

Le système d'Euler de Kato en famille (II) *

Shanwen WANG [†]

Résumé

Ce texte est le deuxième article d'une série de trois articles sur une généralisation de système d'Euler de Kato. Il est consacré à construire une famille de systèmes d'Euler de Kato sur la courbe de Hecke cuspidale, qui interpole le système d'Euler de Kato raffiné associé à une forme modulaire raffinée via une application de spécialisation. Par ailleurs, on explique la construction d'une famille de distributions sur $\mathbb{Z}_p$ sur la courbe de Hecke cuspidale à partir de cette famille de systèmes d'Euler de Kato.

Abstract

This article is the second article of a series of three articles on the generalization of Kato's Euler system. The main subject of this article is to construct a family of Kato's Euler systems over the cuspidal eigencurve, which interpolate the refined Kato's Euler system associated to a refined modular form. We also explain how to use this family of Kato's Euler system to construct a family of distributions on $\mathbb{Z}_p$ over the cuspidal eigencurve.

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Introduction	2
1.2	Notations	4
2	(φ, Γ)-modules et représentations galoisiennes	6
2.1	Anneaux des séries de Laurent	6
2.2	Raffinement et triangulation	7
2.3	Famille faiblement raffinée	9
3	Famille de Système d'Euler de Kato sur l'espace des poids et ses variantes	11
3.1	L'espace des poids $\mathscr{W}$ et le caractère universel	11
3.2	Familles de représentations de $\mathbb{I}_0(p)$ sur $\mathscr{W}$	11
3.3	Famille de systèmes d'Euler de Kato sur $\mathscr{W}$ et ses variantes	15

*2010 Mathematics Subject Classification. 11F85, 11F67, 11G40, 11R33, 11S80, 14G10, 14G35

*. Email : wetiron1984@gmail.com

4	Construction de la courbe de Hecke cuspidale	16
4.1	La théorie spectrale p -adique	17
4.2	La courbe d'Ash-Stevens	21
4.3	Famille de représentations galoisiennes sur la courbe de Hecke cuspidale . . .	26
4.3.1	Coleman-Mazur-Buzzard VS. Ash-Stevens	26
4.3.2	La transformation stricte	27
5	Construction de la famille de système d'Euler de Kato sur la courbe de Hecke cuspidale	28
5.1	Projection du système d'Euler de Kato	28
5.2	Application à la famille de système d'Euler de Kato	30
6	Fonction L p-adique en deux variables	31
6.1	La distribution $z_{\text{Eis},c,d}(k, j)$	31
6.2	La méthode de Rankin-Selberg	33
6.2.1	Généralité	33
6.2.2	Périodes et algébricité de valeurs spéciales	35
6.3	Raffinement du système d'Euler de Kato	37
6.3.1	Des fonctions localement constantes	37
6.3.2	Caractérisation du raffinement de système d'Euler de Kato	38
6.4	Fonction L p -adique d'une forme raffinée f_α	40
6.5	Fonction L p -adique en deux variables	42

1 Introduction

1.1 Introduction

Dans une séries d'articles datant des années 80, Hida montre que les formes modulaires ordinaires vivent dans des familles p -adiques et le poids varie p -adiquement. En 1995, Coleman montre que la même chose est vraie pour les formes modulaires surconvergentes non-ordinaires de pente finie. Ensuite, Coleman et Mazur [17] construisent un objet géométrique $\mathfrak{C}$, appelé la courbe de Hecke ("Eigencurve"), paramétrant les formes modulaires surconvergentes de pente finie. De plus, ils ont aussi construit une famille de représentations galoisiennes de rang 2 sur la courbe de Hecke. On note $\mathfrak{C}^0$ la sous-courbe fermée de $\mathfrak{C}$, appelé la courbe de Hecke cuspidale, paramétrant les formes modulaires surconvergentes cuspidales de pente finie, ainsi que $\tilde{\mathfrak{C}}^0$ la normalisation de $\mathfrak{C}^0$. Notre résultat principal (cf. théorème 1.1 ci-dessous) est que la fonction L p -adique d'une forme modulaire f varie analytiquement avec f sur $\tilde{\mathfrak{C}}^0$:

On choisit un caractère de Dirichlet χ modulo N avec $(N, p) = 1$, ce qui permet de fixer les périodes par lesquelles on doit diviser les valeurs spéciales des fonctions L que l'on veut interpoler (cf. §6.2.2 pour détails). Si $f \in \mathfrak{C}^0$ est une forme propre classique non-critique, on dispose d'une distribution $\mu_{f,\chi}$ sur $\mathbb{Z}_p$ à valeurs dans $\mathbb{Q}_p$, telle que, pour tout caractère η de Dirichlet modulo Np^m vérifiant que $\eta\chi(-1) = (-1)^{k-j-1}$, on a $\int_{\mathbb{Z}_p} \eta(x)x^{-j}\mu_{f,\chi} = L(f \otimes \eta, j)$ à multiplication près par des facteurs explicites (facteurs d'Euler, périodes, $\dots$), et qui fournit

la fonction L p -adique attachée à f , en posant $L_p(f, \kappa) = \int_{\mathbb{Z}_p^*} \kappa \mu_{f, \chi}$ si κ est un caractère localement analytique de $\mathbb{Z}_p^*$.

Théorème 1.1. *Il existe une distribution sur $\mathbb{Z}_p$ à valeurs dans $\mathcal{O}(\tilde{\mathfrak{C}}^0)$, tels que, pour tout point f dans le sous-ensemble Z des formes propres classiques non-critiques de $\mathfrak{C}^0$, on a*

$$\mathrm{Ev}_f(\mu_{\tilde{\mathfrak{C}}^0, \chi}) = C(f) \mu_{f, \chi},$$

où $C(f)$ est une constante dans $\bar{\mathbb{Q}}_p^*$ dépendant de la forme f .

Remarque 1.2. (1) Il y a au moins trois manières de construire $\mu_{f, \chi}$:

- La méthode classique utilise la théorie de symboles modulaires (Mazur-Swinnerton-Dyer [36], Manin [35], Vishik [50], Amice-Vélu [1], Mazur-Tate-Teitelbaum [37], Stevens [47], Pollack-Stevens [43] et [44]...);
- Une méthode plus récente passe par la méthode de Rankin-Selberg (Hida [27] et [28] dans le cas ordinaire, Panchishkin [38] dans le cas général);
- La méthode de Kato [30] passe par la construction d'un système d'Euler, utilise la théorie des (φ, Γ) -modules de Fontaine [25] pour en déduire, via une variante de l'application exponentielle de Perrin-Riou [39] et [41], une distribution. Montrer que cette distribution est celle que l'on cherche (i.e. interpole les valeurs spéciales de la fonction L complexe de la forme modulaire) nécessite de comparer deux lois de réciprocités explicites, et d'utiliser la méthode de Rankin comme dans l'approche de Panchishkin.

(2) Des fonctions L p -adiques en deux variables, dont une variable varie sur un morceau de $\tilde{\mathfrak{C}}^0$, ont déjà été construites par des méthodes différentes correspondant aux constructions de $\mu_{f, \chi}$ ci-dessus :

- La stratégie de Stevens [48] (travail non publié), Pollack-Stevens [44] et Bellaïche [6] est d'utiliser la théorie des symboles modulaires surconvergents, et ils réussissent à construire une fonction L p -adique $L_p(x, s)$ en deux variables, où x varie dans un voisinage d'une forme modulaire raffinée (non-critique par Stevens, et critique par Bellaïche) sur la courbe de Hecke;
- La stratégie de Hida [28] (pour la famille ordinaire) et de Panchishkin [38] (pour la famille de pente finie fixée) est d'utiliser la méthode de Rankin-Selberg en famille;
- La stratégie d'Emerton [24] est d'utiliser la cohomologie complétée et le foncteur de Jacquet dans la théorie de représentations localement analytiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$;
- La stratégie de Fukaya [23] et de Delbourgo [20], dans le cas ordinaire, passe par la déformation de systèmes d'Euler de Kato via la K -théorie et via la théorie des symboles modulaires respectivement, utilise la série de Coleman pour K_2 et une grande exponentielle duale respectivement pour en déduire une fonction L p -adique sur la famille ordinaire.

(3) Notre stratégie a pour point de départ les travaux de Kato [30] et de Colmez [18] (revisités par l'auteur dans [54]) sur le système d'Euler de Kato.

- Dans [55], on a construit une déformation $z_{\mathrm{Kato}, c, d}(\nu_j)$ (cf. §3.3) du système d'Euler de Kato sur l'espace des poids en reprenant la construction de Kato et défini une famille d'applications exponentielles duales, qui interpole l'application exponentielle duale de Kato et qui envoie la famille de systèmes d'Euler de Kato sur le produit d'une famille de séries d'Eisenstein avec une série d'Eisenstein.
- Dans cet article, on construit une famille de systèmes d'Euler de Kato sur $\mathfrak{C}^0$ (cf. §5) à partir de $z_{\mathrm{Kato}, c, d}(\nu_j)$; ensuite on utilise la théorie des (φ, Γ) -modules en famille ([10], [32],

[34]) pour en déduire une famille de distributions sur $\tilde{\mathfrak{C}}^0$.

- On peut évaluer notre fonction L p -adique en un point critique et comparer le résultat avec la construction de Bellaïche. Ceci est le sujet de [56].

(4) Le théorème ci-dessus montre qu'il existe une fonction L p -adique en deux variables $L_p(x, s)$, où x varie sur $\tilde{\mathfrak{C}}^0$, interpolant les fonctions L p -adiques de formes modulaires d'une variable. Il permet donc de montrer que la fonction L p -adique de Panchishkin, qui à priori n'est définie que sur un voisinage des points classiques, est la restriction d'une fonction analytique sur toute la courbe.

Le plan de cet article est le suivant : la démonstration comporte deux étapes principales mentionnées dans la remarque ci-dessus, qui correspondent aux chapitres §5 et §6. Ces deux étapes reposent sur trois chapitres de préparations (§2, 3 et 4) : au chapitre §2, on rappelle la théorie des (φ, Γ) -modules et la triangulation en famille ; au chapitre §3, on rappelle la construction de la famille de système d'Euler de Kato sur l'espace des poids et ses variantes, à qui on appliquera la projection du système d'Euler de Kato sur $\mathfrak{C}^0$ (cf. §5.1) ; au chapitre §4, on rappelle les constructions de la courbe de Hecke (celle de Coleman-Mazur-Buzzard et celle d'Ash-Stevens) et on construit une famille de représentations galoisiennes sur $\mathfrak{C}^0$, ce qui nécessite de comparer ces deux constructions de la courbe de Hecke.

