \quad \Lambda_{p^\infty} \rightarrow \text{Hom}(\Delta_{p^\infty}, \mu_{p^\infty}(\mathcal{O}_{\overline{K}})), \quad x \mapsto \nu_x.$$

En fait, celui-ci induit, pour tout $n \geq 0$, un homomorphisme

$$(6.10.6) \quad \Lambda^{(p^n)} \rightarrow \text{Hom}(\Delta_{p^\infty}, \mu_{p^n}(\mathcal{O}_{\overline{K}})).$$

Posons

$$(6.10.7) \quad \Xi_{p^\infty} = \text{Hom}(\Delta_{p^\infty}, \mu_{p^\infty}(\mathcal{O}_{\overline{K}})),$$

$$(6.10.8) \quad \Xi_{p^n} = \text{Hom}(\Delta_{p^\infty}, \mu_{p^n}(\mathcal{O}_{\overline{K}})).$$

On identifie Ξ_{p^n} à un sous-groupe de Ξ_{p^∞} .

Lemme 6.11. *Les hypothèses étant celles de (6.10), soient de plus $x \in \Lambda_{p^\infty}$, n un entier ≥ 0 . Alors pour que $\nu_x(\Delta_{p^\infty}) \subset \mu_{p^n}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ il faut et il suffit que $x \in \Lambda^{(p^n)} \subset \Lambda_{p^\infty}$; en particulier, pour que $\nu_x = 1$, il faut et il suffit que $x \in \Lambda^{(1)} \subset \Lambda_{p^\infty}$.*

Supposons que $x \in \Lambda^{(p^{n+m})}$ pour un entier $m \geq 0$. En vertu de (5.14.4), on a un diagramme commutatif

$$(6.11.1) \quad \begin{array}{ccccc} \Lambda^{(p^n)} & \xrightarrow{\varpi_{p^m}} & \Lambda^{(p^{n+m})} & & \\ \downarrow & & \downarrow & \searrow a & \\ P^{\text{gp}}/\mathbb{Z}\lambda & \xrightarrow{\cdot p^m} & P^{\text{gp}}/\mathbb{Z}\lambda & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{Hom}(\Delta_{p^\infty}, \mathbb{Z}_p(1)) & \xrightarrow{\cdot p^m} & \text{Hom}(\Delta_{p^\infty}, \mathbb{Z}_p(1)) & \xrightarrow{b} & \text{Hom}(\Delta_{p^\infty}, \mu_{p^{n+m}}(\mathcal{O}_{\overline{K}})) \end{array}$$

où les flèches verticales inférieures proviennent de l'identification de Δ_{p^∞} et $L_\lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p(1)$ (4.9), a est l'homomorphisme (6.10.6) et b est le morphisme canonique. Le carré inférieur est cartésien car le sous-groupe de torsion de $P^{\text{gp}}/\mathbb{Z}\lambda$ est d'ordre premier à p , et le carré supérieur est cartésien car

Λ est saturé en vertu de 6.9(i). Pour que $\nu_x(\Delta_{p^\infty}) \subset \mu_{p^n}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$, il faut et il suffit que $a(x)$ soit dans l'image de $p^m b$. La proposition s'obtient alors par chasse au diagramme (6.11.1).

Lemme 6.12. *Il existe une décomposition canonique de R_{p^∞} en somme directe de R_1 -modules de présentation finie, stables sous l'action de Γ_{p^∞} ,*

$$(6.12.1) \quad R_{p^\infty} = \bigoplus_{\nu \in \Xi_{p^\infty}} R_{p^\infty}^{(\nu)},$$

telle que l'action de Δ_{p^∞} sur le facteur $R_{p^\infty}^{(\nu)}$ soit donnée par le caractère ν . De plus, pour tout $n \geq 0$, on a

$$(6.12.2) \quad R_{p^n} = \bigoplus_{\nu \in \Xi_{p^n}} R_{p^\infty}^{(\nu)}.$$

On rappelle que pour tout entier $n \geq 0$, $\text{Spec}(R_{p^n}) = X_{p^n} \otimes_{\mathcal{O}_{K_{p^n}}} \mathcal{O}_{\overline{K}}$ en vertu de 4.8(ii), et qu'on a un diagramme cartésien de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ -morphisms (4.6.3)

$$(6.12.3) \quad \begin{array}{ccc} X_{p^n} \otimes_{\mathcal{O}_{K_{p^n}}} \mathcal{O}_{\overline{K}} & \longrightarrow & \text{Spec}(\mathcal{O}_{\overline{K}}[P^{(p^n)}]/(\pi_{p^n} - e^{\lambda^{(p^n)}})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{\overline{K}} & \longrightarrow & \text{Spec}(\mathcal{O}_{\overline{K}}[P]/(\pi - e^\lambda)) \end{array}$$

où $\lambda^{(p^n)}$ désigne l'image de λ dans $P^{(p^n)}$ par l'isomorphisme canonique (5.8.4). On peut donc se réduire au cas où $R = \mathcal{O}_K[P]/(\pi - e^\lambda)$. Soit Λ le conoyau dans la catégorie des monoïdes de l'homomorphisme $\theta: \mathbb{N} \rightarrow P$ et soit $q: P \rightarrow \Lambda$ l'homomorphisme canonique (cf. 6.8). On a alors

$$(6.12.4) \quad R = \bigoplus_{x \in \Lambda} \mathcal{O}_K \cdot \alpha(\tilde{x}),$$

où $\tilde{x}$ est le relèvement minimal de x dans P défini dans 6.9(ii) et $\alpha: P \rightarrow R$ est l'homomorphisme induit par la carte (P, γ) (4.2).

D'après (6.12.3), on a, pour tout $n \geq 0$,

$$(6.12.5) \quad R_{p^n} = \mathcal{O}_{\overline{K}}[P^{(p^n)}]/(\pi_{p^n} - e^{\lambda^{(p^n)}}),$$

Reprenons les notations de (6.10) et notons, pour tout $x \in \Lambda^{(p^n)}$, $\tilde{x} \in P^{(p^n)}$ l'unique élément minimal de $q^{-1}(x)$ pour la relation de pré-ordre de $P^{(p^n)}$ définie par sa structure de monoïde (cf. 6.9(ii)). On a alors

$$(6.12.6) \quad R_{p^n} = \bigoplus_{x \in \Lambda^{(p^n)}} \mathcal{O}_{\overline{K}} \cdot \alpha_{p^n}(\tilde{x}),$$

où $\alpha_{p^n}: P^{(p^n)} \rightarrow R_{p^n}$ est l'homomorphisme défini dans (5.8).

En vertu de 6.9(iii), les applications $\Lambda^{(p^n)} \rightarrow P^{(p^n)}$, $x \mapsto \tilde{x}$ sont compatibles. Elles définissent donc par passage à la limite inductive une application que l'on note aussi

$$(6.12.7) \quad \Lambda_{p^\infty} \rightarrow P_{p^\infty}, \quad x \mapsto \tilde{x}.$$

On a clairement $q(\tilde{x}) = x$. Comme Λ est intègre et que le sous-groupe de torsion de $P^{\text{gp}}/\mathbb{Z}\lambda$ est d'ordre premier à p , les homomorphismes $\Lambda^{(p^n)} \rightarrow \Lambda^{(p^{n+1})}$ sont injectifs. Par passage à la limite inductive de la décomposition (6.12.6), on obtient

$$(6.12.8) \quad R_{p^\infty} = \bigoplus_{x \in \Lambda_{p^\infty}} \mathcal{O}_{\overline{K}} \cdot \alpha_\infty(\tilde{x}),$$

où α_∞ est l'homomorphisme (5.8.3). On notera que chaque élément $\alpha_\infty(\tilde{x}) \in R_{p^\infty}$ est un vecteur propre pour l'action de Γ_{p^∞} (5.14.2) et que l'action de Δ_{p^∞} sur $\alpha_\infty(\tilde{x})$ est donnée par le caractère ν_x (6.10.3). Pour tout $\nu \in \Xi_{p^\infty}$, on pose alors

$$(6.12.9) \quad R_{p^\infty}^{(\nu)} = \bigoplus_{x \in \Lambda_{p^\infty} \mid \nu_x = \nu} \mathcal{O}_{\overline{K}} \cdot \alpha_\infty(\tilde{x}),$$

de sorte que l'on a

$$(6.12.10) \quad R_{p^\infty} = \bigoplus_{\nu \in \Xi_{p^\infty}} R_{p^\infty}^{(\nu)}.$$

Comme l'application $\Lambda_{p^\infty} \rightarrow \Xi_{p^\infty}, x \mapsto \nu_x$ est un homomorphisme, on voit que $R_{p^\infty}^{(\nu)}$ est un sous- R_1 -module de R_{p^∞} . Il résulte de 6.11 et (6.12.6) que pour tout $n \geq 0$, on a

$$(6.12.11) \quad R_{p^n} = \bigoplus_{\nu \in \Xi_{p^n}} R_{p^\infty}^{(\nu)}.$$

Comme R_{p^n} est de présentation finie sur R_1 pour tout $n \geq 0$, $R_{p^\infty}^{(\nu)}$ est de présentation finie sur R_1 pour tout $\nu \in \Xi_{p^\infty}$.

Lemme 6.13. *Pour tout $a \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$, l'homomorphisme canonique (4.9)*

$$(6.13.1) \quad R_{p^\infty}/aR_{p^\infty} \rightarrow (R_\infty/aR_\infty)^{\Sigma_0}$$

est un isomorphisme.

Soient L une extension galoisienne finie de F_{p^∞} contenu dans F_∞ , A la clôture intégrale de R_{p^∞} dans L , $G = \text{Gal}(L/F_{p^\infty})$. Comme on a $R_{p^\infty} = A \cap F_{p^\infty}$ et $A = R_\infty \cap L$, les homomorphismes canoniques $R_{p^\infty}/aR_{p^\infty} \rightarrow A/aA \rightarrow R_\infty/aR_\infty$ sont injectifs. D'autre part, l'ordre de G étant premier à p (donc inversible dans A), l'homomorphisme

$$(6.13.2) \quad R_{p^\infty} = A^G \rightarrow (A/aA)^G$$

est surjectif. L'assertion s'ensuit.

Lemme 6.14. *Pour tout élément non nul a de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ et tout entier $i \geq 0$, le morphisme canonique*

$$(6.14.1) \quad H^i(\Delta_{p^\infty}, R_{p^\infty}/aR_{p^\infty}) \rightarrow H^i(\Delta, \overline{R}/a\overline{R})$$

est un presque-isomorphisme.

En effet, en vertu de 6.13 et (4.10.1), le morphisme canonique

$$(6.14.2) \quad H^i(\Delta_{p^\infty}, R_{p^\infty}/aR_{p^\infty}) \rightarrow H^i(\Delta_\infty, R_\infty/aR_\infty)$$

est un isomorphisme. D'autre part, le morphisme canonique

$$(6.14.3) \quad H^i(\Delta_\infty, R_\infty/aR_\infty) \rightarrow H^i(\Delta, \overline{R}/a\overline{R})$$

est un presque-isomorphisme d'après 4.22.

Théorème 6.15. *Soient a un élément non nul de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$, ζ une racine primitive p -ième de 1 dans $\mathcal{O}_{\overline{K}}$. Alors :*

(i) *L'homomorphisme canonique de R_1 -algèbres graduées*

$$(6.15.1) \quad \wedge(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Delta_\infty, \mathcal{O}_{\overline{K}}/a\mathcal{O}_{\overline{K}})) \otimes_{\mathcal{O}_K} R \rightarrow H^*(\Delta_\infty, R_\infty/aR_\infty)$$

admet (en tant que morphisme de R_1 -modules gradués) un inverse à gauche G_K -équivariant canonique

$$(6.15.2) \quad H^*(\Delta_\infty, R_\infty/aR_\infty) \rightarrow \wedge(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Delta_\infty, \mathcal{O}_{\overline{K}}/a\mathcal{O}_{\overline{K}})) \otimes_{\mathcal{O}_K} R,$$

dont le noyau est annulé par $\zeta - 1$.

(ii) Le R_1 -module $H^i(\Delta_\infty, R_\infty/aR_\infty)$ est presque de présentation finie pour tout $i \geq 0$, et est nul pour tout $i \geq d + 1$.

(iii) Le système projectif $(H^*(\Delta_\infty, R_\infty/p^r R_\infty))_{r \geq 0}$ vérifie la condition de Mittag-Leffler.

Compte tenu de 6.13 et (4.10.1), il suffit de montrer la proposition analogue pour R_{p^∞} et Δ_{p^∞} . D'après 6.12, on a une décomposition canonique de R_{p^∞} en somme directe de $R_1[\Delta_{p^\infty}]$ -modules

$$(6.15.3) \quad R_{p^\infty} = \bigoplus_{\nu \in \Xi_{p^\infty}} R_{p^\infty}^{(\nu)} \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{K}}} \mathcal{O}_{\overline{K}}(\nu),$$

où Δ_{p^∞} agit trivialement sur $R_{p^\infty}^{(\nu)}$ et agit sur $\mathcal{O}_{\overline{K}}(\nu) = \mathcal{O}_{\overline{K}}$ par le caractère ν . Comme les $R_{p^\infty}^{(\nu)}$ sont $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ -plats, on a, en vertu de 2.6, une décomposition canonique en somme directe de R_1 -modules

$$(6.15.4) \quad H^*(\Delta_{p^\infty}, R_{p^\infty}/aR_{p^\infty}) = \bigoplus_{\nu \in \Xi_{p^\infty}} H^*(\Delta_{p^\infty}, \mathcal{O}_{\overline{K}}(\nu)/a\mathcal{O}_{\overline{K}}(\nu)) \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{K}}} R_{p^\infty}^{(\nu)}.$$

La proposition (i) résulte de (6.15.4), 6.4 (appliqué avec $A = \mathcal{O}_C$) et du fait que $R_{p^\infty}^{(1)} = R_1$ (6.12.2).

Montrons la proposition (ii). Soient i, n deux entiers ≥ 0 , ζ_n une racine primitive p^n -ième de l'unité. Il résulte de (6.15.4), 6.4 et 6.12 que $H^i(\Delta_{p^\infty}, R_{p^\infty}/aR_{p^\infty})$ est la somme directe d'un R_1 -module de présentation finie et d'un R_1 -module annulé par $\zeta_n - 1$. Il est donc presque de présentation finie sur R_1 . La seconde assertion est claire puisque la p -dimension cohomologique de Δ_{p^∞} est égale à d .

La proposition (iii) est une conséquence de (6.15.4) et 6.4(iii).

Corollaire 6.16. *Pour tout élément non nul a de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ et tout entier $i \geq 0$, $H^i(\Delta, \overline{R}/a\overline{R})$ est presque de présentation finie sur R_1 .*

Cela résulte de 4.22 et 6.15(ii).

Corollaire 6.17. *Pour tout élément non nul a de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ et tout entier $i \geq 0$, le noyau et le conoyau du morphisme canonique*

$$(6.17.1) \quad H^i(\Delta_{p^\infty}, R_1/aR_1) \rightarrow H^i(\Delta, \overline{R}/a\overline{R})$$

sont annulés par $\mathfrak{m}_{\overline{K}}$ et $p^{\frac{1}{p-1}}\mathfrak{m}_{\overline{K}}$ respectivement.

En effet, le morphisme canonique

$$(6.17.2) \quad H^i(\Delta_{p^\infty}, R_{p^\infty}/aR_{p^\infty}) \rightarrow H^i(\Delta, \overline{R}/a\overline{R})$$

est un presque-isomorphisme d'après 6.14. D'autre part, il résulte de (6.15.4), 6.4 (appliqué avec $A = \mathcal{O}_C$), 2.6 et du fait que $R_{p^\infty}^{(1)} = R_1$ (6.12.2) que le morphisme canonique

$$(6.17.3) \quad H^i(\Delta_{p^\infty}, R_1/aR_1) \rightarrow H^i(\Delta_{p^\infty}, R_{p^\infty}/aR_{p^\infty})$$

est injectif de conoyau annulé par $\zeta - 1$, où ζ racine primitive p -ième de l'unité. La proposition s'ensuit car $v(\zeta - 1) = \frac{1}{p-1}$.

Corollaire 6.18. *L'homomorphisme canonique*

$$(6.18.1) \quad H_{\text{cont}}^*(\Delta_\infty, \widehat{R_\infty}) \rightarrow \varprojlim_{r \geq 0} H^*(\Delta_\infty, R_\infty/p^r R_\infty)$$

est un isomorphisme.

En effet, d'après (2.13.4) et (2.13.5), pour tout $i \geq 0$, on a une suite exacte

$$(6.18.2) \quad 0 \rightarrow \varprojlim_{r \geq 0} H^{i-1}(\Delta_\infty, R_\infty/p^r R_\infty) \rightarrow H_{\text{cont}}^i(\Delta_\infty, \widehat{R_\infty}) \rightarrow \varprojlim_{r \geq 0} H^i(\Delta_\infty, R_\infty/p^r R_\infty) \rightarrow 0,$$

dont le terme de gauche est nul en vertu de 6.15(iii) et (2.13.2).

Corollaire 6.19. *Il existe un unique homomorphisme G_K -équivariant de $\widehat{R_1}$ -algèbres graduées*

$$(6.19.1) \quad v_\infty : \wedge(\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R_1}(-1)) \rightarrow H_{\text{cont}}^*(\Delta_\infty, \widehat{R_\infty})$$

vérifiant les propriétés suivantes :

(i) *La composante de degré 1 du morphisme v_∞ est le composé*

$$(6.19.2) \quad \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R_1}(-1) \rightarrow \text{Hom}(\Delta_\infty, \widehat{R_1}) = H_{\text{cont}}^1(\Delta_\infty, \widehat{R_1}) \rightarrow H_{\text{cont}}^1(\Delta_\infty, \widehat{R_\infty}),$$

où la première flèche est induite par l'isomorphisme $\tilde{\delta}$ (5.18.9) et la dernière flèche est le morphisme canonique.

(ii) *En tant que morphisme de $\widehat{R_1}$ -modules gradués, le morphisme v_∞ admet un inverse à gauche G_K -équivariant canonique*

$$(6.19.3) \quad H_{\text{cont}}^*(\Delta_\infty, \widehat{R_\infty}) \rightarrow \wedge(\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R_1}(-1)),$$

dont le noyau est annulé par $p^{\frac{1}{p-1}}$.

L'unicité de l'homomorphisme v_∞ vérifiant la condition (i) est évidente. Montrons son existence. Il résulte de 6.15(i) et 6.18 que l'homomorphisme canonique de $\widehat{R_1}$ -algèbres graduées

$$(6.19.4) \quad \wedge(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Delta_\infty, \mathcal{O}_C)) \otimes_{\mathcal{O}_C} \widehat{R_1} \rightarrow H_{\text{cont}}^*(\Delta_\infty, \widehat{R_\infty})$$

admet (en tant que morphisme de $\widehat{R_1}$ -modules gradués) un inverse à gauche G_K -équivariant canonique

$$(6.19.5) \quad H_{\text{cont}}^*(\Delta_\infty, \widehat{R_\infty}) \rightarrow \wedge(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Delta_\infty, \mathcal{O}_C)) \otimes_{\mathcal{O}_C} \widehat{R_1},$$

dont le noyau est annulé par $\zeta - 1$ (ζ étant une racine primitive p -ième de 1 dans $\mathcal{O}_{\overline{K}}$). D'autre part, le morphisme canonique

$$(6.19.6) \quad \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\Delta_{p^\infty}, \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \widehat{R_1} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Delta_\infty, \mathcal{O}_C) \otimes_{\mathcal{O}_C} \widehat{R_1}$$

est bijectif (4.11.2), et on a un isomorphisme canonique (4.9)

$$(6.19.7) \quad (P^{\text{gp}}/\mathbb{Z}\lambda) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p(-1) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\Delta_{p^\infty}, \mathbb{Z}_p).$$

On en déduit, compte tenu de (5.12.1), un isomorphisme

$$(6.19.8) \quad \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R_1}(-1) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Delta_\infty, \mathcal{O}_C) \otimes_{\mathcal{O}_C} \widehat{R_1}.$$

On définit ainsi un homomorphisme v_∞ vérifiant la condition (ii) puisque $v(\zeta - 1) = \frac{1}{p-1}$. Comme (6.19.7) est induit par l'isomorphisme (5.18.8) (cf. 5.18), v_∞ vérifie aussi la condition (i).

Corollaire 6.20. *On a $(\widehat{R_\infty})^{\Delta_\infty} = \widehat{R_1}$.*

En effet, d'après 6.19, l'homomorphisme canonique $\widehat{R}_1 \rightarrow (\widehat{R}_\infty)^{\Delta_\infty}$ admet un inverse à gauche $(\widehat{R}_\infty)^{\Delta_\infty} \rightarrow \widehat{R}_1$ dont le noyau est annulé par $p^{\frac{1}{p-1}}$. Comme $\widehat{R}_\infty$ est $\mathcal{O}_C$ -plat (4.12), l'inverse à gauche est injectif, d'où la proposition.

6.21. Pour tout $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ -module M , on pose

$$(6.21.1) \quad M^b = \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\overline{K}}}(\mathfrak{m}_{\overline{K}}, M).$$

Le morphisme canonique $M \rightarrow M^b$ est un presque-isomorphisme. Pour qu'un morphisme de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ -modules $u: M \rightarrow N$ soit un presque-isomorphisme, il faut et il suffit que le morphisme associé $u^b: M^b \rightarrow N^b$ soit un isomorphisme ([42] 2.1.5).

Lemme 6.22. *Le morphisme canonique*

$$(6.22.1) \quad j: \widehat{R}_1 \rightarrow (\widehat{R}_1)^b$$

est un isomorphisme.

Comme $\widehat{R}_1$ est plat sur $\mathcal{O}_C$ (4.12), j est injectif. Montrons que j est surjectif. Soit $u \in (\widehat{R}_1)^b$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}_{>0}$, posons $x_\alpha = u(p^\alpha)$. Rappelons que $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ est une algèbre affinoïde sur C et que $\widehat{R}_1$ est la boule unité pour la norme $|\cdot|_{\text{sup}}$ sur $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ (cf. la preuve de 4.13). Les relations $x_{\alpha+\beta} = p^\alpha x_\beta = p^\beta x_\alpha$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{Q}_{>0}$) impliquent alors que

$$(6.22.2) \quad |p^{-\alpha} x_\alpha|_{\text{sup}} \leq 1.$$

Par suite, $x = p^{-\alpha} x_\alpha \in \widehat{R}_1$ et est indépendant de α . Il est clair que $j(x) = u$.

Remarque 6.23. Le morphisme canonique $\mathcal{O}_C \rightarrow (\mathcal{O}_C)^b$ est un isomorphisme. La preuve est une variante très simple de celle de 6.22.

Proposition 6.24. *Il existe un homomorphisme canonique G_K -équivariant de $\widehat{R}_1$ -algèbres graduées*

$$(6.24.1) \quad \bar{v}: \wedge(\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}_1(-1)) \rightarrow H_{\text{cont}}^*(\Delta, \widehat{R})$$

ayant (en tant que morphisme de $\widehat{R}_1$ -modules gradués) un inverse à gauche G_K -équivariant canonique

$$(6.24.2) \quad H_{\text{cont}}^*(\Delta, \widehat{R}) \rightarrow \wedge(\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}_1(-1)),$$

dont le noyau est annulé par $p^{\frac{1}{p-1}}$.

En effet, on a un diagramme commutatif d'homomorphismes G_K -équivariant de $\widehat{R}_1$ -algèbres graduées

$$(6.24.3) \quad \begin{array}{ccccc} \wedge(\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}_1(-1)) & \xleftarrow{w_\infty} & \xrightarrow{v_\infty} & H_{\text{cont}}^*(\Delta_\infty, \widehat{R}_\infty) & \xrightarrow{u} & H_{\text{cont}}^*(\Delta, \widehat{R}) \\ \downarrow \iota & & & \downarrow & & \downarrow \\ (\wedge(\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}_1(-1)))^b & \xrightarrow{v_\infty^b} & (H_{\text{cont}}^*(\Delta_\infty, \widehat{R}_\infty))^b & \xrightarrow{u^b} & (H_{\text{cont}}^*(\Delta, \widehat{R}))^b \\ & \xleftarrow{w_\infty^b} & & & \end{array}$$

où le foncteur $(\cdot)^b$ est défini dans (6.21.1), les flèches verticales et u sont les morphismes canoniques, v_∞ est l'homomorphisme (6.19.1) et w_∞ est la section (6.19.3) de v_∞ . Alors ι et u^b sont des

isomorphismes (6.22 et 4.23). D'autre part, il résulte de 6.19 que le noyau de w_∞^b est annulé par $p^{\frac{1}{p-1}}$. Une chasse au diagramme (6.24.3) montre alors que l'homomorphisme $\bar{v} = u \circ v_\infty$ répond à la question.

Corollaire 6.25. (i) On a $(\widehat{R})^\Delta = \widehat{R}_1$.

(ii) Le sous-module de torsion p -primaire M^1 de $H_{\text{cont}}^1(\Delta, \widehat{R})$ est égal au noyau du morphisme

$$(6.25.1) \quad \iota: H_{\text{cont}}^1(\Delta, \widehat{R}) \rightarrow H_{\text{cont}}^1(\Delta, (\pi\rho)^{-1}\widehat{R})$$

déduit de l'injection canonique $\widehat{R} \subset (\pi\rho)^{-1}\widehat{R}$.

(iii) Le morphisme composé

$$(6.25.2) \quad \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}_1(-1) \longrightarrow H_{\text{cont}}^1(\Delta, \widehat{R}) \xrightarrow{\iota} H_{\text{cont}}^1(\Delta, (\pi\rho)^{-1}\widehat{R}),$$

où la première flèche est la composante de degré 1 du morphisme $\bar{v}$ (6.24.1), est le bord de la suite exacte longue de cohomologie déduite de la suite exacte (5.21.2).

(iv) Pour tout entier $i \geq 0$, notons M^i le sous-module de torsion p -primaire de $H_{\text{cont}}^i(\Delta, \widehat{R})$. Alors il existe un unique isomorphisme G_K -équivariant de $\widehat{R}_1$ -algèbres graduées

$$(6.25.3) \quad \widetilde{v}: \wedge(\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}_1(-1)) \xrightarrow{\sim} \oplus_{i \geq 0} (H_{\text{cont}}^i(\Delta, \widehat{R})/M^i)$$

tel que le composé

$$(6.25.4) \quad \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}_1(-1) \rightarrow H_{\text{cont}}^1(\Delta, \widehat{R})/M^1 \rightarrow H_{\text{cont}}^1(\Delta, (\pi\rho)^{-1}\widehat{R}),$$

où le premier morphisme est la composante de degré 1 de $\widetilde{v}$ et le second morphisme est induit par ι , soit le bord de la suite exacte longue de cohomologie déduite de la suite exacte (5.21.2).

(i) D'après 6.24, l'homomorphisme canonique $\widehat{R}_1 \rightarrow (\widehat{R})^\Delta$ admet un inverse à gauche $(\widehat{R})^\Delta \rightarrow \widehat{R}_1$ dont le noyau est annulé par $p^{\frac{1}{p-1}}$. Comme $\widehat{R}$ est $\mathcal{O}_C$ -plat (4.12), l'inverse à gauche est injectif, d'où la proposition.

(ii) Il résulte de 6.24 que M^1 est annulé par $p^{\frac{1}{p-1}}$. D'autre part, la multiplication par $\pi\rho$ dans $\widehat{R}$ est le composé de l'injection canonique $\widehat{R} \rightarrow (\pi\rho)^{-1}\widehat{R}$ et de l'isomorphisme $(\pi\rho)^{-1}\widehat{R} \xrightarrow{\sim} \widehat{R}$ qui, pour tout $x \in \widehat{R}$, associe x à $(\pi\rho)^{-1}x$. Comme $v(\rho) \geq \frac{1}{p-1}$, on en déduit que $\ker(\iota) = M^1$.

(iii) Cela résulte de 6.19(i), (5.19.2) et (5.21.3).

(iv) Cela résulte de (ii), (iii) et 6.24.

Proposition 6.26. Soient M un R_1 - Δ_{p^∞} -module discret, a un élément non nul de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$, α un nombre rationnel. Supposons que $\inf(v(a), \alpha) > \frac{1}{p-1}$ et que M soit un (R_1/aR_1) -module projectif de type fini engendré par un nombre fini d'éléments Δ_{p^∞} -invariants modulo $p^\alpha M$. Posons $b = ap^{-\frac{1}{p-1}}$. Alors pour tout $i \geq 0$, le noyau et le conoyau du morphisme canonique

$$(6.26.1) \quad H^i(\Delta_{p^\infty}, M/bM) \rightarrow H^i(\Delta, (M/bM) \otimes_{R_1} \overline{R})$$

sont annulés par $\mathfrak{m}_{\overline{K}}$ et $p^{\frac{1}{p-1}}\mathfrak{m}_{\overline{K}}$ respectivement.

Comme M est un facteur direct d'un (R_1/aR_1) -module libre de type fini, on a, d'après 6.13,

$$(6.26.2) \quad ((M/bM) \otimes_{R_1} R_\infty)^{\Sigma_0} = (M/bM) \otimes_{R_1} R_{p^\infty}.$$

Donc en vertu de (4.10.1), le morphisme canonique

$$(6.26.3) \quad H^i(\Delta_{p^\infty}, (M/bM) \otimes_{R_1} R_{p^\infty}) \rightarrow H^i(\Delta_\infty, (M/bM) \otimes_{R_1} R_\infty)$$

est un isomorphisme. D'autre part, on a, d'après 4.20,

$$(6.26.4) \quad ((M/bM) \otimes_{R_1} \overline{R})^\Sigma = (M/bM) \otimes_{R_1} R_\infty.$$

Par suite, en vertu de 4.18, le morphisme canonique

$$(6.26.5) \quad H^i(\Delta_\infty, (M/bM) \otimes_{R_1} R_\infty) \rightarrow H^i(\Delta, (M/bM) \otimes_{R_1} \overline{R})$$

est un presque-isomorphisme. Il suffit donc de montrer que le morphisme canonique

$$(6.26.6) \quad H^i(\Delta_{p^\infty}, M/bM) \rightarrow H^i(\Delta_{p^\infty}, (M/bM) \otimes_{R_1} R_{p^\infty})$$

est injectif de conoyau annulé par $p^{\frac{1}{p-1}}$.

D'après 6.12, on a une décomposition canonique de $(M/bM) \otimes_{R_1} R_{p^\infty}$ en somme directe de $R_1[\Delta_{p^\infty}]$ -modules

$$(6.26.7) \quad (M/bM) \otimes_{R_1} R_{p^\infty} = \bigoplus_{\nu \in \Xi_{p^\infty}} (M/bM) \otimes_{R_1} R_{p^\infty}^{(\nu)} \otimes_{R_1} R_1(\nu),$$

où Δ_{p^∞} agit trivialement sur $R_{p^\infty}^{(\nu)}$ et agit sur $R_1(\nu) = R_1$ par le caractère ν . Comme $R_{p^\infty}^{(1)} = R_1$ (6.12.2), la proposition résulte de 6.7 (appliqué à $A = R_1/aR_1$ et $N = R_{p^\infty}^{(\nu)}/aR_{p^\infty}^{(\nu)}$ pour $\nu \neq 1$).

7. ÉPAISSISSEMENTS INFINITÉSIMAUX p -ADIQUES DE FONTAINE

Proposition 7.1. *Les homomorphismes de Frobenius absolus de R_∞/pR_∞ et $\overline{R}/p\overline{R}$ sont surjectifs.*

Montrons d'abord que l'homomorphisme de Frobenius absolu de R_∞/pR_∞ est surjectif. Rappelons que le morphisme canonique $X \rightarrow S \times_{B[\mathbb{N}]} B[P]$ est étale (4.2.2), que $\text{Spec}(R_1) = X \otimes_{\mathcal{O}_K} \overline{\mathcal{O}_K}$ et que pour tout entier $n \geq 0$, $\text{Spec}(R_n)$ est une composante connexe de $X_n \otimes_{\mathcal{O}_{K_n}} \overline{\mathcal{O}_K}$ (4.8) et qu'on a un diagramme cartésien de $\overline{\mathcal{O}_K}$ -morphisms (4.6.3)

$$(7.1.1) \quad \begin{array}{ccc} X_n \otimes_{\mathcal{O}_{K_n}} \overline{\mathcal{O}_K} & \longrightarrow & \text{Spec}(\overline{\mathcal{O}_K}[P^{(n)}]/(\pi_n - e^{\lambda^{(n)}})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \otimes_{\mathcal{O}_K} \overline{\mathcal{O}_K} & \longrightarrow & \text{Spec}(\overline{\mathcal{O}_K}[P]/(\pi - e^\lambda)) \end{array}$$

où pour tout $t \in P$, on a noté $t^{(n)}$ son image dans $P^{(n)}$ par l'isomorphisme canonique (5.8.4). On peut donc se réduire au cas où $X = \text{Spec}(\overline{\mathcal{O}_K}[P]/(\pi - e^\lambda))$. Il suffit alors de montrer que l'homomorphisme de Frobenius absolu de la limite inductive de $\mathbb{F}_p$ -algèbres (relativement à la relation de divisibilité)

$$(7.1.2) \quad \lim_{\substack{\longrightarrow \\ n \geq 1}} (\overline{\mathcal{O}_K}/p\overline{\mathcal{O}_K})[P^{(n)}]/(\pi_n - e^{\lambda^{(n)}})$$

est surjectif. Ceci résulte du fait que l'homomorphisme de Frobenius absolu de $\overline{\mathcal{O}_K}/p\overline{\mathcal{O}_K}$ est surjectif et que pour tout $t \in P$, on a $e^{t^{(n)}} = e^{pt^{(pn)}}$ dans (7.1.2).

Montrons ensuite que l'homomorphisme de Frobenius absolu de $\overline{R}/p\overline{R}$ est surjectif. Soient L une extension finie de F_∞ contenue dans $\overline{F}$, D la clôture intégrale de R dans L . Supposons que D soit presque-étale sur R_∞ . Alors D/pD est presque-étale sur R_∞/pR_∞ ([42] 2.6.3(3)). Comme l'homomorphisme de Frobenius absolu de R_∞/pR_∞ est surjectif, l'homomorphisme de Frobenius absolu de D/pD est presque surjectif en vertu de ([42] 2.6.9). Pour tout $x \in D$, il existe $x', y \in D$ tel que $p^{1/2}x = x'^p + py$. Alors $x'' = p^{-1/(2p)}x' \in D$ et on a $x = x''^p + p^{1/2}y$. Par le même argument, il existe $y', z \in D$ tel que $y = y'^p + p^{1/2}z$. Par suite, on a $x \equiv (x'' + p^{1/(2p)}y')^p \pmod{pD}$. On en

déduit par passage à la limite inductive, en vertu de 4.15, que l'homomorphisme de Frobenius absolu de $\overline{R}/p\overline{R}$ est surjectif.

7.2. On désigne par $\mathcal{R}$ la limite projective du système projectif $(\overline{R}/p\overline{R})_{\mathbb{N}}$ dont les morphismes de transition sont les homomorphismes de Frobenius de $\overline{R}/p\overline{R}$.

$$(7.2.1) \quad \mathcal{R} = \varprojlim_{x \mapsto x^p} \overline{R}/p\overline{R}.$$

C'est un anneau parfait d'après 7.1 (*i.e.*, l'homomorphisme de Frobenius de $\mathcal{R}$ est bijectif), et il est naturellement muni d'une structure de $k[\Gamma]$ -module. Pour tout $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}$, il existe une unique suite $(\widehat{x}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\widehat{\overline{R}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n soit la réduction de $\widehat{x}^{(n)}$ et que $(\widehat{x}^{(n+1)})^p = \widehat{x}^{(n)}$. On identifie dans la suite $\mathcal{R}$ avec l'ensemble des suites $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\widehat{\overline{R}}$ telles que $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tous éléments $x = (x^{(n)})$ et $y = (y^{(n)})$ de $\mathcal{R}$, on a

$$(7.2.2) \quad (x + y)^{(n)} = \lim_{m \rightarrow +\infty} (x^{(n+m)} + y^{(n+m)})^{p^m} \quad \text{et} \quad (xy)^{(n)} = x^{(n)}y^{(n)}.$$

L'application

$$(7.2.3) \quad \begin{aligned} \theta: \quad W(\mathcal{R}) &\rightarrow \widehat{\overline{R}} \\ (x_0, x_1, x_2, \dots) &\mapsto \sum_{n \geq 0} p^n x_n^{(n)} \end{aligned}$$

où $W(\mathcal{R})$ est l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\mathcal{R}$, est un homomorphisme Γ -équivariant de $W(k)$ -algèbres ([12] prop. 5.1.1). On choisit un élément $\tilde{p} = (p^{(0)}, p^{(1)}, p^{(2)}, \dots) \in \mathcal{R}$ tel que $p^{(0)} = p$, et on pose

$$(7.2.4) \quad \xi = [\tilde{p}] - p.$$

Proposition 7.3 ([40] A.1.1 et A.2.2). *La suite*

$$(7.3.1) \quad 0 \longrightarrow W(\mathcal{R}) \xrightarrow{\xi} W(\mathcal{R}) \xrightarrow{\theta} \widehat{\overline{R}} \longrightarrow 0$$

est exacte.

7.4. On désigne par $\mathcal{A}(\widehat{\overline{R}})$ le séparé complété de $W(\mathcal{R})$ pour la topologie définie par $\ker(\theta)$; c'est une $W(k)$ -algèbre. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$(7.4.1) \quad \mathcal{A}_n(\widehat{\overline{R}}) = W(\mathcal{R})/(\ker \theta)^n.$$

On note encore $\theta: \mathcal{A}_n(\widehat{\overline{R}}) \rightarrow \widehat{\overline{R}}$ l'homomorphisme induit par θ . Il résulte de 7.3 que $\mathcal{A}_n(\widehat{\overline{R}})$ est complet et séparé pour la topologie p -adique. Le groupe Γ agit naturellement sur $\mathcal{A}(\widehat{\overline{R}})$ et $\mathcal{A}_n(\widehat{\overline{R}})$.

7.5. Les constructions introduites plus haut s'appliquent en particulier à $\mathcal{O}_K$; on notera $\mathcal{R}_S$ l'anneau (7.2.1) défini à partir de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$, et $\mathcal{A}(\mathcal{O}_C)$ et $\mathcal{A}_n(\mathcal{O}_C)$ ($n \geq 1$) les $W(k)$ -algèbres qui s'en déduisent (7.4). On a un $W(k)$ -homomorphisme Γ -équivariant canonique $W(\mathcal{R}_S) \rightarrow W(\mathcal{R})$ qui s'insère dans un diagramme commutatif

$$(7.5.1) \quad \begin{array}{ccc} W(\mathcal{R}_S) & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{O}_C \\ \downarrow & & \downarrow \\ W(\mathcal{R}) & \xrightarrow{\theta} & \widehat{\overline{R}} \end{array}$$

7.6. On a un homomorphisme canonique $\mathbb{Z}_p(1) \rightarrow \mathcal{R}^\times$. Pour tout $\zeta \in \mathbb{Z}_p(1)$, on note encore ζ son image dans $\mathcal{R}^\times$. Comme $\theta([\zeta] - 1) = 0$, on obtient un homomorphisme de groupes

$$(7.6.1) \quad \mathbb{Z}_p(1) \rightarrow \mathcal{A}_2(\widehat{R}), \quad \zeta \mapsto \log([\zeta]) = [\zeta] - 1,$$

dont l'image est contenue dans $\ker(\theta) = \xi \mathcal{A}_2(\widehat{R})$.

Lemme 7.7. *L'homomorphisme $\mathbb{Z}_p(1) \rightarrow \mathcal{A}_2(\widehat{R})$ (7.6.1) est $\mathbb{Z}_p$ -linéaire et Γ -équivariant; son image engendre l'idéal $p^{\frac{1}{p-1}} \xi \mathcal{A}_2(\widehat{R})$ et le morphisme $\widehat{R}$ -linéaire*

$$(7.7.1) \quad \widehat{R}(1) \rightarrow p^{\frac{1}{p-1}} \xi \mathcal{A}_2(\widehat{R})$$

qui à $x \otimes \zeta$, où $x \in \widehat{R}$ et $\zeta \in \mathbb{Z}_p(1)$, associe $x \cdot \log([\zeta])$ est un isomorphisme.

La première assertion est immédiate puisque $\mathbb{Z}_p(1)$ et $\mathcal{A}_2(\widehat{R})$ sont complets et séparés pour les topologies p -adiques. Soit $\zeta = (\zeta_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{Z}_p(1)$ tel que $\zeta_1 \neq 1$ (on a $\zeta_0 = 1$). Posons $\zeta' = (\zeta_{n+1})_{n \geq 0} \in \mathcal{R}$ et $\omega = \sum_{i=0}^{p-1} [\zeta']^i \in W(\mathcal{R})$. Alors ω est un générateur de $\ker(\theta)$ ([40] A.2.6), et on a dans $\mathcal{A}_2(\widehat{R})$

$$(7.7.2) \quad [\zeta] - 1 = \omega([\zeta'] - 1) = \omega\theta([\zeta'] - 1) = \omega(\zeta_1 - 1).$$

Comme $v(\zeta_1 - 1) = \frac{1}{p-1}$, les deux autres assertions s'ensuivent.