Remerciements :

Ce travail repose sur les travaux d'Ash-Stevens, Berger-Colmez, Bellaïche, Chenevier, Colmez, Kato, Kedlaya-Pottharst-Xiao, et Liu. Je tiens à leur exprimer ma gratitude. Pendant la préparation de cet article, j'ai bénéficié de communications et discussions avec F. Andreatta, J. Bellaïche, P. Colmez, A. Iovita, R. Liu, G. Stevens, J. Tong et L. Xiao. Je voudrais aussi remercier les Prof. Y. Tian et Prof. S.W. Zhang et le Morningside Center de Pékin, ainsi que les Prof. H.Y. Chen et Prof. L. Fu et le CIM de Tianjin, pour leur hospitalité ; les exposés que j'ai donnés lors des conférences à ces deux endroits, en août 2012 et juin 2013, m'ont grandement aidé à mettre mes idées au clair. Je remercie aussi le Cariparo Eccellenza Grant "Differential Methods in Arithmetic, Geometry and Algebra" d'avoir financé mon séjour de 2011 à 2013 à Padoue, Italie. La dernière rédaction de cet article a été faite pendant mes séjours à l'IMJ et à l'IHES en 2013. Je souhaite remercier ces institutions pour m'avoir fourni d'excellentes conditions de travail.

1.2 Notations

On note $\overline{\mathbb{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$, et fixe, pour tout nombre premier p , une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_p$ de $\mathbb{Q}_p$, ainsi qu'un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$.

Si $N \in \mathbb{N}$, on note ζ_N la racine N -ième $e^{2i\pi/N} \in \overline{\mathbb{Q}}$ de l'unité, et on note $\mathbb{Q}^{\text{cycl}}$ l'extension cyclotomique de $\mathbb{Q}$, réunion des $\mathbb{Q}(\zeta_N)$, pour $N \geq 1$, ainsi que $\mathbb{Q}_p^{\text{cycl}}$ l'extension cyclotomique de $\mathbb{Q}_p$, réunion de $\mathbb{Q}_p(\zeta_N)$, pour $N \geq 1$.

Objets adéliques

Soient $\mathcal{P}$ l'ensemble des premiers de $\mathbb{Z}$ et $\hat{\mathbb{Z}}$ le complété profini de $\mathbb{Z}$, alors $\hat{\mathbb{Z}} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}_p$. Soit $\mathbb{A}_f = \mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}}$ l'anneau des adèles finis de $\mathbb{Q}$. Si $x \in \mathbb{A}_f$, on note x_p (resp. $x^{[p]}$) la composante de x en p (resp. en dehors de p). Notons $\hat{\mathbb{Z}}^{[p]} = \prod_{l \neq p} \mathbb{Z}_l$. On a donc $\hat{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_p \times \hat{\mathbb{Z}}^{[p]}$. Cela induit les décompositions suivantes : pour tout $d \geq 1$,

$$\mathbf{M}_d(\mathbb{A}_f) = \mathbf{M}_d(\mathbb{Q}_p) \times \mathbf{M}_d(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}}^{[p]}) \text{ et } \mathrm{GL}_d(\mathbb{A}_f) = \mathrm{GL}_d(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{GL}_d(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}}^{[p]}).$$

On définit les sous-ensembles suivants de $\mathbb{A}_f$ et $\mathbf{M}_2(\mathbb{A}_f)$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{Z}}^{(p)} &= \mathbb{Z}_p^* \times \hat{\mathbb{Z}}^{[p]} \text{ et } \mathbf{M}_2(\hat{\mathbb{Z}})^{(p)} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \times \mathbf{M}_2(\hat{\mathbb{Z}}^{[p]}), \\ \mathbb{A}_f^{(p)} &= \mathbb{Z}_p^* \times (\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}}^{[p]}) \text{ et } \mathbf{M}_2(\mathbb{A}_f)^{(p)} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \times \mathbf{M}_2(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}}^{[p]}). \end{aligned}$$

Actions de groupes

Soient X un espace topologique localement profini, et V un $\mathbb{Z}$ -module. On note $\mathrm{LC}_c(X, V)$ le module des fonctions localement constantes sur X à valeurs dans V dont le support est compact dans X . On note $\mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X, V)$ l'ensemble des distributions algébriques sur X à valeurs dans V , c'est à dire des applications $\mathbb{Z}$ -linéaires de $\mathrm{LC}_c(X, \mathbb{Z})$ à valeurs dans V . On note $\int_X \phi \mu$ la valeur de μ sur ϕ où $\mu \in \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X, V)$ et $\phi \in \mathrm{LC}_c(X, \mathbb{Z})$.

Soit G un groupe localement profini, agissant continûment à droite sur X et V . On munit $\mathrm{LC}_c(X, \mathbb{Z})$ et $\mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X, V)$ d'actions de G à droite comme suit :

si $g \in G, x \in X, \phi \in \mathrm{LC}_c(X, \mathbb{Z}), \mu \in \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(X, V)$, alors

$$(1) \quad (\phi * g)(x) = \phi(x * g^{-1}) \text{ et } \int_X \phi(\mu * g) = \left(\int_X (\phi * g^{-1}) \mu \right) * g.$$

Formes modulaires

Soient A un sous-anneau de $\mathbb{C}$ et Γ un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. On note $\mathcal{M}_k(\Gamma, \mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des formes modulaires de poids k pour Γ . On note aussi $\mathcal{M}_k(\Gamma, A)$ le sous A -module de $\mathcal{M}_k(\Gamma, \mathbb{C})$ des formes modulaires dont le q -développement est à coefficients dans A . On pose $\mathcal{M}(\Gamma, A) = \bigoplus_{k=0}^{+\infty} \mathcal{M}_k(\Gamma, A)$. Et on note $\mathcal{M}_k(A)$ (resp. $\mathcal{M}(A)$) la réunion des $\mathcal{M}_k(\Gamma, A)$ (resp. $\mathcal{M}(\Gamma, A)$), où Γ décrit tous les sous-groupes d'indice fini de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. On peut munir l'algèbre $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ d'une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})_+ = \{\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \mid \det \gamma > 0\}$ de la façon suivante :

$$(2) \quad f * \gamma = (\det \gamma)^{1-k} f|_k \gamma, \text{ pour } f \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C}) \text{ et } \gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})_+,$$

où $f|_k \gamma$ est l'action modulaire usuelle de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_+$.

On définit de même :

$$\mathcal{M}_k^{\mathrm{cong}}(A) = \bigcup_{\Gamma \text{ sous-groupe de congruence}} \mathcal{M}_k(\Gamma, A) \text{ et } \mathcal{M}^{\mathrm{cong}}(A) = \bigcup_k \mathcal{M}_k^{\mathrm{cong}}(A).$$

Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$ et soit $\bar{K}$ la clôture algébrique de K . On note Π_K le groupe des automorphismes de K -algèbres graduées $\mathcal{M}(\bar{K})$ sur $\mathcal{M}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), K)$; c'est un groupe profini.

On note $\Pi'_{\mathbb{Q}}$ le groupe des automorphismes de $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}})$ engendré par $\Pi_{\mathbb{Q}}$ et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})_+$. Plus généralement, si $S \subset \mathcal{P}$ est fini, on note $\Pi_{\mathbb{Q}}^{(S)}$ le sous-groupe de $\Pi'_{\mathbb{Q}}$ engendré par $\Pi_{\mathbb{Q}}$ et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}^{(S)})_+$, où $\mathbb{Z}^{(S)}$ est le sous-anneau de $\mathbb{Q}$ obtenu en inversant tous les nombres premiers qui n'appartiennent pas à S . Si $f \in \mathcal{M}(\overline{K})$, le groupe de galois $\mathcal{G}_K$ agit sur les coefficients du q -développement de f ; ceci nous fournit une section de $\Pi_K \rightarrow \mathcal{G}_K$, notée par ι_K .

Le groupe des automorphismes de $\mathcal{M}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$ sur $\mathcal{M}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$ est le groupe $\mathrm{SL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$, le complété profini de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ par rapport aux sous-groupes de congruence. D'autre part, soit $f \in \mathcal{M}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$, le groupe $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$ agit sur les coefficients du q -développement de f à travers son quotient $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}/\mathbb{Q})$ qui est isomorphe à $\hat{\mathbb{Z}}^*$ par le caractère cyclotomique. On note H le groupe des automorphismes de $\mathcal{M}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$ sur $\mathcal{M}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{Q})$. La sous-algèbre $\mathcal{M}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$ est stable par $\Pi_{\mathbb{Q}}$ qui agit à travers H . Le groupe H est isomorphe à $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ et on a le diagramme commutatif de groupes suivant (cf. par exemple [54, théorème 2.2]) :

$$(3) \quad \begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \Pi_{\overline{\mathbb{Q}}} & \longrightarrow & \Pi_{\mathbb{Q}} & \xrightleftharpoons[\iota_{\mathbb{Q}}]{} & \mathcal{G}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow 1, \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \chi_{\mathrm{cycl}} \\ 1 & \longrightarrow & \mathrm{SL}_2(\hat{\mathbb{Z}}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}}) & \xrightleftharpoons[\iota]{} & \hat{\mathbb{Z}}^* \longrightarrow 1 \end{array}$$

où la section $\iota_{\mathbb{Q}}$ de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$ dans $\Pi_{\mathbb{Q}}$ décrite plus haut envoie $u \in \hat{\mathbb{Z}}^*$ sur la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$.

2 (φ, Γ) -modules et représentations galoisiennes

2.1 Anneaux des séries de Laurent

Définition 2.1. Soit L un sous-corps de $\mathbb{C}_p$, on définit les anneaux des séries de Laurent à coefficients dans L :

- (1) L'anneau des fonctions analytiques sur le disque $v_p(T) > 0$:

$$\mathcal{R}_L^+ = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k T^k \mid a_k = 0 \text{ si } k \leq -1 \text{ et } \liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{|k|} v_p(a_k) \geq 0 \right\};$$

- (2) L'anneau des fonctions analytiques bornées sur le disque $v_p(T) > 0$:

$$\mathcal{E}_L^+ = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k T^k \mid a_k = 0 \text{ si } k \leq -1 \text{ et si la suite } \{v_p(a_k)\} \text{ est minorée} \right\};$$

- (3) L'anneau des fonctions annalytiques sur une couronne $0 < v_p(T) \leq r$, où $r > 0$ dépend de l'élément considéré (l'anneau de Robba) :

$$\mathcal{R}_L = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k T^k \mid \liminf_{k \rightarrow -\infty} \frac{1}{|k|} v_p(a_k) > 0 \text{ et } \liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} v_k(a_k) \geq 0 \right\};$$

- (4) L'anneau des fonctions analytiques bornées sur une couronne $0 < v_p(T) \leq r$ où r dépend de l'élément considéré :

$$\mathcal{E}_L^\dagger = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k T^k \mid \liminf_{k \rightarrow -\infty} \frac{1}{|k|} v_p(a_k) > 0 \text{ et la suite } \{v_p(a_k)\} \text{ est minorée} \right\}.$$

On a bien évidemment $\mathcal{E}_L^\dagger \cap \mathcal{R}_L^+ = \mathcal{E}_L^+$. Si $L = \mathbb{Q}_p$, on va simplement noter ces anneaux par $\mathcal{R}^+$, $\mathcal{E}^+$, $\mathcal{E}^\dagger$ et $\mathcal{R}$. On note $\mathcal{O}_\mathcal{E}^+ = \mathbb{Z}_p[[T]]$ et on a $\mathcal{E}^+ = \mathcal{O}_\mathcal{E}^+ \otimes \mathbb{Q}_p$.

Soit C un pro- p -groupe qui est isomorphe à $1 + p\mathbb{Z}_p$, et si c est un générateur de C , l'algèbre de groupe complété Λ_C de C est isomorphe à $\mathbb{Z}_p[[c-1]]$. On définit l'anneau $\mathcal{R}^+(C)$ en remplaçant par $c-1$ la variable T intervenant dans la définition de $\mathcal{R}^+$. Si C_n est le sous-groupe fermé de C d'indice p^n , on a isomorphisme $\Lambda_C \otimes_{\Lambda_{C_n}} \mathcal{R}^+(C_n) \cong \mathcal{R}^+(C)$.

Soit H un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}_p^*$. On note H_d le sous-groupe de H correspondant à $1 + p^d\mathbb{Z}_p$. On définit l'anneau $\mathcal{R}^+(H)$ par le produit tensoriel $\Lambda_H \otimes \mathcal{R}^+(H_d)$, qui est indépendant du choix de H_d .

2.2 Raffinement et triangulation

Si A est un anneau topologique muni d'actions continues de φ et Γ commutant entre elles, un (φ, Γ) -module D sur A est un A -module de type fini muni d'actions semi-linéaires continues de φ et Γ commutant entre elles. Ceci s'applique en particulier à $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^\dagger$ et $\mathcal{R}$. Un (φ, Γ) -module sur $\mathcal{E}$ est dit étale si D possède un $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ -réseau T stable par φ et Γ tel que $\varphi(T)$ engendre T comme $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ -module.

Proposition 2.2 (Fontaine). *Il existe un anneau B muni des actions de φ et $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ tel que $B^{\varphi=1} = L$ et $B^{H_{\mathbb{Q}_p}} = \mathcal{E}$. Les foncteurs $\mathbf{V}$ et $\mathbf{D}$ définis par*

$$\mathbf{D}(V) = (B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{H_{\mathbb{Q}_p}} \text{ et } \mathbf{V}(D) = (B \otimes_{\mathcal{E}} D)^{\varphi=1}$$

sont inverses l'un de l'autre et établissent une équivalence de catégories entre la catégorie des L -représentations de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ et celle des (φ, Γ) -modules étales sur $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{E}$.

La théorie de Fontaine est complétée par des travaux Cherbonnier-Colmez [13], Berger [8] et Kedlaya [31], qui associe à V des (φ, Γ) -modules $\mathbf{D}^\dagger$ et $\mathbf{D}_{\text{rig}}$ sur $\mathcal{E}^\dagger$ et $\mathcal{R}$ respectivement et établit une équivalence de catégories entre L -représentations de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ et celle des (φ, Γ) -modules de pente 0 sur $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{E}^\dagger$ et sur $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{R}$ respectivement. Le lecteur intéressé est renvoyé à [19, remarque 0.4].

Définition 2.3. (1) Un (φ, Γ) -module D sur $\mathcal{R}$ est dit triangulable si c'est une extension successive de (φ, Γ) -modules de rang 1 sur $\mathcal{R}$, i.e. si D possède une filtration croissante par des sous- (φ, Γ) -modules D_i , pour $0 \leq i \leq d$, telle que l'on ait $D_0 = 0$, $D_d = D$ et D_i/D_{i-1} est libre de rang 1 si $1 \leq i \leq d$.

(2) Soit V une L -représentation de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$. On note $\mathbf{D}^\dagger(V)$ et $\mathbf{D}_{\text{rig}}(V) = \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathbf{D}^\dagger(V)$ respectivement les (φ, Γ) -modules sur $\mathcal{E}^\dagger$ et $\mathcal{R}$ associés à V . On dit que V est trianguline si $\mathbf{D}_{\text{rig}}(V)$ est triangulable.

Soit $D = \mathbf{D}_{\text{rig}}(V)$ le (φ, Γ) -module sur $\mathcal{R}$ associé à une L -représentation V de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$. On pose $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V) = (D \otimes_{\mathcal{R}} [\frac{1}{t}])^\Gamma$; c'est un L -espace vectoriel de dimension $\leq \text{rank}_{\mathcal{R}} D$ muni d'une action L -linéaire de φ induite par celle sur D et d'une filtration induite par celle sur $L_\infty((t))$ via l'application de localisation $\iota_\infty : \mathcal{R} \rightarrow L_\infty((t))$. On dit que V est une représentation cristalline si $\dim_L \mathbf{D}_{\text{cris}}(V) = \text{rank}_{\mathcal{R}_L} D$. D'après Berger [8], cette définition coïncide avec la définition usuelle.

Soit V est une représentation cristalline de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ de dimension d . On peut l'associer une filtration φ -stable $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_i)_{0 \leq i \leq d}$ de $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$:

$$\mathcal{F}_0 = 0 \subsetneq \mathcal{F}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{F}_d = \mathbf{D}_{\text{cris}}(V).$$

La proposition [7, proposition 2.4.1] suivant implique que les représentations cristallines sont triangullines.

Proposition 2.4. *Soit V une représentation cristalline de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$. On note D le (φ, Γ) -module sur $\mathcal{R}$ associé à V . L'application $(\mathcal{F}_i) \mapsto (\text{Fil}_i(D)) := (\mathcal{R}[\frac{1}{t}]\mathcal{F}_i) \cap D$ induite une bijection naturelle entre l'ensemble des filtrations φ -stables de $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$ et l'ensemble des triangulations de $D = \mathbf{D}_{\text{rig}}(V)$, dont l'inverse est donné par $\mathcal{F}_i = (\text{Fil}_i(D)[\frac{1}{t}])^\Gamma$.*

Soient $N \geq 1$ un entier premier à p , $k \geq 2$ un entier, et ϵ un caractère de Dirichlet modulo N (pas nécessairement primitif). Fixons une forme modulaire primitive f de niveau $\Gamma_1(N)$ de caractère de Dirichlet ϵ . En particulier, $a_1 = 1$ et $\mathbb{Q}(f) = \mathbb{Q}(a_2, \dots, a_n, \dots)$ est une extension finie de $\mathbb{Q}$.

On note $\mathcal{H}^{\text{sph}}$ l'algèbre de Hecke engendré par les opérateurs de Hecke $T(l)$ avec $l \nmid Np$ et les opérateurs de diamond. On note $\Gamma(N; p) = \Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(p)$. Si S est un sous-ensemble fini de $\mathcal{P}$ tel que $\{l \in \mathcal{P} : l|N\} \subset S$, et si M est un $\mathbb{Q}(f)$ -espace vectoriel muni d'actions des $T(l), T'(l), l \notin S \cup \{p\}$, l'opérateur T_p et $(\begin{smallmatrix} u^{-1} & 0 \\ 0 & u \end{smallmatrix})$, pour $u \in U$ sous-groupe ouvert de $\hat{\mathbb{Z}}^*$, on note M_{π_f} le quotient de M par le sous- $\mathbb{Q}(f)$ -espace vectoriel engendré par les $x * T(l) - a_l x$, où $x \in M$ et $l \notin S \cup \{p\}$.

D'après Deligne [21], on sait associer une représentation galoisienne de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$ de dimension 2 à f de manière explicite : On note $\bar{\Gamma}_1(N)$ le complété profini de $\Gamma_1(N)$. On note $V_p = \mathbb{Q}_p e_1 \oplus \mathbb{Q}_p e_2$ la représentation standard de dimension 2 de $\text{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ donnée par $e_1 * \gamma = a e_1 + b e_2$ et $e_2 * \gamma = c e_1 + d e_2$ si $\gamma = (\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}) \in \text{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$. On définit la représentation galoisienne de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$ associée à f par

$$V_f = (H^1(\bar{\Gamma}_1(N), \text{Sym}^{k-2} V_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(f))_{\pi_f} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(2-k).$$

C'est une $\mathbb{Q}_p(f)$ -représentation irréductible de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$ de dimension 2, non ramifiée en dehors de Np . Si $l \nmid Np$, le déterminant de $1 - \text{Frob}_l^{-1} X$ agissant sur V_f est $1 - a_l X + \epsilon(l) l^{k-1} X^2$, où Frob_l est un frobenius arithmétique en l . La restriction de V_f à $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ est cristalline de poids de Hodge-Tate¹ 0, $1-k$ et le polynôme caractéristique de φ sur $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V_f)$ est $X^2 - a_p X + \epsilon(p) p^{k-1}$.

Définition 2.5. Si α est une racine du polynôme caractéristique de T_p , on note V_{f_α} le plus grand espace quotient de $H^1(\Gamma(N; p), \text{Sym}^{k-2} V_p(1))_{\pi_f}$ propre pour l'opérateur U_p avec la valeur propre α ; on dit que V_{f_α} est un raffinement de V_f .

Par l'isomorphisme d'Eichler-Shimura [22], on a le diagramme commutatif Hecke-Galois

1. Par convention, le poids de Hodge-Tate du caractère cyclotomique est 1.

équivariant de $\mathbb{Q}_p(f_\alpha) \otimes \mathbb{C}_p$ -modules

$$\begin{array}{ccc}
(H^1(\Gamma_1(N), \text{Sym}^{k-2} V_p) \otimes \mathbb{Q}_p(f_\alpha)) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p(1) & \longrightarrow & M_k(\Gamma_1(N), \mathbb{Q}_p(f_\alpha)) \otimes \mathbb{C}_p \\
\downarrow & & \downarrow \\
(H^1(\Gamma(N; p), \text{Sym}^{k-2} V_p) \otimes \mathbb{Q}_p(f_\alpha)) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p(1) & \longrightarrow & M_k(\Gamma(N; p), \mathbb{Q}_p(f_\alpha)) \otimes \mathbb{C}_p \\
\downarrow & & \downarrow \\
V_{f_\alpha} \otimes \mathbb{C}_p & \longrightarrow & \mathbb{Q}_p(f_\alpha) f_\alpha \otimes \mathbb{C}_p
\end{array}$$

où l'action de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$ est linéaire sur $\mathbb{Q}_p(f_\alpha)$, semi-linéaire sur $\mathbb{C}_p$ à travers $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$. De plus, on a un isomorphisme $V_{f_\alpha} \cong V_f(k-1)$. Le corollaire suivant est une conséquence immédiate de la proposition 2.4.

Corollaire 2.6. *Soit f une forme modulaire primitive de niveau $\Gamma_1(N)$. Soit V_f la représentation galoisienne associée à f dans l'introduction. Alors il existe d'une bijection naturelle entre l'ensemble des raffinements de V_f et l'ensemble des triangulations de $D = \mathbf{D}_{\text{rig}}(V_f)$.*

2.3 Famille faiblement raffinée

Le foncteur de Berger-Colmez $\mathbf{D}_{\text{BC}, \text{rig}}$

Soit S une $\mathbb{Q}_p$ -algèbre de Banach et soit $\mathcal{O}_S$ l'anneau des éléments de S de norme ≤ 1 . On note $M(S)$ l'espace rigide analytique associé à S . Si $x \in M(S)$, on note m_x l'idéal maximal de S correspondant à x . On note $\mathcal{E}_S^\dagger = S \hat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{E}^\dagger$; les actions continues de φ et Γ sur $\mathcal{E}^\dagger$ s'étendent par S -linéarité en des actions continues de φ et Γ sur $\mathcal{E}_S^\dagger$.

Définition 2.7. (1) Une S -représentation V_S de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ est un S -module localement libre muni d'une action continue S -linéaire de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$.