7.8. Soient Λ un sous-anneau de $\widehat{R}$, n un entier ≥ 1 . On désigne par

$$(7.8.1) \quad \theta_\Lambda: W(\mathcal{R}) \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda \rightarrow \widehat{R}$$

le Λ -homomorphisme induit par θ , et par $\mathcal{A}_n(\widehat{R}/\Lambda)$ le séparé complété de $W(\mathcal{R}) \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda / \ker(\theta_\Lambda)^n$ pour la topologie p -adique, autrement dit,

$$(7.8.2) \quad \mathcal{A}_n(\widehat{R}/\Lambda) = \varprojlim_{m \geq 0} \frac{W(\mathcal{R}) \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda}{\ker(\theta_\Lambda)^n + p^m W(\mathcal{R}) \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda}.$$

L'application θ_Λ induit un Λ -homomorphisme que l'on note

$$(7.8.3) \quad \vartheta_{\Lambda,n}: \mathcal{A}_n(\widehat{R}/\Lambda) \rightarrow \widehat{R}.$$

On note $\mathcal{I}_n(\widehat{R}/\Lambda)$ son noyau. Comme θ_Λ est surjectif (7.3), $\vartheta_{\Lambda,n}$ est surjectif et on a $\theta_\Lambda^{-1}(p^m \widehat{R}) = \ker(\theta_\Lambda) + p^m W(\mathcal{R}) \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$ pour tout $m \geq 0$. Par suite,

$$(7.8.4) \quad \mathcal{I}_n(\widehat{R}/\Lambda) = \varprojlim_{m \geq 0} \frac{\ker(\theta_\Lambda) + p^m W(\mathcal{R}) \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda}{\ker(\theta_\Lambda)^n + p^m W(\mathcal{R}) \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda}.$$

On a donc $\mathcal{I}_n(\widehat{R}/\Lambda)^n = 0$.

Les formations de $\mathcal{A}_n(\widehat{R}/\Lambda)$, $\mathcal{I}_n(\widehat{R}/\Lambda)$ et $\vartheta_{\Lambda,n}$ sont clairement fonctorielles en Λ .

Si Γ_Λ est le sous-groupe de Γ des automorphismes qui fixent Λ , alors θ_Λ est Γ_Λ -équivariant. En particulier, Γ_Λ agit sur $\mathcal{A}_n(\widehat{R}/\Lambda)$ et $\mathcal{I}_n(\widehat{R}/\Lambda)$ et $\theta_{\Lambda,n}$ est Γ_Λ -équivariant.

L'homomorphisme canonique $W(\mathcal{R}) \rightarrow \mathcal{A}(\widehat{R})$ induit pour tout $n \geq 1$ un homomorphisme $\mathcal{A}_n(\widehat{R}) \rightarrow \mathcal{A}_n(\widehat{R}/\Lambda)$.

Proposition 7.9 ([19] 1.2.1). *Pour tout sous-anneau Λ de $\widehat{R}$ et tout entier $n \geq 1$, $(\mathcal{A}_n(\widehat{R}/\Lambda), \vartheta_{\Lambda, n})$ est le Λ -épaississement infinitésimal p -adique universel de $\widehat{R}$ d'ordre $\leq n - 1$ dans le sens de ([19] 1.1).*

La proposition revient à dire que $(\mathcal{A}_n(\widehat{R}/\Lambda), \vartheta_{\Lambda, n})$ est un objet initial de la catégorie des Λ -épaississements infinitésimaux p -adiques de $\widehat{R}$ d'ordre $\leq n$, c'est à dire la catégorie dont les objets sont les couples (A, u) formés d'une Λ -algèbre complète et séparée pour la topologie p -adique A et d'un homomorphisme surjectif de Λ -algèbres $u: A \rightarrow \widehat{R}$ tel que $(\ker(u))^{n+1} = 0$. Si (A, u) et (B, v) sont deux tels épaississements, un morphisme de (A, u) vers (B, v) est un homomorphisme de Λ -algèbres $w: A \rightarrow B$ tel que $u = v \circ w$.

En effet, on sait (7.8) que $\mathcal{A}_n(\widehat{R}/\Lambda)$ est un Λ -épaississement infinitésimal p -adique de $\widehat{R}$ d'ordre $\leq n - 1$. Soit (A, u) un Λ -épaississement infinitésimal p -adique de $\widehat{R}$ d'ordre $\leq n - 1$; posons $I_A = \ker(u)$. Montrons d'abord qu'il existe un unique homomorphisme (nécessairement continu pour les topologies p -adiques)

$$(7.9.1) \quad \alpha: W(\mathcal{R}) \rightarrow A$$

tel que $\theta = u \circ \alpha$. Pour tout $N \geq n$, on a $p^N A \subset (I_A + pA)^N \subset p^{N-n} A$. Par suite, $I_A + pA$ est un idéal de définition de la topologie p -adique de A . Soit $x = (x^{(m)})_{m \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, choisissons un relèvement ξ_m de $x^{(m)}$ dans A . Comme $\xi_{m+1}^p = \xi_m$ modulo I_A , donc à fortiori modulo $I_A + pA$, la suite $\xi_m^{p^m}$ converge vers une limite $\gamma(x)$ dans A indépendante du choix des relèvements ξ_m . On voit que l'on doit avoir

$$(7.9.2) \quad \alpha([x]) = \gamma(x).$$

Comme $\mathcal{R}$ est parfait, α est alors nécessairement donné par la formule

$$(7.9.3) \quad \alpha((x_0, x_1, \dots, x_m, \dots)) = \sum_{m \geq 0} p^m \gamma(x_m^{p^{-m}}).$$

L'existence de α résulte de ce que l'application ainsi définie est bien un homomorphisme qui vérifie $\theta = u \circ \alpha$. Notons $\alpha_\Lambda: W(\mathcal{R}) \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda \rightarrow A$ le morphisme Λ -algèbres déduit de α . Comme A est complet et séparé pour la topologie p -adique, α_Λ induit un morphisme de Λ -épaississements $\mathcal{A}_n(\widehat{R}/\Lambda) \rightarrow A$, qui est clairement unique.

Remarque 7.10. Contrairement à ce qui est sous-entendu dans ([19] 1.2.1), nous ne voyons aucune raison pour laquelle le séparé complété de $W(\mathcal{R}) \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$ pour la topologie définie par $\ker(\theta_\Lambda) + pW(\mathcal{R}) \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$, serait nécessairement complet et séparé pour la topologie p -adique (et serait donc le Λ -épaississement infinitésimal p -adique universel de $\widehat{R}$).

7.11. Soit $x = (x^{(n)}) \in \mathcal{R}$ tel que $x^{(0)} \in R$. On notera que $x^{(n)} \in \overline{R} \subset \widehat{R}$ pour tout $n \geq 0$. Il est clair que $\theta_R([x] \otimes 1 - 1 \otimes x^{(0)}) = 0$. Supposons de plus que $x \in \mathcal{R}^\times$ (ce qui équivaut à dire que $x^{(0)} \in R^\times$). On peut alors définir un élément $d \log(x) \in \mathcal{E}(1)$ (5.21.1) par la formule

$$(7.11.1) \quad d \log(x)(p^{-n}) = d \log(x^{(n)}).$$

Remarque 7.12. On peut se demander s'il existe un morphisme $\widehat{R}$ -linéaire et Γ -équivariant canonique

$$(7.12.1) \quad \beta: \mathcal{I}_2(\widehat{R}/R) \rightarrow \mathcal{E}(1)$$

tel que pour tout $x = (x^{(n)}) \in \mathcal{R}^\times$ avec $x^{(0)} \in R$, on ait

$$(7.12.2) \quad \beta([x] \otimes 1 - 1 \otimes x^{(0)}) = x^{(0)} \cdot d \log(x).$$

Fontaine montre que c'est le cas lorsque $R = \mathcal{O}_K$ ([19] 1.4.3).

7.13. On pose $\bar{S} = \text{Spec}(\mathcal{O}_C)$ que l'on munit de la structure logarithmique $\mathcal{M}_{\bar{S}}$ image inverse de $\mathcal{M}_S$ (4.1), et $\bar{X} = \text{Spec}(\widehat{\bar{R}})$ que l'on munit de la structure logarithmique $\mathcal{M}_{\bar{X}}$ image inverse de $\mathcal{M}_X$ (4.2). L'action de Γ sur $\widehat{\bar{R}}$ s'étend naturellement en une action à gauche sur le schéma logarithmique $(\bar{X}, \mathcal{M}_{\bar{X}})$. De même, G_K agit naturellement sur $(\bar{S}, \mathcal{M}_{\bar{S}})$.

7.14. Considérons le système projectif de monoïdes multiplicatifs $(\bar{R})_{n \in \mathbb{N}}$, où les morphismes de transition sont la puissance p -ième (*i.e.*, l'application $x \mapsto x^p$). On désigne par Q le monoïde défini par le produit fibré du diagramme d'homomorphismes de monoïdes

$$(7.14.1) \quad \begin{array}{ccc} & \Gamma(X, \mathcal{M}_X) & \\ & \downarrow & \\ \varprojlim_{\mathbb{N}} \bar{R} & \longrightarrow & \bar{R} \end{array}$$

où la flèche horizontale est la projection sur la 0-ième composante. On désigne par q l'homomorphisme composé

$$(7.14.2) \quad Q \longrightarrow \varprojlim_{\mathbb{N}} \bar{R} \longrightarrow \mathcal{R} \xrightarrow{[\cdot]} W(\mathcal{R}),$$

où la première et la deuxième flèche sont les morphismes canoniques (7.2.1) et la dernière flèche est le relèvement de Teichmüller.

L'élément $1 \in \Gamma(X, \mathcal{M}_X)$ et l'homomorphisme canonique

$$(7.14.3) \quad \mathbb{Z}_p(1) \rightarrow \varprojlim_{\mathbb{N}} \bar{R}$$

déterminent uniquement un homomorphisme

$$(7.14.4) \quad \mathbb{Z}_p(1) \rightarrow Q.$$

On désigne par $\mathcal{Q}$ la structure logarithmique sur $\text{Spec}(W(\mathcal{R}))$ associée à la structure pré-logarithmique définie par (Q, q) . Il résulte aussitôt de la définition de l'homomorphisme θ (7.2.3) que le diagramme

$$(7.14.5) \quad \begin{array}{ccc} Q & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathcal{M}_X) \\ q \downarrow & & \downarrow \\ W(\mathcal{R}) & \xrightarrow{\theta} & \widehat{\bar{R}} \end{array}$$

est commutatif. Par suite, θ induit un morphisme

$$(7.14.6) \quad j: (\bar{X}, \mathcal{M}_{\bar{X}}) \rightarrow (\text{Spec}(W(\mathcal{R})), \mathcal{Q})$$

L'action de Γ sur $\bar{R}$ et son action triviale sur $\Gamma(X, \mathcal{M}_X)$ induisent une action sur Q . Comme q est Γ -équivariant, l'action de Γ sur $\text{Spec}(W(\mathcal{R}))$ s'étend naturellement en une action sur le schéma logarithmique $(\text{Spec}(W(\mathcal{R})), \mathcal{Q})$.

7.15. Pour tout $t \in P$, les éléments

$$(7.15.1) \quad (\alpha_\infty(t^{(p^n)}))_{n \in \mathbb{N}} \in \varprojlim_{\mathbb{N}} \overline{R} \quad \text{et} \quad \gamma(t) \in \Gamma(X, \mathcal{M}_X),$$

où $t^{(p^n)}$ est l'image de t dans $P^{(p^n)}$ par l'isomorphisme (5.8.4) et α_∞ est l'homomorphisme (5.8.3), déterminent un élément $\tilde{t}$ de Q (7.14). On verra que cette notation est compatible avec (5.17.2) et n'induit aucune confusion. L'application

$$(7.15.2) \quad P \rightarrow Q, \quad t \mapsto \tilde{t}$$

ainsi définie est un homomorphisme de monoïdes. On désigne par $\tilde{q}: P \rightarrow W(\mathcal{R})$ le composé de q (7.14.2) et de l'homomorphisme (7.15.2) et par $\mathcal{P}$ la structure logarithmique sur $\text{Spec}(W(\mathcal{R}))$ associée à la structure pré-logarithmique définie par $(P, \tilde{q})$. On a donc un homomorphisme canonique

$$(7.15.3) \quad \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}.$$

Il est clair que $\theta \circ \tilde{q}$ est l'homomorphisme $P \rightarrow \widehat{\overline{R}}$ déduit de α (cf. 5.8). Comme θ est surjectif (7.3), il induit donc une immersion fermée exacte

$$(7.15.4) \quad i: (\overline{X}, \mathcal{M}_{\overline{X}}) \rightarrow (\text{Spec}(W(\mathcal{R})), \mathcal{P}).$$

Pour tout $g \in \Gamma$, notons τ_g l'automorphisme de $\text{Spec}(W(\mathcal{R}))$ induit par l'action de g sur $W(\mathcal{R})$. La structure logarithmique $\tau_g^*(\mathcal{P})$ sur $\text{Spec}(W(\mathcal{R}))$ est associée à la structure pré-logarithmique définie par $(P, g \circ \tilde{q})$. Pour tout $t \in P$, on a dans $W(\mathcal{R})$

$$(7.15.5) \quad g(\tilde{q}(t)) = [\tilde{\chi}_t(g)] \cdot \tilde{q}(t),$$

où l'on a (abusivement) noté $\tilde{\chi}_t: \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_p(1)$ l'application déduite de (5.18.1) et $[\tilde{\chi}_t(g)]$ le relèvement de Teichmüller de l'image canonique de $\tilde{\chi}_t(g)$ dans $\mathcal{R}$. Par suite, l'homomorphisme

$$(7.15.6) \quad P \rightarrow \Gamma(\text{Spec}(W(\mathcal{R})), \mathcal{P}), \quad t \mapsto [\tilde{\chi}_t(g)] \cdot t$$

induit un morphisme de structures logarithmiques sur $\text{Spec}(W(\mathcal{R}))$

$$(7.15.7) \quad a_g: \tau_g^*(\mathcal{P}) \rightarrow \mathcal{P}.$$

De même, en vertu de (5.18.3), l'homomorphisme

$$(7.15.8) \quad P \rightarrow \Gamma(\text{Spec}(W(\mathcal{R})), \tau_g^*(\mathcal{P})), \quad t \mapsto [g(\tilde{\chi}_t(g^{-1}))] \cdot t$$

induit un morphisme de structures logarithmiques sur $\text{Spec}(W(\mathcal{R}))$

$$(7.15.9) \quad b_g: \mathcal{P} \rightarrow \tau_g^*(\mathcal{P}).$$

On voit aussitôt que a_g et b_g sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre (5.18.3), et que l'application $g \mapsto (\tau_{g^{-1}}, a_{g^{-1}})$ est une action à gauche de Γ sur $(\text{Spec}(W(\mathcal{R})), \mathcal{P})$. Le morphisme i (7.15.4) est Γ -équivariant.

7.16. Les constructions précédentes s'appliquent en particulier à $\mathcal{O}_{\overline{K}}$. On note les objets ainsi définis avec un indice S ($Q_S, q_S, \mathcal{Q}_S, \tilde{q}_S, \mathcal{P}_S$ et i_S) (cf. 7.5). L'application $\mathbb{N} \rightarrow Q_S$ définie dans (7.15.2) envoie 1 sur l'élément $\tilde{\pi} \in Q_S$ déterminé par

$$(7.16.1) \quad (\pi_{p^n})_{n \in \mathbb{N}} \in \varprojlim_{\mathbb{N}} \mathcal{O}_{\overline{K}} \quad \text{et} \quad \pi \in \Gamma(S, \mathcal{M}_S).$$

On a un homomorphisme canonique $Q_S \rightarrow Q$ qui s'insère dans un diagramme commutatif

$$(7.16.2) \quad \begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\theta} & P \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q_S & \longrightarrow & Q \\ q_S \downarrow & & \downarrow q \\ W(\mathcal{R}_S) & \longrightarrow & W(\mathcal{R}) \end{array}$$

où les flèches verticales supérieures sont les homomorphismes (7.15.2). On en déduit un diagramme commutatif de morphismes Γ -équivariants de schémas logarithmiques

$$(7.16.3) \quad \begin{array}{ccc} (\bar{X}, \mathcal{M}_{\bar{X}}) & \xrightarrow{i} & (\mathrm{Spec}(W(\mathcal{R})), \mathcal{P}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\bar{S}, \mathcal{M}_{\bar{S}}) & \xrightarrow{is} & (\mathrm{Spec}(W(\mathcal{R}_S)), \mathcal{P}_S) \end{array}$$

Proposition 7.17 ([40] 1.4.2). *Supposons qu'il existe une carte fine et saturée $h: M \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{M}_X)$ pour $(X, \mathcal{M}_X)$ telle que le morphisme composé*

$$(7.17.1) \quad M \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{M}_X) / \Gamma(X, \mathcal{O}_X^\times)$$

soit un isomorphisme. Alors le schéma logarithmique $(\mathrm{Spec}(W(\mathcal{R})), \mathcal{Q})$ est fin et saturé et le morphisme j est une immersion fermée exacte.

Corollaire 7.18. *Sous les hypothèses de (7.17), pour tout point géométrique $\bar{x}$ de $\bar{X}$, si on pose $\bar{y} = i(\bar{x}) = j(\bar{x})$, alors l'homomorphisme canonique $\mathcal{P}_{\bar{y}} \rightarrow \mathcal{Q}_{\bar{y}}$ (7.15.3) est un isomorphisme.*

Posons $Y = \mathrm{Spec}(W(\mathcal{R}))$. Comme i et j sont des immersions fermées exactes, l'homomorphisme

$$(7.18.1) \quad \mathcal{P}_{\bar{y}} / \mathcal{O}_{Y, \bar{y}}^\times \rightarrow \mathcal{Q}_{\bar{y}} / \mathcal{O}_{Y, \bar{y}}^\times$$

induit par (7.15.3) est un isomorphisme. Comme $\mathcal{Q}_{\bar{y}}$ est intègre, on en déduit que l'homomorphisme canonique $\mathcal{P}_{\bar{y}} \rightarrow \mathcal{Q}_{\bar{y}}$ est un isomorphisme.

8. LE TORSEUR DES RELEVEMENTS DU REVÊTEMENT UNIVERSEL

8.1. D'après 7.3, l'homomorphisme $\theta: \mathcal{A}_2(\widehat{R}) \rightarrow \widehat{R}$ est surjectif, de noyau $\xi \mathcal{A}_2(\widehat{R})$. De plus, la multiplication par ξ dans $\mathcal{A}_2(\widehat{R})$ induit un isomorphisme $\widehat{R} \xrightarrow{\sim} \xi \mathcal{A}_2(\widehat{R})$. On peut donc considérer la $W(k)$ -algèbre $\mathcal{A}_2(\widehat{R})$ comme une extension de la $W(k)$ -algèbre $\widehat{R}$ par le module libre $\xi \widehat{R}$ (cette notation est choisie pour rappeler que l'image de la base canonique de $\xi \widehat{R}$ dans $\mathcal{A}_2(\widehat{R})$ est ξ); et de même pour $\mathcal{A}_2(\mathcal{O}_C)$.

On note $\xi^{-1} \mathcal{O}_C$ le $\mathcal{O}_C$ -module inverse de $\xi \mathcal{O}_C$. Pour tout $\mathcal{O}_C$ -module M , on désigne les $\mathcal{O}_C$ -modules $M \otimes_{\mathcal{O}_C} (\xi \mathcal{O}_C)$ et $M \otimes_{\mathcal{O}_C} (\xi^{-1} \mathcal{O}_C)$ encore par ξM et $\xi^{-1} M$, respectivement. Bien que ces modules soient canoniquement isomorphes à M , il est utile pour la suite de ne pas les identifier. Ces conventions de notations n'induisent aucune ambiguïté puisque $\xi \mathcal{O}_C \otimes_{\mathcal{O}_C} \widehat{R}$ s'identifie à l'idéal $\xi \mathcal{A}_2(\widehat{R})$.

Nous considérerons dans la suite de cet article des $\widehat{R}_1$ -modules de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1} \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K} \otimes_R \widehat{R}_1$ (resp. des $\widehat{R}$ -modules de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1} \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K} \otimes_R \widehat{R}$) (cf. 2.16). Nous dirons abusivement qu'ils sont à coefficients dans $\xi^{-1} \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}$.

8.2. Conservons les notations de (7.13). Posons $\mathcal{A}_2(\bar{S}) = \text{Spec}(\mathcal{A}_2(\mathcal{O}_C))$ et $\mathcal{A}_2(\bar{X}) = \text{Spec}(\mathcal{A}_2(\widehat{\mathcal{R}}))$ que l'on munit des structures logarithmiques $\mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\bar{S})}$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\bar{X})}$ images inverses de $\mathcal{P}_S$ et $\mathcal{P}$ respectivement (cf. 7.15 et 7.16). On a alors un diagramme commutatif de morphismes de schémas logarithmiques

$$(8.2.1) \quad \begin{array}{ccc} (\bar{X}, \mathcal{M}_{\bar{X}}) & \xrightarrow{i} & (\mathcal{A}_2(\bar{X}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\bar{X})}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\bar{S}, \mathcal{M}_{\bar{S}}) & \xrightarrow{i_S} & (\mathcal{A}_2(\bar{S}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\bar{S})}) \end{array}$$

où l'on a aussi noté i et i_S les immersions fermées exactes qui factorisent i et i_S respectivement (7.16.3). L'action de Γ sur $(\text{Spec}(W(\mathcal{R})), \mathcal{P})$ induit une action sur $(\mathcal{A}_2(\bar{X}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\bar{X})})$. De même, l'action de G_K sur $(\text{Spec}(W(\mathcal{R}_S)), \mathcal{P}_S)$ induit une action sur $(\mathcal{A}_2(\bar{S}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\bar{S})})$. Tous les morphismes du diagramme (8.2.1) sont équivariants.

Remarque 8.3. Dans [40, 43], Tsuji travaille avec la structure logarithmique $\mathcal{Q}$ sur $\text{Spec}(W(\mathcal{R}))$ en faisant l'hypothèse de 7.17. Il montre par ailleurs que quitte à remplacer X par un recouvrement par des ouverts affines, on peut supposer cette hypothèse remplie ([40] 1.3.3). D'après 7.18, sous la même hypothèse, les structures logarithmiques sur $\mathcal{A}_2(\bar{X})$ images inverses de $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{P}$ coïncident. Toutefois, nous aurons besoin de considérer des situations où l'hypothèse n'est pas nécessairement satisfaite (12.25). C'est la raison pour laquelle nous avons préféré travailler avec $\mathcal{P}$.

8.4. Une $(\mathcal{A}_2(\bar{S}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\bar{S})})$ -déformation lisse de $(X, \mathcal{M}_X) \times_{(S, \mathcal{M}_S)} (\bar{S}, \mathcal{M}_{\bar{S}})$ est la donnée d'un morphisme lisse de schémas logarithmiques fins $(\tilde{X}, \mathcal{M}_{\tilde{X}}) \rightarrow (\mathcal{A}_2(\bar{S}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\bar{S})})$ et d'un $(\bar{S}, \mathcal{M}_{\bar{S}})$ -isomorphisme

$$(8.4.1) \quad (X, \mathcal{M}_X) \times_{(S, \mathcal{M}_S)} (\bar{S}, \mathcal{M}_{\bar{S}}) \xrightarrow{\sim} (\tilde{X}, \mathcal{M}_{\tilde{X}}) \times_{(\mathcal{A}_2(\bar{S}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\bar{S})})} (\bar{S}, \mathcal{M}_{\bar{S}}).$$

D'après ([27], 3.14), comme $f: (X, \mathcal{M}_X) \rightarrow (S, \mathcal{M}_S)$ est lisse et saturé et X affine, une telle déformation existe et est unique à isomorphisme près. Son groupe d'automorphismes est isomorphe à

$$(8.4.2) \quad \text{Hom}_{R \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_C}(\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_C, \xi R \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_C).$$

On rappelle que l'on a posé $\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 = \Omega_{(R, P)/(\mathcal{O}_K, \mathbb{N})}^1$ (5.16.3).

Dans la suite de cette section, nous fixons une telle déformation $(\tilde{X}, \mathcal{M}_{\tilde{X}})$.

8.5. Soit U un ouvert de $\bar{X}$. On note $\tilde{U}$ l'ouvert de $\mathcal{A}_2(\bar{X})$ défini par U . On désigne par $\mathcal{L}_{(\tilde{X}, \mathcal{M}_{\tilde{X}})}(U)$ l'ensemble des flèches pointillées qui complètent le diagramme

$$(8.5.1) \quad \begin{array}{ccc} (U, \mathcal{M}_{\bar{X}}|_U) & \longrightarrow & (\tilde{U}, \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\bar{X})}|\tilde{U}) \\ \downarrow & & \downarrow \text{ (pointillée) } \\ (X, \mathcal{M}_X) \times_{(S, \mathcal{M}_S)} (\bar{S}, \mathcal{M}_{\bar{S}}) & \longrightarrow & (\tilde{X}, \mathcal{M}_{\tilde{X}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\bar{S}, \mathcal{M}_{\bar{S}}) & \longrightarrow & (\mathcal{A}_2(\bar{S}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\bar{S})}) \end{array}$$

de façon à le laisser commutatif. Le foncteur $U \mapsto \mathcal{L}_{(\tilde{X}, \mathcal{M}_{\tilde{X}})}(U)$ est un faisceau pour la topologie de Zariski de $\overline{X}$. D'après ([27] 3.9; cf. 3.18), $\mathcal{L}_{(\tilde{X}, \mathcal{M}_{\tilde{X}})}$ est un toreur sous le $\widehat{R}$ -module

$$(8.5.2) \quad T = \mathrm{Hom}_{\widehat{R}}(\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}, \xi \widehat{R}).$$

Il est donc représentable par un $\overline{X}$ -schéma affine

$$(8.5.3) \quad \mathbf{L}_{(\tilde{X}, \mathcal{M}_{\tilde{X}})} = \mathrm{Spec}(\mathcal{D}_{(\tilde{X}, \mathcal{M}_{\tilde{X}})}).$$

Pour alléger les notations, on omettra $\mathcal{M}_{\tilde{X}}$ de l'indice dans $\mathcal{L}_{(\tilde{X}, \mathcal{M}_{\tilde{X}})}$, $\mathbf{L}_{(\tilde{X}, \mathcal{M}_{\tilde{X}})}$ et $\mathcal{D}_{(\tilde{X}, \mathcal{M}_{\tilde{X}})}$.

Le $\widehat{R}$ -dual de T est canoniquement isomorphe à $\xi^{-1} \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}$. On désigne par $\mathbf{T}$ le $\overline{X}$ -schéma en groupes

$$(8.5.4) \quad \mathbf{T} = \mathrm{Spec}(\mathcal{C}),$$

où $\mathcal{C}$ est la $\widehat{R}$ -algèbre graduée

$$(8.5.5) \quad \mathcal{C} = \oplus_{n \geq 0} \mathcal{C}_n = \mathrm{Sym}_{\widehat{R}}(\xi^{-1} \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}).$$

On a une action naturelle

$$(8.5.6) \quad \mathbf{T} \times_{\overline{X}} \mathbf{L}_{\tilde{X}} \rightarrow \mathbf{L}_{\tilde{X}}.$$

Le groupe Δ agit à gauche sur $\mathbf{T}$ et $\mathbf{L}_{\tilde{X}}$ de façons compatibles avec son action naturelle sur $\overline{X}$. L'action sur $\mathbf{T}$ est induite par l'action triviale sur $\xi^{-1} \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ et l'action sur $\mathbf{L}_{\tilde{X}}$ est définie de la façon suivante. Soient $g \in \Delta$, U un ouvert de $\overline{X}$, $\psi \in \mathbf{L}_{\tilde{X}}(U)$,

$$\phi: (\tilde{U}, \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\overline{X})}|_{\tilde{U}}) \rightarrow (\tilde{X}, \mathcal{M}_{\tilde{X}})$$

le morphisme correspondant à ψ . Comme i est Δ -équivariant et que Δ agit trivialement sur $(\overline{S}, \mathcal{M}_{\overline{S}})$, le morphisme composé

$$(8.5.7) \quad (g(\tilde{U}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\overline{X})}|_{g(\tilde{U})}) \xrightarrow{g^{-1}} (\tilde{U}, \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\overline{X})}|_{\tilde{U}}) \xrightarrow{\phi} (\tilde{X}, \mathcal{M}_{\tilde{X}})$$

prolonge le morphisme canonique $(g(U), \mathcal{M}_{\tilde{X}}|_{g(U)}) \rightarrow (\tilde{X}, \mathcal{M}_{\tilde{X}})$. On lui fait correspondre alors la section $g \circ \psi \circ g^{-1} \in \mathbf{L}_{\tilde{X}}(g(U))$.

Le morphisme (8.5.6) est Δ -équivariant.

8.6. L'accouplement $T \otimes_{\widehat{R}} (\xi^{-1} \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}) \rightarrow \widehat{R}$ s'étend en un accouplement $T \otimes_{\widehat{R}} \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, où les éléments de T agissent comme des $\widehat{R}$ -dérivations de $\mathcal{C}$. On définit ainsi un morphisme

$$(8.6.1) \quad T \rightarrow \Gamma(\mathbf{T}, \mathbb{T}_{\mathbf{T}/\overline{X}}), \quad u \mapsto D_u,$$

où $\mathbb{T}_{\mathbf{T}/\overline{X}}$ est le fibré tangent de $\mathbf{T}$ sur $\overline{X}$. Celui-ci identifie T au module des champs de vecteurs de $\mathbf{T}$ sur $\overline{X}$ invariants par translation. Il induit aussi un isomorphisme

$$(8.6.2) \quad T \otimes_{\widehat{R}} \mathcal{O}_T \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}_{\mathbf{T}/\overline{X}}.$$

Notons $\Pi = \oplus_{n \geq 0} \Pi_n$ l'algèbre à puissances divisées de T . On a un accouplement canonique

$$(8.6.3) \quad \Pi_n \otimes_{\widehat{R}} \mathcal{C}_{n+m} \rightarrow \mathcal{C}_m,$$

qui est parfait si $m = 0$ ([4] A.10). Soient $u \in T = \mathbf{T}(\overline{X})$, $\tau_u: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ la translation par u . Alors D_u appartient à l'idéal à puissances divisées de Π , et on peut définir $\exp(D_u)$ comme un opérateur différentiel d'ordre infini de $\mathcal{C}$. Pour tout $x \in \mathcal{C}$, on a la formule de Taylor

$$(8.6.4) \quad \tau_u^*(x) = \exp(D_u)(x).$$

8.7. Comme l'action de D_u ($u \in T$) sur $\mathcal{C}$ est invariante par translation, l'action de Π sur $\mathcal{C}$ induit une action sur $\mathcal{D}_{\tilde{X}}$. Pour tout $n \geq 0$, on désigne par $N_n(\mathcal{D}_{\tilde{X}})$ le sous- $\widehat{R}$ -module de $\mathcal{D}_{\tilde{X}}$ formé des éléments annulés par $\oplus_{j>n} \Pi_j$. On obtient ainsi une filtration croissante de $\mathcal{D}_{\tilde{X}}$ telle que $N_0(\mathcal{D}_{\tilde{X}}) = \widehat{R}$ et $N_m(\mathcal{D}_{\tilde{X}})N_n(\mathcal{D}_{\tilde{X}}) \subset N_{m+n}(\mathcal{D}_{\tilde{X}})$ pour tous $m, n \geq 0$. On a un isomorphisme canonique de $\widehat{R}$ -algèbres graduées

$$(8.7.1) \quad \mathrm{Gr}_{\bullet}^N(\mathcal{D}_{\tilde{X}}) \simeq \mathcal{C}.$$

L'action de Δ sur $\mathcal{D}_{\tilde{X}}$ préserve la filtration N , et l'isomorphisme (8.7.1) est Δ -équivariant. Posons $\mathcal{F}_{\tilde{X}} = N_1(\mathcal{D}_{\tilde{X}})$, de sorte que l'on a une suite exacte canonique de $\widehat{R}$ -représentations de Δ

$$(8.7.2) \quad 0 \rightarrow \widehat{R} \rightarrow \mathcal{F}_{\tilde{X}} \rightarrow \xi^{-1}\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R} \rightarrow 0.$$

8.8. Soit $(\tilde{X}', \mathcal{M}_{\tilde{X}'})$ une autre $(\mathcal{A}_2(\overline{S}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\overline{S})})$ -déformation lisse de $(X, \mathcal{M}_X) \times_{(S, \mathcal{M}_S)} (\overline{S}, \mathcal{M}_{\overline{S}})$. Alors on a un isomorphisme de $(\mathcal{A}_2(\overline{S}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\overline{S})})$ -déformations

$$(8.8.1) \quad u: (\tilde{X}, \mathcal{M}_{\tilde{X}}) \xrightarrow{\sim} (\tilde{X}', \mathcal{M}_{\tilde{X}'}).$$

Le morphisme $\mathcal{L}_{\tilde{X}} \rightarrow \mathcal{L}_{\tilde{X}'}$, $\psi \mapsto \psi \circ u$ définit un $\widehat{R}$ -isomorphisme Δ -équivariant

$$(8.8.2) \quad v: \mathcal{D}_{\tilde{X}'} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{\tilde{X}}.$$

Celui-ci induit un isomorphisme $\widehat{R}$ -linéaire et Δ -équivariant

$$(8.8.3) \quad \mathcal{F}_{\tilde{X}'} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{\tilde{X}},$$

qui s'insère dans un diagramme commutatif

$$(8.8.4) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \widehat{R} & \longrightarrow & \mathcal{F}_{\tilde{X}'} & \longrightarrow & \xi^{-1}\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \widehat{R} & \longrightarrow & \mathcal{F}_{\tilde{X}} & \longrightarrow & \xi^{-1}\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R} \longrightarrow 0 \end{array}$$

8.9. L'isomorphisme (8.6.2) induit par dualité un isomorphisme

$$(8.9.1) \quad \Omega_{\mathcal{C}/\widehat{R}}^1 \xrightarrow{\sim} \xi^{-1}\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \mathcal{C}.$$

Notons

$$(8.9.2) \quad d_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \xi^{-1}\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \mathcal{C}$$

la $\widehat{R}$ -dérivation universelle de $\mathcal{C}$. Le morphisme (8.6.1) est défini explicitement de la façon suivante : pour $u \in T$, si on note $u': \xi^{-1}\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R} \rightarrow \widehat{R}$ le morphisme $\widehat{R}$ -linéaire déduit de u , alors D_u est la $\widehat{R}$ -dérivation composée

$$(8.9.3) \quad \mathcal{C} \xrightarrow{d_{\mathcal{C}}} \xi^{-1}\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \mathcal{C} \xrightarrow{u' \otimes \mathrm{id}} \mathcal{C}.$$

On peut alors redémontrer directement que l'opérateur différentiel

$$(8.9.4) \quad \exp(D_u) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

est bien défini et que c'est un isomorphisme de $\widehat{R}$ -algèbres (8.6.4). En effet, D_u envoie $\mathcal{C}_n$ sur $\mathcal{C}_{n-1}$; il est donc nilpotent sur $N_n(\mathcal{C})$ pour tout $n \geq 0$. Donc $\exp(D_u)$ est bien défini comme automorphisme de la $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -algèbre $\mathcal{C}[\frac{1}{p}]$. D'autre part, pour tout $x \in \mathcal{C}_1$, on a

$$(8.9.5) \quad \exp(D_u)(x) = x + u'(x).$$

On en déduit que $\exp(D_u)(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$ et par suite que $\exp(D_u)(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ (puisque $D_{-u} = -D_u$).

8.10. Il résulte de (8.9.1) qu'on a un isomorphisme canonique

$$(8.10.1) \quad \Omega^1_{\mathcal{D}_{\bar{X}}/\widehat{R}} \xrightarrow{\sim} \xi^{-1} \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \mathcal{D}_{\bar{X}}.$$

Notons

$$(8.10.2) \quad d_{\mathcal{D}_{\bar{X}}} : \mathcal{D}_{\bar{X}} \rightarrow \xi^{-1} \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \mathcal{D}_{\bar{X}},$$

la $\widehat{R}$ -dérivation universelle de $\mathcal{D}_{\bar{X}}$. Soient $\psi \in \mathcal{L}_{\bar{X}}(\bar{X})$,

$$(8.10.3) \quad \tau_{\bar{X},\psi}^* : \mathbf{L}_{\bar{X}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{T}$$

l'isomorphisme défini par $\phi \mapsto \phi - \psi$, $\tau_{\bar{X},\psi}^* : \mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{\bar{X}}$ le $\bar{X}$ -isomorphisme induit. On vérifie immédiatement que le diagramme

$$(8.10.4) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\tau_{\bar{X},\psi}^*} & \mathcal{D}_{\bar{X}} \\ d_{\mathcal{C}} \downarrow & & \downarrow d_{\mathcal{D}_{\bar{X}}} \\ \xi^{-1} \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \mathcal{C} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \tau_{\bar{X},\psi}^*} & \xi^{-1} \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \mathcal{D}_{\bar{X}} \end{array}$$

est commutatif.

8.11. Pour tous $\psi, \psi' \in \mathbf{L}_{\bar{X}}(\bar{X})$, la différence $\psi - \psi'$ définit une section $\sigma_{\bar{X},\psi,\psi'} \in T$ (8.5.2), où de façon équivalente, un morphisme $\widehat{R}$ -linéaire

$$(8.11.1) \quad \sigma'_{\bar{X},\psi,\psi'} : \xi^{-1} \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R} \rightarrow \widehat{R}.$$

La section $\psi \in \mathbf{L}_{\bar{X}}(\bar{X})$ définit un scindage $v_{\bar{X},\psi} : \mathcal{F}_{\bar{X}} \rightarrow \widehat{R}$ de la suite exacte (8.7.2). Le morphisme $\text{id}_{\mathcal{F}_{\bar{X}}} - v_{\bar{X},\psi}$ induit un morphisme $\widehat{R}$ -linéaire

$$(8.11.2) \quad u_{\bar{X},\psi} : \xi^{-1} \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R} \rightarrow \mathcal{F}_{\bar{X}},$$

qui n'est autre que la restriction de $\tau_{\bar{X},\psi}^*$ à $\mathcal{C}_1$, où $\tau_{\bar{X},\psi}$ est l'isomorphisme défini dans (8.10.3). On a donc

$$(8.11.3) \quad \sigma'_{\bar{X},\psi,\psi'} = u_{\bar{X},\psi'} - u_{\bar{X},\psi}.$$

8.12. Pour tous $g \in \Delta$ et $\psi \in \mathbf{L}_{\tilde{X}}(\overline{X})$, posons

$$(8.12.1) \quad {}^g\psi = g \circ \psi \circ g^{-1} \in \mathbf{L}_{\tilde{X}}(\overline{X}),$$

où g^{-1} agit sur $\overline{X}$ et g sur $\mathbf{L}_{\tilde{X}}$ (cf. (8.5.7) pour une description équivalente de cette section en terme du faisceau $\mathcal{L}_{\tilde{X}}$). On définit ainsi une action à gauche de Δ sur $\mathbf{L}_{\tilde{X}}(\overline{X})$. On a

$$(8.12.2) \quad u_{\tilde{X},g\psi} = g \circ u_{\tilde{X},\psi} \circ g^{-1}.$$

On rappelle que l'on passe de l'action de Δ sur $\mathbf{L}_{\tilde{X}}$ à celle sur $\mathcal{F}_{\tilde{X}}$ par $g^* \leftrightarrow g^{-1}$ (et de même pour l'action sur $\overline{X}$). Par suite, pour tout $x \in \xi^{-1}\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}_1$, l'application $g \mapsto \sigma'_{\tilde{X},\psi,g\psi}(x)$ est un cocycle de Δ à valeurs dans $\widehat{R}$ (8.11.3). L'application ainsi définie

$$(8.12.3) \quad \xi^{-1}\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}_1 \rightarrow H^1(\Delta, \widehat{R})$$

est clairement induite par le bord de la suite exacte longue de cohomologie obtenue en appliquant le foncteur $\Gamma(\Delta, -)$ à la suite exacte (8.7.2).

On désigne par $D_{\tilde{X},\psi,g\psi}$ l'image de $\sigma_{\tilde{X},\psi,g\psi}$ par le morphisme (8.6.1) et par

$$(8.12.4) \quad \varphi_{\tilde{X},\psi}(g) = \exp(D_{\tilde{X},\psi,g\psi}) \circ g$$

le composé du $\widehat{R}$ -automorphisme $\exp(D_{\tilde{X},\psi,g\psi})$ de $\mathcal{C}$ défini dans (8.9.4) et de l'action naturelle de g sur $\mathcal{C}$ (8.5). Pour tous $g, g' \in \Delta$, on a

$$(8.12.5) \quad \varphi_{\tilde{X},\psi}(g'g) = \varphi_{\tilde{X},\psi}(g') \circ \varphi_{\tilde{X},\psi}(g).$$

En effet, comme les deux membres de l'égalité sont des automorphismes de $\mathcal{C}$ et qu'ils coïncident sur $\widehat{R}$, il suffit de montrer qu'ils sont égaux sur les éléments de $\xi^{-1}\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \subset \mathcal{C}_1$. Cela résulte du fait que pour tout $x \in \xi^{-1}\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$, on a

$$(8.12.6) \quad \varphi_{\tilde{X},\psi}(g)(x) = x + \sigma'_{\tilde{X},\psi,g\psi}(x),$$

$$(8.12.7) \quad \sigma'_{\tilde{X},\psi,g'g\psi}(x) = \sigma'_{\tilde{X},\psi,g'\psi}(x) + g' \circ \sigma'_{\tilde{X},\psi,g\psi}(x).$$

L'homomorphisme

$$(8.12.8) \quad \varphi_{\tilde{X},\psi} : \Delta \rightarrow \text{Aut}_{\widehat{R}_1}(\mathcal{C})$$

ainsi défini fait de $\mathcal{C}$ une $\widehat{R}$ -représentation de Δ . La proposition suivante donne une définition équivalente de cette action.

Lemme 8.13. Soient $\psi \in \mathcal{L}_{\tilde{R}}(\overline{X})$,

$$(8.13.1) \quad \tau_{\tilde{X},\psi} : \mathbf{L}_{\tilde{X}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{T}$$

l'isomorphisme défini par $\psi' \mapsto \psi' - \psi$. On munit $\mathbf{L}_{\tilde{X}}$ de l'action naturelle de Δ (8.5) et $\mathbf{T}$ de l'action induite par $\varphi_{\tilde{X},\psi}$ (8.12.8). Alors $\tau_{\tilde{X},\psi}$ est Δ -équivalent.

L'isomorphisme (8.13.1) est défini par un isomorphisme de $\widehat{R}$ -algèbres

$$(8.13.2) \quad \tau_{\tilde{X},\psi}^* : \mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{\tilde{X}}.$$

Comme $\varphi_{\tilde{X},\psi}$ étend la représentation naturelle de Δ sur $\widehat{R}$, il suffit de montrer que pour tout $g \in \Delta$ et tout $x \in \xi^{-1}\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \subset \mathcal{C}_1$, on a

$$(8.13.3) \quad \tau_{\tilde{X},\psi}^*(\varphi_{\tilde{X},\psi}(g)(x)) = g(\tau_{\tilde{X},\psi}^*(x)).$$

Mais d'après 8.11 et (8.12.2), on a

$$\begin{aligned}
 (8.13.4) \quad \tau_{\tilde{X},\psi}^*(\varphi_{\tilde{X},\psi}(g)(x)) &= \tau_{\tilde{X},\psi}^*(x + \sigma'_{\tilde{X},\psi,g\psi}(x)) \\
 &= u_{\tilde{X},\psi}(x) + \sigma'_{\tilde{X},\psi,g\psi}(x) = u_{\tilde{X},g\psi}(x) \\
 &= g(u_{\tilde{X},\psi}(x)) = g(\tau_{\tilde{X},\psi}^*(x)).
 \end{aligned}$$

Lemme 8.14. *Pour tous $\psi \in \mathcal{L}_{\tilde{X}}(\overline{X})$ et $g \in \Delta$, le diagramme*

$$(8.14.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\varphi_{\tilde{X},\psi}(g)} & \mathcal{C} \\ d_{\mathcal{C}} \downarrow & & \downarrow d_{\mathcal{C}} \\ \xi^{-1}\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \mathcal{C} & \xrightarrow{\text{id} \otimes \varphi_{\tilde{X},\psi}(g)} & \xi^{-1}\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \mathcal{C} \end{array}$$

est commutatif.

Cela résulte de 8.13 et du fait que le diagramme analogue pour $\mathcal{D}_{\tilde{X}}$ est commutatif.

Définition 8.15. On dit qu'un élément ψ de $\mathcal{L}_{\tilde{X}}(\overline{X})$ est *optimal* si pour tout $g \in \Delta$, le morphisme $\sigma_{\tilde{R},\psi,g\psi}$ (8.11) se factorise en

$$(8.15.1) \quad \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R} \rightarrow \widehat{R}(1) \xrightarrow{\sim} p^{\frac{1}{p-1}} \xi \widehat{R} \rightarrow \xi \widehat{R},$$

où la deuxième flèche est l'isomorphisme (7.7.1) la dernière flèche est l'injection canonique.

8.16. On désigne par $\mathfrak{C}$ la $\widehat{R}$ -algèbre graduée

$$(8.16.1) \quad \mathfrak{C} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{C}_n = \text{Sym}_{\widehat{R}}(\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}(-1)).$$

L'isomorphisme canonique (7.7.1)

$$(8.16.2) \quad \xi^{-1}\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R} \xrightarrow{\sim} p^{\frac{1}{p-1}} \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}(-1)$$

induit un $\widehat{R}$ -homomorphisme

$$(8.16.3) \quad j: \mathcal{C} \rightarrow \mathfrak{C}$$

tel que $j \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ soit un isomorphisme.

Pour tout $\psi \in \mathcal{L}_{\tilde{X}}(\overline{X})$, on note encore $\varphi_{\tilde{X},\psi}$ l'action de Δ sur $\mathfrak{C}[\frac{1}{p}]$ déduite de son action sur $\mathcal{C}$ définie dans (8.12.8) via $j \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$. Pour que l'action $\varphi_{\tilde{X},\psi}$ de Δ sur $\mathfrak{C}[\frac{1}{p}]$ préserve $\mathfrak{C}$, il faut et il suffit que ψ soit optimal. En effet, notons

$$(8.16.4) \quad \varsigma_{\tilde{X},\psi,g\psi}: \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}(-1) \rightarrow p^{-\frac{1}{p-1}} \widehat{R}$$

le morphisme $\widehat{R}$ -linéaire déduit de $\sigma_{\tilde{R},\psi,g\psi}$ et de l'isomorphisme (7.7.1). Alors pour tous $g \in \Delta$ et $x \in \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1(-1) \subset \mathfrak{C}_1$, on a

$$(8.16.5) \quad \varphi_{\tilde{X},\psi}(x) = x + \varsigma_{\tilde{X},\psi,g\psi}(x).$$

Par suite, pour que $\varphi_{\tilde{X},\psi}$ préserve $\mathfrak{C}$, il faut et il suffit que $\varsigma_{\tilde{X},\psi,g\psi}$ se factorise à travers $\widehat{R} \subset p^{-\frac{1}{p-1}} \widehat{R}$ pour tout $g \in \Delta$, ce qui est équivalent au fait que ψ soit optimal.

8.17. D'après 4.2(C₅), il existe essentiellement un unique morphisme étale

$$(8.17.1) \quad (\tilde{X}_0, \mathcal{M}_{\tilde{X}_0}) \rightarrow (\mathcal{A}_2(\bar{S}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\bar{S})}) \times_{B[\mathbb{N}]} B[P]$$

qui s'insère dans un diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$(8.17.2) \quad \begin{array}{ccccc} (X, \mathcal{M}_X) \times_{(S, \mathcal{M}_S)} (\bar{S}, \mathcal{M}_{\bar{S}}) & \longrightarrow & (\bar{S}, \mathcal{M}_{\bar{S}}) \times_{B[\mathbb{N}]} B[P] & \longrightarrow & (\bar{S}, \mathcal{M}_{\bar{S}}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (\tilde{X}_0, \mathcal{M}_{\tilde{X}_0}) & \longrightarrow & (\mathcal{A}_2(\bar{S}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\bar{S})}) \times_{B[\mathbb{N}]} B[P] & \longrightarrow & (\mathcal{A}_2(\bar{S}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\bar{S})}) \\ & & \downarrow & & \downarrow a \\ & & B[P] & \longrightarrow & B[\mathbb{N}] \end{array}$$

où le morphisme a est défini par la carte $\mathbb{N} \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_2(\bar{S}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\bar{S})}), 1 \mapsto \tilde{\pi}$ (7.16.1). On dit que $(\tilde{X}_0, \mathcal{M}_{\tilde{X}_0})$ est la $(\mathcal{A}_2(\bar{S}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\bar{S})})$ -déformation lisse de $(X, \mathcal{M}_X) \times_{(S, \mathcal{M}_S)} (\bar{S}, \mathcal{M}_{\bar{S}})$ définie par la carte (P, γ) .

Le diagramme

$$(8.17.3) \quad \begin{array}{ccccc} (\bar{X}, \mathcal{M}_{\bar{X}}) & \xrightarrow{i} & (\mathcal{A}_2(\bar{X}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\bar{X})}) & \xrightarrow{b} & B[P] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (\bar{S}, \mathcal{M}_{\bar{S}}) & \xrightarrow{i_S} & (\mathcal{A}_2(\bar{S}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\bar{S})}) & \xrightarrow{a} & B[\mathbb{N}] \end{array}$$

où le morphisme b est défini par la carte $P \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}_2(\bar{X}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\bar{X})}), t \mapsto \tilde{t}$ est commutatif (7.15.2). Il est clair que le diagramme (sans la flèche pointillée)

$$(8.17.4) \quad \begin{array}{ccccc} (\bar{X}, \mathcal{M}_{\bar{X}}) & \longrightarrow & (X, \mathcal{M}_X) \times_{(S, \mathcal{M}_S)} (\bar{S}, \mathcal{M}_{\bar{S}}) & \longrightarrow & (\tilde{X}_0, \mathcal{M}_{\tilde{X}_0}) \\ \downarrow & & \searrow \psi_0 & & \downarrow \\ (\mathcal{A}_2(\bar{X}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\bar{X})}) & \xrightarrow{\phi_0} & (\mathcal{A}_2(\bar{S}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\bar{S})}) \times_{B[\mathbb{N}]} B[P] & & \end{array}$$

où ϕ_0 est défini par (8.17.3) est commutatif. On peut le compléter par une unique flèche pointillée

$$(8.17.5) \quad \psi_0 \in \mathcal{L}_{\tilde{X}_0}(\bar{X})$$

de façon à le laisser commutatif. On dit que ψ_0 est la section de $\mathcal{L}_{\tilde{X}_0}(\bar{X})$ définie par la carte (P, γ) .

Proposition 8.18. *Conservons les notations de (8.17). Pour tous $t \in P^{\text{gp}}$ et $g \in \Delta$, on a*

$$(8.18.1) \quad \sigma_{\tilde{X}_0, \psi_0, g} (d \log(t)) = -\log([\chi_t(g)]),$$

où $\sigma_{\tilde{X}_0, \psi_0, g} = \psi_0 - g\psi_0 \in T$ (8.11), $d \log(t)$ est l'image canonique de t dans $\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ (5.17.5) et $\log([\chi_t])$ désigne l'homomorphisme composé

$$(8.18.2) \quad \Delta \longrightarrow \Delta_\infty \xrightarrow{\chi_t} \mathbb{Z}_p(1) \xrightarrow{\log(\cdot)} p^{\frac{1}{p-1}} \hat{\xi} \hat{R} \longrightarrow \hat{\xi} \hat{R},$$

où la première et la dernière flèches sont les morphismes canoniques, χ_t est l'homomorphisme (5.18.5) et la troisième flèche est induite par l'isomorphisme (7.7.1). En particulier, ψ_0 est optimal (8.15).

Comme les deux membres de l'équation (8.18.1) sont des homomorphismes de P^{gp} dans $\xi \widehat{R}$, on peut se borner au cas où $t \in P$. Les morphismes ϕ_0 et $\phi_0 \circ g^{-1}$, où ϕ_0 est le morphisme défini dans (8.17.4) et g^{-1} agit sur $(\mathcal{A}_2(\overline{X}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\overline{X})})$, prolongent le même morphisme

$$(\overline{X}, \mathcal{M}_{\overline{X}}) \rightarrow (\mathcal{A}_2(\overline{S}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\overline{S})}) \times_{B[\mathbb{N}]} B[P].$$

D'après les définitions et la condition 4.2(C₅), la différence $\phi_0 - \phi_0 \circ g^{-1}$ correspond au morphisme $\sigma_{\tilde{X}_0, \psi_0, g \psi_0} \in T$. D'autre part, on a $g(\tilde{t}) = [\chi_t(g)] \cdot \tilde{t}$ dans $\Gamma(\mathcal{A}_2(\overline{X}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\overline{X})})$ (7.15.6). La première proposition s'ensuit compte tenu de 3.18 et (7.6.1). La seconde proposition est une conséquence immédiate de la première.

8.19. Soient $t_1, \dots, t_d \in P^{\text{gp}}$ tels que leurs images dans $(P^{\text{gp}}/\mathbb{Z}\lambda) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ forment une $\mathbb{Z}_p$ -base, de sorte que $(d \log(t_i))_{1 \leq i \leq d}$ forment une R -base de $\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ (5.17.5). Pour tout $1 \leq i \leq d$, posons $y_i = \xi^{-1} d \log(t_i) \in \xi^{-1} \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \subset \mathcal{C}$ et notons χ_i l'homomorphisme composé

$$(8.19.1) \quad \Delta \longrightarrow \Delta_{\infty} \xrightarrow{\chi_{t_i}} \mathbb{Z}_p(1) \xrightarrow{\log(\lfloor \cdot \rfloor)} p^{\frac{1}{p-1}} \xi \mathcal{O}_C,$$

où la première flèche est le morphisme canonique, χ_{t_i} est l'homomorphisme (5.18.5) et la troisième flèche est induite par l'isomorphisme (7.7.1). Il résulte alors de (8.18.1) et (8.9.3) que l'action $\varphi_{\tilde{X}_0, \psi_0}$ de Δ sur $\mathcal{C}$ définie dans (8.12.8) est donnée pour tout $g \in \Delta$ par

$$(8.19.2) \quad \varphi_{\tilde{X}_0, \psi_0}(g) = \exp\left(-\sum_{i=1}^d \xi^{-1} \frac{\partial}{\partial y_i} \otimes \chi_i(g)\right) \circ g.$$

On désigne par $\mathfrak{S}$ la sous- $\widehat{R}_1$ -algèbre de $\mathcal{C}$ définie par

$$(8.19.3) \quad \mathfrak{S} = \text{Sym}_{\widehat{R}_1}(\xi^{-1} \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}_1).$$

Il résulte de (8.19.2) que l'action $\varphi_{\tilde{X}_0, \psi_0}$ de Δ sur $\mathcal{C}$ préserve $\mathfrak{S}$, et que l'action induite sur $\mathfrak{S}$ se factorise à travers $\Delta_{p^{\infty}}$.

Théorème 8.20. *Conservons les notations de (8.17) et notons $(P^{\text{gp}}/\mathbb{Z}\lambda)_{\text{lib}}$ le quotient de $P^{\text{gp}}/\mathbb{Z}\lambda$ par son sous-module de torsion. Alors la donnée d'un inverse à droite*

$$(8.20.1) \quad w: (P^{\text{gp}}/\mathbb{Z}\lambda)_{\text{lib}} \rightarrow P^{\text{gp}}$$

du morphisme canonique $P^{\text{gp}} \rightarrow (P^{\text{gp}}/\mathbb{Z}\lambda)_{\text{lib}}$ détermine uniquement un morphisme $\widehat{R}$ -linéaire et Δ -équivariant

$$(8.20.2) \quad \beta_w: p^{-\frac{1}{p-1}} \mathcal{F}_{\tilde{X}_0} \rightarrow \mathcal{C}$$

qui s'insère dans un diagramme commutatif

$$(8.20.3) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & p^{-\frac{1}{p-1}} \widehat{R} & \longrightarrow & p^{-\frac{1}{p-1}} \mathcal{F}_{\tilde{X}_0} & \longrightarrow & p^{-\frac{1}{p-1}} \xi^{-1} \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \beta_w & & \downarrow -c \\ 0 & \longrightarrow & (\pi\rho)^{-1} \widehat{R} & \longrightarrow & \mathcal{C} & \longrightarrow & \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}(-1) \longrightarrow 0 \end{array}$$

où les lignes proviennent des suites exactes (5.21.2) et (8.7.2) et c est induit par l'isomorphisme (7.7.1).

Comme le sous-groupe de torsion de $P^{\text{gp}}/\mathbb{Z}\lambda$ est d'ordre premier à p , l'isomorphisme (5.12.1) induit un isomorphisme

$$(P^{\text{gp}}/\mathbb{Z}\lambda)_{\text{lib}} \otimes_{\mathbb{Z}} R \xrightarrow{\sim} \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1.$$

Par suite, le composé de w avec l'homomorphisme $P^{\text{gp}} \rightarrow \mathcal{E}(1), t \mapsto d\log(\tilde{t})$ (5.17.3) induit un morphisme $\widehat{R}$ -linéaire que l'on note

$$(8.20.4) \quad \sigma_{\psi_0}: \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R} \rightarrow \mathcal{E}(1).$$

D'après (5.17.4), σ_{ψ_0} est un scindage de la suite exacte (5.21.2) tordue par $\mathbb{Z}_p(1)$. Pour tout $x \in \mathcal{E}(1)$, posons

$$(8.20.5) \quad \langle \psi_0, x \rangle = x - \sigma_{\psi_0}(\nu(x)) \in (\pi\rho)^{-1}\widehat{R}(1),$$

où $\nu: \mathcal{E}(1) \rightarrow \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}$ est le morphisme canonique. On définit une application

$$(8.20.6) \quad \langle \cdot, \cdot \rangle: \mathcal{L}_{\tilde{X}_0}(\overline{X}) \times \mathcal{E}(1) \rightarrow (\pi\rho)^{-1}\widehat{R}(1)$$

de la façon suivante : pour tout $\phi \in T$ (8.5.2), si on note $\bar{\phi}$ le morphisme composé

$$(8.20.7) \quad \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R} \xrightarrow{\phi} \xi\widehat{R} \xrightarrow{\sim} p^{-\frac{1}{p-1}}\widehat{R}(1) \longrightarrow (\pi\rho)^{-1}\widehat{R}(1),$$

où la deuxième flèche est induite par l'isomorphisme (7.7.1) et la troisième flèche est l'injection canonique, on a

$$(8.20.8) \quad \langle \psi_0 + \phi, x \rangle = \langle \psi_0, x \rangle - \bar{\phi}(\nu(x)).$$

Pour tout $\psi \in \mathcal{L}_{\tilde{X}_0}(\overline{X})$, le morphisme $\mathcal{E}(1) \rightarrow (\pi\rho)^{-1}\widehat{R}(1), x \mapsto \langle \psi, x \rangle$ est un scindage de la suite exacte (5.21.2) tordue par $\mathbb{Z}_p(1)$.

Montrons que pour tous $\psi \in \mathcal{L}_{\tilde{X}_0}(\overline{X})$, $x \in \mathcal{E}(1)$ et $g \in \Delta$, on a

$$(8.20.9) \quad g(\langle \psi, x \rangle) = \langle {}^g\psi, g(x) \rangle.$$

Considérons d'abord le cas $\psi = \psi_0$. Il suffit alors de montrer que pour tout $x \in \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}$, on a

$$(8.20.10) \quad \bar{\sigma}_{\tilde{X}_0, \psi_0, {}^g\psi_0}(x) = \sigma_{\psi_0}(x) - g(\sigma_{\psi_0}(g^{-1}x)),$$

où le membre de gauche est défini comme dans (8.20.7) à partir de $\sigma_{\tilde{X}_0, \psi_0, {}^g\psi_0} = \psi_0 - {}^g\psi_0 \in T$ (8.11). Soient $t \in P$, y son image canonique dans $(P^{\text{gp}}/\mathbb{Z}\lambda)_{\text{lib}}$, $z = w(y) \in P^{\text{gp}}$. On a alors

$$\sigma_{\psi_0}(d\log(t)) = d\log(\tilde{z}).$$

D'autre part, en vertu de 8.18, on a

$$\bar{\sigma}_{\tilde{X}_0, \psi_0, {}^g\psi_0}(d\log(t)) = (\chi_t(g))^{-1},$$

où $(\chi_t(g))^{-1} \in \mathbb{Z}_p(1) \subset \widehat{R}(1) \subset (\pi\rho)^{-1}\widehat{R}(1)$. On observera que le caractère $\log([\cdot])$ disparaît de la formule à cause de la définition (8.20.7). Comme l'image de $\chi_t(g)$ par l'injection canonique $(\pi\rho)^{-1}\widehat{R}(1) \rightarrow \mathcal{E}(1)$ est $d\log(\chi_t(g))$ (5.17), il suffit encore de montrer la relation suivante dans $\mathcal{E}(1)$

$$(8.20.11) \quad g(d\log(\tilde{z})) = d\log(\tilde{z}) + \log(\chi_t(g)).$$

On peut évidemment remplacer t par une puissance, et donc supposer $t - z \in \mathbb{Z}\lambda$. Comme Δ fixe $d\log(\tilde{\lambda})$, la relation (8.20.11) résulte de (5.19.1).

Dans le cas général, pour tous $\phi \in T$, $x \in \mathcal{E}(1)$ et $g \in \Delta$, on a

$$\begin{aligned} g(\langle \psi_0 + \phi, x \rangle) &= g(\langle \psi_0, x \rangle) - g \circ \bar{\phi}(\nu(x)) \\ &= \langle {}^g\psi_0, g(x) \rangle - g \circ \bar{\phi} \circ g^{-1}(\nu(g(x))) \\ &= \langle {}^g\psi_0 + g \circ \phi \circ g^{-1}, g(x) \rangle \\ &= \langle {}^g\psi, g(x) \rangle, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de (8.20.9).

Pour tout $x \in \mathcal{E}(1)$, l'application $\psi \mapsto \langle \psi, x \rangle$ est une fonction affine sur $\mathbf{L}_{\tilde{X}_0}$ à valeurs dans $(\pi\rho)^{-1}\widehat{R}(1)$; l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(1) &\rightarrow (\pi\rho)^{-1}\mathcal{F}_{\tilde{X}_0}(1) \\ x &\mapsto (\psi \mapsto \langle \psi, x \rangle) \end{aligned}$$

est un morphisme $\widehat{R}$ -linéaire et Δ -équivariant en vertu de (8.20.9). Le morphisme induit

$$\mathcal{E} \rightarrow (\pi\rho)^{-1}\mathcal{F}_{\tilde{X}_0}$$

s'insère dans un digramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (\pi\rho)^{-1}\widehat{R} & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}(-1) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow i_1 \\ & & & & & & (\pi\rho)^{-1}p^{\frac{1}{p-1}}\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}(-1) \longrightarrow 0 \\ & & & & & & \downarrow -c^{-1} \\ 0 & \longrightarrow & (\pi\rho)^{-1}\widehat{R} & \longrightarrow & (\pi\rho)^{-1}\mathcal{F}_{\tilde{X}_0} & \longrightarrow & (\pi\rho)^{-1}\xi^{-1}\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R} \longrightarrow 0 \end{array}$$

où i_1 est l'injection canonique. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & p^{-\frac{1}{p-1}}\widehat{R} & \longrightarrow & p^{-\frac{1}{p-1}}\mathcal{F}_{\tilde{X}_0} & \longrightarrow & p^{-\frac{1}{p-1}}\xi^{-1}\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow i_3 & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & (\pi\rho)^{-1}\widehat{R} & \longrightarrow & \mathcal{H} & \longrightarrow & p^{-\frac{1}{p-1}}\xi^{-1}\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow i_2 \\ 0 & \longrightarrow & (\pi\rho)^{-1}\widehat{R} & \longrightarrow & (\pi\rho)^{-1}\mathcal{F}_{\tilde{X}_0} & \longrightarrow & (\pi\rho)^{-1}\xi^{-1}\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R} \longrightarrow 0 \end{array}$$

où i_2 et i_3 sont les injections canoniques et $\mathcal{H}$ est l'image inverse de $(\pi\rho)^{-1}\mathcal{F}_{\tilde{R}}$ par i_2 . Comme $i_2 \circ c^{-1} = c^{-1} \circ i_1$, on en déduit un isomorphisme $\alpha: \mathcal{H} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$ qui s'insère dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (\pi\rho)^{-1}\widehat{R} & \longrightarrow & \mathcal{H} & \longrightarrow & p^{-\frac{1}{p-1}}\xi^{-1}\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \alpha & & \downarrow -c \\ 0 & \longrightarrow & (\pi\rho)^{-1}\widehat{R} & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}(-1) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Le morphisme $p^{-\frac{1}{p-1}} \mathcal{F}_{\tilde{R}} \rightarrow \mathcal{E}$ composé de l'injection canonique $p^{-\frac{1}{p-1}} \mathcal{F}_{\tilde{X}_0} \rightarrow \mathcal{H}$ et de α répond alors à la question.

Corollaire 8.21. *Il existe un morphisme $\widehat{R}$ -linéaire et Δ -équivariant*

$$(8.21.1) \quad p^{-\frac{1}{p-1}} \mathcal{F}_{\tilde{X}} \rightarrow \mathcal{E}$$

qui s'insère dans un diagramme commutatif

$$(8.21.2) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & p^{-\frac{1}{p-1}} \widehat{R} & \longrightarrow & p^{-\frac{1}{p-1}} \mathcal{F}_{\tilde{X}} & \longrightarrow & p^{-\frac{1}{p-1}} \xi^{-1} \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow -c \\ 0 & \longrightarrow & (\pi\rho)^{-1} \widehat{R} & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}(-1) \longrightarrow 0 \end{array}$$

où les lignes proviennent des suites exactes (5.21.2) et (8.7.2) et c est induit par l'isomorphisme (7.7.1).

Cela résulte de 8.8 et 8.20.

9. COHOMOLOGIE GALOISIENNE II

Dans cette section, nous reprenons en les généralisant légèrement des résultats de T. Tsuji [43].

9.1. On désigne par $\widehat{\mathcal{C}}$ le séparé complété p -adique de la $\widehat{R}$ -algèbre $\mathcal{C}$ (8.5.5) et par $\mathcal{C}^\dagger$ son complété faible, c'est à dire, la sous- $\widehat{R}$ -algèbre des éléments z de $\widehat{\mathcal{C}}$ qui peuvent s'écrire comme somme d'une série

$$(9.1.1) \quad z = \sum_{j \geq 0} p^j f_j(x_1, \dots, x_n),$$

où $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{C}$, $f_j \in \widehat{R}[X_1, \dots, X_n]$ et il existe une constante c vérifiant $\deg(f_j) \leq c(j+1)$ ([30] déf. 1.1). Il revient au même de dire que z peut s'écrire sous la forme d'une série

$$(9.1.2) \quad z = \sum_{j \geq 0} a_j x_j,$$

telle qu'il existe deux nombres rationnels $\alpha, \beta > 0$ tels que pour tout $j \geq 0$, on ait

$$(9.1.3) \quad x_j \in \text{Sym}_{\widehat{R}}^j(\xi^{-1} \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}), \quad a_j \in \mathcal{O}_C \quad \text{et} \quad v(a_j) \geq \alpha j - \beta.$$

On désigne par

$$(9.1.4) \quad d_{\widehat{\mathcal{C}}}: \widehat{\mathcal{C}} \rightarrow \xi^{-1} \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{\mathcal{C}}$$

la $\widehat{R}$ -dérivation continue universelle de $\widehat{\mathcal{C}}$, i.e., le prolongement de la dérivation $d_{\mathcal{C}}$ (8.9.2) aux complétés (on notera que le R -module $\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ est libre de type fini). Elle induit par restriction à $\mathcal{C}^\dagger$ une $\widehat{R}$ -dérivation

$$(9.1.5) \quad d_{\mathcal{C}^\dagger}: \mathcal{C}^\dagger \rightarrow \xi^{-1} \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \mathcal{C}^\dagger.$$

Il est clair que $d_{\widehat{\mathcal{C}}}$ (resp. $d_{\mathcal{C}^\dagger}$) est un $\widehat{R}$ -champ de Higgs sur $\widehat{\mathcal{C}}$ (resp. $\mathcal{C}^\dagger$) à coefficients dans $\xi^{-1} \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ (cf. 2.16 et 8.1).

Soient $(\tilde{X}_0, \mathcal{M}_{\tilde{X}_0})$ la $(\mathcal{A}_2(\bar{S}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\bar{S})})$ -déformation lisse de $(X, \mathcal{M}_X) \times_{(S, \mathcal{M}_S)} (\bar{S}, \mathcal{M}_{\bar{S}})$ définie par la carte (P, γ) (8.17.1), $\psi_0 \in \mathcal{L}_{\tilde{X}_0}(\bar{X})$ la section définie par la même carte (8.17.5). On note encore φ_0 l'action $\varphi_{\tilde{X}_0, \psi_0}$ de Δ sur $\mathcal{C}$ définie dans (8.12.8). Celle-ci se prolonge en une action sur $\widehat{\mathcal{C}}$ qui préserve $\mathcal{C}^\dagger$; on note $\widehat{\varphi}_0$ et $\varphi_0^\dagger$ les actions de Δ sur $\widehat{\mathcal{C}}$ et $\mathcal{C}^\dagger$, respectivement, ainsi définies. Il résulte de 8.14 que $d_{\widehat{\mathcal{C}}}$ et $d_{\mathcal{C}^\dagger}$ sont Δ -équivariants.

Remarque 9.2. (i) Bien que $\widehat{R}$ ne soit pas noethérien, les énoncés ([30] 1.4 et 1.6) valent encore pour $\mathcal{C}^\dagger$ par les mêmes preuves. Par suite, $p\mathcal{C}^\dagger$ est contenu dans le radical de $\mathcal{C}^\dagger$, et pour tout nombre rationnel $\alpha \geq 0$, le morphisme canonique

$$(9.2.1) \quad \mathcal{C}/p^\alpha \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^\dagger/p^\alpha \mathcal{C}^\dagger$$

est un isomorphisme.

(ii) Les anneaux $\mathcal{C}$, $\widehat{\mathcal{C}}$ et $\mathcal{C}^\dagger$ sont plats sur $\mathcal{O}_C$. En effet, $\mathcal{C}$ étant plat sur $\widehat{R}$, il est plat sur $\mathcal{O}_C$ (4.12). Procédant comme dans la preuve de 4.12, on en déduit que p n'est pas diviseur de zéro dans $\widehat{\mathcal{C}}$, et donc dans $\mathcal{C}^\dagger$. Par suite, $\widehat{\mathcal{C}}$ et $\mathcal{C}^\dagger$ sont plats sur $\mathcal{O}_C$ ([1] 1.9.12).

Proposition 9.3. *Les actions φ_0 , $\widehat{\varphi}_0$ et $\varphi_0^\dagger$ de Δ sur $\mathcal{C}$, $\widehat{\mathcal{C}}$ et $\mathcal{C}^\dagger$, respectivement, sont continues pour les topologies p -adiques.*

Compte tenu de (9.2.1), il suffit de montrer que pour tout entier $n \geq 0$, l'action de Δ sur $\mathcal{C}/p^n \mathcal{C}$ est continue pour la topologie discrète. Reprenons les hypothèses et notations de (8.19). Comme l'action de Δ sur $\widehat{R}/p^n \widehat{R}$ est continue pour la topologie discrète, il suffit de montrer que pour tout $1 \leq i \leq d$, le stabilisateur de la classe de y_i dans $\mathcal{C}/p^n \mathcal{C}$ est ouvert dans Δ . D'après (8.19.2), pour tout $g \in \Delta$, on a

$$(9.3.1) \quad \varphi_0(g)(y_i) = y_i - \xi^{-1} \chi_i(g).$$

Soit ζ un générateur de $\mathbb{Z}_p(1)$. Il existe $a \in \mathbb{Z}_p$ tel que $\chi_i(g) = [\zeta^a] - 1 \in \mathcal{A}_2(\mathcal{O}_C)$. Par linéarité, si $r = v_p(a)$, on a $\log([\zeta^a]) \in p^r \xi \mathcal{O}_C$, et par suite $\varphi_0(g)(y_i) - y_i \in p^r \mathcal{C}$. L'ensemble des $g \in \Delta$ tels que $r \geq n$ étant un sous-groupe ouvert de Δ , on en déduit que le stabilisateur de la classe de y_i dans $\mathcal{C}/p^n \mathcal{C}$ est ouvert dans Δ .

9.4. Pour tout nombre rationnel $c > 0$, on définit la sous- $\widehat{R}$ -algèbre $\mathcal{C}^c$ de $\mathcal{C}$ par

$$(9.4.1) \quad \mathcal{C}^c = \text{Sym}_{\widehat{R}}(p^c \xi^{-1} \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}).$$

On désigne par $\widehat{\mathcal{C}}^c$ le séparé complété p -adique de $\mathcal{C}^c$. On munit $\widehat{\mathcal{C}}^c$ (resp. $\widehat{\mathcal{C}}^c \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$) de la topologie p -adique (2.3). Comme $\widehat{R}$ est $\mathcal{O}_C$ -plat (4.12), l'homomorphisme canonique $\mathcal{C}^c \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ est injectif et son image est contenue dans $\mathcal{C}^\dagger$. Il résulte facilement de la description (9.1.2) que l'homomorphisme canonique

$$(9.4.2) \quad \lim_{\substack{\longrightarrow \\ c \in \mathbb{Q}_{>0}}} \widehat{\mathcal{C}}^c \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathcal{C}^\dagger \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

est un isomorphisme.

Lemme 9.5. *Soit c un nombre rationnel > 0 .*

(i) *La sous- $\widehat{R}$ -algèbre $\mathcal{C}^c$ de $\mathcal{C}$ est stable par l'action φ_0 de Δ sur $\mathcal{C}$, et les actions induites de Δ sur $\mathcal{C}^c$ et $\widehat{\mathcal{C}}^c$ sont continues pour les topologies p -adiques.*

(ii) On a

$$(9.5.1) \quad d_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}^c) \subset \xi^{-1} \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \mathcal{C}^c,$$

$$(9.5.2) \quad d_{\mathcal{C}^\dagger}(\widehat{\mathcal{C}}^c) \subset \xi^{-1} \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{\mathcal{C}}^c.$$

Reprenons pour cette preuve les hypothèses et notations de (8.19).

(i) Pour tous $1 \leq i \leq d$ et $g \in \Delta$, on a

$$(9.5.3) \quad \varphi_0(g)(y_i) = y_i - \xi^{-1} \chi_i(g)$$

et $\xi^{-1} \chi_i(g) \in p^{\frac{1}{p-1}} \mathcal{O}_C$. Par suite, $\mathcal{C}^c$ est stable par $\varphi_0(g)$. Nous avons montré dans la preuve de 9.3 que pour tout entier $n \geq 0$, il existe un sous-groupe ouvert Δ' de Δ tel que pour tout $g \in \Delta'$, $\xi^{-1} \chi_i(g) \in p^n \mathcal{O}_C$. Comme l'action de Δ sur $\bar{R}$ est continue pour la topologie p -adique, on en déduit que l'action de Δ sur $\mathcal{C}^c/p^n \mathcal{C}^c$ est continue pour la topologie discrète. Les actions de Δ sur $\mathcal{C}^c$ et $\widehat{\mathcal{C}}^c$ sont donc continues pour les topologies p -adiques.

(ii) La première relation résulte du fait que pour tous entiers $n_1, \dots, n_d \geq 0$, on a

$$(9.5.4) \quad d_{\mathcal{C}}\left(\prod_{1 \leq i \leq d} y_i^{n_i}\right) = \sum_{j=1}^d n_j \prod_{1 \leq i \leq d} y_i^{n_i - \delta_{ij}} \otimes \xi^{-1} d \log(t_j).$$

La seconde relation se déduit de la première.

9.6. Notons $\mathbb{K}(\mathcal{C}^\dagger, d_{\mathcal{C}^\dagger})$ le complexe de Dolbeault associé au $\widehat{R}$ -module de Higgs $(\mathcal{C}^\dagger, d_{\mathcal{C}^\dagger})$ à coefficients dans $\xi^{-1} \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ (2.16.2) et $\tilde{\mathbb{K}}(\mathcal{C}^\dagger, d_{\mathcal{C}^\dagger})$ le complexe de Dolbeault augmenté

$$(9.6.1) \quad \widehat{R} \rightarrow \mathbb{K}^0(\mathcal{C}^\dagger, d_{\mathcal{C}^\dagger}) \rightarrow \mathbb{K}^1(\mathcal{C}^\dagger, d_{\mathcal{C}^\dagger}) \rightarrow \dots \rightarrow \mathbb{K}^n(\mathcal{C}^\dagger, d_{\mathcal{C}^\dagger}) \rightarrow \dots,$$

où $\widehat{R}$ est placé en degré -1 et la différentielle $\widehat{R} \rightarrow \mathcal{C}^\dagger$ est l'homomorphisme canonique. Il résulte de 9.5(ii) que $d_{\mathcal{C}^\dagger}$ définit un $\widehat{R}$ -champ de Higgs sur $\widehat{\mathcal{C}}^c$ à coefficients dans $\xi^{-1} \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$; on désigne par $\mathbb{K}(\widehat{\mathcal{C}}^c, d_{\mathcal{C}^\dagger})$ le complexe de Dolbeault associé et par $\tilde{\mathbb{K}}(\widehat{\mathcal{C}}^c, d_{\mathcal{C}^\dagger})$ le complexe de Dolbeault augmenté

$$(9.6.2) \quad \widehat{R} \rightarrow \mathbb{K}^0(\widehat{\mathcal{C}}^c, d_{\mathcal{C}^\dagger}) \rightarrow \mathbb{K}^1(\widehat{\mathcal{C}}^c, d_{\mathcal{C}^\dagger}) \rightarrow \dots \rightarrow \mathbb{K}^n(\widehat{\mathcal{C}}^c, d_{\mathcal{C}^\dagger}) \rightarrow \dots$$

défini comme plus haut.

Proposition 9.7. *Pour tous nombres rationnels $c' > c > 0$, le morphisme canonique*

$$(9.7.1) \quad \tilde{\mathbb{K}}^\bullet(\widehat{\mathcal{C}}^{c'}, d_{\mathcal{C}^\dagger}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \rightarrow \tilde{\mathbb{K}}^\bullet(\widehat{\mathcal{C}}^c, d_{\mathcal{C}^\dagger}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

est homotope à 0 par une homotopie continue.

Soient $t_1, \dots, t_d \in P^{\text{gp}}$ tels que leurs images dans $(P^{\text{gp}}/\mathbb{Z}\lambda) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ forment une $\mathbb{Z}_p$ -base, de sorte que $(d \log(t_i))_{1 \leq i \leq d}$ forment une R -base de $\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ (5.17.5). Pour tout $1 \leq i \leq d$, posons $y_i = \xi^{-1} d \log(t_i) \in \xi^{-1} \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \subset \mathcal{C}$. On désigne par

$$(9.7.2) \quad h^{-1}: \widehat{\mathcal{C}}^{c'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \rightarrow \widehat{R} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

le morphisme $\widehat{R}$ -linéaire défini par

$$(9.7.3) \quad h^{-1}\left(\sum_{\underline{n}=(n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d} a_{\underline{n}} \prod_{1 \leq i \leq d} y_i^{n_i}\right) = a_0.$$

Pour tout entier $m \geq 0$, il existe un et un unique morphisme $\widehat{R}$ -linéaire

$$(9.7.4) \quad h^m: \xi^{-m-1} \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^{m+1} \otimes_R \widehat{\mathcal{C}}^{c'} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \rightarrow \xi^{-m} \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^m \otimes_R \widehat{\mathcal{C}}^c \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

tel que pour tout $1 \leq i_1 < \dots < i_{m+1} \leq d$, on ait

$$(9.7.5) \quad h^m \left(\sum_{\underline{n}=(n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d} a_{\underline{n}} \prod_{1 \leq i \leq d} y_i^{n_i} \otimes \xi^{-1} d \log(t_{i_1}) \wedge \dots \wedge \xi^{-1} d \log(t_{i_{m+1}}) \right) \\ = \sum_{\underline{n}=(n_1, \dots, n_d) \in J_{i_1-1}} \frac{a_{\underline{n}}}{n_{i_1} + 1} \prod_{1 \leq i \leq d} y_i^{n_i + \delta_{i i_1}} \otimes \xi^{-1} d \log(t_{i_2}) \wedge \dots \wedge \xi^{-1} d \log(t_{i_{m+1}}),$$

où J_{i_1-1} est le sous-ensemble de $\mathbb{N}^d$ formé des éléments $\underline{n} = (n_1, \dots, n_d)$ tels que $n_1 = \dots = n_{i_1-1} = 0$. Il existe un entier $\alpha > 0$ tel que pour tout entier $m \geq 0$, on ait

$$(9.7.6) \quad h^m(p^\alpha \xi^{-m-1} \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^{m+1} \otimes_R \widehat{\mathcal{C}}^{c'}) \subset \xi^{-m} \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^m \otimes_R \widehat{\mathcal{C}}^c.$$

Les morphismes $(h^m)_{m \geq -1}$ sont donc continues pour les topologies p -adiques. On vérifie aussitôt qu'ils définissent une homotopie reliant 0 au morphisme (9.7.1).