(2) Un (φ, Γ) -module sur $\mathcal{E}_S^\dagger$ est un $\mathcal{E}_S^\dagger$ -module D_S de type fini, localement libre muni d'actions continues $\mathcal{E}_S^\dagger$ -semi-linéaire de φ et Γ commutant entre elles, tel que $\varphi^* D_S \cong D_S$. On dit qu'un (φ, Γ) -module D_S sur $\mathcal{E}_S^\dagger$ est étale s'il existe un sous- $\mathcal{O}_S \hat{\otimes} \mathcal{O}_{\mathcal{E}^\dagger}$ -module N_S tel que $\varphi^* N_S \cong N_S$ et $N_S \otimes_{\mathcal{O}_S \hat{\otimes} \mathcal{O}_{\mathcal{E}^\dagger}} \mathcal{E}_S^\dagger \cong D_S$, où $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^\dagger}$ est l'anneau des éléments de $\mathcal{E}^\dagger$ de norme ≤ 1 .

Soit V_S une S -représentation libre de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ de rang d munie d'un $\mathcal{O}_S$ -réseau libre T_S stable sous l'action de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$. Si $x \in M(S)$, on note $V_x = V_S \otimes_S (S/m_x)$. À la représentation V_S , Berger et Colmez [10, théorème 4.2.9] ont associé un (φ, Γ) -module étale $\mathbf{D}_{\text{BC}}^\dagger(V_S)$ sur $\mathcal{E}_S^\dagger$, de rang d , tel que l'on ait $\mathbf{D}_{\text{BC}}^\dagger(V_S) \otimes_S (S/m_x) \cong \mathbf{D}^\dagger(V_x)$. En particulier, si S est une algèbre affinoïde définie sur $\mathbb{Q}_p$, ceci définit (voir [33, §3]) un foncteur de la catégorie des S -représentations de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ sur la catégorie des (φ, Γ) -modules étales sur $\mathcal{E}_S^\dagger$, noté encore par $\mathbf{D}_{\text{BC}}^\dagger$.

Si $r > 0$, on note $\mathcal{R}_r$ l'anneau des fonctions analytiques sur la couronne

$$I_r = \{T \in \mathbb{C}_p : 0 < v_p(T) \leq \frac{1}{r}\}$$

et on a $\mathcal{R} = \cup_{r>0} \mathcal{R}_r$. On note $\mathcal{R}_{r,S} = S \hat{\otimes} \mathcal{R}_r$ et $\mathcal{R}_S = \cup_{r>0} \mathcal{R}_{r,S}$.

Définition 2.8. (1) Un fibré vectoriel D sur $\mathcal{R}_{r,S}$ est un faisceau localement libre sur le $\mathbb{Q}_p$ -espace rigide $I_r \times M(S)$. Un fibré vectoriel sur $\mathcal{R}_S$ est une limite directe de fibrés vectoriels sur $\mathcal{R}_{r,S}$ pour $r \rightarrow \infty$.
(2) Un (φ, Γ) -module D sur $\mathcal{R}_S$ est un fibré vectoriel sur $\mathcal{R}_S$ muni d'actions semi-linéaires de φ et Γ commutant entre eux, tel que on a un isomorphisme de fibrés vectoriels $\varphi^* D \cong D$.
(3) Un (φ, Γ) -module D sur $\mathcal{R}_S$ est étale s'il existe un (φ, Γ) -module étale $D^\dagger$ sur $\mathcal{E}_S^\dagger$ tel que $D \cong D^\dagger \otimes_{\mathcal{E}_S^\dagger} \mathcal{R}_S$.

En composant le foncteur $\mathbf{D}_{\text{BC}}^\dagger$ et le changement de base $- \otimes_{\mathcal{E}_S^\dagger} \mathcal{R}_S$, on obtient un foncteur de la catégorie des S -représentations de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ sur la catégorie des (φ, Γ) -modules étales sur $\mathcal{R}_S$, noté $\mathbf{D}_{\text{BC}, \text{rig}}$.

Famille faiblement raffinée

Soit $\mathcal{X}$ un espace rigide analytique réduit et séparé.

Définition 2.9. Une famille de représentations p -adiques faiblement raffinée de dimension 2 sur $\mathcal{X}$ est la donnée d'un $\mathcal{O}(\mathcal{X})$ -module $V_{\mathcal{X}}$, localement libre de rang 2, muni d'une action $\mathcal{X}$ -linéaire continue de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ et de données suivantes :

- (1) 2 fonctions analytiques $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathcal{O}(\mathcal{X})$,
- (2) une fonction analytique $F \in \mathcal{O}(\mathcal{X})$,
- (3) un sous-ensemble Zariski-dense Z de $\mathcal{X}$,

qui vérifient les conditions suivantes :

- (a) Les poids de Hodge-Tate de $V_{\mathcal{X}}$ sont κ_1, κ_2 ;
- (b) Si $z \in Z$, alors V_z est cristalline et $\kappa_1(z)$ est le plus grand poids de Hodge-Tate de V_z ;
- (c) Les valeurs propres de φ sur $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V_z)$ sont distinctes et il existe une triangulation de $\mathbf{D}_{\text{rig}}(V_z)$ donnée par

$$0 \subsetneq \mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{D}_{\text{rig}}(V_z)^{\varphi=F, \Gamma=\chi_{\text{cycl}}^{\kappa_1(z)}} \subsetneq \mathbf{D}_{\text{rig}}(V_z);$$

- (d) Si $C \in \mathbb{N}$, on note Z_C l'ensemble des $z \in Z$ tels que $\kappa_1(z) - \kappa_2(z) > C$. Alors pour tout C , Z_C s'accumule en tout les points de Z . Autrement dit, pour tous $z \in Z$, $C > 0$, et tout voisinage affinoïde U de z , $U \cap Z_C$ est Zariski dense dans U ;
- (e) Pour $i = 1, 2$, il existe un caractère continu $\mathbb{Z}_p^* \rightarrow \mathcal{O}(\mathcal{X})^*$, dont la dérivée en 1 est l'application κ_i et l'évaluation en $z \in Z$ est le caractère $x \mapsto x^{\kappa_i(z)}$.

Remarque 2.10. La notion de famille faiblement raffinée en dimension quelconque a été étudiée par Bellaïche et Chenevier [7, §4.2].

Le théorème suivant montre qu'une famille de représentations p -adiques faiblement raffinée de dimension 2 admet d'une triangulation globale.

Théorème 2.11. [34, theorem 5.1.5] Soit $(V_{\mathcal{X}}, Z, F, \kappa_1, \kappa_2)$ une famille de représentations p -adiques faiblement raffinée de dimension 2 telle que $\kappa_1 = 0$. Alors $\mathbf{D}_{\text{BC}, \text{rig}}(V_{\mathcal{X}})^{\varphi=F, \Gamma=1}$ est un faisceau cohérent sur $\mathcal{X}$ de rang 1.

3 Famille de Système d'Euler de Kato sur l'espace des poids et ses variantes

3.1 L'espace des poids $\mathcal{W}$ et le caractère universel

On note $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p^*]]$ l'algèbre d'Iwasawa, qui est un anneau semi-local régulier, noethérien, de dimension de Krull 2. Le groupe rigide analytique $\mathcal{W}$ sur $\mathbb{Q}_p$ qui lui est associé est appelé *l'espace des poids*. Les $\mathbb{C}_p$ -points de $\mathcal{W}$ sont l'ensemble $\text{Hom}_{\text{cont}}(\mathbb{Z}_p^*, \mathbb{C}_p^*)$ des caractères continus sur $\mathbb{Z}_p^*$ à valeurs dans $\mathbb{C}_p^*$. La décomposition de $\mathbb{Z}_p^* \cong \mu_{p-1} \times (1 + p\mathbb{Z}_p)$, où μ_{p-1} est le groupe des unités d'ordre $p-1$, induit une décomposition

$$\mathcal{W}(\mathbb{C}_p) = \text{Hom}(\mu_{p-1}, \mathbb{C}_p^*) \times \text{Hom}_{\text{cont}}(\Gamma, \mathbb{C}_p^*), \text{ où } \Gamma = 1 + p\mathbb{Z}_p \text{ est un pro-}p\text{-groupe.}$$

Ceci implique que $\mathcal{W}$ est un recouvrement fini du disque des unités p -adiques qui est l'espace rigide associé à l'algèbre $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$. On a une inclusion $\mathbb{Z} \subset \mathcal{W}$ envoyant k sur le caractère $(z \mapsto z^{k-2})$.

L'inclusion naturelle $\mathbb{Z}_p^* \subset \mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}_p^*]$ induit un caractère canonique

$$\kappa^{\text{univ}} : \mathbb{Z}_p^* \rightarrow \mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}_p^*] \subset \mathcal{O}(\mathcal{W}),$$

appelé le *caractère universel* de $\mathcal{W}$. Soit U un ouvert affinoïde de $\mathcal{W}$. Si $\kappa \in U(\mathbb{C}_p)$ est un caractère continu sur $\mathbb{Z}_p^*$ à valeurs dans $\mathbb{C}_p^*$, on définit une application $\text{Ev}_\kappa : \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathbb{C}_p$ d'évaluation en point κ . En particulier, on a $\kappa = \text{Ev}_\kappa \circ \kappa^{\text{univ}}$.

On rappelle que si $\mathcal{X}$ est un $\mathbb{Q}_p$ -espace rigide, un sous-ensemble $Z \subset \mathcal{X}$ est dit *Zariski-dense* si pour tout sous-ensemble analytique $U \subset \mathcal{X}$ tel que $Z \subset U$, on a alors $U = \mathcal{X}$. Soit $Z \subset \mathcal{X}$ un sous-ensemble Zariski-dense, tel que pour tout $z \in Z$ et tout voisinage ouvert affinoïde V de z dans $\mathcal{X}$, $V \cap Z$ est Zariski-dense dans chaque composante irréductible de V contenant z , on dira alors que Z est *très Zariski-dense* dans $\mathcal{X}$. Un exemple important est que l'ensemble $\mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{Z}$) est très Zariski-dense dans l'espace $\mathcal{W}$.

On dira qu'un ouvert affinoïde $U = \text{Spm } R \subset \mathcal{X}$ est *agréable* si l'anneau R et son anneau résiduel $\tilde{R} = R^0/pR^0$ sont des anneaux principaux, où R^0 est l'anneau des entiers de R . Pour tout $1 \leq n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z} \subset \mathcal{W}$, la boule fermée $W_{k,n}$ de centre k de rayon p^{-n} est un ouvert affinoïde agréable de $\mathcal{W}$. En particulier, tout point $k \in \mathbb{Z}$ admet une base de voisinages d'ouverts affinoïdes agréables dans $\mathcal{W}$.