Corollaire 9.8. *Le complexe $\mathbb{K}^\bullet(\mathcal{C}^\dagger, d_{\mathcal{C}^\dagger}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ est une résolution de $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$.*

Cela résulte de 9.7 et (9.4.2).

Théorème 9.9 (Tsuji, [43] 6.2). *On a*

$$(9.9.1) \quad \lim_{c \in \mathbb{Q}_{>0}} H_{\text{cont}}^i(\Delta, \widehat{\mathcal{C}}^c \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p) = \begin{cases} \widehat{R}_1 \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{si } i > 0. \end{cases}$$

La preuve de ce théorème sera donnée dans 9.16. Nous l'avons repoussée vers la fin de cette section car elle nécessite l'introduction de notations assez lourdes. On notera que cet énoncé est légèrement plus général que celui de Tsuji ([43] 6.2).

Corollaire 9.10. *On a $(\mathcal{C}^\dagger)^\Delta = \widehat{R}_1$.*

En effet, on a $(\mathcal{C}^\dagger)^\Delta = \mathcal{C}^\dagger \cap \widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ en vertu de (9.4.2) et 9.9. D'autre part, on a $\mathcal{C}^\dagger \cap \widehat{R}[\frac{1}{p}] = \widehat{R}$ et $(\widehat{R})^\Delta = \widehat{R}_1$ d'après 6.25(i). On en déduit que $(\mathcal{C}^\dagger)^\Delta = \widehat{R}_1$.

9.11. On désigne par $\widehat{\mathfrak{S}}$ le séparé complété p -adique de la $\widehat{R}_1$ -algèbre

$$(9.11.1) \quad \mathfrak{S} = \text{Sym}_{\widehat{R}_1}(\xi^{-1} \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}_1)$$

et par $\mathfrak{S}^\dagger$ son complété faible (cf. 9.1). On notera que $\widehat{\mathfrak{S}}$ est $\widehat{R}_1$ -plat en vertu de ([1] 1.12.4). L'homomorphisme canonique $\mathfrak{S} \rightarrow \mathcal{C}$ induit par prolongement aux complétés un homomorphisme $\widehat{\mathfrak{S}} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ et par suite un homomorphisme $\mathfrak{S}^\dagger \rightarrow \mathcal{C}^\dagger$. On désigne par

$$(9.11.2) \quad d_{\widehat{\mathfrak{S}}}: \widehat{\mathfrak{S}} \rightarrow \xi^{-1} \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{\mathfrak{S}}$$

la $\widehat{R}_1$ -dérivation continue universelle de $\widehat{\mathfrak{S}}$. Elle induit par restriction à $\mathfrak{S}^\dagger$ une $\widehat{R}_1$ -dérivation

$$(9.11.3) \quad d_{\mathfrak{S}^\dagger}: \mathfrak{S}^\dagger \rightarrow \xi^{-1} \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \mathfrak{S}^\dagger.$$

Les dérivations $d_{\widehat{\mathfrak{S}}}$ et $d_{\widehat{\mathcal{C}}}$ (resp. $d_{\mathfrak{S}^\dagger}$ et $d_{\mathcal{C}^\dagger}$) sont clairement compatibles.

On rappelle (8.19) que l'action $\varphi_0 = \varphi_{\widetilde{X}_0, \psi_0}$ de Δ sur $\mathcal{C}$ préserve $\mathfrak{S}$ et que l'action induite sur $\mathfrak{S}$ se factorise à travers Δ_{p^∞} ; on la note aussi φ_0 . Cette dernière se prolonge en une action de Δ_{p^∞} sur $\widehat{\mathfrak{S}}$ qui préserve $\mathfrak{S}^\dagger$; on note aussi $\widehat{\varphi}_0$ et $\varphi_0^\dagger$ les actions de Δ_{p^∞} sur $\widehat{\mathfrak{S}}$ et $\mathfrak{S}^\dagger$, respectivement,

ainsi définies. Les actions φ_0 , $\widehat{\varphi}_0$ et $\varphi_0^\dagger$ de Δ_{p^∞} sur $\mathfrak{S}$, $\widehat{\mathfrak{S}}$ et $\mathfrak{S}^\dagger$, respectivement, sont continues pour les topologies p -adiques. Ceci se démontre en calquant la preuve de 9.3, ou s'en déduit en observant que pour tout entier $n \geq 0$, l'homomorphisme canonique $\mathfrak{S}/p^n \mathfrak{S} \rightarrow \mathcal{C}/p^n \mathcal{C}$ est injectif (cf. la preuve de 4.12). Les homomorphismes canoniques $\widehat{\mathfrak{S}} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ et $\mathfrak{S}^\dagger \rightarrow \mathcal{C}^\dagger$ sont injectifs et Δ -équivariants. Il résulte de 8.14 que $d_{\widehat{\mathfrak{S}}}$ et $d_{\mathfrak{S}^\dagger}$ sont Δ_{p^∞} -équivariants.

9.12. Posons

$$(9.12.1) \quad \mathcal{C}_\infty = \mathfrak{S} \otimes_{\widehat{R_1}} \widehat{R_\infty},$$

$$(9.12.2) \quad \mathcal{C}_{p^\infty} = \mathfrak{S} \otimes_{\widehat{R_1}} \widehat{R_{p^\infty}}.$$

On désigne par $\widehat{\mathcal{C}}_\infty$ (resp. $\widehat{\mathcal{C}}_{p^\infty}$) le séparé complété p -adique de $\mathcal{C}_\infty$ (resp. $\mathcal{C}_{p^\infty}$) et par $\mathcal{C}_\infty^\dagger$ (resp. $\mathcal{C}_{p^\infty}^\dagger$) son complété faible (cf. 9.1). L'action φ_0 de Δ_{p^∞} sur $\mathfrak{S}$ induit une action de Δ_{p^∞} sur $\mathcal{C}_{p^\infty}$. Cette dernière se prolonge en une action de Δ_{p^∞} sur $\widehat{\mathcal{C}}_{p^\infty}$ qui préserve $\mathcal{C}_{p^\infty}^\dagger$. Les actions de Δ_{p^∞} sur $\mathcal{C}_{p^\infty}$, $\widehat{\mathcal{C}}_{p^\infty}$ et $\mathcal{C}_{p^\infty}^\dagger$ sont continues pour les topologies p -adiques. De même, φ_0 induit des actions de Δ_∞ sur $\mathcal{C}_\infty$, $\widehat{\mathcal{C}}_\infty$ et $\mathcal{C}_\infty^\dagger$ qui sont continues pour les topologies p -adiques.

Pour tout nombre rationnel $c > 0$, on définit la sous- $\widehat{R_\infty}$ -algèbre $\mathcal{C}_\infty^c$ de $\mathcal{C}_\infty$ par

$$(9.12.3) \quad \mathcal{C}_\infty^c = \text{Sym}_{\widehat{R_\infty}}(p^c \xi^{-1} \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R_\infty}).$$

On désigne par $\widehat{\mathcal{C}}_\infty^c$ le séparé complété p -adique de $\mathcal{C}_\infty^c$. On munit $\widehat{\mathcal{C}}_\infty^c$ (resp. $\widehat{\mathcal{C}}_\infty^c \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$) de la topologie p -adique (2.3). Comme $\widehat{R_\infty}$ est $\mathcal{O}_C$ -plat (4.12), l'homomorphisme canonique $\widehat{\mathcal{C}}_\infty^c \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}_\infty$ est injectif et son image est contenue dans $\mathcal{C}_\infty^\dagger$. De plus, l'homomorphisme canonique

$$(9.12.4) \quad \lim_{c \in \mathbb{Q}_{>0}} \widehat{\mathcal{C}}_\infty^c \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathcal{C}_\infty^\dagger \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

est un isomorphisme. La preuve de 9.5(i) montre que $\mathcal{C}_\infty^c$ est stable par l'action de Δ_∞ sur $\mathcal{C}_\infty$, et l'action induite de Δ_∞ sur $\mathcal{C}_\infty^c$ et $\widehat{\mathcal{C}}_\infty^c$ sont continues pour les topologies p -adiques.

De même, on définit la sous- $\widehat{R_{p^\infty}}$ -algèbre $\mathcal{C}_{p^\infty}^c$ de $\mathcal{C}_{p^\infty}$ par

$$(9.12.5) \quad \mathcal{C}_{p^\infty}^c = \text{Sym}_{\widehat{R_{p^\infty}}}(p^c \xi^{-1} \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R_{p^\infty}}),$$

On désigne par $\widehat{\mathcal{C}}_{p^\infty}^c$ le séparé complété p -adique de $\mathcal{C}_{p^\infty}^c$. On munit $\widehat{\mathcal{C}}_{p^\infty}^c$ (resp. $\widehat{\mathcal{C}}_{p^\infty}^c \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$) de la topologie p -adique (2.3). L'algèbre $\mathcal{C}_{p^\infty}^c$ vérifie des propriétés analogues à celles vérifiées par $\mathcal{C}_\infty^c$. En particulier, $\mathcal{C}_{p^\infty}^c$ est stable par l'action de Δ_{p^∞} sur $\mathcal{C}_{p^\infty}$, et les actions induites de Δ_{p^∞} sur $\mathcal{C}_{p^\infty}^c$ et $\widehat{\mathcal{C}}_{p^\infty}^c$ sont continues pour les topologies p -adiques.

Lemme 9.13. *Pour tout nombre rationnel $c > 0$ et tout entier $i \geq 0$, le morphisme canonique*

$$(9.13.1) \quad H_{\text{cont}}^i(\Delta_{p^\infty}, \widehat{\mathcal{C}}_{p^\infty}^c) \rightarrow H_{\text{cont}}^i(\Delta_\infty, \widehat{\mathcal{C}}_\infty^c)$$

est un isomorphisme, et le morphisme canonique

$$(9.13.2) \quad H_{\text{cont}}^i(\Delta_\infty, \widehat{\mathcal{C}}_\infty^c) \rightarrow H_{\text{cont}}^i(\Delta, \widehat{\mathcal{C}}^c)$$

est un presque-isomorphisme.

Soit r un entier ≥ 0 . L'homomorphisme canonique

$$(9.13.3) \quad \mathcal{C}_{p^\infty}^c / p^r \mathcal{C}_{p^\infty}^c \rightarrow (\mathcal{C}_\infty^c / p^r \mathcal{C}_\infty^c)^{\Sigma_0}$$

est un isomorphisme en vertu de 6.13. Il en résulte par (4.10.1) que le morphisme canonique

$$(9.13.4) \quad H^i(\Delta_{p^\infty}, \mathcal{C}_{p^\infty}^c / p^r \mathcal{C}_{p^\infty}^c) \rightarrow H^i(\Delta_\infty, \mathcal{C}_\infty^c / p^r \mathcal{C}_\infty^c)$$

est un isomorphisme. On en déduit par (2.13.4) et (2.13.5) que le morphisme (9.13.1) est un isomorphisme.

D'autre part, l'homomorphisme canonique

$$(9.13.5) \quad \mathcal{C}_\infty^c / p^r \mathcal{C}_\infty^c \rightarrow (\mathcal{C}^c / p^r \mathcal{C}^c)^\Sigma$$

est un presque-isomorphisme en vertu de 4.20. On en déduit par 4.18 que le morphisme canonique

$$(9.13.6) \quad \psi_r : H^i(\Delta_\infty, \mathcal{C}_\infty^c / p^r \mathcal{C}_\infty^c) \rightarrow H^i(\Delta, \mathcal{C}^c / p^r \mathcal{C}^c)$$

est un presque-isomorphisme. Notons A_r (resp. C_r) le noyau (resp. conoyau) de ψ_r . Alors les $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ -modules

$$\varprojlim_{r \geq 0} A_r, \quad \varprojlim_{r \geq 0} C_r, \quad R^1 \varprojlim_{r \geq 0} A_r, \quad R^1 \varprojlim_{r \geq 0} C_r$$

sont presque nuls en vertu de ([20] 2.4.2(ii)). Par suite, les morphismes

$$\varprojlim_{r \geq 0} \psi_r \quad \text{et} \quad R^1 \varprojlim_{r \geq 0} \psi_r$$

sont des presque-isomorphismes. On en déduit par (2.13.4) et (2.13.5) que le morphisme (9.13.2) est un isomorphisme.

9.14. Soient $t_1, \dots, t_d \in P^{\text{gp}}$ tels que leurs images dans $(P^{\text{gp}}/\mathbb{Z}\lambda) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ forment une $\mathbb{Z}_p$ -base, $(\chi_{t_i})_{1 \leq i \leq d}$ leurs images dans $\text{Hom}(\Delta_{p^\infty}, \mathbb{Z}_p(1))$ (5.18.5), ζ une $\mathbb{Z}_p$ -base de $\mathbb{Z}_p(1)$. Les $(\chi_{t_i})_{1 \leq i \leq d}$ forment une $\mathbb{Z}_p$ -base de $\text{Hom}(\Delta_{p^\infty}, \mathbb{Z}_p(1))$ (5.18.8). Il existe donc une unique $\mathbb{Z}_p$ -base $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq d}$ de Δ_{p^∞} telle que $\chi_{t_i}(\gamma_j) = \delta_{ij}\zeta$ pour tous $1 \leq i, j \leq d$ (4.9). Pour tout entier $0 \leq i \leq d$, on désigne ${}_i\Xi_{p^\infty}$ le sous-groupe de (6.10.8)

$$(9.14.1) \quad \Xi_{p^\infty} = \text{Hom}(\Delta_{p^\infty}, \mu_{p^\infty}(\mathcal{O}_{\overline{K}}))$$

formé des homomorphismes $\nu : \Delta_{p^\infty} \rightarrow \mu_{p^\infty}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ tels que $\nu(\gamma_j) = 1$ pour tout $1 \leq j \leq i$.

Les $(d \log(t_i))_{1 \leq i \leq d}$ forment une R -base de $\widehat{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ (5.17.5). Pour tout $1 \leq i \leq d$ et tout $\underline{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d$, posons $y_i = \xi^{-1} d \log(t_i) \in \xi^{-1} \widehat{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \subset \mathcal{C}_{p^\infty}$ (9.11.1), $|\underline{n}| = \sum_{i=1}^d n_i$ et $\underline{y}^{\underline{n}} = \prod_{i=1}^d y_i^{n_i} \in \mathcal{C}_{p^\infty}$. On observera que R_{p^∞} est séparé pour la topologie p -adique et s'identifie donc à un sous-anneau de $\widehat{R}_{p^\infty}$; cela résulte par exemple de (6.12.9). Pour tout nombre rationnel $c > 0$, tout entier $0 \leq i \leq d$ et tout $\nu \in {}_i\Xi_{p^\infty}$, on désigne par ${}_i\mathcal{C}_{p^\infty}^c(\nu)$ et ${}_i\mathcal{C}_{p^\infty}^c$ les sous- R_1 -modules de $\mathcal{C}_{p^\infty}^c$ définis par

$$(9.14.2) \quad {}_i\mathcal{C}_{p^\infty}^c(\nu) = \bigoplus_{\underline{n} \in J_i} p^{c|\underline{n}|} R_{p^\infty}^{(\nu)} \underline{y}^{\underline{n}},$$

$$(9.14.3) \quad {}_i\mathcal{C}_{p^\infty}^c = \bigoplus_{\nu' \in {}_i\Xi_{p^\infty}} {}_i\mathcal{C}_{p^\infty}^c(\nu'),$$

où $R_{p^\infty}^{(\nu)}$ est défini dans 6.12, J_i est le sous-ensemble de $\mathbb{N}^d$ formé des éléments $\underline{n} = (n_1, \dots, n_d)$ tels que $n_1 = \dots = n_i = 0$. On note $\widehat{{}_i\mathcal{C}_{p^\infty}^c}$ le séparé complété p -adique de ${}_i\mathcal{C}_{p^\infty}^c$. La topologie p -adique de R_{p^∞} étant induite par la topologie p -adique de $\widehat{R}_{p^\infty}$, on déduit facilement de (6.12.1) que la topologie p -adique de ${}_i\mathcal{C}_{p^\infty}^c$ est induite par la topologie p -adique de $\mathcal{C}_{p^\infty}^c$. Par suite, $\widehat{{}_i\mathcal{C}_{p^\infty}^c}$ est l'adhérence de ${}_i\mathcal{C}_{p^\infty}^c$ dans $\widehat{\mathcal{C}_{p^\infty}^c}$. Il résulte de 6.12 et (9.5.3) que pour tout $1 \leq j \leq d$ et tout $\nu \in {}_i\Xi_{p^\infty}$, γ_j préserve ${}_i\mathcal{C}_{p^\infty}^c(\nu)$ et donc aussi ${}_i\mathcal{C}_{p^\infty}^c$. Si $1 \leq j \leq i$, γ_j fixe ${}_i\mathcal{C}_{p^\infty}^c(\nu)$ et ${}_i\mathcal{C}_{p^\infty}^c$.

Proposition 9.15. *Les hypothèses étant celles de (9.14), soient, de plus, i un entier tel que $1 \leq i \leq d$, c un nombre rationnel > 0 . Alors :*

- (i) *On a ${}_0\widehat{\mathcal{C}}_{p^\infty}^c = \widehat{\mathcal{C}}_{p^\infty}^c$ et ${}_d\widehat{\mathcal{C}}_{p^\infty}^c = \widehat{R}_1$.*
- (ii) *Le noyau du morphisme*

$$(9.15.1) \quad \gamma_i - \text{id}: {}_{(i-1)}\widehat{\mathcal{C}}_{p^\infty}^c \rightarrow {}_{(i-1)}\widehat{\mathcal{C}}_{p^\infty}^c$$

est égal à ${}_i\widehat{\mathcal{C}}_{p^\infty}^c$.

- (iii) *Pour tout nombre rationnel $c' > c$, il existe un entier $\alpha \geq 0$ tel que l'on ait*

$$(9.15.2) \quad p^\alpha \cdot {}_{(i-1)}\widehat{\mathcal{C}}_{p^\infty}^{c'} \subset (\gamma_i - \text{id})({}_{(i-1)}\widehat{\mathcal{C}}_{p^\infty}^c).$$

- (i) Comme $R_{p^\infty}^{(1)} = R_1$ (6.12.2), on a ${}_d\widehat{\mathcal{C}}_{p^\infty}^c = \widehat{R}_1$. D'autre part, on a

$$(9.15.3) \quad {}_0\mathcal{C}_{p^\infty}^c = \text{Sym}_{R_{p^\infty}}(p^c \xi^{-1} \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R R_{p^\infty}),$$

ce qui implique que ${}_0\widehat{\mathcal{C}}_{p^\infty}^c = \widehat{\mathcal{C}}_{p^\infty}^c$.

- (ii) Pour tout $n \geq 0$, on a clairement

$$(9.15.4) \quad p^n \cdot {}_i\mathcal{C}_{p^\infty}^c = {}_i\mathcal{C}_{p^\infty}^c \cap (p^n \cdot {}_{(i-1)}\mathcal{C}_{p^\infty}^c).$$

Il suffit donc de montrer que la suite

$$(9.15.5) \quad 0 \longrightarrow {}_i\mathcal{C}_{p^\infty}^c \longrightarrow {}_{(i-1)}\mathcal{C}_{p^\infty}^c \xrightarrow{\gamma_i - 1} {}_{(i-1)}\mathcal{C}_{p^\infty}^c$$

est exacte. Soient $\nu \in {}_{(i-1)}\Xi_{p^\infty}$ et

$$(9.15.6) \quad z = \sum_{\underline{n} \in J_{i-1}} p^{c|\underline{n}|} a_{\underline{n}} y_{\underline{n}} \in {}_{(i-1)}\mathcal{C}_{p^\infty}^c(\nu).$$

On a alors (9.5.3)

$$(9.15.7) \quad (\gamma_i - 1)(z) = \sum_{\underline{n} \in J_{i-1}} p^{c|\underline{n}|} b_{\underline{n}} y_{\underline{n}} \in {}_{(i-1)}\mathcal{C}_{p^\infty}^c(\nu),$$

où pour tout $\underline{n} = (n_1, \dots, n_d) \in J_{i-1}$,

$$(9.15.8) \quad b_{\underline{n}} = (\nu(\gamma_i) - 1)a_{\underline{n}} + \sum_{\underline{m}=(m_1, \dots, m_d) \in J_{i-1}(\underline{n})} p^{c(m_i - n_i)} \binom{m_i}{n_i} \nu(\gamma_i) a_{\underline{m}} w^{m_i - n_i},$$

$J_{i-1}(\underline{n})$ désigne le sous-ensemble de J_{i-1} formé des éléments $\underline{m} = (m_1, \dots, m_d)$ tels que $m_j = n_j$ pour $j \neq i$ et $m_i > n_i$, et $w = \xi^{-1} \log([\zeta])$ est un élément de valuation $\frac{1}{p-1}$ de $\mathcal{O}_C$ (7.7).

Supposons que $\gamma_i(z) = z$ et $\nu(\gamma_i) \neq 1$. Alors $v(\nu(\gamma_i) - 1) \leq \frac{1}{p-1}$ et pour tout $\underline{n} = (n_1, \dots, n_d) \in J_{i-1}$, on a

$$a_{\underline{n}} = -(\nu(\gamma_i) - 1)^{-1} \sum_{\underline{m}=(m_1, \dots, m_d) \in J_{i-1}(\underline{n})} p^{c(m_i - n_i)} \binom{m_i}{n_i} \nu(\gamma_i) a_{\underline{m}} w^{m_i - n_i}.$$

On en déduit que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ et tout $\underline{n} \in J_{i-1}$, on a $a_{\underline{n}} \in p^{c\alpha} R_{p^\infty}^{(\nu)}$ (on le prouve par récurrence sur α); donc $z = 0$ car $R_{p^\infty}^{(\nu)}$ est séparé pour la topologie p -adique.

Supposons que $\gamma_i(z) = z$ et $\nu(\gamma_i) = 1$. Alors pour tout $\underline{n} = (n_1, \dots, n_d) \in J_{i-1}$, si on pose $\underline{n}' = (n'_1, \dots, n'_d) \in J_{i-1}(\underline{n})$ avec $n'_i = n_i + 1$, on a

$$(n_i + 1)!a_{\underline{n}'} = - \sum_{\underline{m}=(m_1, \dots, m_d) \in J_{i-1}(\underline{n}')} p^{c(m_i - n_i - 1)} m_i! a_{\underline{m}} \frac{w^{m_i - n_i - 1}}{(m_i - n_i)!}.$$

On a $w^{r-1}/r! \in \mathcal{O}_C$ pour tout entier $r \geq 1$. On en déduit que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ et tout $\underline{n} = (n_1, \dots, n_d) \in J_{i-1}$ tel que $n_i \geq 1$, on a $n_i!a_{\underline{n}} \in p^{c\alpha} R_{p^\infty}^{(\nu)}$ (on le prouve par récurrence sur α) ; donc $a_{\underline{n}} = 0$. Par suite $z \in {}_i\mathcal{E}_{p^\infty}^c(\nu)$, ce qui achève la preuve de l'exactitude de la suite (9.15.5).

(iii) Il suffit de montrer que pour tout nombre rationnel $c' > c$, il existe un entier $\alpha \geq 0$ tel que pour tout $\nu \in (i-1)\Xi_{p^\infty}$, on ait

$$(9.15.9) \quad p^\alpha ({}_{(i-1)}\mathcal{E}_{p^\infty}^{c'}(\nu)) \subset (\gamma_i - \text{id})({}_{(i-1)}\widehat{\mathcal{E}}_{p^\infty}^c).$$

En effet, si l'on pose $M = (\gamma_i - \text{id})({}_{(i-1)}\widehat{\mathcal{E}}_{p^\infty}^c)$, on en déduira par complétion p -adique un diagramme commutatif

$$(9.15.10) \quad \begin{array}{ccccc} p^\alpha ({}_{(i-1)}\widehat{\mathcal{E}}_{p^\infty}^{c'}) & \longrightarrow & \widehat{M} & \longrightarrow & {}_{(i-1)}\widehat{\mathcal{E}}_{p^\infty}^c \\ & & \uparrow & \nearrow \gamma_i - 1 & \\ & & {}_{(i-1)}\widehat{\mathcal{E}}_{p^\infty}^c & & \end{array}$$

où la flèche verticale est surjective en vertu ([1] 1.8.5).

Supposons $\nu(\gamma_i) \neq 1$. D'après (9.15.7), on a

$$(9.15.11) \quad (\nu(\gamma_i) - 1)({}_{(i-1)}\mathcal{E}_{p^\infty}^c(\nu)) \subset (\gamma_i - \text{id})({}_{(i-1)}\mathcal{E}_{p^\infty}^c(\nu)) + (\nu(\gamma_i) - 1)p^c({}_{(i-1)}\mathcal{E}_{p^\infty}^c(\nu)).$$

On en déduit que

$$(9.15.12) \quad (\nu(\gamma_i) - 1)({}_{(i-1)}\mathcal{E}_{p^\infty}^c(\nu)) \subset (\gamma_i - \text{id})({}_{(i-1)}\widehat{\mathcal{E}}_{p^\infty}^c).$$

On peut donc prendre $\alpha = 1$ car $v(\nu(\gamma_i) - 1) \leq \frac{1}{p-1}$.

Supposons que $\nu(\gamma_i) = 1$, de sorte que $\nu \in i\Xi_{p^\infty}$. Notons $(R_{p^\infty}^{(\nu)})^\wedge$ et $({}_{(i-1)}\mathcal{E}_{p^\infty}^c(\nu))^\wedge$ les séparés complétés p -adiques de $R_{p^\infty}^{(\nu)}$ et $({}_{(i-1)}\mathcal{E}_{p^\infty}^c(\nu))$, respectivement. On observera que $({}_{(i-1)}\mathcal{E}_{p^\infty}^c(\nu))^\wedge$ s'identifie à un sous- $\widehat{R}_1$ -module de $({}_{(i-1)}\widehat{\mathcal{E}}_{p^\infty}^c)$. Tout élément z de $({}_{(i-1)}\mathcal{E}_{p^\infty}^c(\nu))^\wedge$ peut s'écrire comme somme d'une série

$$(9.15.13) \quad z = \sum_{\underline{n} \in J_{i-1}} p^{c|\underline{n}|} a_{\underline{n}} y_{\underline{n}}$$

où $a_{\underline{n}} \in (R_{p^\infty}^{(\nu)})^\wedge$ et $a_{\underline{n}}$ tend vers 0 quand $|\underline{n}|$ tend vers l'infini. Par suite, $(\gamma_i - \text{id})(z)$ est encore donné par la formule (9.15.7). Il suffit donc de montrer qu'il existe un entier $\alpha \geq 0$ ne dépendant que de $c' - c$ tel que pour tout

$$(9.15.14) \quad \sum_{\underline{n} \in J_{i-1}} p^{c'|\underline{n}|} b_{\underline{n}} y_{\underline{n}} \in ({}_{(i-1)}\mathcal{E}_{p^\infty}^{c'}(\nu)),$$

le système d'équations linéaires définies, pour $\underline{n} = (n_1, \dots, n_d) \in J_{i-1}$, par

$$(9.15.15) \quad p^\alpha p^{(c'-c)|\underline{n}|} n_i! b_{\underline{n}} = \sum_{\underline{m}=(m_1, \dots, m_d) \in J_{i-1}(\underline{n})} p^{c(m_i - n_i)} m_i! a_{\underline{m}} \frac{w^{m_i - n_i}}{(m_i - n_i)!},$$

admette une solution $a_{\underline{m}} \in (R_{p^\infty}^{(\nu)})^\wedge$ pour $\underline{m} \in J_{i-1}$ telle que $a_{\underline{m}}$ tend vers 0 quand $|\underline{m}|$ tend vers l'infini. Pour $\underline{n} = (n_1, \dots, n_d) \in J_{i-1}$, posons

$$(9.15.16) \quad a'_{\underline{n}} = n_i! p^{-\frac{n_i}{p-1}} a_{\underline{n}},$$

$$(9.15.17) \quad b'_{\underline{n}} = p^\alpha p^{(c'-c)|\underline{n}|} n_i! p^{-\frac{n_i}{p-1}} b_{\underline{n}},$$

de sorte que l'équation (9.15.15) devient

$$(9.15.18) \quad b'_{\underline{n}} = p^{c+\frac{1}{p-1}} w \sum_{\underline{m}=(m_1, \dots, m_d) \in J_{i-1}(\underline{n})} p^{(c+\frac{1}{p-1})(m_i-n_i-1)} a'_{\underline{m}} \frac{w^{(m_i-n_i-1)}}{(m_i-n_i)!}.$$

Considérons l'endomorphisme $\widehat{R}_1$ -linéaire Φ de $(\oplus_{\underline{n} \in J_{i-1}} R_{p^\infty}^{(\nu)})^\wedge$ défini, pour une suite $(x_{\underline{n}})_{\underline{n} \in J_{i-1}}$ d'éléments de $(R_{p^\infty}^{(\nu)})^\wedge$ tendant vers 0 quand $|\underline{n}|$ tend vers l'infini, par

$$(9.15.19) \quad \Phi\left(\sum_{\underline{n} \in J_{i-1}} x_{\underline{n}}\right) = \sum_{\underline{n} \in J_{i-1}} z_{\underline{n}},$$

où pour $\underline{n} = (n_1, \dots, n_d) \in J_{i-1}$,

$$(9.15.20) \quad z_{\underline{n}} = \sum_{\underline{m}=(m_1, \dots, m_d) \in \{\underline{n}\} \cup J_{i-1}(\underline{n})} p^{(c+\frac{1}{p-1})(m_i-n_i)} x_{\underline{m}} \frac{w^{(m_i-n_i)}}{(m_i-n_i+1)!}.$$

Comme Φ est congru à l'identité modulo $p^{c+\frac{1}{p-1}}$, il est surjectif en vertu ([1] 1.8.5). Par suite, pour toute suite $b'_{\underline{n}} \in p^{c+\frac{1}{p-1}} w (R_{p^\infty}^{(\nu)})^\wedge$ pour $\underline{n} \in J_{i-1}$ tendant vers 0 quand $|\underline{n}|$ tend vers l'infini, l'équation (9.15.18) admet une solution $a'_{\underline{m}} \in (R_{p^\infty}^{(\nu)})^\wedge$ pour $\underline{m} \in J_{i-1}$ tendant vers 0 quand $|\underline{m}|$ tend vers l'infini. D'autre part, $v(w) = \frac{1}{p-1}$ et il existe un entier $\alpha \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$(9.15.21) \quad (c' - c)n + v(n!) - \frac{n}{p-1} + \alpha \geq c + \frac{2}{p-1}.$$

L'assertion recherchée s'ensuit en prenant pour $b'_{\underline{n}}$ pour $\underline{n} \in J_{i-1}$ les éléments définis par (9.15.17) (qui sont en fait nuls sauf un nombre fini).

9.16. Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 9.9. D'après 9.13, pour tout entier $i \geq 0$ et tout nombre rationnel $c > 0$, le morphisme canonique

$$(9.16.1) \quad H_{\text{cont}}^i(\Delta_{p^\infty}, \widehat{\mathcal{E}}_{p^\infty}^c) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \rightarrow H_{\text{cont}}^i(\Delta, \widehat{\mathcal{E}}^c) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

est un isomorphisme. Comme Δ est compact, le morphisme canonique (2.5)

$$(9.16.2) \quad C_{\text{cont}}^\bullet(\Delta, \widehat{\mathcal{E}}^c) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \rightarrow C_{\text{cont}}^\bullet(\Delta, \widehat{\mathcal{E}}^c \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p)$$

est un isomorphisme. Notons $\psi: \Delta_{p^\infty} \rightarrow \text{Aut}_{\widehat{R}_1}(\widehat{\mathcal{E}}_{p^\infty}^c)$ la représentation de Δ_{p^∞} sur $\widehat{\mathcal{E}}_{p^\infty}^c$ définie dans (9.12), $S_{\widehat{R}_1}(\Delta_{p^\infty})$ l'algèbre symétrique du $\widehat{R}_1$ -module $\Delta_{p^\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \widehat{R}_1$ et $(\widehat{\mathcal{E}}_{p^\infty}^c)^\flat$ le $S_{\widehat{R}_1}(\Delta_{p^\infty})$ -module dont le $\widehat{R}_1$ -module sous-jacent est $\widehat{\mathcal{E}}_{p^\infty}^c$ et tel que pour tout $1 \leq i \leq d$, l'action de γ_i sur $\widehat{\mathcal{E}}_{p^\infty}^c$ soit donnée par l'endomorphisme $\psi(\gamma_i) - \text{id}$ (9.14). En vertu de 6.1, on a un isomorphisme canonique

$$(9.16.3) \quad C_{\text{cont}}^\bullet(\Delta_{p^\infty}, \widehat{\mathcal{E}}_{p^\infty}^c) \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}_{S_{\widehat{R}_1}(\Delta_{p^\infty})}^\bullet((\widehat{\mathcal{E}}_{p^\infty}^c)^\flat)$$

dans $\mathbf{D}^+(\mathrm{Mod}(\widehat{R}_1))$, où le complexe de droite est défini dans (2.15.4). D'autre part, il résulte de 9.15 et (2.15.8) qu'on a

$$(9.16.4) \quad H^i(\mathbb{K}_{S_{\widehat{R}_1}}^\bullet(\Delta_{p^\infty}) (\varinjlim_{c \in \mathbb{Q}_{>0}} (\widehat{\mathcal{C}}_{p^\infty}^c)^\triangleright \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p)) = \begin{cases} \widehat{R}_1 \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{si } i > 0. \end{cases}$$

Le théorème 9.9 s'ensuit.

10. REPRÉSENTATIONS DE DOLBEAULT ENTIÈRES

10.1. On fixe dans la suite de cette section une $(\mathcal{A}_2(\overline{S}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\overline{S})})$ -déformation lisse $(\tilde{X}, \mathcal{M}_{\tilde{X}})$ de $(X, \mathcal{M}_X) \times_{(S, \mathcal{M}_S)} (\overline{S}, \mathcal{M}_{\overline{S}})$ (8.4). On rappelle qu'on lui a associé un $\mathbf{T}$ -torseur $\mathbf{L}_{\tilde{X}} = \mathrm{Spec}(\mathcal{D}_{\tilde{X}})$ sur $\overline{X}$ (8.5.3). On désigne par $\widehat{\mathcal{D}}_{\tilde{X}}$ le séparé complété p -adique de $\mathcal{D}_{\tilde{X}}$ et par $\mathcal{D}_{\tilde{X}}^\dagger$ son complété faible (cf. 9.1). L'action naturelle de Δ sur $\mathcal{D}_{\tilde{X}}$ se prolonge en une action sur $\widehat{\mathcal{D}}_{\tilde{X}}$ qui préserve $\mathcal{D}_{\tilde{X}}^\dagger$. On notera que les remarques 9.2 valent aussi pour $\widehat{\mathcal{D}}_{\tilde{X}}$ et $\mathcal{D}_{\tilde{X}}^\dagger$. On note

$$(10.1.1) \quad d_{\widehat{\mathcal{D}}_{\tilde{X}}} : \widehat{\mathcal{D}}_{\tilde{X}} \rightarrow \xi^{-1} \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{\mathcal{D}}_{\tilde{X}}$$

la $\widehat{R}$ -dérivation continue universelle de $\widehat{\mathcal{D}}_{\tilde{X}}$, i.e., le prolongement de la dérivation $d_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}}$ (8.10.2) aux complétés (on notera que le R -module $\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ est libre de type fini). Cette dernière induit par restriction à $\mathcal{D}_{\tilde{X}}^\dagger$ une dérivation

$$(10.1.2) \quad d_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}^\dagger} : \mathcal{D}_{\tilde{X}}^\dagger \rightarrow \xi^{-1} \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \mathcal{D}_{\tilde{X}}^\dagger.$$

Il est clair que $d_{\widehat{\mathcal{D}}_{\tilde{X}}}$ (resp. $d_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}^\dagger}$) est un $\widehat{R}$ -champ de Higgs sur $\widehat{\mathcal{D}}_{\tilde{X}}$ (resp. $\mathcal{D}_{\tilde{X}}^\dagger$) à coefficients dans $\xi^{-1} \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ (cf. 2.16 et 8.1), et qu'il est Δ -équivariant. On vérifie aussitôt que

$$(10.1.3) \quad \ker(d_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}^\dagger}) = \ker(d_{\widehat{\mathcal{D}}_{\tilde{X}}}) = \widehat{R}.$$

Remarque 10.2. Supposons que $(\tilde{X}, \mathcal{M}_{\tilde{X}})$ soit la déformation $(\tilde{X}_0, \mathcal{M}_{\tilde{X}_0})$ définie par la carte (P, γ) (8.17.1). Alors la section $\psi_0 \in \mathcal{L}_{\tilde{X}_0}(\overline{X})$ définie par la carte (P, γ) (8.17.5) induit un isomorphisme $\widehat{R}$ -linéaire

$$(10.2.1) \quad \mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{\tilde{X}_0}$$

qui est Δ -équivariant lorsque l'on munit $\mathcal{C}$ de la représentation φ_0 (9.1) en vertu de 8.13, et est compatible aux dérivations d'après (8.10.4).

Proposition 10.3. *Le complexe $\mathbb{K}^\bullet(\mathcal{D}_{\tilde{X}}^\dagger, d_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}^\dagger}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ est une résolution de $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ (2.16.2).*

Cela résulte de 8.8, 10.2 et 9.8.

Proposition 10.4. *Les actions de Δ sur $\mathcal{D}_{\tilde{X}}$, $\widehat{\mathcal{D}}_{\tilde{X}}$ et $\mathcal{D}_{\tilde{X}}^\dagger$ sont continues pour les topologies p -adiques, et on a*

$$(10.4.1) \quad (\mathcal{D}_{\tilde{X}}^\dagger)^\Delta = \widehat{R}_1.$$

Cela résulte de 8.8, 10.2, 9.3 et 9.10.

10.5. Pour toute $\widehat{R}$ -représentation M de Δ , on note $H_{\widetilde{X}}(M)$ le $\widehat{R}_1$ -module défini par

$$(10.5.1) \quad H_{\widetilde{X}}(M) = (M \otimes_{\widehat{R}} \mathcal{D}_{\widetilde{X}}^\dagger)^\Delta.$$

On le munit du $\widehat{R}_1$ -champ de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ induit par $d_{\mathcal{D}_{\widetilde{X}}^\dagger}$ (10.1.2) (cf. 2.16 et 8.1). On définit ainsi un foncteur

$$(10.5.2) \quad H_{\widetilde{X}} : \text{Rep}_{\widehat{R}}(\Delta) \rightarrow \text{MH}_{\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1}(\widehat{R}_1).$$

Remarques 10.6. (i) Il résulte de 8.8 que le foncteur $H_{\widetilde{X}}$ ne dépend pas du choix de la déformation $(\widetilde{X}, \mathcal{M}_{\widetilde{X}})$, à isomorphisme non-canonique près.

(ii) Pour toute $\widehat{R}$ -représentation M de Δ , le morphisme canonique

$$(10.6.1) \quad H_{\widetilde{X}}(M) \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R}_1\left[\frac{1}{p}\right] \rightarrow H_{\widetilde{X}}(M \otimes_{\widehat{R}} \widehat{R}\left[\frac{1}{p}\right])$$

est un isomorphisme.

Définition 10.7. On dit qu'une $\widehat{R}$ -représentation continue M de Δ est *de Dolbeault* si les conditions suivantes sont remplies :

- (i) M est un $\widehat{R}$ -module projectif de type fini, muni de la topologie p -adique ;
- (ii) $H_{\widetilde{X}}(M)$ est un $\widehat{R}_1$ -module projectif de type fini ;
- (iii) le morphisme canonique

$$(10.7.1) \quad H_{\widetilde{X}}(M) \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{D}_{\widetilde{X}}^\dagger \rightarrow M \otimes_{\widehat{R}} \mathcal{D}_{\widetilde{X}}^\dagger$$

est un isomorphisme.

Cette notion ne dépend pas du choix de $(\widetilde{X}, \mathcal{M}_{\widetilde{X}})$ (8.8 et 10.6(i)).

10.8. Pour tout $\widehat{R}_1$ -module de Higgs (N, θ) à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$, on note $V_{\widetilde{X}}(N)$ le $\widehat{R}$ -module défini par

$$(10.8.1) \quad V_{\widetilde{X}}(N) = (N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{D}_{\widetilde{X}}^\dagger)^{\theta_{\text{tot}}=0},$$

où $\theta_{\text{tot}} = \theta \otimes \text{id} + \text{id} \otimes d_{\mathcal{D}_{\widetilde{X}}^\dagger}$ est le $\widehat{R}_1$ -champ de Higgs total sur $N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{D}_{\widetilde{X}}^\dagger$ (2.16.9). On le munit de l'action $\widehat{R}$ -semi-linéaire de Δ induite par son action naturelle sur $\mathcal{D}_{\widetilde{X}}^\dagger$. On définit ainsi un foncteur

$$(10.8.2) \quad V_{\widetilde{X}} : \text{MH}_{\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1}(\widehat{R}_1) \rightarrow \text{Rep}_{\widehat{R}}(\Delta).$$

Remarques 10.9. (i) Il résulte de 8.8 que le foncteur $V_{\widetilde{X}}$ ne dépend pas du choix de la déformation $(\widetilde{X}, \mathcal{M}_{\widetilde{X}})$, à isomorphisme non-canonique près.

(ii) Pour tout $\widehat{R}_1$ -module de Higgs (N, θ) à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$, le morphisme canonique

$$(10.9.1) \quad V_{\widetilde{X}}(N) \otimes_{\widehat{R}} \widehat{R}\left[\frac{1}{p}\right] \rightarrow V_{\widetilde{X}}(N \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R}_1\left[\frac{1}{p}\right])$$

est un isomorphisme.

Définition 10.10. On dit qu'un $\widehat{R}_1$ -module de Higgs (N, θ) à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ est *soluble* si les conditions suivantes sont remplies :

- (i) N est un $\widehat{R}_1$ -module projectif de type fini ;

- (ii) $V_{\widehat{X}}(N)$ est un $\widehat{R}$ -module projectif de type fini ;
- (iii) le morphisme canonique

$$(10.10.1) \quad V_{\widehat{X}}(N) \otimes_{\widehat{R}} \mathcal{D}_{\widehat{X}}^{\dagger} \rightarrow N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{D}_{\widehat{X}}^{\dagger}$$

est un isomorphisme.

Cette notion ne dépend pas du choix de $(\widetilde{X}, \mathcal{M}_{\widetilde{X}})$ (8.8 et 10.9(i)).

Lemme 10.11. *Soit M une $\widehat{R}$ -représentation de Dolbeault de Δ . Alors le $\widehat{R}_1$ -module de Higgs $H_{\widehat{X}}(M)$ est soluble, et on a un $\widehat{R}$ -isomorphisme canonique fonctoriel et Δ -équivariant*

$$(10.11.1) \quad V_{\widehat{X}}(H_{\widehat{X}}(M)) \xrightarrow{\sim} M.$$

Si l'on munit M du champ de Higgs trivial et $H_{\widehat{X}}(M)$ de l'action triviale de Δ , le morphisme canonique

$$(10.11.2) \quad H_{\widehat{X}}(M) \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{D}_{\widehat{X}}^{\dagger} \rightarrow M \otimes_{\widehat{R}} \mathcal{D}_{\widehat{X}}^{\dagger}$$

est un $\mathcal{D}_{\widehat{X}}^{\dagger}$ -isomorphisme Δ -équivariant de $\widehat{R}$ -modules de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$. Comme M est $\widehat{R}$ -plat et que $\ker(d_{\mathcal{D}_{\widehat{X}}^{\dagger}}) = \widehat{R}$, on en déduit un $\widehat{R}$ -isomorphisme Δ -équivariant $V_{\widehat{X}}(H_{\widehat{X}}(M)) \xrightarrow{\sim} M$, ce qui implique que $H_{\widehat{X}}(M)$ est soluble.

Lemme 10.12. *Soit (N, θ) un $\widehat{R}_1$ -module de Higgs soluble à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$. Alors la $\widehat{R}$ -représentation $V_{\widehat{X}}(N)$ de Δ est de Dolbeault, et on a un isomorphisme canonique fonctoriel de $\widehat{R}_1$ -modules de Higgs*

$$(10.12.1) \quad H_{\widehat{X}}(V_{\widehat{X}}(N)) \xrightarrow{\sim} N.$$

Notons $\theta_{\text{tot}} = \theta \otimes \text{id} + \text{id} \otimes d_{\mathcal{D}_{\widehat{X}}^{\dagger}}$ le $\widehat{R}_1$ -champ de Higgs total sur $N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{D}_{\widehat{X}}^{\dagger}$. Comme $\mathcal{D}_{\widehat{X}}^{\dagger}$ est $\mathbb{Z}_p$ -plat et que N est $\widehat{R}_1$ -plat, $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{D}_{\widehat{X}}^{\dagger}$ est $\mathbb{Z}_p$ -plat. Par suite, pour tout $n \geq 0$ et tout $x \in N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{D}_{\widehat{X}}^{\dagger}$ tels que $\theta_{\text{tot}}(p^n x) = 0$, on a $\theta_{\text{tot}}(x) = 0$. On en déduit que

$$(10.12.2) \quad (p^n N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{D}_{\widehat{X}}^{\dagger}) \cap V_{\widehat{X}}(N) = p^n V_{\widehat{X}}(N).$$

Donc la topologie p -adique sur $V_{\widehat{X}}(N)$ est induite par celle de $N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{D}_{\widehat{X}}^{\dagger}$. Il résulte alors de 10.4 que l'action de Δ sur $V_{\widehat{X}}(N)$ est continue pour la topologie p -adique.

D'autre part, si l'on munit N de l'action triviale de Δ et $V_{\widehat{X}}(N)$ du champ de Higgs trivial, le morphisme canonique

$$(10.12.3) \quad V_{\widehat{X}}(N) \otimes_{\widehat{R}} \mathcal{D}_{\widehat{X}}^{\dagger} \rightarrow N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{D}_{\widehat{X}}^{\dagger}$$

est un $\mathcal{D}_{\widehat{X}}^{\dagger}$ -isomorphisme Δ -équivariant de $\widehat{R}$ -modules de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$. Comme N est un facteur direct d'un $\widehat{R}_1$ -module libre de type fini, on a $(N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{D}_{\widehat{X}}^{\dagger})^{\Delta} = N$ (10.4.1). On en déduit alors un isomorphisme de $\widehat{R}_1$ -modules de Higgs $H_{\widehat{X}}(V_{\widehat{X}}(N)) \xrightarrow{\sim} N$, ce qui implique que $V_{\widehat{X}}(N)$ est de Dolbeault.

Proposition 10.13. *Les foncteurs $V_{\widehat{X}}$ et $H_{\widehat{X}}$ induisent des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre, entre la catégorie des $\widehat{R}$ -représentations de Dolbeault de Δ et celle des $\widehat{R}_1$ -modules de Higgs solubles à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$.*

Cela résulte de 10.11 et 10.12.

11. REPRÉSENTATIONS PETITES

Définition 11.1. Soient G un groupe topologique, A une $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ -algèbre complète et séparée pour la topologie p -adique, munie d'une action continue de G (par des homomorphismes de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ -algèbres), α un nombre rationnel > 0 , M une A -représentation continue de G , munie de la topologie p -adique.

- (i) On dit que M est α -quasi-petite si le A -module M est complet et séparé pour la topologie p -adique, et est engendré par un nombre fini d'éléments G -invariants modulo $p^\alpha M$.
- (ii) On dit que M est α -petite si M est un A -module libre de type fini ayant une base sur A formée d'éléments G -invariants modulo $p^\alpha M$.

On dit que M est *quasi-petite* (resp. *petite*) si elle est α' -quasi-petite (resp. α' -petite) pour un nombre rationnel $\alpha' > \frac{2}{p-1}$.

On désigne par $\text{Rep}_A^{\alpha\text{-qpp}}(G)$ (resp. $\text{Rep}_A^{\text{qpp}}(G)$) la sous-catégorie pleine de $\text{Rep}_A^{\text{cont}}(G)$ formée des A -représentations α -quasi-petites (resp. quasi-petites) de G dont le A -module sous-jacent est $\mathbb{Z}_p$ -plat, et par $\text{Rep}_A^{\alpha\text{-p}}(G)$ (resp. $\text{Rep}_A^{\text{p}}(G)$) la sous-catégorie pleine de $\text{Rep}_A^{\text{cont}}(G)$ formée des A -représentations α -petites (resp. petites) de G .

Si l'action de G sur A est triviale, pour qu'une A -représentation M de G soit α -petite (resp. petite), il faut et il suffit qu'elle soit α -quasi-petite (resp. quasi-petite) et que M soit un A -module libre de type fini.

Définition 11.2. Soit β un nombre rationnel > 0 . On dit qu'un $\widehat{R}_1$ -module de Higgs (N, θ) à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ est β -quasi-petit si N est un $\widehat{R}_1$ -module de type fini et si θ est un multiple de p^β dans $\xi^{-1}\text{End}_{\widehat{R}_1}(N) \otimes_R \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ (cf. 2.16.11 et 8.1). On dit que (N, θ) est β -petit s'il est β -quasi-petit et si le $\widehat{R}_1$ -module N est libre de type fini. On dit que (N, θ) est *quasi-petit* (resp. *petit*) s'il est β' -quasi-petit (resp. β' -petit) pour un nombre rationnel $\beta' > \frac{1}{p-1}$.

On désigne par $\text{MH}_{\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1}^{\beta\text{-qpp}}(\widehat{R}_1)$ la sous-catégorie pleine de $\text{MH}_{\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1}(\widehat{R}_1)$ formée des $\widehat{R}_1$ -modules de Higgs β -quasi-petits dont le $\widehat{R}_1$ -module sous-jacent est $\mathbb{Z}_p$ -plat, et par $\text{MH}_{\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1}^{\beta\text{-p}}(\widehat{R}_1)$ la sous-catégorie pleine de $\text{MH}_{\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1}(\widehat{R}_1)$ formée des $\widehat{R}_1$ -modules de Higgs β -petits (cf. 2.16).

11.3. Rappelons que sur C , la fonction logarithme $\log(x)$ converge lorsque $x \in 1 + \mathfrak{m}_C$, et que la fonction exponentielle $\exp(x)$ converge lorsque $v(x) > \frac{1}{p-1}$. Pour tout $x \in C$ tel que $v(x) > \frac{1}{p-1}$, on a

$$\exp(x) \equiv 1 + x \pmod{(x\mathfrak{m}_C)},$$

$$\log(1 + x) \equiv x \pmod{(x\mathfrak{m}_C)},$$

$$\exp(\log(1 + x)) = 1 + x \text{ et } \log(\exp(x)) = x.$$

11.4. Soit M un $\widehat{R}_1$ -module de type fini. Alors M est complet et séparé pour la topologie p -adique ([1] 1.10.2). Supposons de plus que M soit $\mathbb{Z}_p$ -plat. Alors $\text{End}_{\widehat{R}_1}(M)$ est $\mathbb{Z}_p$ -plat et l'homomorphisme canonique $p^\alpha \text{End}_{\widehat{R}_1}(M) \rightarrow \text{Hom}_{\widehat{R}_1}(M, p^\alpha M)$ est un isomorphisme. Soient u un endomorphisme $\widehat{R}_1$ -linéaire de M , α un nombre rationnel > 0 . Si u induit un automorphisme de $M/p^\alpha M$, alors u est un automorphisme de M . En effet, u est surjectif par le lemme de Nakayama. Si $x \in M$ est tel que $u(x) = 0$, alors il existe $y \in M$ tel que $x = p^\alpha y$; comme M est $\mathbb{Z}_p$ -plat, on a $u(y) = 0$; on en déduit que $x \in \cap_{n \geq 0} p^{n\alpha} M = 0$, d'où l'assertion. On peut donc identifier $\text{id} + p^\alpha \text{End}_{\widehat{R}_1}(M)$

à un sous-groupe de $\text{Aut}_{\widehat{R}_1}(M)$. Supposons $\alpha > \frac{1}{p-1}$ et $v = u - \text{id} \in p^\alpha \text{End}_{\widehat{R}_1}(M)$. Comme M est complet et séparé pour la topologie p -adique, pour tout $x \in M$, les séries

$$(11.4.1) \quad \exp(v)(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} v^n(x),$$

$$(11.4.2) \quad \log(u)(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} v^{n+1}(x),$$

convergent dans M , et définissent deux $\widehat{R}_1$ -endomorphismes $\exp(v)$ et $\log(u)$ de M . De plus, on a $\exp(v) \in \text{id} + p^\alpha \text{End}_{\widehat{R}_1}(M)$, $\log(u) \in p^\alpha \text{End}_{\widehat{R}_1}(M)$ et $\exp(\log(u)) = u$.

11.5. Soient α un nombre rationnel $> \frac{1}{p-1}$, $\beta = \alpha - \frac{1}{p-1}$, M une $\widehat{R}_1$ -représentation α -quasi-petite de Δ_∞ dont le $\mathbb{Z}_p$ -module sous-jacent est plat. L'action de Δ_∞ sur M étant $\widehat{R}_1$ -linéaire, elle est définie par un homomorphisme

$$(11.5.1) \quad \varphi: \Delta_\infty \rightarrow \text{Aut}_{\widehat{R}_1}(M)$$

dont l'image est contenue dans le sous-groupe $\text{id} + p^\alpha \text{End}_{\widehat{R}_1}(M)$ de $\text{Aut}_{\widehat{R}_1}(M)$. D'après 11.4, comme Δ_∞ est abélien, on peut définir l'homomorphisme

$$(11.5.2) \quad \log \circ \varphi: \Delta_\infty \rightarrow p^\alpha \text{End}_{\widehat{R}_1}(M).$$

Soit Ψ_M l'isomorphisme composé

$$(11.5.3) \quad \begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Delta_\infty, p^\alpha \text{End}_{\widehat{R}_1}(M)) & \xrightarrow{\sim} & p^\beta \xi^{-1} \text{End}_{\widehat{R}_1}(M) \otimes_{\widehat{R}_1} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Delta_\infty, \widehat{R}_1(1)) \\ & \searrow \Psi_M & \downarrow \text{id} \otimes \tilde{\delta} \\ & & p^\beta \xi^{-1} \text{End}_{\widehat{R}_1}(M) \otimes_R \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \end{array}$$

où $\tilde{\delta}$ est l'isomorphisme (5.18.9), et l'isomorphisme horizontal provient de (4.11.2) et de l'isomorphisme $\mathcal{O}_C(1) \xrightarrow{\sim} p^{\frac{1}{p-1}} \xi \mathcal{O}_C$ (7.7.1). On pose

$$(11.5.4) \quad \theta = \Psi_M(\log \circ \varphi).$$

On peut calculer explicitement θ comme suit. Soient $t_1, \dots, t_d \in P^{\text{gp}}$, $(\chi_{t_i})_{1 \leq i \leq d}$ leurs images dans $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Delta_\infty, \mathbb{Z}_p(1))$ (5.18.5), $(d \log(t_i))_{1 \leq i \leq d}$ leurs images dans $\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ (5.17.5). Supposons que les images des $(t_i)_{1 \leq i \leq d}$ dans $(P^{\text{gp}}/\mathbb{Z}\lambda) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ forment une $\mathbb{Z}_p$ -base. Donc les $(d \log(t_i))_{1 \leq i \leq d}$ forment une R -base de $\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ (5.12.1) et les $(\chi_{t_i})_{1 \leq i \leq d}$ forment une $\mathbb{Z}_p$ -base de $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Delta_\infty, \mathbb{Z}_p(1))$ (5.18.8). Pour tout $1 \leq i \leq d$, notons χ_i l'homomorphisme composé

$$(11.5.5) \quad \Delta_\infty \xrightarrow{\chi_{t_i}} \mathbb{Z}_p(1) \xrightarrow{\log(\text{[]})} p^{\frac{1}{p-1}} \xi \mathcal{O}_C,$$

où la seconde flèche est induite par l'isomorphisme (7.7.1). Compte tenu de (4.11.2), il existe $\theta_i \in p^\beta \text{End}_{\widehat{R}_1}(M)$ ($1 \leq i \leq d$) tels que

$$(11.5.6) \quad \log \circ \varphi = \sum_{i=1}^d \xi^{-1} \theta_i \otimes \chi_i.$$

Comme $\tilde{\delta}(\chi_{t_i}) = d \log(t_i)$ pour tout $1 \leq i \leq d$, on a alors

$$(11.5.7) \quad \theta = \sum_{i=1}^d \xi^{-1} \theta_i \otimes d \log(t_i).$$

Soit ζ une $\mathbb{Z}_p$ -base de $\mathbb{Z}_p(1)$. Il existe des éléments $\gamma_1, \dots, \gamma_d \in \Delta_\infty$ tels que pour tous $1 \leq i, j \leq d$, on ait $\chi_{t_i}(\gamma_j) = \delta_{ij} \zeta$. Alors pour tout $1 \leq i \leq d$, on a

$$(11.5.8) \quad \xi^{-1} \log([\zeta]) \theta_i = \log(\varphi(\gamma_i)).$$

On rappelle que $\xi^{-1} \log([\zeta])$ est un élément de valuation $\frac{1}{p-1}$ de $\mathcal{O}_C$ (7.7). Comme Δ_∞ est commutatif, les endomorphismes θ_i commutent deux à deux ; par suite $\theta \wedge \theta = 0$, autrement dit, θ est un $\widehat{R_1}$ -champ de Higgs sur M à coefficients dans $\xi^{-1} \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$.

La correspondance $(M, \varphi) \mapsto (M, \theta)$ définie ci-dessus est un foncteur

$$(11.5.9) \quad \text{Rep}_{\widehat{R_1}}^{\alpha\text{-qpp}}(\Delta_\infty) \rightarrow \text{MH}_{\xi^{-1} \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1}^{\beta\text{-qpp}}(\widehat{R_1}).$$

Proposition 11.6 (Faltings, [17]). *Soient α un nombre rationnel $> \frac{1}{p-1}$, $\beta = \alpha - \frac{1}{p-1}$. Alors le foncteur (11.5.9) est une équivalence de catégories, et il induit une équivalence de catégories*

$$(11.6.1) \quad \text{Rep}_{\widehat{R_1}}^{\alpha\text{-p}}(\Delta_\infty) \xrightarrow{\sim} \text{MH}_{\xi^{-1} \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1}^{\beta\text{-p}}(\widehat{R_1}).$$

Soit (M, θ) un $\widehat{R_1}$ -module de Higgs β -quasi-petit à coefficients dans $\xi^{-1} \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ dont le $\mathbb{Z}_p$ -module sous-jacent est plat. On notera que M est complet et séparé pour la topologie p -adique (11.4). Le fait que $\theta \wedge \theta = 0$ implique que l'image de $\Psi_M^{-1}(\theta)$ est formée d'endomorphismes de M qui commutent deux à deux (cf. (11.5.6) et (11.5.7)). On peut donc définir l'homomorphisme

$$(11.6.2) \quad \varphi = \exp \circ (\Psi_M^{-1}(\theta)) : \Delta_\infty \rightarrow \text{Aut}_{\widehat{R_1}}(M),$$

dont l'image est contenue dans le sous-groupe $\text{id} + p^\alpha \text{End}_{\widehat{R_1}}(M)$ de $\text{Aut}_{\widehat{R_1}}(M)$ (cf. 11.4). Il est clair que la représentation φ est continue pour la topologie p -adique de M , et que la correspondance $(M, \theta) \mapsto (M, \varphi)$ ainsi définie est un foncteur quasi-inverse du foncteur (11.5.9).

Remarque 11.7. Soient $t_1, \dots, t_d \in P^{\text{gp}}$ tels que leurs images dans $(P^{\text{gp}}/\mathbb{Z}\lambda) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ forment une $\mathbb{Z}_p$ -base, $(\chi_{t_i})_{1 \leq i \leq d}$ leurs images dans $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Delta_\infty, \mathbb{Z}_p(1))$ (5.18.5), $(d \log(t_i))_{1 \leq i \leq d}$ leurs images dans $\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ (5.17.5). Pour tout $1 \leq i \leq d$, notons χ_i l'homomorphisme composé

$$(11.7.1) \quad \Delta_\infty \xrightarrow{\chi_{t_i}} \mathbb{Z}_p(1) \xrightarrow{\log([\])} p^{\frac{1}{p-1}} \xi \mathcal{O}_C,$$

où la seconde flèche est induite par l'isomorphisme (7.7.1). Soient α un nombre rationnel $> \frac{1}{p-1}$, $\beta = \alpha - \frac{1}{p-1}$, (M, φ) un objet de $\text{Rep}_{\widehat{R_1}}^{\alpha\text{-qpp}}(\Delta_\infty)$, (M, θ) son image dans $\text{MH}_{\xi^{-1} \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1}^{\beta\text{-qpp}}(\widehat{R_1})$ par le foncteur (11.5.9). Alors φ et θ sont reliés par les formules suivantes :

$$(11.7.2) \quad \varphi = \exp \left(\sum_{i=1}^d \xi^{-1} \theta_i \otimes \chi_i \right),$$

$$(11.7.3) \quad \theta = \sum_{i=1}^d \xi^{-1} \theta_i \otimes d \log(t_i).$$

Lemme 11.8. *Soient α un nombre rationnel $> \frac{1}{p-1}$, M une $\widehat{R_1}$ -représentation α -petite de Δ_∞ . Alors l'action de Δ_∞ sur M se factorise à travers Δ_{p^∞} .*

En effet, l'action de Δ_∞ sur M étant $\widehat{R}_1$ -linéaire, elle est définie par un homomorphisme

$$(11.8.1) \quad \varphi: \Delta_\infty \rightarrow \text{Aut}_{\widehat{R}_1}(M)$$

dont l'image est contenue dans le sous-groupe $\text{id} + p^\alpha \text{End}_{\widehat{R}_1}(M)$ de $\text{Aut}_{\widehat{R}_1}(M)$. Comme Δ_∞ est abélien, on peut définir l'homomorphisme

$$(11.8.2) \quad \log \circ \varphi: \Delta_\infty \rightarrow p^\alpha \text{End}_{\widehat{R}_1}(M),$$

et on a $\varphi = \exp(\log \circ \varphi)$ (cf. 11.4). D'autre part, M étant libre de type fini sur $\widehat{R}_1$, $\text{End}_{\widehat{R}_1}(M)$ est complet et séparé pour la topologie p -adique. Par suite, $\log \circ \varphi$ se factorise à travers Δ_{p^∞} (4.11.1), d'où la proposition.

Proposition 11.9. *Soient a un élément non nul de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$, α un nombre rationnel $> \frac{1}{p-1}$, M_1, M_2 deux (R_1/aR_1) -représentations α -petites de Δ_{p^∞} (11.1),*

$$(11.9.1) \quad \bar{u}: M_1 \otimes_{R_1} \overline{R} \rightarrow M_2 \otimes_{R_1} \overline{R}$$

un morphisme $\overline{R}$ -linéaire et Δ -équivariant. Supposons que $v(a) > \frac{1}{p-1} + \alpha$ et posons $b = ap^{-\alpha - \frac{1}{p-1}}$. Alors il existe un et un unique morphisme R_1 -linéaire et Δ_{p^∞} -équivariant

$$(11.9.2) \quad u: M_1/bM_1 \rightarrow M_2/bM_2$$

tel que $u \otimes_{R_1} \overline{R} \equiv \bar{u} \pmod{bM_2 \otimes_{R_1} \overline{R}}$.

Notons M le R_1 - Δ_{p^∞} -module discret $\text{Hom}_{R_1}(M_1, M_2)$, qui est donc une (R_1/aR_1) -représentation α -petite de Δ_{p^∞} . Comme R_1 est normal d'après 4.8(iii), on a $p^\alpha bR_1 = (p^\alpha \overline{bR}) \cap R_1$. Par suite, le morphisme canonique

$$(11.9.3) \quad H^0(\Delta_{p^\infty}, M/p^\alpha bM) \rightarrow H^0(\Delta, (M/p^\alpha bM) \otimes_{R_1} \overline{R})$$

est injectif et son conoyau est annulé par $p^{\frac{1}{p-1}} \mathfrak{m}_{\overline{K}}$ en vertu de 6.26. Il existe alors un morphisme R_1 -linéaire et Δ_{p^∞} -équivariant

$$(11.9.4) \quad v: M_1/p^\alpha bM_1 \rightarrow M_2/p^\alpha bM_2$$

tel que $v \otimes_{R_1} \overline{R} \equiv p^\alpha \bar{u} \pmod{p^\alpha bM_2 \otimes_{R_1} \overline{R}}$. Comme $p^\alpha R_1 = (p^\alpha \overline{R}) \cap R_1$ et que R_1 est $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ -plat, représentant v par une matrice à coefficients dans $R_1/p^\alpha bR_1$, on voit qu'il existe un unique morphisme R_1 -linéaire et Δ_{p^∞} -équivariant

$$(11.9.5) \quad u: M_1/bM_1 \rightarrow M_2/bM_2$$

tel que $v = p^\alpha u$. Utilisant de nouveau que $\overline{R}$ est $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ -plat, on en déduit que $u \otimes_{R_1} \overline{R} \equiv \bar{u} \pmod{bM_2 \otimes_{R_1} \overline{R}}$. L'unicité de u résulte du fait que l'homomorphisme canonique $R_1/bR_1 \rightarrow \overline{R}/b\overline{R}$ est injectif (cf. la preuve de 4.12).

Proposition 11.10. *Soient α un nombre rationnel $> \frac{1}{p-1}$, a un élément non nul de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ tel que $v(a) > \alpha$, M un $(\overline{R}/a\overline{R})$ -module libre de rang $r \geq 1$, muni de la topologie discrète et d'une action $\overline{R}$ -semi-linéaire et continue de Δ telle que M admette une base $e_1, \dots, e_r$ formée d'éléments Δ -invariants modulo $p^{2\alpha}M$. Alors il existe un R_1 - Δ_{p^∞} -module discret N dont le module sous-jacent est libre de rang r sur $R_1/ap^{-\alpha}R_1$, ayant une base $f_1, \dots, f_r$ formée d'éléments Δ_{p^∞} -invariants modulo $p^\alpha N$, et un isomorphisme $\overline{R}$ -linéaire et Δ -équivariant*

$$(11.10.1) \quad N \otimes_{R_1} \overline{R} \xrightarrow{\sim} M/ap^{-\alpha}M$$

qui transforme $f_j \otimes 1 \pmod{p^\alpha N \otimes_{R_1} \overline{R}}$ en $e_j \pmod{p^\alpha M}$ pour tout $1 \leq j \leq r$.

La proposition est évidente si $v(a) \leq 3\alpha$, auquel cas on prendra $N = (R_1/ap^{-\alpha}R_1)^r$ muni de la représentation triviale de Δ_{p^∞} et de la base canonique. Supposons donc $v(a) > 3\alpha$. Soit n un entier ≥ 1 tel que

$$(11.10.2) \quad \varepsilon = \frac{v(a) - 3\alpha}{n} < \frac{1}{3}(\alpha - \frac{1}{p-1}).$$

Montrons par une récurrence finie que pour tout $0 \leq i \leq n$, la proposition vaut pour la $\bar{R}$ -représentation $M/p^{3\alpha+i\varepsilon}M$, autrement dit, qu'il existe un R_1 - Δ_{p^∞} -module discret N_i dont le module sous-jacent est libre de rang r sur $R_1/p^{2\alpha+i\varepsilon}R_1$, ayant une base $f_1^{(i)}, \dots, f_r^{(i)}$ formée d'éléments Δ_{p^∞} -invariants modulo $p^\alpha N_i$ et un isomorphisme $\bar{R}$ -linéaire et Δ -équivariant

$$(11.10.3) \quad N_i \otimes_{R_1} \bar{R} \xrightarrow{\sim} M/p^{2\alpha+i\varepsilon}M$$

qui transforme $f_j^{(i)} \otimes 1 \pmod{p^\alpha N_i \otimes_{R_1} \bar{R}}$ en $e_j \pmod{p^\alpha M}$ pour tout $1 \leq j \leq r$. La représentation $N = N_n$ répondra alors à la question puisque $2\alpha + n\varepsilon = v(a) - \alpha$.

On prend $N_0 = (R_1/p^{2\alpha}R_1)^r$ muni de la représentation triviale de Δ_{p^∞} et de la base canonique. Supposons N_i construit avec $0 \leq i < n$ et construisons N_{i+1} . D'après 2.11, l'obstruction à relever N_i en un $(R_1/p^{3\alpha+i\varepsilon}R_1)$ - Δ_{p^∞} -module discret dont le module sous-jacent est libre de type fini sur $R_1/p^{3\alpha+i\varepsilon}R_1$ est un élément $\mathfrak{o}$ de $H^2(\Delta_{p^\infty}, \text{Mat}_r(R_1/p^\alpha R_1))$. D'autre part, le morphisme

$$(11.10.4) \quad H^2(\Delta_{p^\infty}, \text{Mat}_r(R_1/p^\alpha R_1)) \rightarrow H^2(\Delta, \text{Mat}_r(\bar{R}/p^\alpha \bar{R}))$$

est presque-injectif en vertu de 6.17. L'image de $\mathfrak{o}$ dans $H^2(\Delta, \text{Mat}_r(\bar{R}/p^\alpha \bar{R}))$ est nulle puisque la représentation $M/p^{2\alpha+i\varepsilon}M$ se relève en $M/p^{3\alpha+i\varepsilon}M$; donc $p^\varepsilon \mathfrak{o} = 0$. Par suite, en vertu de (2.11.4), $N_i/p^{2\alpha+(i-1)\varepsilon}N_i$ se relève en un $(R_1/p^{3\alpha+(i-1)\varepsilon}R_1)$ - Δ_{p^∞} -module discret N'_{i+1} dont le module sous-jacent est libre de type fini sur $R_1/p^{3\alpha+(i-1)\varepsilon}R_1$. D'après 2.10, le relèvement $N'_{i+1} \otimes_{R_1} \bar{R}$ de $M/p^{2\alpha+(i-1)\varepsilon}M$ se déduit de $M/p^{3\alpha+(i-1)\varepsilon}M$ par torsion par un élément $\bar{\mathfrak{c}}$ de $H^1(\Delta, \text{Mat}_r(\bar{R}/p^\alpha \bar{R}))$. En vertu de 6.17, le conoyau du morphisme canonique

$$(11.10.5) \quad H^1(\Delta_{p^\infty}, \text{Mat}_r(R_1/p^\alpha R_1)) \rightarrow H^1(\Delta, \text{Mat}_r(\bar{R}/p^\alpha \bar{R}))$$

est annulé par $p^{\frac{1}{p-1}+\varepsilon}$. Comme $\alpha > \frac{1}{p-1} + 3\varepsilon$, $p^{\alpha-2\varepsilon}\bar{\mathfrak{c}}$ est l'image d'un élément

$$\mathfrak{c}' \in H^1(\Delta_{p^\infty}, \text{Mat}_r(R_1/p^\alpha R_1)).$$

Modifiant $N'_{i+1}/p^{2\alpha+(i+1)\varepsilon}N'_{i+1}$ par torsion par $-\mathfrak{c}'$, on obtient un $(R_1/p^{2\alpha+(i+1)\varepsilon}R_1)$ - Δ_{p^∞} -module discret N_{i+1} dont le module sous-jacent est libre de type fini sur $R_1/p^{2\alpha+(i+1)\varepsilon}R_1$, qui relève $N_i/p^{\alpha+(i+1)\varepsilon}N_i$. On notera que $2\alpha + (i-1)\varepsilon > \alpha + (i+1)\varepsilon$. Alors N_{i+1} répond à la question d'après la dernière assertion du 2.10.

Proposition 11.11. *Soient a un élément non nul de $\mathcal{O}_{\bar{K}}$, α, β deux nombres rationnels tels que $v(a) > \alpha > \beta > \frac{1}{p-1}$, M un $(\bar{R}/a\bar{R})$ -module libre de rang $r \geq 1$, muni de la topologie discrète et d'une action $\bar{R}$ -semi-linéaire et continue de Δ telle que M admette une base formée d'éléments Δ -invariants modulo $p^{2\alpha}M$. Alors il existe un R_1 - Δ_{p^∞} -module discret N dont le module sous-jacent est libre de rang r sur $R_1/ap^{-\alpha}R_1$, ayant une base formée d'éléments Δ_{p^∞} -invariants modulo $p^{2\beta}N$, et un isomorphisme $\bar{R}$ -linéaire et Δ -équivariant*

$$(11.11.1) \quad N \otimes_{R_1} \bar{R} \xrightarrow{\sim} M/ap^{-\alpha}M.$$

La proposition est évidente si $v(a) \leq 3\alpha$, auquel cas on prendra $N = (R_1/ap^{-\alpha}R_1)^r$ muni de la représentation triviale de Δ_{p^∞} . Supposons donc $v(a) > 3\alpha$. Soit n un entier ≥ 1 tel que

$$(11.11.2) \quad \varepsilon = \frac{v(a) - 3\alpha}{n} < \inf\left(\frac{1}{3}\left(\alpha - \frac{1}{p-1}\right), \alpha - \beta\right).$$

Montrons par une récurrence finie que pour tout $0 \leq i \leq n$, la proposition vaut pour la $\bar{R}$ -représentation $M/p^{3\alpha+i\varepsilon}M$, autrement dit, qu'il existe un R_1 - Δ_{p^∞} -module discret N_i dont le module sous-jacent est libre de rang r sur $R_1/p^{2\alpha+i\varepsilon}R_1$, ayant une base formée d'éléments Δ_{p^∞} -invariants modulo $p^{2(\alpha-\varepsilon)}N_i$ et un isomorphisme $\bar{R}$ -linéaire et Δ -équivalent

$$(11.11.3) \quad N_i \otimes_{R_1} \bar{R} \xrightarrow{\sim} M/p^{2\alpha+i\varepsilon}M.$$

La représentation $N = N_n$ répondra alors à la question puisque $2\alpha + n\varepsilon = v(a) - \alpha$ et $\alpha - \varepsilon > \beta$.

On prend $N_0 = (R_1/p^{2\alpha}R_1)^r$ muni de la représentation triviale de Δ_{p^∞} et de la base canonique. Supposons N_i construit avec $0 \leq i < n$ et construisons N_{i+1} . D'après 2.11 (appliqué avec $a^q = p^{3\alpha+i\varepsilon}$, $a^n = p^{2\alpha+i\varepsilon}$ et $a^m = p^{2(\alpha-\varepsilon)}$), l'obstruction à relever N_i en un $(R_1/p^{3\alpha+i\varepsilon}R_1)$ - Δ_{p^∞} -module discret dont le module sous-jacent est libre de type fini sur $R_1/p^{3\alpha+i\varepsilon}R_1$ est un élément $\mathfrak{o}$ de $H^2(\Delta_{p^\infty}, \text{Mat}_r(R_1/p^\alpha R_1))$. D'autre part, le morphisme

$$(11.11.4) \quad H^2(\Delta_{p^\infty}, \text{Mat}_r(R_1/p^\alpha R_1)) \rightarrow H^2(\Delta, \text{Mat}_r(\bar{R}/p^\alpha \bar{R}))$$

est presque-injectif en vertu de 6.17. L'image de $\mathfrak{o}$ dans $H^2(\Delta, \text{Mat}_r(\bar{R}/p^\alpha \bar{R}))$ est nulle puisque la représentation $M/p^{2\alpha+i\varepsilon}M$ se relève en $M/p^{3\alpha+i\varepsilon}M$; donc $p^\varepsilon \mathfrak{o} = 0$. Par suite, d'après (2.11.4), $N_i/p^{2\alpha+(i-1)\varepsilon}N_i$ se relève en un $(R_1/p^{3\alpha+(i-1)\varepsilon}R_1)$ - Δ_{p^∞} -module discret N'_{i+1} dont le module sous-jacent est libre de type fini sur $R_1/p^{3\alpha+(i-1)\varepsilon}R_1$. D'après 2.10, le relèvement $N'_{i+1} \otimes_{R_1} \bar{R}$ de $M/p^{2\alpha+(i-1)\varepsilon}M$ se déduit du relèvement $M/p^{3\alpha+(i-1)\varepsilon}M$ par torsion par un élément $\bar{\mathfrak{c}}$ de $H^1(\Delta, \text{Mat}_r(\bar{R}/p^\alpha \bar{R}))$. En vertu de 6.14, le conoyau du morphisme canonique

$$(11.11.5) \quad H^1(\Delta_{p^\infty}, \text{Mat}_r(R_{p^\infty}/p^\alpha R_{p^\infty})) \rightarrow H^1(\Delta, \text{Mat}_r(\bar{R}/p^\alpha \bar{R}))$$

est annulé par p^ε . Donc $p^\varepsilon \bar{\mathfrak{c}}$ est l'image d'un élément

$$\mathfrak{c}' \in H^1(\Delta_{p^\infty}, \text{Mat}_r(R_{p^\infty}/p^\alpha R_{p^\infty})).$$

D'après la preuve de 6.15(i), on a $\mathfrak{c}' = \mathfrak{c}'_1 + \mathfrak{c}'_2$, où $p^{\frac{1}{p-1}}\mathfrak{c}'_2 = 0$ et $\mathfrak{c}'_1$ est l'image d'un élément

$$\mathfrak{c}_1 \in H^1(\Delta_{p^\infty}, \text{Mat}_r(R_1/p^\alpha R_1)).$$

Modifiant $N'_{i+1}/p^{3\alpha+(i-2)\varepsilon}N'_{i+1}$ par torsion par $-\mathfrak{c}_1$, on obtient un $(R_1/p^{3\alpha+(i-2)\varepsilon}R_1)$ - Δ_{p^∞} -module discret N''_{i+1} dont le module sous-jacent est libre de type fini sur $R_1/p^{3\alpha+(i-2)\varepsilon}R_1$, qui relève $N_i/p^{2\alpha+(i-2)\varepsilon}N_i$. D'après la dernière assertion de 2.10, le relèvement $N''_{i+1} \otimes_{R_1} \bar{R}$ de $M/p^{2\alpha+(i-2)\varepsilon}M$ se déduit du relèvement $M/p^{3\alpha+(i-2)\varepsilon}M$ par torsion par l'image $\bar{\mathfrak{c}}_2$ de $\mathfrak{c}'_2$ dans $H^1(\Delta, \text{Mat}_r(\bar{R}/p^\alpha \bar{R}))$. Comme $p^{\frac{1}{p-1}}\bar{\mathfrak{c}}_2 = 0$, on en déduit encore par la dernière assertion de 2.10 qu'il existe un isomorphisme $\bar{R}$ -linéaire et Δ -équivalent

$$(11.11.6) \quad (N''_{i+1}/p^{3\alpha-\frac{1}{p-1}+(i-2)\varepsilon}N''_{i+1}) \otimes_{R_1} \bar{R} \xrightarrow{\sim} M/p^{3\alpha-\frac{1}{p-1}+(i-2)\varepsilon}M.$$

Comme $\alpha > \frac{1}{p-1} + 3\varepsilon$, la représentation $N_{i+1} = N''_{i+1}/p^{2\alpha+(i+1)\varepsilon}N''_{i+1}$ répond alors à la question.

Proposition 11.12 (Faltings, [17]). *Le foncteur*

$$(11.12.1) \quad \text{Rep}_{R_1}^p(\Delta_\infty) \rightarrow \text{Rep}_{\widehat{R}}^p(\Delta), \quad M \mapsto M \otimes_{\widehat{R_1}} \widehat{R}$$

est une équivalence de catégories.

En effet, comme le foncteur canonique

$$(11.12.2) \quad \text{Rep}_{\widehat{R}_1}^p(\Delta_{p^\infty}) \rightarrow \text{Rep}_{\widehat{R}_1}^p(\Delta_\infty)$$

est une équivalence de catégories d'après 11.8, il suffit de montrer que le foncteur

$$(11.12.3) \quad \text{Rep}_{\widehat{R}_1}^p(\Delta_{p^\infty}) \rightarrow \text{Rep}_{\widehat{R}}^p(\Delta), \quad M \mapsto M \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R}$$

est une équivalence de catégories. Ce foncteur est pleinement fidèle en vertu de 11.9. Montrons qu'il est essentiellement surjectif. Soient α, β deux nombres rationnels tels que $\alpha > \beta > \frac{1}{p-1}$, M une $\widehat{R}$ -représentation (2α) -petite de rang $r \geq 1$. D'après 11.11, pour tout entier $n > \alpha$, il existe un R_1 - Δ_{p^∞} -module discret N_n dont le module sous-jacent est libre de rang r sur $R_1/p^{n-\alpha}R_1$, ayant une base formée d'éléments Δ_{p^∞} -invariants modulo $p^{2\beta}N$, et un isomorphisme $\widehat{R}$ -linéaire et Δ_{p^∞} -équivariant

$$(11.12.4) \quad N_n \otimes_{R_1} \overline{R} \xrightarrow{\sim} M/p^{n-\alpha}M.$$

En vertu de 11.9, pour tous entiers $n \geq m > \alpha$, il existe un unique isomorphisme R_1 -linéaire et Δ_{p^∞} -équivariant

$$(11.12.5) \quad N_n/p^{m-\alpha}N_n \xrightarrow{\sim} N_m$$

compatible avec les isomorphismes (11.12.4). Par suite, les R_1 -modules $(N_n)_{n>\alpha}$ forment un système projectif, et si N est sa limite projective, on a un isomorphisme $\widehat{R}$ -linéaire et Δ -équivariant

$$(11.12.6) \quad N \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R} \xrightarrow{\sim} M.$$

Remarques 11.13. (i) Bien que parallèles, les preuves des propositions 11.10 et 11.11 diffèrent significativement dans leurs dernières étapes qui consistent à définir N_{i+1} à partir de N'_{i+1} . On notera qu'en ce qui concerne la descente de la base, la preuve de 11.11 ne donne pas mieux que celle de 11.10, c'est pourquoi nous avons omis cette partie de l'énoncé 11.11. La proposition 11.10 est due à Faltings ([17] Lemme 1).