3.2 Familles de représentations de $\mathbb{I}_0(p)$ sur $\mathcal{W}$

A-Représentations de Banach d'un groupe topologique

Soit K un sous-corps complet de $\mathbb{C}_p$ et soit $(A, |\cdot|_A)$ une K -algèbre de Banach. On note $\mathcal{C}_A^0(I)$ (resp. $\mathcal{C}_K^0(I)$) l'ensemble des suites $x = (x_i)_{i \in I}$ d'éléments de A (resp. K) tendant vers 0 suivant le filtre des complémentaires de parties finies pour la norme $|x| = \sup_{i \in I} |x_i|_A$. Soit M un A -module de Banach orthonormalisable et soit $\{e_i\}_{i \in I}$ une base orthonormale de M . On a un isomorphisme de A -modules :

$$\check{M} \cong \text{Hom}_A(\mathcal{C}_A^0(I), A) \cong \text{Hom}_K(\mathcal{C}_K^0(I), A),$$

où $\check{M}$ est le A -dual de M . On note $M^\vee$ l'image inverse de $\mathrm{Hom}_K(\mathcal{C}_K^0(I), K) \hat{\otimes}_K A$ dans $\check{M}$ sous l'isomorphisme ci-dessus, qui en fait un sous- A -module de Banach. De plus, $M^\vee$ est orthonormalisable.

Exemple 3.1. Si $h \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{LA}_h(\mathbb{Z}_p, A)$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{Z}_p \rightarrow A$ dont la restriction à $a + p^h \mathbb{Z}_p$ est la restriction d'une fonction A -analytique sur le disque fermé $\{x \in \mathbb{C}_p; v_p(x - a) \geq h\}$, quel que soit $a \in \mathbb{Z}_p$; c'est aussi un A -module de Banach orthonormalisable et on a $\mathrm{LA}_h(\mathbb{Z}_p, A) \cong \mathrm{LA}_h(\mathbb{Z}_p, K) \hat{\otimes}_K A$. On note $\mathbf{D}_{h,A} = \mathrm{LA}_h(\mathbb{Z}_p, A)^\vee$.

On note $\widehat{\mathbf{PD}}_h$ le sous $\mathbb{Z}_p$ -module de $\mathbb{Q}_p[[T]]$ des $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n T^n / [\frac{n}{p^h}]!$, où les a_n sont dans $\mathbb{Z}_p$. Le A -module de Banach $\mathbf{D}_{h,A}$ est caractérisé complètement par la transformée d'Amice $\mu \mapsto \int_{\mathbb{Z}_p} (1+T)^x \mu$ et il est isomorphe à $\widehat{\mathbf{PD}}_h \hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} A$.

Définition 3.2. Soit G un groupe topologique. Une A -représentation de Banach de G est un A -module de Banach orthonormalisable muni d'une action A -linéaire continue de G .

Exemple 3.3. (1) Soit V_0 une K -représentation de Banach de G (i.e. un K -espace de Banach muni d'une action K -linéaire continue de G). On étend l'action de G sur V_0 par A -linéarité en une action sur $V = V_0 \hat{\otimes}_K A$, ce qui est une A -représentation de Banach de G .

(2) Soit V une A -représentation de Banach de G à droite. On suppose que V est munie d'une structure d'anneau. On note V^* le groupe des unités de V . Soit $\eta : G \rightarrow V^*$ un 1-cocycle (i.e. une fonction continue sur G à valeurs dans V telle que $\eta(h_1 h_2) = (\eta(h_2) * h_1) \eta(h_1)$). On note $V(\eta)$ la A -représentation de Banach V tordue par le 1-cocycle η .

(3) Soit V une A -représentation de Banach de G à gauche. Sa A -duale $\check{V} = \mathrm{Hom}_A(V, A)$ est munie de l'action de G à droite donnée par la formule

$$f * \gamma(v) = f(\gamma v), \text{ si } \gamma \in G, f \in \check{V}, v \in V.$$

Le sous- A -module $V^\vee$ de $\check{V}$ est stable sous cette action, et donc une A -représentation de Banach de G à droite.

Représentations de Banach sur un espace rigide

Soit $\mathcal{X}$ un K -espace rigide séparé et réduit.

Définition 3.4. Un $\mathcal{X}$ -module de Banach est la donnée d'un faisceau $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{X}$ tel que

(1) pour tout $U \subset \mathcal{X}$ ouvert affinoïde, $\mathcal{F}(U)$ est un $\mathcal{O}(U)$ -module de Banach orthonormalisable;

(2) pour tout $U' \subset U$ ouverts affinoïdes, l'application canonique $\phi_U^{U'} : \mathcal{O}(U') \hat{\otimes}_{\mathcal{O}(U)} \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U')$ soit un isomorphisme de $\mathcal{O}(U')$ -modules de Banach orthonormalisables.

Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{X}$ -module de Banach. Un endomorphisme *compact* σ de $\mathcal{F}$ est un endomorphisme de $\mathcal{X}$ -modules, tel que,

(1) pour tout U ouvert affinoïde, $\sigma_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ soit un endomorphisme compact de $\mathcal{O}(U)$ -modules de Banach orthonormalisables;

(2) pour tout $U' \subset U$ ouverts affinoïdes, le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(U') \hat{\otimes}_{\mathcal{O}(U)} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\phi_U^{U'}} & \mathcal{F}(U') \\ \downarrow 1_{U'} \hat{\otimes} \sigma_U & & \downarrow \sigma_{U'} \\ \mathcal{O}(U') \hat{\otimes}_{\mathcal{O}(U)} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\phi_U^{U'}} & \mathcal{F}(U'). \end{array}$$

Définition 3.5. Soit G un groupe topologique. Une $\mathcal{X}$ -représentation de Banach $\mathcal{F}$ de G est la donnée d'un $\mathcal{X}$ -module de Banach muni d'une action continue de G , qui est compatible avec la structure de $\mathcal{X}$ -module de Banach.

Dans l'exemple suivant, on explique la construction des grosses représentations du sous-groupe d'Iwahori $\mathbb{I}_0(p)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ utilisées dans cet article.

Exemple 3.6. Si $1 \leq j \in \mathbb{N}$, il existe une $\mathcal{W}$ -représentation de Banach $\mathbf{Mes}_{\mathcal{W},j}$ de $\mathbb{I}_0(p)$ (cf. [55, §2.2]), qui est une interpolation p -adique en poids k des représentations algébriques $V_{k,j+2}$ de $\mathbb{I}_0(p)$, où $V_{k,j} = \mathrm{Sym}^{k-2} V_p \otimes \det^{2-j}$ avec V_p la représentation standard de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$. Comme on a besoin de sa structure explicite, on rappelle sa construction ci-dessous en trois étapes :

- On définit une action modulaire de $\mathbb{I}_0(p)$ sur $\mathbb{Z}_p$ par la formule

$$z * \gamma = \frac{b + dz}{a + cz}, \text{ si } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{I}_0(p),$$

et une action continue de $\mathbb{I}_0(p)$ sur $\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$ à droite par la formule :

$$\gamma f(z) = f(\gamma z), \text{ si } \gamma \in \mathbb{I}_0(p) \text{ et } f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p).$$

Ceci permet de lui associer un faisceau constant $\mathcal{C}_{\mathcal{W}}^0$ de $\mathbb{I}_0(p)$ sur $\mathcal{W}$ défini par : si U un ouvert affinoïde de $\mathcal{W}$, on pose $\mathcal{C}_{\mathcal{W}}^0(U) = \mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, \mathcal{O}(U))$. Ce faisceau $\mathcal{C}_{\mathcal{W}}^0$ est une $\mathcal{W}$ -représentation de Banach de $\mathbb{I}_0(p)$.

- Si $a \in \mathbb{Z}_p^*$ et si $c \in p\mathbb{Z}_p$, on définit une fonction sur $\mathbb{Z}_p$ à valeurs dans $\mathcal{O}(\mathcal{W})$ par la formule

$$f_{a,c}(z) = \kappa^{\mathrm{uinv}}(a + cz),$$

qui appartient à l'anneau $\mathcal{C}_{\mathcal{W}}^0(\mathcal{W})$ des sections globales de $\mathcal{C}_{\mathcal{W}}^0$. De plus, elle est une unité de l'anneau $\mathcal{C}_{\mathcal{W}}^0(\mathcal{W})$. Si $1 \leq j \in \mathbb{N}$, on définit une fonction ρ_j^{uinv} sur $\mathbb{I}_0(p)$ à valeurs dans $\mathcal{C}_{\mathcal{W}}^0(\mathcal{W})^*$ par la formule :

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \rho_j^{\mathrm{uinv}}(g) = f_{a,c}(z)(\det g)^{-j}, \text{ si } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{I}_0(p),$$

qui est un 1-cocycle de $\mathbb{I}_0(p)$. On tord $\mathcal{C}_{\mathcal{W}}^0$ par le 1-cocycle ρ_j^{uinv} ce qui définit une $\mathcal{W}$ -représentation de Banach $\mathcal{C}_{\mathcal{W}}^{0,\rho_j^{\mathrm{uinv}}}$ de $\mathbb{I}_0(p)$.

Si $k \in \mathbb{N}$, l'application d'évaluation Ev_k induit un 1-cocycle algébrique $\rho_{k,j}$ sur $\mathbb{I}_0(p)$ à valeurs dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$ donné par la formule :

$$\rho_{k,j}(g) = \mathrm{Ev}_k(\rho_j^{\mathrm{uinv}}(g)) = (a + cz)^{k-2}(\det g)^{-j}.$$

On note $\mathcal{C}_{k,j}^0$ la $\mathbb{Q}_p$ -représentation de Banach $\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$ tordue par le 1-cocycle $\rho_{k,j}$. Alors, l'application d'évaluation Ev_k induit une application d'évaluation de $\mathcal{C}_{\mathcal{W}}^{0,\rho_j^{\text{univ}}}$ dans $\mathcal{C}_{k,j}^0$, notée par $\text{Ev}_{k,j}$, qui est $\mathbb{I}_0(p)$ -équivariante.

- On définit la $\mathcal{W}$ -représentation de Banach $\mathbf{Mes}_{\mathcal{W},j}$ duale de $\mathcal{C}_{\mathcal{W}}^{0,\rho_j^{\text{univ}}}$: si $U \subset \mathcal{W}$ est un ouvert affinoïde, $\mathbf{Mes}_{\mathcal{W},j}(U)$ est défini par $\mathbf{Mes}_{\mathcal{W},j}(U) = \mathcal{C}_{\mathcal{W}}^{0,\rho_j^{\text{univ}}}(U)^\vee$.