(ii) L'énoncé de descente établi par Faltings dans [17] est en fait légèrement plus faible que 11.12.

Lemme 11.14. Soient α, ε deux nombres rationnels tels que $0 < \varepsilon < \alpha$, M une $\widehat{R}$ -représentation α -quasi-petite de Δ . Alors :

- (i) Le R_∞ -module $(M/p^\alpha M)^\Sigma$ est presque de type fini.
- (ii) Le $\widehat{R}$ -module $p^\varepsilon M$ est engendré par un nombre fini d'éléments qui sont d'une part Δ -invariants modulo $p^\alpha M$ et d'autre part Σ -invariants.
- (iii) Le morphisme canonique $M^\Sigma \otimes_{\widehat{R}_\infty} \widehat{R} \rightarrow M$ est presque surjectif.

Soient $x_1, \dots, x_d$ des générateurs de M sur $\widehat{R}$ qui sont Δ -invariants modulo $p^\alpha M$.

(i) On désigne par $u: (\overline{R}/p^\alpha \overline{R})^d \rightarrow M/p^\alpha M$ le morphisme $\overline{R}$ -linéaire, Δ -équivariant et surjectif défini par les $(x_i)_{1 \leq i \leq d}$ et par C son noyau. Alors $H^1(\Sigma, C)$ est presque nul en vertu de 4.17. D'autre part, le morphisme canonique

$$R_\infty/p^\alpha R_\infty \rightarrow (\overline{R}/p^\alpha \overline{R})^\Sigma$$

est un presque-isomorphisme (4.20). Par suite, le morphisme R_∞ -linéaire

$$(11.14.1) \quad (R_\infty/p^\alpha R_\infty)^d \rightarrow (M/p^\alpha M)^\Sigma$$

défini par les $(x_i)_{1 \leq i \leq d}$ est presque surjectif.

(ii) Le $\widehat{R}$ -module $p^\alpha M$ est complet et séparé pour la topologie p -adique ; il est complet en vertu de ([10] chap. III §2.12 cor. 1 de prop. 16), et est séparé en tant que sous-module de M . Donc $H_{\text{cont}}^1(\Sigma, p^\alpha M)$ est presque nul en vertu de 4.19. Par suite, le morphisme canonique

$$(11.14.2) \quad M^\Sigma \rightarrow (M/p^\alpha M)^\Sigma$$

est presque surjectif. Les classes des éléments $p^\varepsilon x_1, \dots, p^\varepsilon x_n$ dans $(M/p^\alpha M)^\Sigma$ se relèvent en des éléments $x'_1, \dots, x'_d \in M^\Sigma$. Pour tout $1 \leq i \leq d$, on a

$$(11.14.3) \quad x'_i \in M^\Sigma \cap (p^\varepsilon M) = (p^\varepsilon M)^\Sigma.$$

D'autre part, par le lemme de Nakayama, les $(x'_i)_{1 \leq i \leq d}$ engendrent $p^\varepsilon M$ sur $\widehat{R}$.

(iii) Cela résulte de (ii).

Lemme 11.15. *Soient M un $\widehat{R}$ -module complet et séparé pour la topologie p -adique, muni d'une action $\widehat{R}$ -semi-linéaire et continue de Σ , $x_1, \dots, x_d$ des éléments de M^Σ qui engendrent M sur $\widehat{R}$. Alors le morphisme $\widehat{R}_\infty$ -linéaire $\widehat{R}_\infty^d \rightarrow M^\Sigma$ défini par les $(x_i)_{1 \leq i \leq d}$, est presque surjectif.*

Notons C le noyau du morphisme $\widehat{R}$ -linéaire, Σ -équivant et surjectif $\widehat{R}^d \rightarrow M$ défini par les $(x_i)_{1 \leq i \leq d}$. Comme M est séparé, C est fermé dans $\widehat{R}^d$ pour la topologie p -adique. Il est donc complet et séparé pour la topologie induite par la topologie p -adique de $\widehat{R}^d$; autrement dit, C est isomorphe à la limite projective du système projectif des $\widehat{R}$ -modules $(C/(C \cap p^n \widehat{R}^d))_{n \in \mathbb{N}}$. Par suite, $H_{\text{cont}}^1(\Sigma, C)$ est presque nul en vertu de 4.19. Par ailleurs, l'homomorphisme canonique $\widehat{R}_\infty \rightarrow \widehat{R}^\Sigma$ est un presque-isomorphisme d'après 4.21, d'où la proposition.

Lemme 11.16. *Soient α un nombre rationnel > 0 , M une $\widehat{R}_\infty$ -représentation α -quasi-petite de Δ_∞ telle que M soit $\mathbb{Z}_p$ -plat. Alors, le $\widehat{R}_{p^\infty}$ -module M^{Σ_0} , muni de l'action induite de Δ_{p^∞} , est une $\widehat{R}_{p^\infty}$ -représentation α -quasi-petite de Δ_{p^∞} , et le morphisme canonique*

$$(11.16.1) \quad M^{\Sigma_0} \otimes_{\widehat{R}_{p^\infty}} \widehat{R}_\infty \rightarrow M$$

est surjectif.

D'après (2.13.4) et (2.13.5), on a

$$(11.16.2) \quad 0 \rightarrow \varprojlim_n (M/p^n M)^{\Sigma_0} \rightarrow H_{\text{cont}}^1(\Sigma_0, M) \rightarrow \varprojlim_n H^1(\Sigma_0, M/p^n M) \rightarrow 0.$$

D'autre part, comme Σ_0 est un groupe profini d'ordre premier à p , $H^1(\Sigma_0, M/p^n M) = 0$ pour tout $n \geq 0$, et le système projectif $((M/p^n M)^{\Sigma_0})_{n \geq 0}$ vérifie la condition de Mittag-Leffler. On en déduit que $H_{\text{cont}}^1(\Sigma_0, M) = 0$. De même, on a $H_{\text{cont}}^1(\Sigma_0, p^\alpha M) = 0$ puisque $p^\alpha M$ est complet et séparé pour la topologie p -adique. Par suite le morphisme canonique

$$(11.16.3) \quad M^{\Sigma_0} \rightarrow (M/p^\alpha M)^{\Sigma_0}$$

est surjectif.

Soient $x_1, \dots, x_d$ des générateurs de M sur R_∞ qui sont Δ_∞ -invariants modulo $p^\alpha M$. Leurs classes dans $(M/p^\alpha M)^{\Sigma_0}$ se relèvent en des éléments $x'_1, \dots, x'_d$ de M^{Σ_0} , qui engendrent M sur $\widehat{R}_\infty$. Donc le morphisme canonique $M^{\Sigma_0} \otimes_{\widehat{R}_{p^\infty}} \widehat{R}_\infty \rightarrow M$ est surjectif. Calquant la preuve de 11.15, on montre que le morphisme

$$(11.16.4) \quad \widehat{R}_{p^\infty}^d \rightarrow M^{\Sigma_0}$$

défini par les $(x'_i)_{1 \leq i \leq d}$ est surjectif. Par suite, M^{Σ_0} est un $\widehat{R_{p^\infty}}$ -module de type fini. Il est donc complet et séparé pour la topologie p -adique ; il est complet en vertu de ([10] chap. III §2.12 cor. 1 de prop. 16), et est séparé en tant que sous-module de M . D'autre part, comme M est $\mathbb{Z}_p$ -plat, la topologie p -adique de M^{Σ_0} est clairement induite par la topologie p -adique de M . Donc la représentation de Δ_{p^∞} sur M^{Σ_0} , induite par celle de Δ , est continue pour la topologie p -adique. Pour tout $1 \leq i \leq d$ et tout $g \in \Delta_{p^\infty}$, on a $g(x'_i) - x'_i \in M^{\Sigma_0} \cap p^\alpha M = p^\alpha M^{\Sigma_0}$. On en déduit que M^{Σ_0} est une $\widehat{R_{p^\infty}}$ -représentation α -quasi-petite, d'où la proposition.

Proposition 11.17. *Soient α, ε deux nombres rationnels tels que $0 < 2\varepsilon \leq \alpha$, M une $\widehat{R}$ -représentation α -quasi-petite de Δ telle que M soit $\mathbb{Z}_p$ -plat. Alors, il existe une $\widehat{R_{p^\infty}}$ -représentation $(\alpha - 2\varepsilon)$ -quasi-petite M' de Δ_{p^∞} et un morphisme $\widehat{R}$ -linéaire, Δ -équivariant et surjectif*

$$(11.17.1) \quad M' \otimes_{\widehat{R_{p^\infty}}} \widehat{R} \rightarrow p^\varepsilon M.$$

D'après 11.14(ii), il existe des générateurs $x_1, \dots, x_d$ de $p^\varepsilon M$ sur $\widehat{R}$ qui sont d'une part Δ -invariants modulo $p^\alpha M$ et d'autre part Σ -invariants. Pour tout $1 \leq i \leq d$ et tout $g \in \Delta$, $g(x_i) - x_i \in p^\alpha M \cap M^\Sigma = p^\alpha M^\Sigma$. Donc en vertu de 11.15 (appliqué à la $\widehat{R}$ -représentation $(\alpha - \varepsilon)$ -quasi-petite $p^\varepsilon M$ de Σ), il existe $(a_{ij})_{1 \leq j \leq d} \in \widehat{R_\infty}^d$ tels que

$$(11.17.2) \quad g(x_i) - x_i = \sum_{j=1}^d p^{\alpha-2\varepsilon} a_{ij} x_j$$

Notons M_1 le sous- $\widehat{R_\infty}$ -module de $p^\varepsilon M$ engendré par $x_1, \dots, x_d$. D'après (11.17.2), M_1 est stable par l'action de Δ . Comme $M_1 \subset M^\Sigma$, l'action induite de Δ sur M_1 se factorise à travers Δ_∞ .

Le $\widehat{R_\infty}$ -module M_1 est complet et séparé pour la topologie p -adique ; il est complet en vertu de ([10] chap. III §2.12 cor. 1 de prop. 16), et est séparé en tant que sous-module de M . Pour tout entier $n \geq 2\varepsilon$, on a

$$(11.17.3) \quad p^n M_1 \subset M_1 \cap p^n M \subset p^n M^\Sigma \subset p^{n-2\varepsilon} M_1,$$

la dernière inclusion étant une conséquence de 11.15. Par suite, la topologie p -adique de M_1 est induite par la topologie p -adique de M . Compte tenu de (11.17.2), on en déduit que M_1 est une $\widehat{R_\infty}$ -représentation $(\alpha - 2\varepsilon)$ -quasi-petite de Δ_∞ . Comme le morphisme canonique

$$(11.17.4) \quad M_1 \otimes_{\widehat{R_\infty}} \widehat{R} \rightarrow p^\varepsilon M$$

est clairement surjectif, la proposition résulte de 11.16 appliqué à M_1 .

11.18. Reprenons les notations de (9.1) et (9.11), soient de plus $t_1, \dots, t_d \in P^{\text{gp}}$ tels que leurs images dans $(P^{\text{gp}}/\mathbb{Z}\lambda) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ forment une $\mathbb{Z}_p$ -base, $(\chi_{t_i})_{1 \leq i \leq d}$ leurs images dans $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Delta_\infty, \mathbb{Z}_p(1))$ (5.18.5), $(d \log(t_i))_{1 \leq i \leq d}$ leurs images dans $\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ (5.17.5). Pour tout $1 \leq i \leq d$, posons $y_i = \xi^{-1} d \log(t_i) \in \xi^{-1} \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \subset \mathfrak{S}$ (9.11.1), et notons χ_i l'homomorphisme composé

$$(11.18.1) \quad \Delta_\infty \xrightarrow{\chi_{t_i}} \mathbb{Z}_p(1) \xrightarrow{\log(\cdot)} p^{\frac{1}{p-1}} \xi \mathcal{O}_C,$$

où la seconde flèche est induite par l'isomorphisme (7.7.1). Soient β un nombre rationnel $> \frac{1}{p-1}$, (N, θ) un $\widehat{R_1}$ -module de Higgs β -quasi-petit à coefficients dans $\xi^{-1} \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ tel que N soit $\mathbb{Z}_p$ -plat.

On peut alors écrire

$$(11.18.2) \quad \theta = \sum_{i=1}^d \theta_i \otimes y_i,$$

où les θ_i sont des endomorphismes de N appartenant à $p^\beta \text{End}_{\widehat{R}_1}(N)$ et commutant deux à deux. Pour tout $\underline{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d$, posons $\underline{n}! = \prod_{i=1}^d n_i!$, $\underline{\theta}^{\underline{n}} = \prod_{i=1}^d \theta_i^{n_i} \in \text{End}_{\widehat{R}_1}(N)$ et $\underline{y}^{\underline{n}} = \prod_{i=1}^d y_i^{n_i} \in \widehat{\mathfrak{S}}$. On notera que $N \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{\mathfrak{S}}$ est complet et séparé pour la topologie p -adique ([1] 1.10.2), et qu'il est $\mathbb{Z}_p$ -plat puisque $\widehat{\mathfrak{S}}$ est $\widehat{R}_1$ -plat (9.11). Par suite, pour tout $z \in N \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{\mathfrak{S}}$, la série

$$(11.18.3) \quad \sum_{\underline{n} \in \mathbb{N}^d} \frac{1}{\underline{n}!} (\underline{\theta}^{\underline{n}} \otimes \underline{y}^{\underline{n}})(z)$$

converge dans $N \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{\mathfrak{S}}$, et définit un endomorphisme $\widehat{\mathfrak{S}}$ -linéaire de $N \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{\mathfrak{S}}$, que l'on note

$$(11.18.4) \quad \exp(\theta) : N \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{\mathfrak{S}} \rightarrow N \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{\mathfrak{S}}.$$

On note

$$(11.18.5) \quad i : N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathfrak{S}^\dagger \rightarrow N \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{\mathfrak{S}}$$

le morphisme canonique.

Proposition 11.19. *Conservons les hypothèses de (11.18). Alors :*

- (i) $\exp(\theta)(i(N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathfrak{S}^\dagger)) \subset i(N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathfrak{S}^\dagger)$.
- (ii) *Le morphisme $\exp(\theta)$ est un isomorphisme et il induit un isomorphisme*

$$(11.19.1) \quad i(N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathfrak{S}^\dagger) \xrightarrow{\sim} i(N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathfrak{S}^\dagger).$$

- (iii) *Soit $\theta_{\text{tot}} = \theta \otimes \text{id} + \text{id} \otimes d_{\widehat{\mathfrak{S}}}$ le $\widehat{R}_1$ -champ de Higgs total sur $N \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{\mathfrak{S}}$ à coefficients dans $\xi^{-1} \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ (2.16.9). Alors le diagramme*

$$(11.19.2) \quad \begin{array}{ccc} N \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{\mathfrak{S}} & \xrightarrow{\exp(\theta)} & N \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{\mathfrak{S}} \\ \theta_{\text{tot}} \downarrow & & \downarrow \text{id} \otimes d_{\widehat{\mathfrak{S}}} \\ \xi^{-1} N \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{\mathfrak{S}} \otimes_R \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 & \xrightarrow{\exp(\theta) \otimes \text{id}} & \xi^{-1} N \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{\mathfrak{S}} \otimes_R \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \end{array}$$

est commutatif.

- (iv) *Le morphisme $\exp(\theta)$ est Δ_∞ -équivariant lorsque l'on munit $\widehat{\mathfrak{S}}$ de la représentation $\widehat{\varphi}_0$ (9.11), le module N de la source de l'action triviale de Δ_∞ et le module N du but de la représentation φ de Δ_∞ associée à θ par la formule (11.6.2).*

- (i) Soient $x_1, \dots, x_n$ des $\widehat{R}_1$ -générateurs de N , et pour tout $1 \leq \ell \leq d$, soit $A_\ell = (m_{ij}^\ell)_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice $n \times n$ à coefficients dans $\widehat{R}_1$ telle que pour tout $1 \leq j \leq n$, on ait

$$(11.19.3) \quad \theta_\ell(x_j) = p^\beta \sum_{i=1}^n m_{ij}^\ell x_i.$$

Pour tout $\underline{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d$, on pose $\underline{A}^{\underline{n}} = A_1^{n_1} \cdot A_2^{n_2} \cdots A_d^{n_d} \in \text{Mat}_n(\widehat{R_1})$. On notera que les matrices A_ℓ ne commutent pas deux à deux en général (mais elles commutent si N est libre sur $\widehat{R_1}$ de base $x_1, \dots, x_n$). La série

$$(11.19.4) \quad e = \sum_{\underline{n} \in \mathbb{N}^d} \frac{p^{\beta|\underline{n}|}}{\underline{n}!} \underline{A}^{\underline{n}} \otimes \underline{y}^{\underline{n}}$$

définit alors une matrice $n \times n$ à coefficients dans $\mathfrak{S}^\dagger$. Pour tous $(a_1, \dots, a_n) \in \widehat{R_1}^n$, on a

$$\exp(\theta) \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i \right) = \sum_{i=1}^n x_i \otimes b_i \in N \otimes_{\widehat{R_1}} \widehat{\mathfrak{S}},$$

où $(b_1, \dots, b_n) = e \cdot (a_1, \dots, a_n)$. On en déduit que $\exp(\theta)(N) \subset i(N \otimes_{\widehat{R_1}} \mathfrak{S}^\dagger)$, ce qui implique la proposition.

(ii) Il résulte aussitôt de la définition (11.19.4) que $e - \text{id}$ est une matrice $n \times n$ à coefficients dans $p^\beta \mathfrak{S}^\dagger$. Comme p^β appartient au radical de Jacobson de $\mathfrak{S}^\dagger$ (cf. 9.2), le déterminant de e est inversible dans $\mathfrak{S}^\dagger$. Si $e^{-1} = (f_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est la matrice inverse de e dans $\text{GL}_n(\mathfrak{S}^\dagger)$, alors pour tout $1 \leq i \leq d$, on a

$$(11.19.5) \quad \exp(\theta) \left(\sum_{j=1}^d x_j \otimes f_{ji} \right) = x_i$$

Par suite, $\exp(\theta)$ est surjectif, et on a $\exp(\theta) \circ i(N \otimes_{\widehat{R_1}} \mathfrak{S}^\dagger) = i(N \otimes_{\widehat{R_1}} \mathfrak{S}^\dagger)$.

Soit $x \in N \otimes_{\widehat{R_1}} \widehat{\mathfrak{S}}$ tel que $\exp(\theta)(x) = 0$. Comme $e \equiv \text{id} \pmod{p^\beta}$, il existe $y \in N \otimes_{\widehat{R_1}} \widehat{\mathfrak{S}}$ tel que $x = p^\beta y$. Comme $N \otimes_{\widehat{R_1}} \widehat{\mathfrak{S}}$ est $\mathbb{Z}_p$ -plat car $\widehat{\mathfrak{S}}$ est $\widehat{R_1}$ -plat (9.11), on a $\exp(\theta)(y) = 0$. On en déduit que $x \in \cap_{n \geq 0} p^{n\beta} (N \otimes_{\widehat{R_1}} \widehat{\mathfrak{S}})$ et par suite que $x = 0$ puisque $N \otimes_{\widehat{R_1}} \widehat{\mathfrak{S}}$ est séparé pour la topologie p -adique ([1] 1.10.2).

(iii) Il suffit de montrer la commutativité du digramme (11.19.2) modulo p^n pour tout $n \geq 1$, ce qui résulte formellement de la définition (11.18.3) de $\exp(\theta)$.

(iv) D'après 11.7 et 8.19, pour tout $g \in \Delta_\infty$, on a

$$(11.19.6) \quad \varphi(g) = \exp \left(\sum_{i=1}^d \xi^{-1} \theta_i \otimes \chi_i(g) \right),$$

$$(11.19.7) \quad \widehat{\varphi}_0(g) = \exp \left(- \sum_{i=1}^d \xi^{-1} \frac{\partial}{\partial y_i} \otimes \chi_i(g) \right).$$

D'autre part, l'automorphisme $\exp(-\xi^{-1} \frac{\partial}{\partial y_i} \otimes \chi_i(g))$ de la $\widehat{R_1}$ -algèbre $\mathfrak{S}$ se prolonge en un $\widehat{R_1}$ -automorphisme de $\widehat{\mathfrak{S}}$, et on a

$$(11.19.8) \quad (\text{id}_N \otimes \exp(-\xi^{-1} \frac{\partial}{\partial y_i} \otimes \chi_i(g))) \circ \exp(\theta) \\ = (\exp(-\xi^{-1} \theta_i \otimes \chi_i(g)) \otimes \text{id}_{\widehat{\mathfrak{S}}}) \circ \exp(\theta) \circ (\text{id}_N \otimes \exp(-\xi^{-1} \frac{\partial}{\partial y_i} \otimes \chi_i(g))).$$

En effet, il suffit de vérifier cette équation modulo p^n pour tout $n \geq 1$, ce qui résulte formellement de la définition (11.18.3) de $\exp(\theta)$ (on utilise en premier lieu que $\exp(-\xi^{-1} \frac{\partial}{\partial y_i} \otimes \chi_i(g))$ est un

homomorphisme de la $\widehat{R}_1$ -algèbre $\mathfrak{S}$). Comme les endomorphismes θ_i commutent deux à deux, on en déduit que

$$(11.19.9) \quad \begin{aligned} & \left(\exp\left(\sum_{i=1}^d \xi^{-1} \theta_i \otimes \chi_i(g)\right) \otimes \exp\left(-\sum_{i=1}^d \xi^{-1} \frac{\partial}{\partial y_i} \otimes \chi_i(g)\right) \right) \circ \exp(\theta) \\ &= \exp(\theta) \circ (\text{id}_N \otimes \exp\left(-\sum_{i=1}^d \xi^{-1} \frac{\partial}{\partial y_i} \otimes \chi_i(g)\right)). \end{aligned}$$

Par suite, le morphisme $\exp(\theta)$ est Δ_∞ -équivariant.

Corollaire 11.20. *Soient M une petite $\widehat{R}_1$ -représentation de Δ_∞ , (N, θ) le petit $\widehat{R}_1$ -module de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\widehat{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ qui lui est associé par le foncteur (11.6.1), $(\widetilde{X}_0, \mathcal{M}_{\widetilde{X}_0})$ la $(\mathcal{A}_2(\overline{S}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\overline{S})})$ -déformation lisse de $(X, \mathcal{M}_X) \times_{(S, \mathcal{M}_S)} (\overline{S}, \mathcal{M}_{\overline{S}})$ définie par la carte (P, γ) (8.17.1), $\mathcal{D}_{\widetilde{X}_0}^\dagger$ l'anneau associé défini dans (10.1). Alors on a un $\mathcal{D}_{\widetilde{X}_0}^\dagger$ -isomorphisme canonique Δ -équivariant de $\widehat{R}$ -modules de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\widehat{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$*

$$(11.20.1) \quad N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{D}_{\widetilde{X}_0}^\dagger \xrightarrow{\sim} M \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{D}_{\widetilde{X}_0}^\dagger,$$

où N est muni de la représentation triviale de Δ et M est muni du $\widehat{R}_1$ -champ de Higgs nul.

Comme N est libre de type fini sur $\widehat{R}_1$, le morphisme canonique $N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathfrak{S}^\dagger \rightarrow N \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{\mathfrak{S}}$ est injectif. Donc d'après 11.19(ii), l'endomorphisme $\exp(\theta)$ (11.18.4) induit un $\mathfrak{S}^\dagger$ -isomorphisme

$$(11.20.2) \quad u: N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathfrak{S}^\dagger \xrightarrow{\sim} N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathfrak{S}^\dagger.$$

Compte tenu de 11.19(iv), l'isomorphisme (11.20.2) induit par extension des scalaires de $\mathfrak{S}^\dagger$ à $\mathcal{C}^\dagger$ un $\mathcal{C}^\dagger$ -isomorphisme Δ -équivariant

$$(11.20.3) \quad N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{C}^\dagger \xrightarrow{\sim} M \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{C}^\dagger,$$

où $\mathcal{C}^\dagger$ est muni de la représentation $\varphi_0^\dagger$ de Δ (9.1) et N de la représentation triviale. De plus, il résulte facilement de 11.19(iii) que (11.20.3) est un morphisme de $\widehat{R}$ -modules de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\widehat{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$, où $\mathcal{C}^\dagger$ est muni du champ de Higgs $d_{\mathcal{C}^\dagger}$ et M du $\widehat{R}_1$ -champ de Higgs nul. Compte tenu de 10.2, on prend alors pour (11.20.1) l'isomorphisme induit par (11.20.3).

Corollaire 11.21. *Sous les hypothèses de (11.20), $M \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R}$ est de Dolbeault, (N, θ) est soluble, et on a un isomorphisme canonique fonctoriel de $\widehat{R}_1$ -modules de Higgs (10.5.1)*

$$(11.21.1) \quad N \xrightarrow{\sim} H_{\widetilde{X}_0}(M \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R}),$$

et un isomorphisme canonique fonctoriel de $\widehat{R}$ -représentations de Δ (10.8.1)

$$(11.21.2) \quad M \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R} \xrightarrow{\sim} V_{\widetilde{X}_0}(N).$$

Les isomorphismes (11.21.1) et (11.21.2) résultent de (11.20.1); pour le premier, on utilise (10.4.1) et le fait que N est libre de type fini sur $\widehat{R}_1$, et pour le second, le fait que M est plat sur $\widehat{R}_1$ et que $\ker(d_{\mathcal{D}_{\widetilde{X}_0}^\dagger}) = \widehat{R}$. Leur caractère fonctoriel est une conséquence de la fonctorialité de l'isomorphisme $\exp(\theta)$ (11.18.4). Les deux premières assertions résultent immédiatement de (11.20.1), (11.21.1) et (11.21.2).

Corollaire 11.22. Soit $(\tilde{X}, \mathcal{M}_{\tilde{X}})$ une déformation lisse de $(X, \mathcal{M}_X) \times_{(S, \mathcal{M}_S)} (\bar{S}, \mathcal{M}_{\bar{S}})$ au-dessus de $(\mathcal{A}_2(\bar{S}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\bar{S})})$. Alors :

- (i) Toute petite $\widehat{R}$ -représentation de Δ est de Dolbeault, et son image par le foncteur $H_{\tilde{X}}$ est un petit $\widehat{R}_1$ -module de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ (10.5.1).
- (ii) Tout petit $\widehat{R}_1$ -module de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ est soluble, et son image par le foncteur $V_{\tilde{X}}$ est une petite $\widehat{R}$ -représentation de Δ (10.8.1).
- (iii) Les foncteurs $V_{\tilde{X}}$ et $H_{\tilde{X}}$ induisent des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre, entre la catégorie des petites $\widehat{R}$ -représentations de Δ et celle des petits $\widehat{R}_1$ -modules de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$.

- (i) Cela résulte de 11.12, 11.21 et 10.6(i).
- (ii) Cela résulte de 11.6, 11.21 et 10.9(i).
- (iii) Cela résulte de (i), (ii) et 10.13.

12. REPRÉSENTATIONS DE DOLBEAULT RATIONNELLES

Les hypothèses et notations du §10 sont en vigueur dans cette section.

Définition 12.1. On dit qu'une $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentation continue M de Δ est de Dolbeault si les conditions suivantes sont remplies :

- (i) M est un $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -module projectif de type fini, muni de la topologie p -adique (2.3) ;
- (ii) $H_{\tilde{X}}(M)$ est un $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -module projectif de type fini (10.5.1) ;
- (iii) le morphisme canonique

$$(12.1.1) \quad H_{\tilde{X}}(M) \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{D}_{\tilde{X}}^\dagger \rightarrow M \otimes_{\widehat{R}} \mathcal{D}_{\tilde{X}}^\dagger$$

est un isomorphisme.

Cette notion ne dépend pas du choix de $(\tilde{X}, \mathcal{M}_{\tilde{X}})$ (8.8 et 10.6(i)).

Définition 12.2. On dit qu'un $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -module de Higgs (N, θ) à coefficients dans $\xi^{-1}\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ est soluble si les conditions suivantes sont remplies :

- (i) N est un $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -module projectif de type fini ;
- (ii) $V_{\tilde{X}}(N)$ est un $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -module projectif de type fini ;
- (iii) le morphisme canonique

$$(12.2.1) \quad V_{\tilde{X}}(N) \otimes_{\widehat{R}} \mathcal{D}_{\tilde{X}}^\dagger \rightarrow N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{D}_{\tilde{X}}^\dagger$$

est un isomorphisme.

Cette notion ne dépend pas du choix de $(\tilde{X}, \mathcal{M}_{\tilde{X}})$ (8.8 et 10.9(i)).

Lemme 12.3. Soit M une $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentation de Dolbeault de Δ . Alors le $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -module de Higgs $H_{\tilde{X}}(M)$ est soluble et on a un $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -isomorphisme canonique fonctoriel et Δ -équivariant

$$(12.3.1) \quad V_{\tilde{X}}(H_{\tilde{X}}(M)) \xrightarrow{\sim} M.$$

Si l'on munit M du champ de Higgs trivial et $H_{\widehat{X}}(M)$ de l'action triviale de Δ , le morphisme canonique

$$(12.3.2) \quad H_{\widehat{X}}(M) \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{D}_{\widehat{X}}^\dagger \rightarrow M \otimes_{\widehat{R}} \mathcal{D}_{\widehat{X}}^\dagger$$

est un $\mathcal{D}_{\widehat{X}}^\dagger$ -isomorphisme Δ -équivariant de $\widehat{R}$ -modules de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$. Comme M est $\widehat{R}$ -plat et que $\ker(d_{\mathcal{D}_{\widehat{X}}^\dagger}) = \widehat{R}$, on en déduit un $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -isomorphisme Δ -équivariant $V_{\widehat{X}}(H_{\widehat{X}}(M)) \xrightarrow{\sim} M$. Le morphisme canonique

$$(12.3.3) \quad V_{\widehat{X}}(H_{\widehat{X}}(M)) \otimes_{\widehat{R}} \mathcal{D}_{\widehat{X}}^\dagger \rightarrow H_{\widehat{X}}(M) \otimes_{\widehat{R}} \mathcal{D}_{\widehat{X}}^\dagger$$

s'identifie alors à l'inverse de l'isomorphisme (12.3.2), ce qui montre que $H_{\widehat{X}}(M)$ est soluble.

Définition 12.4. Soient G un groupe topologique, A une $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ -algèbre complète et séparée pour la topologie p -adique, munie d'une action continue de G (par des homomorphismes de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ -algèbres). On dit qu'une $A[\frac{1}{p}]$ -représentation continue M de G est *petite* si les conditions suivantes sont remplies :

- (i) M est un $A[\frac{1}{p}]$ -module projectif de type fini, muni de la topologie p -adique (2.3) ;
- (ii) il existe un nombre rationnel $\alpha > \frac{2}{p-1}$ et un sous- A -module de type fini M° de M , stable par G , engendré par un nombre fini d'éléments G -invariants modulo $p^\alpha M^\circ$, et qui engendre M sur $A[\frac{1}{p}]$.

On notera que contrairement au cas entier (11.1), on ne demande pas que M soit libre sur $A[\frac{1}{p}]$. On désigne par $\text{Rep}_{A[\frac{1}{p}]}^p(G)$ la sous-catégorie pleine de $\text{Rep}_{A[\frac{1}{p}]}^{\text{cont}}(G)$ formée des A -représentations petites de G .

Remarques 12.5. Soient G un groupe topologique, A une $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ -algèbre complète et séparée pour la topologie p -adique, munie d'une action continue de G (par des homomorphismes de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ -algèbres).

- (i) Soient M un $A[\frac{1}{p}]$ -module projectif de type fini, M° un sous- A -module de type fini de M . Alors M° est complet et séparé pour la topologie p -adique. En effet, M° est complet en vertu de ([10] chap. III §2.12 cor. 1 de prop. 16). D'autre part, quitte à ajouter à M un facteur direct, on peut le supposer libre de type fini sur $A[\frac{1}{p}]$. Par suite, il existe un entier $m \geq 0$ tel que $p^m M^\circ$ soit contenu dans un A -module libre de type fini N . Donc $\cap_{n \geq 0} p^n M^\circ \subset \cap_{n \geq 0} p^n N = 0$.
- (ii) Soient M une $A[\frac{1}{p}]$ -représentation petite de G , M° un sous- A -module de type fini de M vérifiant la condition 12.4(ii). Alors d'après (i), M° est une A -représentation quasi-petite de G (11.1).

Définition 12.6. On dit qu'un $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -module de Higgs (N, θ) à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ est *petit* si les conditions suivantes sont remplies :

- (i) N est un $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -module projectif de type fini ;
- (ii) il existe un nombre rationnel $\beta > \frac{1}{p-1}$ et un sous- $\widehat{R}_1$ -module de type fini N° de N , qui l'engendre sur $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$, tels que l'on ait

$$(12.6.1) \quad \theta(N^\circ) \subset p^\beta \xi^{-1} N^\circ \otimes_R \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1.$$

On notera que contrairement au cas entier (11.2), on ne demande pas que N soit libre sur $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$. On désigne par $\text{MH}_{\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1}^p(\widehat{R}_1[\frac{1}{p}])$ la sous-catégorie pleine de $\text{MH}_{\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1}(\widehat{R}_1[\frac{1}{p}])$ formée des $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -modules de Higgs petits (cf. 2.16).

Lemme 12.7. *Soient A un anneau intègre de corps des fractions L , B un sous-anneau de L contenant A , N un B -module plat de type fini, $u_1, \dots, u_\ell$ des endomorphismes B -linéaires de N qui commutent deux à deux et tels que pour tout $1 \leq i \leq \ell$, le polynôme caractéristique de l'endomorphisme $u_i \otimes \text{id}$ de $N \otimes_B L$ soit à coefficients dans A . Alors N est engendré sur B par un sous- A -module de type fini M tel que $u_i(M) \subset M$ pour tout $1 \leq i \leq \ell$.*

On procède par récurrence sur le nombre d'endomorphismes. Supposons l'assertion établie pour $\ell - 1$ et montrons-la pour ℓ . Soit M' un sous- A -module de type fini de N qui l'engendre sur B et tel que $u_i(M') \subset M'$ pour tout $1 \leq i \leq \ell - 1$. Soit $P(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n \in A[X]$ le polynôme caractéristique de l'endomorphisme $u_\ell \otimes \text{id}$ de $N \otimes_B L$. Comme N est B -plat, on peut l'identifier à un sous- B -module de $N \otimes_B L$. Par suite, l'endomorphisme $P(u_\ell)$ de N est nul, et le sous- A -module $M = \sum_{i=0}^{n-1} u_\ell^i(M')$ de N répond à la question.

Lemme 12.8. *Soit (N, θ) un $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -module de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ tel que les conditions suivantes soient remplies :*

- (i) *N est un $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -module projectif de type fini ;*
- (ii) *il existe un nombre rationnel $\beta > \frac{1}{p-1}$ tel que pour tout $i \geq 1$, le i -ième invariant caractéristique de θ appartienne à $p^{i\beta}\xi^{-i}\text{Sym}_R^i(\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1) \otimes_R \widehat{R}_1$ (2.16.5).*

Alors (N, θ) est petit.

Cela résulte de 12.7 et 4.13.

12.9. Soient (N, θ) un petit $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -module de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$, β un nombre rationnel $> \frac{1}{p-1}$, N° un sous- $\widehat{R}_1$ -module de type fini de N , qui l'engendre sur $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$, tel que l'on ait

$$(12.9.1) \quad \theta(N^\circ) \subset p^\beta \xi^{-1} N^\circ \otimes_R \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1,$$

θ° le $\widehat{R}_1$ -champ de Higgs sur N° à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ induit par θ . Alors (N°, θ°) est un $\widehat{R}_1$ -module de Higgs quasi-petit (11.2). On désigne par φ° la $\widehat{R}_1$ -représentation quasi-petite de Δ_∞ sur N° associée à θ° par la formule (11.6.2), et par φ la petite $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -représentation de Δ_∞ sur N induite par φ° . Montrons que φ ne dépend pas du choix de N° , et que la correspondance $(N, \theta) \mapsto (N, \varphi)$ définit un foncteur

$$(12.9.2) \quad \text{MH}_{\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1}^p(\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]) \rightarrow \text{Rep}_{\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]}^p(\Delta_\infty).$$

En effet, soient $u: (N, \theta) \rightarrow (N_1, \theta_1)$ un morphisme de petits $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -modules de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$, N_1° un sous- $\widehat{R}_1$ -module de type fini de N_1 , qui l'engendre sur $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$, tel que l'on ait $u(N^\circ) \subset N_1^\circ$ et

$$(12.9.3) \quad \theta_1(N_1^\circ) \subset p^\beta \xi^{-1} N_1^\circ \otimes_R \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1.$$

On note θ_1° le $\widehat{R}_1$ -champ de Higgs sur N_1° à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ induit par θ_1 , φ_1° la $\widehat{R}_1$ -représentation de Δ_∞ sur N_1° associée à θ_1° par la formule (11.6.2), et φ_1 la $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -représentation de Δ_∞ sur N_1 induite par φ_1° . Le morphisme $(N^\circ, \varphi^\circ) \rightarrow (N_1^\circ, \varphi_1^\circ)$ induit par u étant clairement Δ_∞ -équivariant, il en est alors de même de $u: (N, \varphi) \rightarrow (N_1, \varphi_1)$.

Montrons que φ ne dépend pas du choix de N° . Soient γ un nombre rationnel $> \frac{1}{p-1}$, $N^\dagger$ un sous- $\widehat{R}_1$ -module de type fini de N , qui l'engendre sur $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$, tels que l'on ait

$$(12.9.4) \quad \theta(N^\dagger) \subset p^\gamma \xi^{-1} N^\dagger \otimes_R \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1.$$

Remplaçant β et γ par le plus petit d'entre eux, et $N^\dagger$ par $N^\circ + N^\dagger$, on peut supposer $\beta = \gamma$ et $N^\circ \subset N^\dagger$. Appliquant alors ce qui précède à l'identité de N , on déduit que φ ne dépend pas du choix de N° .

Montrons que pour tout morphisme $v: (N, \theta) \rightarrow (N', \theta')$ de petits $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -modules de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$, si φ' est la petite $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -représentation de Δ_∞ sur N' associée à θ' , alors $v: (N, \varphi) \rightarrow (N', \varphi')$ est Δ_∞ -équivariant. Soient β' un nombre rationnel $> \frac{1}{p-1}$, N'° un sous- $\widehat{R}_1$ -module de type fini de N' , qui l'engendre sur $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$, tel que l'on ait

$$(12.9.5) \quad \theta'(N'^\circ) \subset p^{\beta'} \xi^{-1} N'^\circ \otimes_R \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1.$$

Remplaçant β et β' par le plus petit d'entre eux, et N'° par $v(N^\circ) + N'^\circ$, on peut supposer $\beta = \beta'$ et $v(N^\circ) \subset N'^\circ$. On conclut alors comme plus haut que $v: (N, \varphi) \rightarrow (N', \varphi')$ est Δ_∞ -équivariant.

12.10. Soient (N, φ) une petite $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -représentation de Δ_∞ , α un nombre rationnel $> \frac{2}{p-1}$, N° un sous- $\widehat{R}_1$ -module de type fini de N , stable par Δ_∞ , engendré par un nombre fini d'éléments Δ_∞ -invariants modulo $p^\alpha N^\circ$, et qui engendre N sur $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$. D'après 12.5(ii), la $\widehat{R}_1$ -représentation φ° de Δ_∞ sur N° , induite par φ , est quasi-petite. Notons θ° le $\widehat{R}_1$ -champ de Higgs quasi-petit sur N° à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ associé à φ° par le foncteur (11.5.9), et θ le petit $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -champ de Higgs sur N induit par θ° . Procédant comme dans 12.9, on montre que (N, θ) ne dépend pas du choix N° , et que la correspondance $(N, \varphi) \mapsto (N, \theta)$ définit un foncteur

$$(12.10.1) \quad \text{Rep}_{\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]}^p(\Delta_\infty) \rightarrow \text{MH}_{\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1}^p(\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]).$$

Il résulte aussitôt de la preuve de 11.6 que les foncteurs (12.9.2) et (12.10.1) sont quasi-inverses l'un de l'autre.