On note l'accouplement $\mathcal{O}(U)$ -linéaire $\mathbb{I}_0(p)$ -équivariant

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{Mes}_{\mathcal{W},j}(U) \times \mathcal{C}_{\mathcal{W}}^{0,\rho_j^{\text{univ}}}(U) \rightarrow \mathcal{O}(U)$$

par l'intégration $\int_{\mathbb{Z}_p}$: on a

$$\langle \mu * \gamma, f \rangle = \int_{\mathbb{Z}_p} f(\mu * \gamma) = \int_{\mathbb{Z}_p} (\gamma f) \mu, \text{ si } f \in \mathcal{C}_{\mathcal{W}}^{0,\rho_j^{\text{univ}}}(U), \gamma \in \mathbb{I}_0(p) \text{ et } \mu \in \mathbf{Mes}_{\mathcal{W},j}(U).$$

On note $\mathbf{Mes}_{k,j}$ la $\mathbb{Q}_p$ -représentation de $\mathbb{I}_0(p)$ duale de $\mathcal{C}_{k,j}^0$. Remarquons qu'on a une inclusion de $\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, \mathcal{O}(U))$. Si $k \in \mathbb{Z}$ appartient à U , alors l'application $\text{Ev}_{k,j}$ induit une application $\mathbb{I}_0(p)$ -équivariante, notée encore par $\text{Ev}_{k,j}$,

$$\mathbf{Mes}_{\mathcal{W},j}(U) \rightarrow \mathbf{Mes}_{k,j}; \int_{\mathbb{Z}_p} f \text{Ev}_{k,j}(\mu) = \text{Ev}_k\left(\int_{\mathbb{Z}_p} f \mu\right) \text{ avec } f \in \mathcal{C}_{k,j}^0, \mu \in \mathbf{Mes}_{\mathcal{W},j}(U).$$

Le faisceau $\mathbf{Mes}_{\mathcal{W},j}$ nous donne une interpolation des représentations algébriques $V_{k,j+2}$ de $\mathbb{I}_0(p)$ pour $k \in \mathbb{N}$ au sens suivant : la fonction $f : \mathbb{Z}_p \rightarrow V_{k,j+2}$, donnée par

$$z \mapsto f(z) = (e_1 + ze_2)^{k-2} t^{-j},$$

est une fonction continue sur $\mathbb{Z}_p$ à valeurs dans $V_{k,j+2}$. On définit une application linéaire continue $\mathbb{I}_0(p)$ -équivariante $\pi_{k,j} : \mathbf{Mes}_{k,j} \rightarrow V_{k,j+2}$ par l'intégration : $\mu \mapsto \int_{\mathbb{Z}_p} f(z) \mu$. Si U est un ouvert affinoïde de $\mathcal{W}$ et si $k \in \mathbb{Z}$ appartient à U , on définit une application de spécialisation $\text{Sp}_{k,j} : \mathbf{Mes}_{\mathcal{W},j}(U) \rightarrow \mathbf{Mes}_{k,j} \rightarrow V_{k,j+2}$ en composant l'application d'évaluation $\text{Ev}_{k,j}$ et l'application $\pi_{k,j}$, qui est $\mathbb{I}_0(p)$ -équivariante. En particulier, la masse de Dirac δ_0 en 0 fournit une section globale ν_j de $\mathbf{Mes}_{\mathcal{W},j}$ qui interpole le vecteur de plus haut poids $e_1^{k-2} t^{-j}$ dans $V_{k,j+2}$; en effet, $\int_{\mathbb{Z}_p} (e_1 + ze_2)^{k-2} t^{-j} \delta_0 = e_1^{k-2} t^{-j}$, ce qui se traduit par la formule $\text{Sp}_{k,j}(\nu_j) = e_1^{k-2} t^{-j}$.

Des variantes de $\mathbf{Mes}_{\mathcal{W},j}$ utilisées dans cet article

En modifiant la construction de l'exemple 3.6, on construit des grosses représentations de $\mathbb{I}_0(p)$, qui sont des variantes de $\mathbf{Mes}_{\mathcal{W},j}$ et apparaissent dans la construction de la famille de système d'Euler de Kato sur $\mathfrak{C}^0$.

(1) La $\mathcal{O}^{\text{bd}}(\mathcal{W})$ -représentation $\mathbf{Mes}_{\mathcal{W},j}^{\text{bd}}$

On note $\mathcal{O}^{\text{bd}}(\mathcal{W})$ l'anneau des fonctions analytiques bornées sur l'espace des poids, qui est isomorphe à l'anneau $\mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p^*]] \otimes \mathbb{Q}_p$. Soient $a \in \mathbb{Z}_p^*$ et $c \in p\mathbb{Z}_p$. La fonction $f_{a,c}(z) = \kappa^{\text{univ}}(a + cz)$ appartient à l'anneau $\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, \mathcal{O}^{\text{bd}}(\mathcal{W}))$ et elle est une unité. Ceci nous permet

d'appliquer la construction de $\mathbf{Mes}_{\mathcal{W},j}$ à la donnée $(\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, \mathcal{O}^{\text{bd}}(\mathcal{W})), \rho_j^{\text{uinv}})$; il en résulte une $\mathcal{O}^{\text{bd}}(\mathcal{W})$ -représentation de Banach $\mathbf{Mes}_{\mathcal{W},j}^{\text{bd}} \subset \mathbf{Mes}_{\mathcal{W},j}(\mathcal{W})$ ayant la même propriété d'interpolation : comme $\mathbf{Mes}_{\mathcal{W},j}^{\text{bd}} \subset \mathbf{Mes}_{\mathcal{W},j}(\mathcal{W})$, on a l'application linéaire continue $\mathbb{I}_0(p)$ -équivariante

$$\text{Sp}_{k,j} : \mathbf{Mes}_{\mathcal{W},j}^{\text{bd}} \rightarrow \mathbf{Mes}_{k,j} \rightarrow V_{k,j+2};$$

d'autre part, la masse de Dirac δ_0 en 0 est dans $\mathbf{Mes}_{\mathcal{W},j}^{\text{bd}}$.

(2) Les W -représentations $\mathbf{D}_{r,W,j}$

Soit $n \geq 1$ un entier ; on note $r_n \geq 1$ le plus petit entier tel que $(p-1)p^{r_n} > n$. L'espace des poids $\mathcal{W}$ admet le recouvrement admissible $\{\mathcal{W}_n\}_{n \geq 0}$, où $\mathcal{W}_n = \mu_{p-1} \times \text{Spm } C_n$ avec C_n le sous-anneau de $\mathbb{Q}_p[[T_1 - 1]]$ consistant des fonctions analytiques sur le disque $v_p(T_1 - 1) \geq \frac{1}{n}$. Pour chaque $\mathcal{W}_n$, on note $\text{LA}_{r,n} = \text{LA}_r(\mathbb{Z}_p, \mathcal{O}(\mathcal{W}_n))$, si $r > 0$. Plus généralement, si W est un ouvert affinoïde de $\mathcal{W}$, on note $\text{LA}_{r,W}$ le $\mathcal{O}(W)$ -algèbre de Banach $\text{LA}_r(\mathbb{Z}_p, \mathcal{O}(W))$ avec $r > 0$. On note $\text{LA}_{r,W}^0$ la boule unité de $\text{LA}_{r,W}$.

Lemme 3.7. *Si $r \geq r_n$, la fonction $f_{a,c}(z)$ appartient à $\text{LA}_{r,n}$. De plus, elle est une unité de $\text{LA}_{r,n}$. Plus généralement, si W est un ouvert affinoïde de $\mathcal{W}$, il existe un nombre rationnel $r_W > 0$, tel que pour tout $r \geq r_W$, la fonction $f_{a,c}(z)$ appartient à $\text{LA}_{r,W}^0$ et est une unité de l'anneau $\text{LA}_{r,W}$.*

Ce lemme nous permet d'appliquer la construction de $\mathbf{Mes}_{\mathcal{W},j}$ à la donnée $(\text{LA}_{r,W}, \rho_j^{\text{uinv}})$; il en résulte une $\mathcal{O}(W)$ -représentation de Banach $\mathbf{D}_{r,W,j}$ de $\mathbb{I}_0(p)$ munie d'une application de spécialisation :

$$\text{Sp}_{k,j} : \mathbf{D}_{r,W,j} \rightarrow \mathbf{D}_r(k, j) \rightarrow V_{k,j+2},$$

donnée par la même formule dans l'exemple 3.6.

Le $\mathcal{O}_W$ -module $\mathbf{D}_{r,W,j}$ est caractérisé complètement par la transformée d'Amice et il est isomorphe au $\widehat{\mathbf{PD}}_r \hat{\otimes} \mathcal{O}(W)$. On note $\mathbf{D}_{r,W,j}^+$ la boule unité de $\mathbf{D}_{r,W,j}$. Il est stable sous l'action de $\mathbb{I}_0(p)$ par le lemme ci-dessus et on a un isomorphisme $\mathbf{D}_{r,W,j}^+ \cong \widehat{\mathbf{PD}}_r \hat{\otimes} \mathcal{O}(W)^+$, où $\mathcal{O}(W)^+$ est la boule unité de $\mathcal{O}(W)$. Ces représentations $\{\mathbf{D}_{r,W,j}\}_r$ forment un système projectif de représentations de Banach de $\mathbb{I}_0(p)$, qui sera utilisé dans la construction de la courbe de Hecke d'Ash-Stevens (voir §4.2).

3.3 Famille de systèmes d'Euler de Kato sur $\mathcal{W}$ et ses variantes

À partir des unités de Siegel, on construit une distribution algébrique z_{Siegel} sur $(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}})^2 - (0, 0)$ à valeurs dans $\mathbb{Q} \otimes (\mathcal{M}(\bar{\mathbb{Q}})[\frac{1}{\Delta}])^*$, où $\Delta = q \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{24}$ est la forme modulaire de poids 12. La distribution z_{Siegel} est invariante sous l'action du groupe $\Pi'_{\mathbb{Q}}$.

La théorie de Kummer p -adique nous fournit un élément

$$z_{\text{Siegel}}^{(p)} \in H^1(\Pi'_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_{\text{alg}}((\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}})^2 - (0, 0), \mathbb{Q}_p(1))).$$

Par cup-produit et restriction à $\Pi_{\mathbb{Q}}^{(p)} \subset \Pi'_{\mathbb{Q}}$ et $\mathbf{M}_2(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}})^{(p)} \subset ((\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}})^2 - (0, 0))^2$, on obtient une distribution algébrique :

$$z_{\text{Kato}} \in H^2(\Pi_{\mathbb{Q}}^{(p)}, \mathfrak{D}_{\text{alg}}(\mathbf{M}_2(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}})^{(p)}, \mathbb{Q}_p(2))).$$

En modifiant z_{Kato} par un opérateur $(c^2 - \langle c, 1 \rangle)(d^2 - \langle 1, d \rangle)$ (cf. [54] §2.3.2) avec $c, d \in \mathbb{Z}_p^*$ qui fait disparaître les dénominateurs, on obtient une distribution algébrique à valeurs dans $\mathbb{Z}_p(2)$, que l'on peut donc voir comme une mesure, notée $z_{\text{Kato},c,d}$.

La technique de "Torsion à la Soulé" [55, §2.3], rappelée ci-dessous, permet de changer le poids (i.e. passer de $z_{\text{Kato},c,d}$ à $z_{\text{Kato},c,d}(k, j)$) et de déformer sur l'espace des poids).

Soit G un groupe localement profini, agissant continûment à droite sur un espace topologique localement profini X . Soit V une A -représentation de Banach de G à droite, où A est une $\mathbb{Q}_p$ -algèbre de Banach. On note $\mathcal{C}_c^0(X, V)$ le A -module des fonctions continues à support compact sur X à valeurs dans V et $\mathfrak{D}_0(X, V)$ le A -module des mesures sur X à valeurs dans V . On munit $\mathcal{C}_c^0(X, V)$ et $\mathfrak{D}_0(X, V)$ d'actions de G à droite comme suit : si $g \in G$, $x \in X$, $\phi(x) \in \mathcal{C}_c^0(X, V)$, et $\mu \in \mathfrak{D}_0(X, V)$, alors

$$\phi * g(x) = \phi(x * g^{-1}) * g \text{ et } \int_X \phi(x)(\mu * g) = \left(\int_X (\phi * g^{-1})\mu \right) * g.$$

Proposition 3.8 (torsion à la Soulé). *Si $f \in \mathcal{C}_c^0(X, V)^G$, alors la multiplication d'une mesure $\mu \in \mathfrak{D}_0(X, \mathbb{Z}_p)$ par la fonction f induit un morphisme G -équivariant à droite de $\mathfrak{D}_0(X, \mathbb{Z}_p)$ dans $\mathfrak{D}_0(X, V)$.*

Exemple 3.9. (1) La représentation $V_{k,j}$ dans l'exemple est muni d'un vecteur $e_1^{k-2}t^{-j}$. La fonction continue $x \mapsto (e_1^{k-2}t^{-j}) * x_p$ sur $\mathbf{M}_2(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}})^{(p)}$ à valeurs dans $V_{k,j}$, induite par l'action de $\text{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ sur $V_{k,j}$, est invariante sous l'action de $\text{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$.

(2) Si $j \geq \mathbb{Z}$, la famille de représentations de Banach de $\mathbb{I}_0(p)$ sur l'espace des poids $\mathbf{Mes}_{\mathscr{W},j}$ (cf. l'exemple 3.6 ou [55, §2.2]) admet une section globale ν_j interpolant les vecteurs $e_1^{k-2}t^{-j}$ dans $V_{k,j+2}$ via une application de spécialisation $\mathbb{I}_0(p)$ -équivariante $\text{Sp}_{k,j}$. La fonction $x \mapsto \nu_j * x_p$ est une fonction continue sur $\mathbf{M}_2^{(p)}$ invariant sous l'action de $\mathbb{I}_0(p)$.

Multipliant la mesure $z_{\text{Kato},c,d}$ par la fonction $x \mapsto (e_1^{k-2}t^{-j}) * x_p$ (resp. la fonction $x \mapsto \nu_j * x_p$) qui est continue sur $\mathbf{M}_2^{(p)}$, on définit, pour $j \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} z_{\text{Kato},c,d}(k, j) &= (e_1^{k-2}t^{-j}) * x_p \otimes z_{\text{Kato},c,d} \in H^2(\tilde{\Gamma}_0(p), \mathfrak{D}_0(\mathbf{M}_2^{(p)}, V_{k,j})) \\ (\text{resp. } z_{\text{Kato},c,d}(\nu_j) &= (\nu_j * x_p) \otimes z_{\text{Kato},c,d} \in H^2(\tilde{\Gamma}_0(p), \mathfrak{D}_0(\mathbf{M}_2^{(p)}, \mathbf{Mes}_{\mathscr{W},j}(\mathscr{W})(2)))) \end{aligned}$$

où $\tilde{\Gamma}_0(p)$ agit sur $\mathbf{Mes}_{\mathscr{W},j}(\mathscr{W})(2)$ à travers son quotient $\mathbb{I}_0(p)$.

Proposition 3.10. [55, théorème 2.19] *Si $1 \leq j \in \mathbb{N}$, alors pour tout entier $k \geq 1 + j$, on a*

$$\text{Sp}_{k,j}(z_{\text{Kato},c,d}(\nu_j)) = z_{\text{Kato},c,d}(k, j).$$

Comme la fonction $x \mapsto \nu_j * x_p$ est à valeurs dans $\mathbf{Mes}_{\mathscr{W},j}^{\text{bd}}(\mathscr{W})$, l'élément $z_{\text{Kato},c,d}(\nu_j)$ appartient aussi à $H^2(\tilde{\Gamma}_0(p), \mathfrak{D}_0(\mathbf{M}_2^{(p)}, \mathbf{Mes}_{\mathscr{W},j}^{\text{bd}}(\mathscr{W})(2)))$.

4 Construction de la courbe de Hecke cuspidale

Dans §4.1, on rappelle la construction de la courbe de Coleman-Mazur-Buzzard cuspidale. Dans §4.2, à partir de la cohomologie arithmétique $H^1(\Gamma, \mathbf{D}(\rho_j^{\text{uinv}}))$, où $\mathbf{D}(\rho_j^{\text{uinv}}) =$

$\{\mathbf{D}_{r,W}(\rho_j^{\text{univ}})\}_{r \geq r(W)}$ est le système projectif des représentations de Banach de $\mathbb{I}_0(p)$ sur l'espace des poids $\mathscr{W}$ construit dans §3.2, on construit deux courbes de Hecke $\mathfrak{C}^\pm$, qui contiennent la courbe de Hecke cuspidale $\mathfrak{C}^0$. La comparaison entre les courbes $\mathfrak{C}^\pm$ et $\mathfrak{C}^0$ est faite dans §4.3. De plus, on construit un faisceau cohérent sans torsion $\mathscr{V}$ sur $\mathfrak{C}^0$, qui est une famille de représentations galoisiennes.

Pour chaque W ouvert affinoïde de $\mathscr{W}$, le groupe de cohomologie $H^1(\bar{\Gamma}(N;p), \mathbf{D}_{r,W,j})$ a priori n'est pas un $\mathcal{O}(W)$ -module de Banach, ce qui empêche d'utiliser la méthode de Coleman-Mazur-Buzzard. On montre qu'il existe un isomorphisme de $\mathcal{O}(W)$ -modules

$$H^1(\bar{\Gamma}(N;p), \mathbf{D}_{r,W,j}) \cong H^1(\Gamma(N;p), \mathbf{D}_{r,W,j}),$$

ce qui nous permet d'utiliser la méthode d'Ash-Stevens pour effectuer la projection sur $\mathfrak{C}^0$.

4.1 La théorie spectrale p -adique

Soit $\mathscr{X}$ un $\mathbb{Q}_p$ -espace rigide séparé et réduit. Soit $(\mathcal{F}, \sigma)$ un $\mathscr{X}$ -module de Banach muni d'un endomorphisme compact σ . Pour tout $U \subset \mathscr{X}$ ouvert affinoïde, on peut associer à σ_U la série de Fredholm $\det(1 - X\sigma_U) \in 1 + X\mathcal{O}(U)\{\{X\}\}$. La formation des séries de Fredholm commutant aux changement de base ouverts affinoïdes, toutes ces séries proviennent par restriction d'une série de Fredholm $\mathbf{Fred}_{\mathcal{F}}(\sigma) \in 1 + X\mathcal{O}(\mathscr{X})\{\{X\}\}$ sur $\mathscr{X}$.

Proposition 4.1. [11, theorem 3.3] Soit $(\mathcal{F}, \sigma)$ comme ci-dessus. Soit U un ouvert affinoïde de $\mathscr{X}$. Si la série de Fredholm admet une décomposition $\mathbf{Fred}_{\mathcal{F}}(\sigma) = Q(X)H(X)$ dans $\mathcal{O}(U)\{\{X\}\}$, où

- (1) $Q(X) \in \mathcal{O}(U)[X]$ vérifiant que son coefficient dominant est une unité et $Q(0) = 1$,
- (2) $H(X) \in \mathcal{O}(U)\{\{X\}\}$, tel que $(Q(X), H(X)) = 1$,

alors le $\mathcal{O}(U)$ -module de Banach orthonormalisable $\mathcal{F}(U)$ admet une unique décomposition en somme directe topologique de $\mathcal{O}(U)$ -module projectif $N(Q)$ de rang $\deg(Q)$ et un $\mathcal{O}(U)$ -module de Banach $F(Q)$, telle que $Q^*(X)$, le polynôme réciproque de $Q(X)$, est inversible sur $F(Q)$ et s'annule en $N(Q)$.

En pratique, on travaille souvent avec des systèmes de modules de Banach, introduites dans [17, §4.3] (voir aussi [12, §1]).

Définition 4.2. Un système injectif (resp. projectif) $\mathcal{M}$ de modules de Banach sur $\mathscr{X}$ est la donnée d'un système injectif (resp. projectif) $\{\mathcal{M}_{n,W}\}_{n \geq n(W)}$ de W -modules de Banach, pour tout W ouvert affinoïde de $\mathscr{X}$ et $n(W) \in \mathbb{N}$, avec les applications de transition compactes, tel que, si $W \subset W'$ deux ouverts affinoïdes et si $n \geq \max\{n(W), n(W')\}$, $\mathcal{M}_{n,W'}|_W = \mathcal{M}_{n,W}$.

Définition 4.3. Un endomorphisme d'un système injectif (resp. projectif) $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_{n,W}\}$ de modules de Banach est la donnée d'un ensemble $\{\phi_{n,W}\}$ d'endomorphismes de W -modules de Banach $\mathcal{M}_{n,W}$, pour tout $W \subset \mathscr{X}$ ouvert affinoïde et $n \geq n(W)$, commutant aux applications de transition $\mathcal{M}_{n,W} \rightarrow \mathcal{M}_{n+1,W}$ (resp. $\mathcal{M}_{n+1,W} \rightarrow \mathcal{M}_{n,W}$) et aux changements de bases ouverts affinoïdes.

Un endomorphisme $\phi = \{\phi_{n,W}\}$ d'un système injectif (resp. projectif) $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_{n,W}\}$ de modules de Banach est dit compact s'il existe un endomorphisme $\psi_{n,W}$ de faisceaux de

modules de Banach $\mathcal{M}_{n,W}$, pour tout $W \subset \mathcal{X}$ ouvert affinoïde et pour tout n assez grand, tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,W} & \xrightarrow{\phi_{n,W}} & \mathcal{M}_{n,W} \\ \downarrow \iota_{n,W} & \nearrow \psi_{n,W} & \downarrow \iota_{n,W} \\ \mathcal{M}_{n+1,W} & \xrightarrow{\phi_{n+1,W}} & \mathcal{M}_{n+1,W} \end{array} \quad (\text{resp.} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,W} & \xleftarrow{\phi_{n,W}} & \mathcal{M}_{n,W} \\ \iota_{n,W} \uparrow & \nwarrow \psi_{n,W} & \iota_{n,W} \uparrow \\ \mathcal{M}_{n+1,W} & \xleftarrow{\phi_{n+1,W}} & \mathcal{M}_{n+1,W} \end{array}).$$

En particulier, $\phi_{n,W}$ est compact, et [16, A 2.3] assure que la série de Fredholm

$$\mathbf{Fred}_{\mathcal{M}_{n,W}}(\phi_{n,W}) = \det(1 - X\phi_{n,W}) \in 1 + X\mathcal{O}(W)\{\{X\}\}$$

est indépendante de n . Donc toutes ces séries proviennent par restriction d'une unique série de Fredholm $\mathbf{Fred}_{\mathcal{M}}(\phi) \in 1 + X\mathcal{O}(\mathcal{X})\{\{X\}\}$ sur $\mathcal{X}$.

Soit $(\mathcal{M}, \sigma)$ un système de modules de Banach $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{X}$ muni d'un endomorphisme compact ϕ . La série de Fredholm $\mathbf{Fred}_{\mathcal{M}}(\sigma) \in 1 + X\mathcal{O}(\mathcal{X})\{\{X\}\}$ nous permet de définir une hypersurface de Fredholm $\mathcal{Z} \in \mathcal{X} \times \mathbb{A}^1$ par $\mathbf{Fred}_{\mathcal{M}}(\sigma) = 0$, munie de deux projections $(\pi_1, \pi_2) : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathbb{A}^1$, appelée la *variété spectrale* associée à $(\mathcal{M}, \sigma)$.