Proposition 12.11. *Soient (N, θ) un petit $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -module de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$, φ la petite $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -représentation de Δ_∞ sur N définie par le foncteur (12.9.2). Alors :*

(i) *Il existe un $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -isomorphisme Δ -équivariant fonctoriel*

$$(12.11.1) \quad N \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R} \xrightarrow{\sim} V_{\widehat{X}}(N),$$

qui est de plus canonique si $(\widetilde{X}, \mathcal{M}_{\widetilde{X}})$ est la déformation $(\widetilde{X}_0, \mathcal{M}_{\widetilde{X}_0})$ définie par la carte (P, γ) (8.17.1).

(ii) *Le $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -module de Higgs (N, θ) est soluble.*

(iii) *La $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentation $V_{\widehat{X}}(N)$ de Δ est petite et de Dolbeault, et on a un isomorphisme canonique fonctoriel de $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -modules de Higgs*

$$(12.11.2) \quad H_{\widehat{X}}(V_{\widehat{X}}(N)) \xrightarrow{\sim} N.$$

(i) D'après 8.8 et 10.9(i), on peut se borner au cas où $(\tilde{X}, \mathcal{M}_{\tilde{X}})$ est la déformation $(\tilde{X}_0, \mathcal{M}_{\tilde{X}_0})$. Soient β un nombre rationnel $> \frac{1}{p-1}$, N° un sous- $\widehat{R}_1$ -module de type fini de N , qui l'engendre sur $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$, tel que l'on ait

$$(12.11.3) \quad \theta(N^\circ) \subset p^\beta \xi^{-1} N^\circ \otimes_R \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1,$$

θ° le $\widehat{R}_1$ -champ de Higgs sur N° à coefficients dans $\xi^{-1} \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ induit par θ . Reprenons les notations générales de (11.18), et notons

$$\begin{aligned} i^\circ : N^\circ \otimes_{\widehat{R}_1} \mathfrak{S}^\dagger &\rightarrow N^\circ \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{\mathfrak{S}} \\ i : N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathfrak{S}^\dagger &\rightarrow N \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{\mathfrak{S}} \end{aligned}$$

les morphismes canoniques. D'après 11.19, l'endomorphisme $\exp(\theta^\circ) : N^\circ \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{\mathfrak{S}} \rightarrow N^\circ \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{\mathfrak{S}}$ (11.18.4) induit un isomorphisme $\mathfrak{S}^\dagger$ -linéaire

$$(12.11.4) \quad i^\circ(N^\circ \otimes_{\widehat{R}_1} \mathfrak{S}^\dagger) \xrightarrow{\sim} i^\circ(N^\circ \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{\mathfrak{S}}).$$

Prenant le produit tensoriel $\otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$, on obtient un $\mathfrak{S}^\dagger$ -isomorphisme

$$(12.11.5) \quad N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathfrak{S}^\dagger \xrightarrow{\sim} N \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{\mathfrak{S}}.$$

En effet, i est injectif car N est $\widehat{R}_1$ -plat. On désigne par

$$(12.11.6) \quad \exp(\theta) : N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{C}^\dagger \xrightarrow{\sim} N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{C}^\dagger$$

l'isomorphisme déduit de (12.11.5) par extension des scalaires de $\mathfrak{S}^\dagger$ à $\mathcal{C}^\dagger$. Il résulte de 11.19(iv) que $\exp(\theta)$ est Δ -équivariant lorsque l'on munit $\mathcal{C}^\dagger$ de la représentation $\varphi_0^\dagger$ (9.1), le module N de la source de la représentation triviale et le module N du but de la représentation induite par φ .

Soit $\theta_{\text{tot}} = \theta \otimes \text{id} + \text{id} \otimes d_{\mathcal{C}^\dagger}$ le $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -champ de Higgs total sur $N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{C}^\dagger$ à coefficients dans $\xi^{-1} \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ (2.16.9). Il résulte facilement de 11.19(iii) que le diagramme

$$(12.11.7) \quad \begin{array}{ccc} N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{C}^\dagger & \xrightarrow{\exp(\theta)} & N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{C}^\dagger \\ \theta_{\text{tot}} \downarrow & & \downarrow \text{id} \otimes d_{\mathcal{C}^\dagger} \\ \xi^{-1} N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{C}^\dagger \otimes_R \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 & \xrightarrow{\exp(\theta) \otimes \text{id}} & \xi^{-1} N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{C}^\dagger \otimes_R \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \end{array}$$

est commutatif.

Compte tenu de (8.10.4) et 8.13, on déduit de ce qui précède que $\exp(\theta)$ induit un $\mathcal{D}_{\tilde{X}_0}^\dagger$ -isomorphisme Δ -équivariant de $\widehat{R}$ -modules de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1} \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$

$$(12.11.8) \quad N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{D}_{\tilde{X}_0}^\dagger \xrightarrow{\sim} N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{D}_{\tilde{X}_0}^\dagger,$$

où le module N de la source est muni de la représentation triviale de Δ et du $\widehat{R}_1$ -champ de Higgs θ , et le module N du but est muni du $\widehat{R}_1$ -champ de Higgs nul et de la représentation de Δ induite par φ . Comme N est $\widehat{R}_1$ -plat et que $\ker(d_{\mathcal{D}_{\tilde{X}_0}^\dagger}) = \widehat{R}$, l'isomorphisme (12.11.8) induit un isomorphisme Δ -équivariant

$$(12.11.9) \quad V_{\tilde{X}_0}(N) \xrightarrow{\sim} N \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R}.$$

Procédant comme dans 12.9, on voit que cet isomorphisme ne dépend pas du choix de N° et qu'il est fonctoriel en (N, θ) .

(ii) Le morphisme canonique

$$(12.11.10) \quad V_{\tilde{X}_0}(N) \otimes_{\widehat{R}} \mathcal{D}_{\tilde{X}_0}^\dagger \rightarrow N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{D}_{\tilde{X}_0}^\dagger$$

s'identifie au morphisme composé

$$(12.11.11) \quad V_{\tilde{X}_0}(N) \otimes_{\widehat{R}} \mathcal{D}_{\tilde{X}_0}^\dagger \rightarrow N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{D}_{\tilde{X}_0}^\dagger \rightarrow N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{D}_{\tilde{X}}^\dagger$$

où la première flèche est induite par l'isomorphisme (12.11.9) et la seconde est l'inverse de l'isomorphisme (12.11.8). Il est donc bijectif. Comme $V_{\tilde{X}_0}(N)$ est un $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -module projectif de type fini d'après (12.11.9), on en déduit que (N, θ) est un $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -module de Higgs soluble.

(iii) D'après (12.11.1), $V_{\tilde{X}}(N)$ est une petite $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentation de Δ ; elle est en particulier continue pour la topologie p -adique de $V_{\tilde{X}}(N)$. En vertu de (ii), si l'on munit N de l'action triviale de Δ et $V_{\tilde{X}}(N)$ du champ de Higgs nul, le morphisme canonique

$$(12.11.12) \quad V_{\tilde{X}}(N) \otimes_{\widehat{R}} \mathcal{D}_{\tilde{X}}^\dagger \rightarrow N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{D}_{\tilde{X}}^\dagger$$

est un $\mathcal{D}_{\tilde{X}}^\dagger$ -isomorphisme Δ -équivariant de $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -modules de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\sigma_K}^1$. Comme N est un $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -module projectif de type fini, on a $(N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{D}_{\tilde{X}}^\dagger)^\Delta = N$ (10.4.1). On en déduit un isomorphisme de $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -modules de Higgs $H_{\tilde{X}}(V_{\tilde{X}}(N)) \xrightarrow{\sim} N$. Il résulte alors de (12.11.12) que $V_{\tilde{X}}(N)$ est une $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentation de Dolbeault de Δ .

Théorème 12.12. *Soit (N, θ) un $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -module de Higgs soluble à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\sigma_K}^1$. Alors $V_{\tilde{X}}(N)$ est une $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentation de Dolbeault de Δ , et on a un isomorphisme canonique fonctoriel de $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -modules de Higgs*

$$(12.12.1) \quad H_{\tilde{X}}(V_{\tilde{X}}(N)) \xrightarrow{\sim} N.$$

La preuve de ce théorème est donnée dans 12.37. Nous l'avons repoussée vers la fin de cette section car elle nécessite l'introduction de notations assez lourdes (à partir de 12.24).

Corollaire 12.13. *Les foncteurs $H_{\tilde{X}}$ et $V_{\tilde{X}}$ induisent des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre, entre la catégorie des $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentations de Dolbeault de Δ et celle des $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -modules de Higgs solubles à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\sigma_K}^1$.*

Cela résulte de 12.3 et 12.12.

Corollaire 12.14. *Le foncteur $V_{\tilde{X}}$ induit un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des petits $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -modules de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\sigma_K}^1$ dans celle des petites $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentations de Δ qui sont de Dolbeault.*

En effet, le foncteur en question est bien défini en vertu de 12.11(iii), et il est pleinement fidèle en vertu de 12.13 et 12.11(ii).

Proposition 12.15. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i) Pour toute petite $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentation M de Δ , il existe un petit $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -module de Higgs N à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ et un $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -isomorphisme Δ -équivariant

$$(12.15.1) \quad M \xrightarrow{\sim} V_{\widehat{X}}(N).$$

- (ii) Toute petite $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentation de Δ est de Dolbeault, et son image par le foncteur $H_{\widehat{X}}$ est un petit $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -module de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$.
- (iii) Les foncteurs $H_{\widehat{X}}$ et $V_{\widehat{X}}$ induisent des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre, entre la catégorie des petites $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentations de Δ et celle des petits $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -modules de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$.
- (iv) Le foncteur

$$(12.15.2) \quad \text{Rep}_{\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]}^p(\Delta_\infty) \rightarrow \text{Rep}_{\widehat{R}[\frac{1}{p}]}^p(\Delta), \quad M \mapsto M \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R}$$

est une équivalence de catégories.

En effet, l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) résulte de 12.11(iii), l'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) est une conséquence de 12.11 et 12.13, et l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) est immédiate.

Montrons ensuite que les trois premières propositions impliquent (iv). Pour toute petite $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentation M de Δ , le $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -module de Higgs $H_{\widehat{X}}(M)$ est petit d'après (iii). Il lui est donc associé par le foncteur (12.9.2) une petite $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -représentation φ de Δ_∞ sur $H_{\widehat{X}}(M)$. La correspondance $M \rightarrow (H_{\widehat{X}}(M), \varphi)$ définit un foncteur

$$(12.15.3) \quad \text{Rep}_{\widehat{R}[\frac{1}{p}]}^p(\Delta) \rightarrow \text{Rep}_{\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]}^p(\Delta_\infty).$$

Montrons que les foncteurs (12.15.2) et (12.15.3) sont quasi-inverses l'un de l'autre. Pour toute petite $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentation M de Δ , on a des $\widehat{R}$ -isomorphismes Δ -équivariants fonctoriels ((12.11.1) et (12.11.2))

$$(12.15.4) \quad H_{\widehat{X}}(M) \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R} \xrightarrow{\sim} V_{\widehat{X}}(H_{\widehat{X}}(M)) \xrightarrow{\sim} M.$$

Inversement, soient (N, φ) une petite $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -représentation de Δ_∞ , θ le petit $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -champ de Higgs sur N à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ associé à φ par le foncteur (12.10.1). D'après la preuve de 12.11(i), on a un $\mathcal{D}_{\widehat{X}}^\dagger$ -isomorphisme Δ -équivariant et fonctoriel de $\widehat{R}$ -modules de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ (12.11.8)

$$(12.15.5) \quad N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{D}_{\widehat{X}}^\dagger \xrightarrow{\sim} N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{D}_{\widehat{X}}^\dagger,$$

où le module N de la source est muni de la représentation triviale de Δ et du $\widehat{R}_1$ -champ de Higgs θ , et le module N du but est muni du $\widehat{R}_1$ -champ de Higgs nul et de la représentation de Δ induite par φ . Comme N est projectif de type fini sur $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$, on en déduit par (10.4.1) un isomorphisme fonctoriel de $\widehat{R}_1$ -modules de Higgs

$$(12.15.6) \quad (N, \theta) \xrightarrow{\sim} H_{\widehat{X}}(N \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R}).$$

Appliquant le foncteur (12.9.2), quasi-inverse du foncteur (12.10.1), on obtient un $\widehat{R}_1$ -isomorphisme Δ_∞ -équivalentiel et fonctoriel

$$(12.15.7) \quad (N, \varphi) \xrightarrow{\sim} H_{\widehat{X}}(N \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R}).$$

Les foncteurs (12.15.2) et (12.15.3) sont donc quasi-inverses l'un de l'autre.

Montrons enfin que (iv) implique (i). Soit M une petite $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentation de Δ . D'après (iv), il existe une petite $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -représentation (N, φ) de Δ_∞ et un $\widehat{R}$ -isomorphisme Δ -équivalentiel $M \xrightarrow{\sim} N \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R}$. Soit θ le petit $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -champ de Higgs sur N à coefficients dans $\xi^{-1}\widehat{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ associé à φ par le foncteur (12.10.1). En vertu de 12.11(i), comme les foncteurs (12.9.2) et (12.10.1) sont quasi-inverses l'un de l'autre, on a un $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -isomorphisme Δ -équivalentiel $M \xrightarrow{\sim} V_{\widehat{X}}(N)$, d'où la proposition.

Corollaire 12.16. *Supposons les propositions équivalentes de (12.15) satisfaites. Alors pour toute petite $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentation M de Δ , la $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentation $\mathrm{Hom}_{\widehat{R}[\frac{1}{p}]}(M, \widehat{R}[\frac{1}{p}])$ de Δ est petite.*

En effet, il existe une petite $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -représentation N de Δ_∞ et un $\widehat{R}$ -isomorphisme Δ -équivalentiel $M \xrightarrow{\sim} N \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R}$. On en déduit un $\widehat{R}$ -isomorphisme Δ -équivalentiel

$$(12.16.1) \quad \mathrm{Hom}_{\widehat{R}[\frac{1}{p}]}(M, \widehat{R}[\frac{1}{p}]) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]}(N, \widehat{R}_1[\frac{1}{p}]) \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R}.$$

Soient α un nombre rationnel $> \frac{2}{p-1}$, N° un sous- $\widehat{R}_1$ -module de type fini de N , stable par Δ_∞ , engendré par un nombre fini d'éléments Δ_∞ -invariants modulo $p^\alpha N^\circ$, et qui engendre N sur $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$. En vertu de ([1] 10.10.2(iii)), N° est un $\widehat{R}_1$ -module cohérent. Il en est donc de même de $\mathrm{Hom}_{\widehat{R}_1}(N^\circ, \widehat{R}_1)$, et le morphisme canonique

$$(12.16.2) \quad \mathrm{Hom}_{\widehat{R}_1}(N^\circ, \widehat{R}_1) \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R}_1[\frac{1}{p}] \rightarrow \mathrm{Hom}_{\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]}(N, \widehat{R}_1[\frac{1}{p}])$$

est un isomorphisme. D'autre part, comme $\widehat{R}_1$ est $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ -plat, pour tout nombre rationnel $\beta > 0$, le morphisme canonique

$$(12.16.3) \quad \mathrm{Hom}_{\widehat{R}_1}(N^\circ, \widehat{R}_1) \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{K}}} \mathcal{O}_{\overline{K}}/p^\beta \mathcal{O}_{\overline{K}} \rightarrow \mathrm{Hom}_{R_1}(N^\circ/p^\beta N^\circ, R_1/p^\beta R_1)$$

est injectif. Il s'ensuit que la représentation de Δ_∞ sur $\mathrm{Hom}_{\widehat{R}_1}(N^\circ, \widehat{R}_1)$ est continue pour la topologie p -adique, et est quasi-petite, d'où la proposition.

Corollaire 12.17. *Supposons les propositions équivalentes de (12.15) satisfaites. Alors pour toutes petites $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentations M et M' de Δ , et tout morphisme $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -linéaire, Δ -équivalentiel et surjectif $u: M' \rightarrow M$, la $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentation de Δ sur le noyau de u est petite.*

Cela résulte de 12.16.

Proposition 12.18. *Supposons $d = 1$, et soit M une petite $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentation de Δ . Alors il existe une petite $\widehat{R}_1$ -représentation M' de Δ_∞ , et un morphisme $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -linéaire, Δ -équivalentiel et surjectif*

$$(12.18.1) \quad M' \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R}[\frac{1}{p}] \rightarrow M.$$

En effet, d'après 12.5, il existe une $\widehat{R}$ -représentation quasi-petite M° de Δ telle que M° soit $\mathbb{Z}_p$ -plat, et un isomorphisme $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -linéaire et Δ -équivariant

$$(12.18.2) \quad M^\circ \otimes_{\widehat{R}} \widehat{R}[\frac{1}{p}] \xrightarrow{\sim} M.$$

En vertu de 11.17, quitte à remplacer M° par $p^\varepsilon M^\circ$, pour un nombre rationnel $\varepsilon > 0$, on peut supposer qu'il existe une $\widehat{R}_{p^\infty}$ -représentation quasi-petite N de Δ_{p^∞} , et un morphisme $\widehat{R}$ -linéaire, Δ -équivariant et surjectif

$$(12.18.3) \quad N \otimes_{\widehat{R}_{p^\infty}} \widehat{R} \rightarrow M^\circ.$$

Il existe un nombre rationnel $\alpha > \frac{1}{p-1}$ et des générateurs $x_1, \dots, x_d$ de N sur $\widehat{R}_{p^\infty}$ qui sont Δ_{p^∞} -invariants modulo $p^{2\alpha}N$. On désigne par N' le $\widehat{R}_{p^\infty}$ -module libre de base $e_1, \dots, e_d$ et par $\sigma: N' \rightarrow N$ le morphisme $\widehat{R}_{p^\infty}$ -linéaire qui envoie e_i sur x_i pour tout $1 \leq i \leq d$. Notons

$$(12.18.4) \quad \varphi_0: \Delta_{p^\infty} \rightarrow \text{Aut}_{\widehat{R}_1}(N')$$

la $\widehat{R}_{p^\infty}$ -représentation triviale de Δ_{p^∞} relativement à la base $e_1, \dots, e_d$. Choisissons une $\mathbb{Z}_p$ -base γ de Δ_{p^∞} . Il existe un automorphisme $\widehat{R}_{p^\infty}$ -linéaire u de N' tel que pour tout $1 \leq i \leq d$, on ait $u(e_i) - e_i \in p^{2\alpha}N'$ et

$$(12.18.5) \quad \sigma(u(e_i)) = \gamma(x_i).$$

Pour tout $g \in \Delta_{p^\infty}$, on note ${}^g u$ l'automorphisme $\widehat{R}_{p^\infty}$ -linéaire $\varphi_0(g) \circ u \circ \varphi_0(g^{-1})$ de N' . Si $A \in \text{GL}_d(\widehat{R}_{p^\infty})$ est la matrice de u relativement à la base $e_1, \dots, e_d$ de N' , alors $g(A)$ est la matrice de ${}^g u$ relativement à la même base. Soient r un entier ≥ 0 , A_r la classe de A dans $\text{GL}_d(R_{p^\infty}/p^r R_{p^\infty})$. Il existe un entier m tel que A_r appartiennent à $\text{GL}_d(R_{p^m}/p^r R_{p^m})$, de sorte que $\gamma^{p^m}(A_r) = A_r$. Donc pour tout $n \geq 0$, on a

$$(12.18.6) \quad A_r \gamma(A_r) \gamma^2(A_r) \dots \gamma^{p^{m+n}-1}(A_r) = (A_r \gamma(A_r) \gamma^2(A_r) \dots \gamma^{p^m-1}(A_r))^{p^n}.$$

Comme $A \equiv \text{id} \pmod{(p^{2\alpha} \widehat{R}_{p^\infty})}$, pour n suffisamment grand, le produit (12.18.6) est égal à l'identité de $\text{GL}_d(R_{p^\infty}/p^r R_{p^\infty})$. Par suite, pour tout $y \in N'$, la suite d'éléments de N'

$$(12.18.7) \quad n \mapsto (u \circ \varphi_0(\gamma))^{p^n}(y) = u \circ ({}^\gamma u) \circ \dots \circ ({}^{\gamma^{p^n-1}} u) \circ \varphi_0(\gamma^{p^n})(y)$$

converge vers y , pour la topologie p -adique. On en déduit que l'homomorphisme

$$(12.18.8) \quad \mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}_{\widehat{R}_1}(N'), \quad n \mapsto (u \circ \varphi_0(\gamma))^n$$

se prolonge en une $\widehat{R}_{p^\infty}$ -représentation φ de Δ_{p^∞} sur N' , où l'on identifie $\mathbb{Z}$ à un sous-groupe de Δ_{p^∞} par l'injection $n \mapsto \gamma^n$. Il est clair que φ est une représentation continue pour la topologie p -adique de N' , et est même petite. De plus, comme $\varphi(\gamma) = u \circ \varphi_0(\gamma)$, le morphisme σ est Δ_{p^∞} -équivariant (12.18.5). La proposition résulte alors de 11.12.

Proposition 12.19. *Supposons $d = 1$. Alors les propositions de (12.15) sont équivalentes à la proposition suivante :*

- (★) *Pour toutes petites $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentations M et M' de Δ , et tout morphisme $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -linéaire, Δ -équivariant et surjectif $u: M' \rightarrow M$, la $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentation de Δ sur le noyau de u est petite.*

D'après 12.15 et 12.17, il suffit de montrer que $(\star)$ implique 12.15(i). Soit M une petite $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentation de Δ . D'après 12.18, il existe une petite $\widehat{R}$ -représentation M' de Δ et un morphisme $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -linéaire, Δ -équivariant et surjectif

$$(12.19.1) \quad u: M' \otimes_{\widehat{R}} \widehat{R}[\frac{1}{p}] \rightarrow M.$$

Par hypothèse, la $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentation de Δ sur le noyau de u est petite. Appliquant de nouveau 12.18, on obtient une petite $\widehat{R}$ -représentation M'' de Δ et une suite exacte de morphismes $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -linéaires et Δ -équivariants

$$(12.19.2) \quad M'' \otimes_{\widehat{R}} \widehat{R}[\frac{1}{p}] \xrightarrow{v} M' \otimes_{\widehat{R}} \widehat{R}[\frac{1}{p}] \xrightarrow{u} M \rightarrow 0.$$

Remplaçant M'' par $p^n M''$ pour un entier $n \geq 0$, on peut supposer que $v(M'') \subset M'$. On désigne par (N, θ) le $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -module de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1} \widehat{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$, conoyau du morphisme

$$(12.19.3) \quad H_{\widehat{X}}(v): H_{\widehat{X}}(M'' \otimes_{\widehat{R}} \widehat{R}[\frac{1}{p}]) \rightarrow H_{\widehat{X}}(M' \otimes_{\widehat{R}} \widehat{R}[\frac{1}{p}]).$$

En vertu de 11.22, la $\widehat{R}$ -représentation M' de Δ est de Dolbeault, le $\widehat{R}_1$ -module de Higgs $H_{\widehat{X}}(M')$ est petit et soluble, et on a un $\widehat{R}$ -isomorphisme canonique fonctoriel et Δ -équivariant (10.11.1)

$$(12.19.4) \quad V_{\widehat{X}}(H_{\widehat{X}}(M')) \xrightarrow{\sim} M'.$$

Par suite, d'après 10.6(i) et (11.21.2), on a un $\widehat{R}$ -isomorphisme fonctoriel

$$(12.19.5) \quad H_{\widehat{X}}(M') \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R} \xrightarrow{\sim} M'.$$

On en déduit un isomorphisme

$$(12.19.6) \quad N \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R} \xrightarrow{\sim} M.$$

Comme $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ est fidèlement plat sur $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ (cf. [12] 3.2.3), N est projectif de type fini sur $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$. Par suite, en tant que quotient de $H_{\widehat{X}}(M' \otimes_{\widehat{R}} \widehat{R}[\frac{1}{p}])$, le $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -module de Higgs (N, θ) est petit. Donc en vertu de 12.11(i) et (12.19.4), on a un $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -isomorphisme Δ -équivariant $M \xrightarrow{\sim} V_{\widehat{X}}(N)$, d'où la proposition 12.15(i).

Remarques 12.20. (i) Les énoncés 12.18 et 12.19 sont directement inspirés de l'approche de Faltings ([17] theo. 3, page 852).

(ii) On s'attend à ce que les propositions équivalentes de 12.15 soient vérifiées pour tout d .

12.21. Soient M une $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentation de Dolbeault de Δ , $(H_{\widehat{X}}(M), \theta)$ le $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -module de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1} \widehat{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ associé (10.5.2), $\theta_{\text{tot}} = \theta \otimes \text{id} + \text{id} \otimes d_{\mathcal{D}_{\widehat{X}}^\dagger}$ le $\widehat{R}_1$ -champ de Higgs total sur $H_{\widehat{X}}(M) \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{D}_{\widehat{X}}^\dagger$. Il résulte aussitôt de (12.1.1) qu'on a un isomorphisme canonique fonctoriel de complexes de $\widehat{R}$ -représentations

$$(12.21.1) \quad \mathbb{K}^\bullet(H_{\widehat{X}}(M) \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{D}_{\widehat{X}}^\dagger, \theta_{\text{tot}}) \xrightarrow{\sim} M \otimes_{\widehat{R}} \mathbb{K}^\bullet(\mathcal{D}_{\widehat{X}}^\dagger, d_{\mathcal{D}_{\widehat{X}}^\dagger}),$$

où $\mathbb{K}^\bullet(-, -)$ désigne le complexe de Dolbeault (2.16.4). Pour tout $i \geq 0$, $H_{\tilde{X}}(M) \otimes_R \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^i$ étant un facteur direct d'un $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -module libre de type fini, on a, d'après (10.4.1),

$$(12.21.2) \quad (\xi^{-i} H_{\tilde{X}}(M) \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{D}_{\tilde{X}}^\dagger \otimes_R \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^i)^{\Delta} = \xi^{-i} H_{\tilde{X}}(M) \otimes_R \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^i.$$

On en déduit un isomorphisme canonique fonctoriel de complexes de $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -modules

$$(12.21.3) \quad \mathbb{K}^\bullet(H_{\tilde{X}}(M), \theta) \xrightarrow{\sim} (M \otimes_{\widehat{R}} \mathbb{K}^\bullet(\mathcal{D}_{\tilde{X}}^\dagger, d_{\mathcal{D}_{\tilde{X}}^\dagger}))^{\Delta},$$

où le foncteur $(-)^{\Delta}$ à gauche est défini composante par composante. Ce résultat peut se raffiner comme suit.

Proposition 12.22 ([17] §3, [43] 6.1). *Soient M une $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentation de Dolbeault de Δ , $(H_{\tilde{X}}(M), \theta)$ le $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -module de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1} \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ associé (10.5.2). Alors on a un isomorphisme fonctoriel en M dans $\mathbf{D}^+(\text{Mod}(\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]))$*

$$(12.22.1) \quad \mathbf{C}_{\text{cont}}^\bullet(\Delta, M) \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^\bullet(H_{\tilde{X}}(M), \theta),$$

où $\mathbf{C}_{\text{cont}}^\bullet(\Delta, M)$ est le complexe de cochaînes continues de Δ dans M (2.5) et $\mathbb{K}^\bullet(H_{\tilde{X}}(M), \theta)$ est le complexe de Dolbeault (2.16.4). De plus, l'isomorphisme est canonique si $(\tilde{X}, \mathcal{M}_{\tilde{X}})$ est la déformation $(\tilde{X}_0, \mathcal{M}_{\tilde{X}_0})$ définie par la carte (P, γ) (8.17.1).

Il suffit évidemment de montrer l'énoncé relatif à la déformation $(\tilde{X}_0, \mathcal{M}_{\tilde{X}_0})$ (10.6(i)). Reprenons les notations de 9.1 et 9.4. Pour tout nombre rationnel $c > 0$, on munit $\widehat{\mathcal{C}}^c$ de l'action continue de Δ induite φ_0 (9.5). Alors, avec les notations de 9.6, pour tout entier $i \geq 0$ et tous nombres rationnels $c' > c > 0$, le morphisme canonique

$$(12.22.2) \quad \mathbf{C}_{\text{cont}}^i(\Delta, M \otimes_{\widehat{R}} \mathbb{K}^\bullet(\widehat{\mathcal{C}}^{c'}, d_{\mathcal{C}^\dagger})) \rightarrow \mathbf{C}_{\text{cont}}^i(\Delta, M \otimes_{\widehat{R}} \mathbb{K}^\bullet(\widehat{\mathcal{C}}^c, d_{\mathcal{C}^\dagger}))$$

est homotope à 0 en vertu de 9.7. Par suite, les morphismes canoniques $\widehat{R} \rightarrow \mathbb{K}^\bullet(\widehat{\mathcal{C}}^c, d_{\mathcal{C}^\dagger})$, où $\widehat{R}$ est concentré en degré 0, induisent un quasi-isomorphisme

$$(12.22.3) \quad \mathbf{C}_{\text{cont}}^\bullet(\Delta, M) \rightarrow \lim_{\substack{\longrightarrow \\ c \in \mathbb{Q}_{>0}}} \mathbf{C}_{\text{cont}}^\bullet(\Delta, M \otimes_{\widehat{R}} \mathbb{K}^\bullet(\widehat{\mathcal{C}}^c, d_{\mathcal{C}^\dagger})).$$

Compte tenu de (9.4.2), 10.2 et du fait que M (resp. $H_{\tilde{X}_0}(M)$) est projectif de type fini sur $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ (resp. $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$), il existe un nombre rationnel $c_0 > 0$ tel que pour tout $c > c_0$, l'isomorphisme (12.1.1) induise un isomorphisme

$$(12.22.4) \quad H_{\tilde{X}_0}(M) \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{\mathcal{C}}^c \xrightarrow{\sim} M \otimes_{\widehat{R}} \widehat{\mathcal{C}}^c.$$

Notant $\theta_{\text{tot}} = \theta \otimes \text{id} + \text{id} \otimes d_{\mathcal{C}^\dagger}$ le $\widehat{R}_1$ -champ de Higgs total sur $H_{\tilde{X}_0}(M) \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{\mathcal{C}}^\dagger$, on en déduit un isomorphisme

$$(12.22.5) \quad \mathbb{K}^\bullet(H_{\tilde{X}_0}(M) \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{\mathcal{C}}^c, \theta_{\text{tot}}) \xrightarrow{\sim} M \otimes_{\widehat{R}} \mathbb{K}^\bullet(\widehat{\mathcal{C}}^c, d_{\mathcal{C}^\dagger}).$$

Comme $H_{\tilde{X}_0}(M)$ est un facteur direct d'un $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -module libre de type fini, le morphisme canonique

$$(12.22.6) \quad \mathbb{K}^\bullet(H_{\tilde{X}_0}(M) \otimes_{\widehat{R}_1} \mathbf{C}_{\text{cont}}^\bullet(\Delta, \widehat{\mathcal{C}}^c), \theta_{\text{tot}}) \rightarrow \mathbf{C}_{\text{cont}}^\bullet(\Delta, \mathbb{K}^\bullet(H_{\tilde{X}_0}(M) \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{\mathcal{C}}^c, \theta_{\text{tot}}))$$

est un isomorphisme. D'autre part, il résulte de 9.9 que le morphisme canonique

$$(12.22.7) \quad \mathbb{K}^\bullet(\mathrm{H}_{\tilde{X}_0}(M), \theta) \rightarrow \lim_{c \in \mathbb{Q}_{>0}} \mathbb{K}^\bullet(\mathrm{H}_{\tilde{X}_0}(M) \otimes_{\widehat{R}_1} \mathrm{C}_{\mathrm{cont}}^\bullet(\Delta, \widehat{\mathcal{C}}^c), \theta_{\mathrm{tot}})$$

est un quasi-isomorphisme. La proposition s'ensuit.

Remarque 12.23. Soit M une *petite* $\widehat{R}$ -représentation de Δ . D'après 11.8 et 11.12, il existe une petite $\widehat{R}_1$ -représentation M° de Δ_{p^∞} tel que M soit isomorphe à $M^\circ \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R}$. Pour tous entiers $i, n \geq 0$, les propositions 6.1 et 6.26 permettent de calculer les groupes de cohomologie $\mathrm{H}^i(\Delta, M/p^n M)$ en terme d'un $\widehat{R}_1$ -champ de Higgs θ° sur M° à coefficients dans $\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}_1(-1)$, à des $(\mathcal{O}_{\overline{K}}/(p^{\frac{1}{p-1}} \mathfrak{m}_{\overline{K}}))$ -modules près (cf. 6.2 et (5.12.1)). Si $(\tilde{X}, \mathcal{M}_{\tilde{X}})$ est la déformation $(\tilde{X}_0, \mathcal{M}_{\tilde{X}_0})$ définie par la carte (P, γ) (8.17.1), on peut démontrer que le champ de Higgs sur $\mathrm{H}_{\tilde{X}_0}(M)$ est égal au "logarithme" de θ° (cf. 11.7 et 11.21) et on peut en déduire la proposition 12.22 par passage à la limite projective (cf. 2.13). Nous ne développerons pas cette approche car d'une part, les conditions requises sur M sont plus restrictives que celles de 12.22 et d'autre part le résultat est plus faible puisqu'il ne vaut pas dans la catégorie dérivée (cf. [13] 4.1 ; on prendra garde aussi que le passage à la limite projective dans *loc. cit.* nécessite un peu plus de travail et que son énoncé 2.2 doit être légèrement affaibli).

12.24. Dans la suite de cette section, n désigne un entier ≥ 0 . Considérons l'anneau R_{p^n} défini dans (4.7) et posons

$$(12.24.1) \quad \Delta^{(n)} = \mathrm{Gal}(\overline{R}/R_{p^n}),$$

$$(12.24.2) \quad \Delta_\infty^{(n)} = \mathrm{Gal}(R_\infty/R_{p^n}),$$

que l'on identifie à des sous-groupes ouverts de Δ et Δ_∞ , respectivement. Rappelons d'autre part qu'on a défini un morphisme $f_{p^n} : (X_{p^n}, \mathcal{M}_{X_{p^n}}) \rightarrow (S_{p^n}, \mathcal{M}_{S_{p^n}})$ (4.5.3), où $X_{p^n} = \mathrm{Spec}(A_{p^n})$, $A_{p^n} = R \otimes_{B[P]} B[P^{(p^n)}]$ (4.5.2) et $\mathcal{M}_{X_{p^n}}$ est la structure logarithmique sur X_{p^n} induite par l'homomorphisme canonique $P^{(p^n)} \rightarrow A_{p^n}$ (les notations sont celles de § 5). Posons alors

$$(12.24.3) \quad \tilde{\Omega}_{A_{p^n}/\mathcal{O}_{K_{p^n}}}^1 = \Omega_{(A_{p^n}, P^{(p^n)})/(\mathcal{O}_{K_{p^n}}, \mathbb{N}^{(p^n)})}^1,$$

$$(12.24.4) \quad \mathcal{C}_n = \mathrm{Sym}_{\widehat{R}}(\xi^{-1} \tilde{\Omega}_{A_{p^n}/\mathcal{O}_{K_{p^n}}}^1 \otimes_{A_{p^n}} \widehat{R}).$$

On a donc $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$ (8.5.5). Notons $\widehat{\mathcal{C}}_n$ le séparé complété p -adique de $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_n^\dagger$ son complété faible (cf. 9.1). On désigne par

$$(12.24.5) \quad d_{\mathcal{C}_n^\dagger} : \mathcal{C}_n^\dagger \rightarrow \xi^{-1} \tilde{\Omega}_{A_{p^n}/\mathcal{O}_{K_{p^n}}}^1 \otimes_{A_{p^n}} \mathcal{C}_n^\dagger$$

la dérivation de $\mathcal{C}_n^\dagger$ induite par la dérivation universelle continue de $\widehat{\mathcal{C}}_n$ (cf. 9.11). Le morphisme canonique (4.5.4)

$$(12.24.6) \quad u_n : \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R A_{p^n} \rightarrow \tilde{\Omega}_{A_{p^n}/\mathcal{O}_{K_{p^n}}}^1$$

induit un $\widehat{R}$ -homomorphisme

$$(12.24.7) \quad \iota_n : \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{C}_n.$$

On désigne par

$$(12.24.8) \quad \iota_n^\dagger : \mathcal{C}_0^\dagger \rightarrow \mathcal{C}_n^\dagger$$

le prolongement de ι_n aux complétés faibles. On notera que le diagramme

$$(12.24.9) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_0^\dagger & \xrightarrow{\iota_n^\dagger} & \mathcal{C}_n^\dagger \\ d_{\mathcal{C}_0^\dagger} \downarrow & & \downarrow d_{\mathcal{C}_n^\dagger} \\ \xi^{-1} \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \mathcal{C}_0^\dagger & \xrightarrow{u_n \otimes \iota_n^\dagger} & \xi^{-1} \tilde{\Omega}_{A_{p^n}/\mathcal{O}_{K_{p^n}}}^1 \otimes_{A_{p^n}} \mathcal{C}_n^\dagger \end{array}$$

est commutatif.

12.25. Il existe un unique homomorphisme

$$(12.25.1) \quad \tilde{q}_n: P^{(p^n)} \rightarrow W(\mathcal{R})$$

tel que pour tout $t \in P$, on ait

$$(12.25.2) \quad t^{(p^n)} \mapsto [(t^{(p^{n+m})})_{m \geq 0}],$$

où $t^{(p^{n+m})}$ est l'image de t dans $P^{(p^{n+m})}$ par l'isomorphisme (5.8.4). On désigne par $\mathcal{M}_{\overline{X}}^{(n)}$ la structure logarithmique sur $\overline{X}$ image inverse de $\mathcal{M}_{X_{p^n}}$ et par $\mathcal{P}^{(n)}$ la structure logarithmique sur $\text{Spec}(W(\mathcal{R}))$ associée à la structure pré-logarithmique définie par $(P^{(p^n)}, \tilde{q}_n)$. Il est clair que $\theta \circ \tilde{q}_n$ est l'homomorphisme $P^{(p^n)} \rightarrow \widehat{R}$ déduit de α_{p^n} (cf. 5.8). Donc θ induit une immersion fermée exacte

$$(12.25.3) \quad i_n: (\overline{X}, \mathcal{M}_{\overline{X}}^{(n)}) \rightarrow (\text{Spec}(W(\mathcal{R})), \mathcal{P}^{(n)}).$$

On désigne par $\mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\overline{X})}^{(n)}$ la structure logarithmique sur $\mathcal{A}_2(\overline{X})$ image inverse de $\mathcal{P}^{(n)}$. On a un diagramme commutatif

$$(12.25.4) \quad \begin{array}{ccccc} (\overline{X}, \mathcal{M}_{\overline{X}}^{(n)}) & \xrightarrow{i_n} & (\mathcal{A}_2(\overline{X}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\overline{X})}^{(n)}) & \longrightarrow & B[P^{(p^n)}] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (\overline{X}, \mathcal{M}_{\overline{X}}) & \xrightarrow{i} & (\mathcal{A}_2(\overline{X}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\overline{X})}) & \longrightarrow & B[P] \end{array}$$

dans lequel on a aussi noté i_n l'immersion fermée exacte qui factorise i_n .

Les actions de $\Delta^{(n)}$ sur $\overline{X}$ et sur $\mathcal{A}_2(\overline{X})$ s'étendent naturellement en des actions sur les schémas logarithmiques $(\overline{X}, \mathcal{M}_{\overline{X}}^{(n)})$ et $(\mathcal{A}_2(\overline{X}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\overline{X})}^{(n)})$ respectivement. Tous les morphismes du diagramme (12.25.4) sont $\Delta^{(n)}$ -équivariants.

On définit de même de nouvelles structures logarithmiques $\mathcal{M}_{\overline{S}}^{(n)}$ sur $\overline{S}$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\overline{S})}^{(n)}$ sur $\mathcal{A}_2(\overline{S})$, et une immersion fermée exacte

$$(12.25.5) \quad i_{S,n}: (\overline{S}, \mathcal{M}_{\overline{S}}^{(n)}) \rightarrow (\mathcal{A}_2(\overline{S}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\overline{S})}^{(n)}).$$

12.26. On sait (4.6.3) que le diagramme de morphismes canoniques

$$(12.26.1) \quad \begin{array}{ccc} (X_{p^n}, \mathcal{M}_{X_{p^n}}) \times_{(S_{p^n}, \mathcal{M}_{S_{p^n}})} (\overline{S}, \mathcal{M}_{\overline{S}}^{(n)}) & \longrightarrow & (X, \mathcal{M}_X) \times_{(S, \mathcal{M}_S)} (\overline{S}, \mathcal{M}_{\overline{S}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\overline{S}, \mathcal{M}_{\overline{S}}^{(n)}) \times_{B[\mathbb{N}(p^n)]} B[P^{(p^n)}] & \longrightarrow & (\overline{S}, \mathcal{M}_{\overline{S}}) \times_{B[\mathbb{N}]} B[P] \end{array}$$

est cartésien. Notons alors $(\tilde{X}_n, \mathcal{M}_{\tilde{X}_n})$ le schéma logarithmique défini par le diagramme cartésien

$$(12.26.2) \quad \begin{array}{ccc} (\tilde{X}_n, \mathcal{M}_{\tilde{X}_n}) & \longrightarrow & (\tilde{X}_0, \mathcal{M}_{\tilde{X}_0}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathcal{A}_2(\bar{S}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\bar{S})}^{(n)}) \times_{B[\mathbb{N}(p^n)]} B[P^{(p^n)}] & \longrightarrow & (\mathcal{A}_2(\bar{S}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\bar{S})}) \times_{B[\mathbb{N}]} B[P] \end{array}$$

où $(\tilde{X}_0, \mathcal{M}_{\tilde{X}_0})$ est la $(\mathcal{A}_2(\bar{S}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\bar{S})})$ -déformation lisse de $(X, \mathcal{M}_X) \times_{(S, \mathcal{M}_S)} (\bar{S}, \mathcal{M}_{\bar{S}})$ définie par la carte (P, γ) (8.17.1). Comme le diagramme

$$(12.26.3) \quad \begin{array}{ccc} (\bar{S}, \mathcal{M}_{\bar{S}}^{(n)}) & \longrightarrow & (\bar{S}, \mathcal{M}_{\bar{S}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathcal{A}_2(\bar{S}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\bar{S})}^{(n)}) & \longrightarrow & (\mathcal{A}_2(\bar{S}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\bar{S})}) \end{array}$$

est clairement cartésien, on en déduit que $(\tilde{X}_n, \mathcal{M}_{\tilde{X}_n})$ est la $(\mathcal{A}_2(\bar{S}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\bar{S})}^{(n)})$ -déformation lisse de $(X_{p^n}, \mathcal{M}_{X_{p^n}}) \times_{(S_{p^n}, \mathcal{M}_{S_{p^n}})} (\bar{S}, \mathcal{M}_{\bar{S}}^{(n)})$.

Le diagramme

$$(12.26.4) \quad \begin{array}{ccccc} (\bar{X}, \mathcal{M}_{\bar{X}}^{(n)}) & \xrightarrow{i_n} & (\mathcal{A}_2(\bar{X}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\bar{X})}^{(n)}) & \longrightarrow & B[P^{(p^n)}] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (\bar{S}, \mathcal{M}_{\bar{S}}^{(n)}) & \xrightarrow{i_{S,n}} & (\mathcal{A}_2(\bar{S}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\bar{S})}^{(n)}) & \longrightarrow & B[\mathbb{N}(p^n)] \end{array}$$

est commutatif. Il est clair que le diagramme (sans la flèche pointillée)

$$(12.26.5) \quad \begin{array}{ccc} (\bar{X}, \mathcal{M}_{\bar{X}}^{(n)}) & \longrightarrow & (\mathcal{A}_2(\bar{X}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\bar{X})}^{(n)}) \\ \downarrow & & \downarrow \phi_n \\ (X_{p^n}, \mathcal{M}_{X_{p^n}}) \times_{(S_{p^n}, \mathcal{M}_{S_{p^n}})} (\bar{S}, \mathcal{M}_{\bar{S}}^{(n)}) & \xrightarrow{\psi_n} & (\mathcal{A}_2(\bar{S}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\bar{S})}^{(n)}) \times_{B[\mathbb{N}(p^n)]} B[P^{(p^n)}] \\ \downarrow & \swarrow \psi_n & \downarrow \\ (\tilde{X}_n, \mathcal{M}_{\tilde{X}_n}) & \longrightarrow & (\mathcal{A}_2(\bar{S}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\bar{S})}^{(n)}) \times_{B[\mathbb{N}(p^n)]} B[P^{(p^n)}] \end{array}$$

où ϕ_n est défini par (12.26.4) est commutatif. Comme la flèche horizontale inférieure est étale (12.26.2), on peut le compléter par une unique flèche pointillée ψ_n de façon à le laisser commutatif. On notera que le diagramme

$$(12.26.6) \quad \begin{array}{ccc} (\mathcal{A}_2(\bar{X}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\bar{X})}^{(n)}) & \longrightarrow & (\mathcal{A}_2(\bar{X}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\bar{X})}) \\ \psi_n \downarrow & & \downarrow \psi_0 \\ (\tilde{X}_n, \mathcal{M}_{\tilde{X}_n}) & \longrightarrow & (\tilde{X}_0, \mathcal{M}_{\tilde{X}_0}) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les morphismes canoniques est commutatif.

12.27. Pour tout $g \in \Delta^{(n)}$, notons ${}^g\psi_n$ le morphisme composé

$$(12.27.1) \quad (\mathcal{A}_2(\overline{X}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\overline{X})}^{(n)}) \xrightarrow{g^{-1}} (\mathcal{A}_2(\overline{X}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\overline{X})}^{(n)}) \xrightarrow{\psi_n} (\tilde{X}_n, \mathcal{M}_{\tilde{X}_n}).$$

La différence $\psi_n - {}^g\psi_n$ définit un morphisme $\widehat{R}$ -linéaire

$$(12.27.2) \quad \sigma_{\tilde{X}_n, \psi_n, {}^g\psi_n} : \tilde{\Omega}_{A_{p^n}/\mathcal{O}_{K_{p^n}}}^1 \otimes_{A_{p^n}} \widehat{R} \rightarrow \xi \widehat{R}.$$

Procédant comme dans la définition de (8.12.8), on obtient un homomorphisme

$$(12.27.3) \quad \varphi_n : \Delta^{(n)} \rightarrow \text{Aut}_{\widehat{R}_n}(\mathcal{C}_n),$$

qui fait de $\mathcal{C}_n$ une $\widehat{R}$ -représentation de $\Delta^{(n)}$. On a donc $\varphi_0 = \varphi_{\tilde{X}_0, \psi_0}$ (8.12.8), ce qui est compatible avec les notations de 9.1. On note $\varphi_n^\dagger$ l'action de $\Delta^{(n)}$ sur $\mathcal{C}_n^\dagger$ induite par φ_n .

Il résulte de (12.26.6) que, pour tout $g \in \Delta^{(n)}$, le diagramme

$$(12.27.4) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{\Omega}_{A_{p^n}/\mathcal{O}_{K_{p^n}}}^1 \otimes_{A_{p^n}} \widehat{R} & \xrightarrow{\sigma_{\tilde{X}_n, \psi_n, {}^g\psi_n}} & \xi \widehat{R} \\ u_n \otimes \text{id} \uparrow & \nearrow \sigma_{\tilde{X}_0, \psi_0, {}^g\psi_0} & \\ \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R} & & \end{array}$$

est commutatif (12.24.6). Par suite, pour tout $y \in \mathcal{C}_0^\dagger$, on a (12.24.8)

$$(12.27.5) \quad \iota_n^\dagger(\varphi_0^\dagger(g)(y)) = \varphi_n^\dagger(g)(\iota_n^\dagger(y)).$$

12.28. Pour toute $\widehat{R}$ -représentation M de $\Delta^{(n)}$, on note $H_n(M)$ le $\widehat{R}_{p^n}$ -module défini par

$$(12.28.1) \quad H_n(M) = (M \otimes_{\widehat{R}} \mathcal{C}_n^\dagger)^{\Delta^{(n)}},$$

où $\Delta^{(n)}$ agit sur $\mathcal{C}_n^\dagger$ par $\varphi_n^\dagger$ (12.27.3). On le munit du $\widehat{R}_{p^n}$ -champ de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\tilde{\Omega}_{A_{p^n}/\mathcal{O}_{K_{p^n}}}^1$ induit par $d_{\mathcal{C}_n^\dagger}$. On définit ainsi un foncteur

$$(12.28.2) \quad H_n : \text{Rep}_{\widehat{R}}(\Delta^{(n)}) \rightarrow \text{MH}_{\xi^{-1}\tilde{\Omega}_{A_{p^n}/\mathcal{O}_{K_{p^n}}}^1}(\widehat{R}_{p^n}).$$

D'après 10.2, on a un isomorphisme canonique de foncteurs

$$(12.28.3) \quad H_0 \xrightarrow{\sim} H_{\tilde{X}_0}.$$

Définition 12.29. On dit qu'une $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentation continue M de $\Delta^{(n)}$ est *de Dolbeault* si les conditions suivantes sont remplies :

- (i) M est un $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -module projectif de type fini, muni de la topologie p -adique (2.3) ;
- (ii) $H_n(M)$ est un $\widehat{R}_{p^n}[\frac{1}{p}]$ -module projectif de type fini ;
- (iii) le morphisme canonique

$$(12.29.1) \quad H_n(M) \otimes_{\widehat{R}_{p^n}} \mathcal{C}_n^\dagger \rightarrow M \otimes_{\widehat{R}} \mathcal{C}_n^\dagger$$

est un isomorphisme.

Pour $n = 0$, on retrouve la notion introduite dans (12.1).

12.30. Pour tout $\widehat{R_{p^n}}$ -module de Higgs (N, θ) à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{A_{p^n}/\mathcal{O}_{K_{p^n}}}^1$, on note $V_n(N)$ le $\widehat{R}$ -module défini par

$$(12.30.1) \quad V_n(N) = (N \otimes_{\widehat{R_{p^n}}} \mathcal{C}_n^\dagger)^{\theta_{\text{tot}}=0},$$

où $\theta_{\text{tot}} = \theta \otimes \text{id} + \text{id} \otimes d_{\mathcal{C}_n^\dagger}$ est le $\widehat{R_{p^n}}$ -champ de Higgs total sur $N \otimes_{\widehat{R_{p^n}}} \mathcal{C}_n^\dagger$ (2.16.9). On le munit de l'action $\widehat{R}$ -semi-linéaire de $\Delta^{(n)}$ induite $\varphi_n^\dagger$ (12.27.3). On définit ainsi un foncteur

$$(12.30.2) \quad V_n : \text{MH}_{\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{A_{p^n}/\mathcal{O}_{K_{p^n}}}^1}(\widehat{R_{p^n}}) \rightarrow \text{Rep}_{\widehat{R}}(\Delta^{(n)}).$$

D'après (10.2), on a un isomorphisme canonique de foncteurs

$$(12.30.3) \quad V_0 \xrightarrow{\sim} V_{\widetilde{X}_0}.$$

Définition 12.31. On dit qu'un $\widehat{R_{p^n}[\frac{1}{p}]}$ -module de Higgs (N, θ) à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{A_{p^n}/\mathcal{O}_{K_{p^n}}}^1$ est *soluble* si les conditions suivantes sont remplies :

- (i) N est un $\widehat{R_{p^n}[\frac{1}{p}]}$ -module projectif de type fini ;
- (ii) $V_n(N)$ est un $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -module projectif de type fini ;
- (iii) le morphisme canonique

$$(12.31.1) \quad V_n(N) \otimes_{\widehat{R}} \mathcal{C}_n^\dagger \rightarrow N \otimes_{\widehat{R_{p^n}}} \mathcal{C}_n^\dagger$$

est un isomorphisme.

Pour $n = 0$, on retrouve la notion introduite dans (12.2).

Définition 12.32. On dit qu'un $\widehat{R_{p^n}[\frac{1}{p}]}$ -module de Higgs (N, θ) à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{A_{p^n}/\mathcal{O}_{K_{p^n}}}^1$ est *petit* si les conditions suivantes sont remplies :

- (i) N est un $\widehat{R_{p^n}[\frac{1}{p}]}$ -module projectif de type fini ;
- (ii) il existe un nombre rationnel $\beta > \frac{1}{p-1}$ et un sous- $\widehat{R_{p^n}}$ -module de type fini N° de N , qui l'engendre sur $\widehat{R_{p^n}[\frac{1}{p}]}$, tels que l'on ait

$$(12.32.1) \quad \theta(N^\circ) \subset p^\beta \xi^{-1} N^\circ \otimes_{A_{p^n}} \widetilde{\Omega}_{A_{p^n}/\mathcal{O}_{K_{p^n}}}^1.$$

Pour $n = 0$, on retrouve la notion introduite dans (12.6).

Proposition 12.33. Soient n un entier ≥ 0 , (N, θ) un petit $\widehat{R_{p^n}[\frac{1}{p}]}$ -module de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{A_{p^n}/\mathcal{O}_{K_{p^n}}}^1$. Alors (N, θ) est soluble ; la $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentation $V_n(N)$ de $\Delta^{(n)}$ est petite et de Dolbeault, et on a un isomorphisme canonique fonctoriel de $\widehat{R_{p^n}[\frac{1}{p}]}$ -modules de Higgs

$$(12.33.1) \quad H_n(V_n(N)) \xrightarrow{\sim} N.$$

Montrons d'abord que le schéma logarithmique $(X_{p^n}, \mathcal{M}_{X_{p^n}})$ muni du morphisme f_{p^n} (4.5.3), de la carte $P^{(p^n)}$ et de l'homomorphisme $\theta : \mathbb{N}^{(p^n)} \rightarrow P^{(p^n)}$, vérifie les conditions requises dans (4.2). En effet, les conditions (C₁), (C₄) et (C₆) sont évidentes et les conditions (C₃) et (C₅) résultent aussitôt de (4.5.4). Le schéma $X_{p^n} \otimes_{\mathcal{O}_{K_{p^n}}} \overline{K}$ est intègre en vertu de 4.6(iv). D'autre part, il résulte de la preuve de 4.6(iv) que le morphisme

$$X_{p^n} \otimes_{\mathcal{O}_{K_{p^n}}} \overline{k} \rightarrow X \otimes_{\mathcal{O}_K} \overline{k}$$

est un homéomorphisme universel. Par suite, $X_{p^n} \otimes_{\mathcal{O}_{K_{p^n}}} \bar{k}$ est connexe et non-vide, et la condition (C_2) est vérifiée. On peut donc associer à $(X_{p^n}, \mathcal{M}_{X_{p^n}})$ des objets analogues à ceux définis pour $(X, \mathcal{M}_X)$. L'analogue pour X_{p^n} de l'anneau (4.7.1) est l'anneau R_{p^n} en vertu de 4.8(ii). L'anneau $\bar{R}$ associé à X_{p^n} est le même que celui associé à X en vertu de 4.6(v). La proposition résulte alors de 12.11.

12.34. Si (N, θ) est un $\widehat{R}_1$ -module de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$, le morphisme composé

$$\theta_n: N \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R_{p^n}} \xrightarrow{\theta \otimes \text{id}} \xi^{-1}\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R N \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R_{p^n}} \longrightarrow \xi^{-1}\tilde{\Omega}_{A_{p^n}/\mathcal{O}_{K_{p^n}}}^1 \otimes_{A_{p^n}} N \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R_{p^n}}$$

où la seconde flèche est induite par u_n (12.24.6), est un $\widehat{R_{p^n}}$ -champ de Higgs sur $N \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R_{p^n}}$. La correspondance $(N, \theta) \mapsto (N \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R_{p^n}}, \theta_n)$ ainsi définie est un foncteur

$$(12.34.1) \quad \text{MH}_{\xi^{-1}\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1}(\widehat{R}_1) \rightarrow \text{MH}_{\xi^{-1}\tilde{\Omega}_{A_{p^n}/\mathcal{O}_{K_{p^n}}}^1}(\widehat{R_{p^n}}).$$

D'après (12.24.9) et (12.27.5), le morphisme $\iota_n^\dagger$ induit un $\widehat{R}$ -morphisme canonique fonctoriel et $\Delta^{(n)}$ -équivalent

$$(12.34.2) \quad V_0(N) \rightarrow V_n(N \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R_{p^n}}).$$

Lemme 12.35. Soit (N, θ) un $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -module de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ tel que N soit un $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -module projectif de type fini. Alors il existe un entier $n \geq 0$ tel que l'image $(N \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R_{p^n}}, \theta_n)$ de (N, θ) par le foncteur (12.34.1) soit un $\widehat{R_n}[\frac{1}{p}]$ -module de Higgs petit (12.32).

Pour tout entier $i \geq 0$, notons

$$\lambda_i(\theta) \in \xi^{-i}\text{Sym}_R^i(\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1) \otimes_R \widehat{R}_1[\frac{1}{p}] \quad \text{et} \quad \lambda_i(\theta_n) \in \xi^{-i}\text{Sym}_{A_{p^n}}^i(\tilde{\Omega}_{A_{p^n}/\mathcal{O}_{K_{p^n}}}^1) \otimes_{A_{p^n}} \widehat{R_{p^n}}[\frac{1}{p}]$$

les i -ièmes invariants caractéristiques de θ et θ_n , respectivement (2.16.5). Alors $\lambda_i(\theta_n)$ est l'image canonique de $\lambda_i(\theta)$ (12.24.6). D'autre part, pour tout $t \in P$, si $t^{(p^n)}$ désigne son image dans $P^{(p^n)}$ par l'isomorphisme (5.8.4), on a

$$(12.35.1) \quad u_n(d \log(t)) = p^n d \log(t^{(p^n)}).$$

Par suite, la proposition résulte de 12.8.

Lemme 12.36. Soient (N, θ) un $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -module de Higgs soluble à coefficients dans $\xi^{-1}\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$, n un entier ≥ 0 . Supposons que le $\widehat{R_{p^n}}[\frac{1}{p}]$ -module de Higgs $(N \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R_{p^n}}, \theta_n)$ image de (N, θ) par le foncteur (12.34.1), soit soluble (12.31). Alors le morphisme canonique (12.34.2)

$$(12.36.1) \quad V_0(N) \rightarrow V_n(N \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R_{p^n}})$$

est un isomorphisme.

En effet, si on note w le morphisme en question, le diagramme

$$(12.36.2) \quad \begin{array}{ccc} V_0(N) \otimes_{\widehat{R}} \mathcal{C}_n^\dagger & \xrightarrow{a} & N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{C}_n^\dagger \\ w \otimes \text{id}_{\mathcal{C}_n^\dagger} \downarrow & & \parallel \\ V_n(N \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R_{p^n}}) \otimes_{\widehat{R}} \mathcal{C}_n^\dagger & \xrightarrow{b} & N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{C}_n^\dagger \end{array}$$

où a et b sont les morphismes canoniques, est commutatif. Comme a et b sont des isomorphismes par hypothèse, $w \otimes \text{id}_{\mathcal{C}_n^\dagger}$ est un isomorphisme. La rétraction canonique $c_n: \mathcal{C}_n \rightarrow \widehat{R}$ induit une rétraction $c_n^\dagger: \mathcal{C}_n^\dagger \rightarrow \widehat{R}$. Par extension des scalaires par $c_n^\dagger$, on obtient que w est un isomorphisme.

12.37. Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 12.12. Montrons d'abord que $V_{\widehat{X}}(N)$ est un $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -module projectif de type fini et est une représentation continue de Δ pour la topologie p -adique. D'après 8.8 et 10.9(i), on peut supposer que $(\widehat{X}, \mathcal{M}_{\widehat{X}})$ est la déformation $(\widetilde{X}_0, \mathcal{M}_{\widetilde{X}_0})$ définie par la carte (P, γ) (8.17). Il suffit alors de montrer l'assertion analogue pour $V_0(N)$ (cf. (12.28.3) et (12.30.3)). Pour tout entier $n \geq 0$, notons $(N \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R}_{p^n}, \theta_n)$ l'image de (N, θ) par le foncteur (12.34.1). Il existe $n \geq 0$ tel que le $\widehat{R}_{p^n}[\frac{1}{p}]$ -module de Higgs $(N \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R}_n, \theta_n)$ soit petit (12.35). Il est donc soluble et la $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentation $V_n(N \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R}_{p^n})$ de $\Delta^{(n)}$ est petite et de Dolbeault en vertu de 12.33. Par suite, le morphisme canonique (12.34.2)

$$(12.37.1) \quad V_0(N) \rightarrow V_n(N \otimes_{\widehat{R}_1} \widehat{R}_{p^n})$$

est un isomorphisme en vertu de 12.36. On en déduit que $V_0(N)$ est un $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -module projectif de type fini. Comme le morphisme (12.37.1) est $\Delta^{(n)}$ -équivariant, l'action de Δ sur $V_0(N)$ est continue pour la topologie p -adique.

Si l'on munit N de l'action triviale de Δ et $V_{\widehat{X}}(N)$ du champ de Higgs trivial, le morphisme canonique

$$(12.37.2) \quad V_{\widehat{X}}(N) \otimes_{\widehat{R}} \mathcal{D}_{\widehat{X}}^\dagger \rightarrow N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{D}_{\widehat{X}}^\dagger$$

est un $\mathcal{D}_{\widehat{X}}^\dagger$ -isomorphisme Δ -équivariant de $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -modules de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1}\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$. Comme N est un facteur direct d'un $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -module libre de type fini, on a $(N \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{D}_{\widehat{X}}^\dagger)^\Delta = N$ (10.4.1). On en déduit alors un isomorphisme de $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -modules de Higgs $H_{\widehat{X}}(V_{\widehat{X}}(N)) \xrightarrow{\sim} N$, ce qui implique que $V_{\widehat{X}}(N)$ est une $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentation de Dolbeault de Δ .

13. REPRÉSENTATIONS DE HODGE-TATE

13.1. Considérons la suite exacte (5.21.2)

$$(13.1.1) \quad 0 \rightarrow (\pi\rho)^{-1}\widehat{R} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}(-1) \rightarrow 0$$

et notons aussi $1 \in \mathcal{E}$ l'image de $1 \in (\pi\rho)^{-1}\widehat{R}$. Pour tout $n \geq 0$, posons

$$(13.1.2) \quad \mathcal{S}_n = \text{Sym}_{\widehat{R}}^n(\mathcal{E}),$$

et $\iota_n: \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_{n+1}$ le morphisme $\widehat{R}$ -linéaire défini de la façon suivante. Pour $n = 0$, ι_0 est le composé des injections canoniques $\widehat{R} \rightarrow (\pi\rho)^{-1}\widehat{R} \rightarrow \mathcal{E}$. Pour $n \geq 1$ et pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{E}$, on a

$$(13.1.3) \quad \iota_n([x_1 \otimes \dots \otimes x_n]) = [1 \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_n].$$

Les $\mathcal{S}_n$ forment alors un système inductif. On pose

$$(13.1.4) \quad \mathcal{S} = \varinjlim_{n \geq 0} \mathcal{S}_n.$$

Les morphismes de multiplication $\mathcal{S}_m \otimes_{\widehat{R}} \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_{m+n}$ ($m, n \geq 0$) induisent une structure de $\widehat{R}$ -algèbre sur $\mathcal{S}$. On notera que $\mathcal{S}$ est naturellement une $\widehat{R}$ -représentation de Γ . La représentation ainsi définie est appelée l'*anneau de Hyodo* ([24] §1).

Remarque 13.2. On notera que p est inversible dans $\mathcal{S}$, de sorte que $\mathcal{S} \simeq \mathcal{S}[\frac{1}{p}]$. En effet, on a $1 = \pi\rho \cdot (\pi\rho)^{-1}$, où $(\pi\rho)^{-1} \in (\pi\rho)^{-1}\widehat{R} \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{S}$.

13.3. Pour tous entiers $i \geq 0$ et $n \geq 0$, on définit un morphisme $\widehat{R}$ -linéaire et Γ -équivariant

$$(13.3.1) \quad \kappa_{i,n}: \mathcal{S}_n \otimes_R \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^i(-i) \rightarrow \mathcal{S}_{n-1} \otimes_R \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^{i+1}(-i-1)$$

par $\kappa_{i,0} = 0$, et si $n \geq 1$ par

$$(13.3.2) \quad \kappa_{i,n}([x_1 \otimes \cdots \otimes x_n] \otimes \omega) = \sum_{1 \leq i \leq n} [x_1 \otimes \cdots \otimes x_{i-1} \otimes x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_n] \otimes (u(x_i) \wedge \omega),$$

où $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{E}$, $\omega \in \Omega_{R/\mathcal{O}_K}^n(-n)$ et $u: \mathcal{E} \rightarrow \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \otimes_R \widehat{R}(-1)$ le morphisme canonique (13.1.1). On vérifie aussitôt que l'on a $\kappa_{i+1,n-1} \circ \kappa_{i,n} = 0$ et que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_n \otimes_R \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^i(-i) & \xrightarrow{\kappa_{i,n}} & \mathcal{S}_{n-1} \otimes_R \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^{i+1}(-i-1) \\ \downarrow \iota_n \otimes \text{id} & & \downarrow \iota_{n-1} \otimes \text{id} \\ \mathcal{S}_{n+1} \otimes_R \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^i(-i) & \xrightarrow{\kappa_{i,n+1}} & \mathcal{S}_n \otimes_R \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^{i+1}(-i-1) \end{array}$$

est commutatif. On obtient alors par passage à la limite inductive un morphisme $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -linéaire et Γ -équivariant

$$(13.3.3) \quad \kappa_i: \mathcal{S} \otimes_R \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^i(-i) \rightarrow \mathcal{S} \otimes_R \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^{i+1}(-i-1).$$

Ces morphismes définissent un complexe $\mathcal{K}^\bullet$ de $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -modules en posant

$$(13.3.4) \quad \mathcal{K}^i = \begin{cases} \mathcal{S} \otimes_R \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^i(-i) & \text{si } i \geq 0, \\ 0 & \text{si } i < 0. \end{cases}$$

13.4. Soit V une $\mathbb{Q}_p$ -représentation de Γ . Pour tout entier i , on note $D^i(V)$ le $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -module défini par

$$(13.4.1) \quad D^i(V) = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{K}(i))^\Gamma.$$

En prenant les Γ -invariants du complexe $V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{K}^\bullet(i)$ (13.3.4), on obtient un complexe $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -linéaire, noté $\mathbb{D}^i(V)$,

$$(13.4.2) \quad D^i(V) \rightarrow D^{i-1}(V) \otimes_R \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 \rightarrow D^{i-2}(V) \otimes_R \widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^2 \rightarrow \dots,$$

où $D^i(V)$ est placé en degré 0. On munit le $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -module $\oplus_{i \in \mathbb{Z}} D^i(V)(-i)$ du champ de Higgs à coefficients dans $\widetilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1(-1)$ induit par κ_0 (13.3.3). Le complexe de Dolbeault du module de Higgs ainsi défini est $\oplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{D}^i(V)(-i)$ (2.16.4).

Définition 13.5 ([24] 2.1). On dit qu'une $\mathbb{Q}_p$ -représentation continue V de Γ est de *Hodge-Tate* si les conditions suivantes sont remplies :

- (i) V est un $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel de dimension finie, muni de la topologie p -adique (2.3).

(ii) Le morphisme canonique

$$(13.5.1) \quad \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} D^i(V) \otimes_{\widehat{R}[\frac{1}{p}]} \mathcal{S}(-i) \rightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{S}$$

est un isomorphisme.

On peut faire les remarques suivantes :

13.5.1. Hyodo montre dans *loc. cit.* que pour toute $\mathbb{Q}_p$ -représentation continue de dimension finie V de Γ , le morphisme (13.5.1) est injectif.

13.5.2. Pour toute $\mathbb{Q}_p$ -représentation de Hodge-Tate V de Γ , les $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -modules $D^i(V)$ ($i \in \mathbb{Z}$) sont localement libres de type fini et sont nuls sauf pour un nombre fini d'entiers i , appelés les *poids de Hodge-Tate* de V (cf. [12] 4.2.7).

Proposition 13.6. Soient $(\tilde{X}_0, \mathcal{M}_{\tilde{X}_0})$ la déformation lisse de $(X, \mathcal{M}_X) \times_{(S, \mathcal{M}_S)} (\bar{S}, \mathcal{M}_{\bar{S}})$ au-dessus de $(\mathcal{A}_2(\bar{S}), \mathcal{M}_{\mathcal{A}_2(\bar{S})})$ définie par la carte (P, γ) (8.17.1), $(P^{\text{gp}}/\mathbb{Z}\lambda)_{\text{lib}}$ le quotient de $P^{\text{gp}}/\mathbb{Z}\lambda$ par son sous-module de torsion,

$$(13.6.1) \quad w: (P^{\text{gp}}/\mathbb{Z}\lambda)_{\text{lib}} \rightarrow P^{\text{gp}}$$

un inverse à droite du morphisme canonique $P^{\text{gp}} \rightarrow (P^{\text{gp}}/\mathbb{Z}\lambda)_{\text{lib}}$. Alors il existe un isomorphisme canonique de $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -algèbres

$$(13.6.2) \quad \tilde{\beta}_w: \mathcal{D}_{\tilde{X}_0}[\frac{1}{p}] \rightarrow \mathcal{S}$$

tel que pour tout $x \in p^{-\frac{1}{p-1}} \mathcal{F}_{\tilde{X}_0} \subset \mathcal{D}_{\tilde{X}_0}[\frac{1}{p}]$, on ait

$$(13.6.3) \quad \tilde{\beta}_w(x) = \beta_w(x) \in \mathcal{E} \subset \mathcal{S},$$

où β_w est le morphisme (8.20.2). De plus, $\tilde{\beta}_w$ est Δ -équivariant et le diagramme

$$(13.6.4) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{\tilde{X}_0} & \xrightarrow{\tilde{\beta}_w} & \mathcal{S} \\ d_{\mathcal{D}_{\tilde{X}_0}} \downarrow & & \downarrow \kappa_0 \\ \xi^{-1} \mathcal{D}_{\tilde{X}_0} \otimes_R \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1 & \xrightarrow[\sim]{v} p^{-\frac{1}{p-1}} \mathcal{D}_{\tilde{X}_0} \otimes_R \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1(-1) & \xrightarrow{\tilde{\beta}_w \otimes \text{id}} \mathcal{S} \otimes_R \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1(-1) \end{array}$$

où v est l'isomorphisme induit par (7.7.1) est commutatif.

L'injection canonique $\mathcal{F}_{\tilde{X}_0} \rightarrow \mathcal{D}_{\tilde{X}_0}$ induit un isomorphisme Δ -équivariant de $\widehat{R}$ -algèbres

$$(13.6.5) \quad \lim_{\substack{\longrightarrow \\ n \geq 0}} \text{Sym}_{\widehat{R}}^n(\mathcal{F}_{\tilde{X}_0}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{\tilde{X}_0},$$

où le système inductif à gauche est défini pour $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{F}_{\tilde{X}_0}$ par

$$(13.6.6) \quad [x_1 \otimes \dots \otimes x_n] \mapsto [1 \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_n].$$

La proposition résulte alors de 8.20.

Proposition 13.7. *Conservons les hypothèses de (13.6), soient de plus V une $\mathbb{Q}_p$ -représentation de Hodge-Tate de Γ , $(H_{\tilde{X}_0}(V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \widehat{R}), \theta)$ le module de Higgs à coefficients dans $\xi^{-1} \tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1$ associé à la $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentation $V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \widehat{R}$ de Δ (10.5), θ' le champ de Higgs sur $H_{\tilde{X}_0}(V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \widehat{R})$ à coefficients dans $\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1(-1)$ déduit de θ et de l'isomorphisme $\widehat{R}(1) \xrightarrow{\sim} p^{\frac{1}{p-1}} \xi \widehat{R}$ (7.7.1). Alors $V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \widehat{R}$ est une $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentation de Dolbeault de Δ , et l'on a un $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -isomorphisme canonique fonctoriel de $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -modules de Higgs à coefficients dans $\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1(-1)$*

$$(13.7.1) \quad \oplus_{i \in \mathbb{Z}} D^i(V) \otimes_{\widehat{R}} \widehat{R}_1(-i) \xrightarrow{\sim} H_{\tilde{X}_0}(V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \widehat{R}),$$

où le membre de gauche est muni du champ de Higgs induit par κ_0 (13.3.3) et le membre de droite est muni de θ' .

On notera d'abord que $V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \widehat{R}$ est une $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentation continue de Δ . Si l'on munit $D^i(V)$ de l'action triviale de Γ , $V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \widehat{R}$ du champ de Higgs trivial et $\oplus_{i \in \mathbb{Z}} D^i(V) \otimes_{\widehat{R}} \widehat{R}(-i)$ et $\mathcal{S}$ des champs de Higgs induits par κ_0 , le morphisme canonique

$$(13.7.2) \quad \oplus_{i \in \mathbb{Z}} D^i(V) \otimes_{\widehat{R}[\frac{1}{p}]} \mathcal{S}(-i) \rightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{S}$$

est un isomorphisme $\mathcal{S}$ -linéaire et Γ -équivariant de $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -modules de Higgs à coefficients dans $\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1(-1)$. Compte tenu de 13.6, on en déduit un isomorphisme $\mathcal{D}_{\tilde{X}_0}^\dagger$ -linéaire et Δ -équivariant de $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -modules de Higgs à coefficients dans $\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1(-1)$

$$(13.7.3) \quad \oplus_{i \in \mathbb{Z}} D^i(V) \otimes_{\widehat{R}[\frac{1}{p}]} \mathcal{D}_{\tilde{X}_0}^\dagger[\frac{1}{p}](-i) \xrightarrow{\sim} V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{D}_{\tilde{X}_0}^\dagger[\frac{1}{p}],$$

où $\mathcal{D}_{\tilde{R}}^\dagger[\frac{1}{p}]$ est muni du champ de Higgs induit par $d_{\mathcal{D}_{\tilde{R}}^\dagger}$ et par l'isomorphisme $\widehat{R}(1) \xrightarrow{\sim} p^{\frac{1}{p-1}} \xi \widehat{R}$ (7.7.1). Comme $D^i(V)$ est un facteur direct d'un $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -module libre de type fini (13.5.2), on a $(D^i(V) \otimes_{\widehat{R}} \mathcal{D}_{\tilde{R}}^\dagger)^\Delta = D^i(V) \otimes_{\widehat{R}} \widehat{R}_1$ en vertu de (10.4.1). Par suite, en prenant dans (13.7.3) les invariants sous Δ , on obtient un isomorphisme de $\widehat{R}_1[\frac{1}{p}]$ -modules de Higgs à coefficients dans $\tilde{\Omega}_{R/\mathcal{O}_K}^1(-1)$

$$(13.7.4) \quad \oplus_{i \in \mathbb{Z}} D^i(V) \otimes_{\widehat{R}} \widehat{R}_1(-i) \xrightarrow{\sim} (V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{D}_{\tilde{R}}^\dagger)^\Delta = H_{\tilde{X}}(V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \widehat{R}).$$

De plus, le morphisme canonique

$$(13.7.5) \quad H_{\tilde{X}}(V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \widehat{R}) \otimes_{\widehat{R}_1} \mathcal{D}_{\tilde{R}}^\dagger \rightarrow V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{D}_{\tilde{R}}^\dagger$$

s'identifie à l'isomorphisme (13.7.3). Donc $V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \widehat{R}$ est une $\widehat{R}[\frac{1}{p}]$ -représentation de Dolbeault de Δ .

RÉFÉRENCES

- [1] A. ABBES, *Éléments de géométrie rigide. Volume I. Construction et étude géométrique des espaces rigides*, Progress in Mathematics Vol. **286**, Birkhäuser (2010).
- [2] A. ABBES, M. GROS, *Sur la correspondance de Simpson p -adique. II : Recollement et descente*, en préparation.
- [3] A. ABBES, T. SAITO, *Ramification of local fields with imperfect residue fields*, American Journal of Math. **124** (2002), 879-920.
- [4] P. BERTHELOT, A. OGUS, *Notes on Crystalline Cohomology*, Annals of Math. Studies **21** (1978), Princeton University Press.

- [5] R. BERGER, R. KIEHL, E. KUNZ, H.-J. NASTOLD, Differentialrechnung in der analytischen geometry, Lecture Notes in Math. **38**, Springer-Verlag (1967).
- [6] S. BOSCH, U. GÜNTZER, R. REMMERT, Non-archimedean analysis, Springer-Verlag (1984).
- [7] S. BOSCH, W. LÜTKEBOHMERT, M. RAYNAUD, *Formal and rigid geometry, IV. The reduced fiber theorem*, Invent. Math. **119** (1995), 361-398.
- [8] N. BOURBAKI, Algèbre, Chapitres 1-3, Masson (1970).
- [9] N. BOURBAKI, Algèbre, Chapitre X, Masson (1980).
- [10] N. BOURBAKI, Algèbre commutative, Chapitres 1-9, Hermann (1985).
- [11] N. BOURBAKI, Topologie générale, Chapitres 1-4, Hermann (1971).
- [12] O. BRINON, *Représentations p -adiques cristallines et de de Rham dans le cas relatif*, Mémoire de la Soc. Math. France **112** (2008).
- [13] O. BRINON, *Fibré de Higgs et structure locale d'une petite représentation généralisée (d'après Faltings)*, notes d'un exposé au Groupe de Travail sur la Correspondance de Simpson p -adique d'après Faltings, Rennes (2009).
- [14] C. DENINGER, A. WERNER, *Vector bundles on p -adic curves and parallel transport*, Annales Scientifiques E.N.S. **38** (2005), 553-597.
- [15] G. FALTINGS, *p -adic Hodge theory*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), 255-299.
- [16] G. FALTINGS, *Almost étale extensions*, dans Cohomologies p -adiques et applications arithmétiques. II, Astérisque **279** (2002), 185-270.
- [17] G. FALTINGS, *A p -adic Simpson correspondence*, Adv. Math. **198** (2005), 847-862.
- [18] J.-M. FONTAINE, *Formes différentielles et Modules de Tate des variétés abéliennes sur les corps locaux*, Inv. Math. **65** (1982), 379-409.
- [19] J.-M. FONTAINE, *Le corps des périodes p -adiques*, dans Périodes p -adiques, Séminaire de Bures, 1988, Astérisque **223** (1994), 59-111.
- [20] O. GABBER, L. RAMERO, Almost Ring Theory, Lecture Notes in Mathematics **1800**, Springer (2003).
- [21] O. GABBER, L. RAMERO, Foundations of p -adic Hodge theory (fourth release), preprint (2009).
- [22] A. GROTHENDIECK, J.A. DIEUDONNÉ, Éléments de Géométrie Algébrique, III Étude cohomologique des faisceaux cohérents, *Pub. Math. IHES* **11** (1961), **17** (1963).
- [23] A. GROTHENDIECK, J.A. DIEUDONNÉ, Éléments de Géométrie Algébrique, IV Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, *Pub. Math. IHES* **20** (1964), **24** (1965), **28** (1966), **32** (1967).
- [24] O. HYODO, *On variations of Hodge-Tate structures*, Math. Ann. **284** (1989), 7-22.
- [25] L. ILLUSIE, Complexe cotangent et déformations. I, Lecture Notes in Math. **239**, Springer-Verlag (1971).
- [26] U. JANNSEN, *Continuous étale Cohomology*, Math. Ann. **280** (1988), 207-245.
- [27] K. KATO, *Logarithmic structures of Fontaine-Illusie*, Algebraic analysis, geometry, and number theory, Johns Hopkins UP, Baltimore (1989), 191-224.
- [28] K. KATO, *Toric singularities*, American Journal of Math. **116** (1994), 1073-1099.
- [29] J. LE POTIER, *Fibrés de Higgs et systèmes locaux*, Séminaire Bourbaki, Exp. **737** (1991), Astérisque **201-203** (1992), 221-268.
- [30] P. MONSKY, G. WASHNITZER, *Formal Cohomology : I*, Annals of Math. **88** (1968), 181-217.
- [31] M.S. NARASIMHAN, C.S. SESHADRI, *Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface*, Ann. of Math. **82** (1965), 540-567.
- [32] A. OGUS, Lectures on logarithmic algebraic geometry, livre en préparation.
- [33] A. OGUS, V. VOLOGODSKY, *Non abelian Hodge theory in characteristic p* , Pub. Math. IHES **106** (2007), 1-138.
- [34] J.-P. SERRE, Cohomologie galoisienne, Cinquième édition révisée et complétée, Lecture Notes in Math. **5**, Springer-Verlag (1997).
- [35] J.-P. SERRE, Corps locaux, troisième édition, Hermann (1968).
- [36] C. SIMPSON, *Constructing variations of Hodge structure using Yang-Mills theory and applications to uniformization*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), no. 4, 867-918.
- [37] C. SIMPSON, *Higgs bundles and local systems*, Pub. Math. IHÉS, **75** (1992), 5-95.

- [38] C. SIMPSON, *Moduli of representations of the fundamental group of a smooth variety I*, Pub. Math. IHÉS **79** (1994), 47-129.
- [39] C. SIMPSON, *Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety II*, Publ. Math. IHÉS **80** (1994), 5-79.
- [40] T. TSUJI, *p-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case*, Invent. math. **137** (1999), 233-411.
- [41] T. TSUJI, *Saturated morphisms of logarithmic schemes*, preprint (1997).
- [42] T. TSUJI, *Notes on almost étale extensions of Faltings*, preprint.
- [43] T. TSUJI, *Notes on p-adic Simpson correspondence and Galois cohomology*, preprint (2009).

CNRS UMR 6625, IRMAR, UNIVERSITÉ DE RENNES 1, CAMPUS DE BEAULIEU, 35042 RENNES CEDEX, FRANCE

E-mail address: `ahmed.abbes@univ-rennes1.fr`

E-mail address: `michel.gros@univ-rennes1.fr`