D'après [16, proposition A 5.8], la variété spectrale $\mathcal{Z}$ admet un recouvrement admissible canonique $\mathcal{C}_\sigma$ consistant des ouverts affinoïdes $Z \subset \mathcal{Z}$, finis et plats sur leurs images $\pi_1(Z)$, et ouverts et fermés dans l'image inverse $\pi_1^{-1}\pi_1(Z)$. En particulier, pour tout ouvert affinoïde $W \subset \mathcal{X}$, il existe une bijection entre le sous-ensemble de $\mathcal{C}_\sigma$ des ouverts Z vérifiant $\pi_1(Z) = W$ et l'ensemble des décompositions de $\mathbf{Fred}_{\mathcal{M}}(\sigma) = Q_Z(X)H(X)$ sur W , où $Q_Z(X) \in \mathcal{O}(W)[X]$ vérifiant que son coefficient dominant est une unité et $Q(0) = 1$, et $H(X) \in \mathcal{O}(W)\{\{X\}\}$, tel que $(Q_Z(X), H(X)) = 1$. De plus, si $\mathbf{Fred}_{\mathcal{M}}(\sigma) = Q_Z(X)H(X)$ est une décomposition sur W correspondant à $Z \in \mathcal{C}_\sigma$, la bijection est donnée par $Z = \text{Spm } \mathcal{O}(W)\langle X \rangle / (Q_Z^*(X))$, où Q_Z^* est le polynôme réciproque de Q_Z .

Soit $\mathcal{H}$ une $\mathbb{Q}_p$ -algèbre commutative. Soit le couple $(\mathcal{M}, \sigma)$ muni d'une représentation $\rho : \mathcal{H} \rightarrow \text{End}_{\mathcal{X}}(\mathcal{M})$ telle qu'il existe un élément $U \in \mathcal{H}$ vérifiant $\rho(U) = \sigma$. Soit W un ouvert affinoïde de $\mathcal{X}$. Si un ouvert affinoïde $Z \subset \mathcal{Z}$ appartient à $\mathcal{C}_\sigma$, on peut lui associer une décomposition $\mathbf{Fred}_{\mathcal{F}}(\sigma) = Q_Z(X)H(X)$ sur $W = \pi_1(Z) \subset \mathcal{X}$ comme ci-dessus. D'après la proposition 4.1, pour tout $n \geq n_W$, le $\mathcal{O}(W)$ -module de Banach $\mathcal{M}_{n,W}(W)$ se décompose en somme directe topologique de $N_n(Q_Z)$ et $F_n(Q_Z)$, où $N_n(Q_Z)$ est un $\mathcal{O}(W)$ -module projectif de rang $\deg(Q_Z)$. On note $N(Q_Z)$ la limite de $\{N_n(Q_Z)\}_{n \geq n_W}$, c'est un $\mathcal{O}(W)$ -module projectif de rang $\deg Q_Z$.

Comme $\mathcal{H}$ est commutative, $N(Q_Z)$ est stable sous l'action de $\mathcal{H}$. On note l'image de $\mathcal{H}$ dans $\text{End}_{\mathcal{O}(W)}(N(Q_Z))$ par $\mathbb{T}(Z)$, qui est une $\mathcal{O}(W)$ -algèbre de type fini. De plus, l'espace rigide $D(Z)$ associé à $\mathbb{T}(Z)$ est un $\mathbb{Q}_p$ -affinoïde qui est fini et plat sur W . On dispose de plus d'un morphisme d'anneaux $\rho : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{O}(D(Z))$, ainsi que d'un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} D(Z) & & & & \\ \downarrow \kappa & \searrow \pi & \searrow \alpha(U)^{-1} & & \\ & Z & \xrightarrow{\pi_2} & \mathbb{A}^{1,\text{rig}} & \\ & \swarrow \pi_1 & & & \\ & \mathcal{X} & & & \end{array}.$$

Enfin, on peut construire un espace rigide D muni d'un morphisme fini $\pi : D \rightarrow \mathcal{Z}$, en recollant les $D(Z)$ par un processus standard (voir [17, §7.2]) à l'aide de $\mathcal{C}_\sigma$, appelé la *variété de Hecke* attachée à $(\mathcal{M}, \sigma, \rho)$. Dans la suite, cette construction est appelée la méthode de Coleman-Mazur-Buzzard.

Remarque 4.4. (1) Si $f = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m X^m$ est une série formelle, et si s est un entier ≥ 0 , on pose

$$\Delta^s f = \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{m+s}{s} a_{m+s} X^m.$$

Soit $\mathbf{Fred}_{\mathcal{M}}(\sigma) = Q_Z(X)H(X)$ une décomposition de $\mathbf{Fred}_{\mathcal{M}}(\sigma)$ sur W ci-dessus. On pose $u = 1 - \frac{Q_Z^*(\sigma)}{Q_Z^*(0)}$. Si on note $n = \deg Q_Z$, alors, d'après Serre [49], on a les formules explicites de projecteurs : si on pose

$$p_1 = \frac{(1-u)\Delta^n \mathbf{Fred}_{\mathcal{M}}(u)}{\Delta^n \mathbf{Fred}_{\mathcal{M}}(u)(1)} \text{ et } p_2 = -\frac{u\Delta^{n-1} \mathbf{Fred}_{\mathcal{M}}(u)}{\Delta^n \mathbf{Fred}_{\mathcal{M}}(u)(1)},$$

alors $p = p_1^n$ et $q = (p_1 + p_2)^n - p_1^n = 1 - p$ sont des projecteurs à $F(Q_Z)$ et $N(Q_Z)$ respectivement.

(2) Dans le cas de la courbe de Coleman-Mazur, on a un accouplement $\mathcal{O}(W)$ -linéaire (cf. [17, théorème 7.1.1])

$$\langle, \rangle : \mathbb{T}(Z) \times N(Q_Z)$$

défini par : si $\tau \in \mathbb{T}(Z)$ et $f \in N(Q_Z)$, on a $\langle \tau, f \rangle = a_1(\tau \cdot f)$, où $a_1(\tau \cdot f)$ est le coefficient de q dans le q -développement de $\tau \cdot f$. Cet accouplement nous fournit une injection $0 \rightarrow \mathbb{T}(Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}(W)}(N(Q_Z), \mathcal{O}(W))$. Par contre, on ne sait pas que $N(Q_Z)$ est localement libre de rang 1 sur $\mathbb{T}(Z)$ pour n'importe quel $Z \in \mathcal{C}_\sigma$.

$\mathcal{H}, U \in \mathcal{H}, \mathcal{X}$ étant fixés, soit $(\mathcal{M}_i, \sigma_i, \rho_i)$ deux données de la méthode de Coleman-Mazur-Buzzard, où $\mathcal{M}_i$ est un $\mathcal{X}$ -module de Banach muni d'un endomorphisme compact σ_i et d'une représentation $\rho_i : \mathcal{H} \rightarrow \text{End}_{\mathcal{X}}(\mathcal{M}_i)$ tel que $\rho_i(U) = \sigma_i$, pour $i = 1, 2$. Chenevier [12] donne un critère pour comparer deux variétés de Hecke associées à ces deux données $(\mathcal{M}_i, \sigma_i, \rho_i)$. On rappelle ici une version locale de son résultat :

Proposition 4.5 (Chenevier). *Soient $(\mathcal{M}_i, \sigma_i)$ comme ci-dessus pour $i = 1, 2$. Soit $W \subset \mathcal{X}$ un ouvert affinoïde muni d'un sous ensemble Zariski-dense Z . S'il existe une injection de $\mathcal{H}$ -modules $\mathcal{M}_{1,z}^{ss} \subset \mathcal{M}_{2,z}^{ss}$ pour tout $z \in Z$, alors on a une injection de $\mathcal{H}$ -modules $\mathcal{M}_{1,x}^{ss} \subset \mathcal{M}_{2,x}^{ss}$ pour tout $x \in W$ et une immersion canonique de variétés de Hecke $D_1(W) \rightarrow D_2(W)$ sur W , où $D_i(W)$ sont les variétés de Hecke attachées à $\mathcal{M}_i$ respectivement. De plus, si les $\mathcal{H}$ -modules $\mathcal{M}_{i,z}$ sont semi-simples pour tout $z \in Z$, alors les variétés de Hecke $D_i(W)$ sont réduites.*

La courbe de Coleman-Mazur-Buzzard

Soit N un entier premier à p . Soit $X = X(N, p)$ la courbe modulaire sur $\mathbb{Z}_p$ de niveau $\Gamma(N; p)$. Elle est une courbe propre et plate sur $\mathbb{Z}_p$. On note X_{rig} la fibre générique du schéma formel associé à X . Soit ω le faisceau inversible habituel sur X_{rig} . Si $p > 3$, la série d'Eisenstein normalisée E_{p-1} est une section globale de ω^{p-1} sur X_{rig} qui relève l'invariant

de Hasse. Soit $0 \leq r < 1 \in \mathbb{Q}$, on définit $Z_1(r)$ la composante connexe affinoïde de ∞ dans le ouvert affinoïde de X_{rig} sur lequel $|E_{p-1}| \geq p^{-r}$. Soit K une extension complète de $\mathbb{Q}_p$. Si $k \in \mathbb{N}$, on note

$$M_k^{\dagger, r}(\Gamma(N; p); K) := H^0(Z_1(r)_K, \omega^k)$$

le K -espace de Banach des formes modulaires r -surconvergentes de poids k de niveau Γ , à coefficients dans K . On note $M_k^{\dagger}(\Gamma(N; p), K) = \lim_{r \rightarrow 0} M_k^{\dagger, r}(\Gamma(N; p), K)$ l'espace des formes modulaires surconvergentes de poids k de niveau Γ . On note $S_k^{\dagger}(\Gamma(N; p), K) \subset \mathcal{M}_k^{\dagger}(\Gamma(N; p), K)$ son sous-espace des formes modulaires surconvergentes cuspidales.

Soit $\mathcal{H}_N$ la $\mathbb{Z}$ -algèbre commutative engendrée par les opérateurs de Hecke abstraits $T(l)$ pour tout premier l avec $(l, Np) = 1$, l'opérateur d'Atkin-Lehner U_p et les opérateurs de diamant $\langle a \rangle$ pour $a \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$. Si $k \in \mathbb{N}$, on note $M_{k+2}(\Gamma(N; p))$ (resp. $S_{k+2}(\Gamma(N; p))$, $M_{k+2}^{\dagger}(\Gamma(N; p))$, $S_{k+2}^{\dagger}(\Gamma(N; p))$) l'espace des formes modulaires classiques (resp. classiques cuspidales, surconvergentes, surconvergentes cuspidales) de niveau $\Gamma(N; p)$ et de poids $k+2$. Ils sont muni d'une action de $\mathcal{H}_N$. Si $r \in \mathbb{Q}_+$, on note $M^{<r}$ le sous-espace des formes modulaires de pente $< r$, pour M un des espaces des formes modulaires ci-dessus.

Proposition 4.6. [6, corollary 2.6] *On a un isomorphisme de Hecke modules :*

$$S_{k+2}^{\dagger}(\Gamma)^{<k+1} = S_{k+2}(\Gamma)^{<k+1}.$$

Coleman dispose d'une *famille d'Eisenstein restreinte* qui est une série formelle $E(q) \in 1 + q\Lambda[[q]]$ telle que sa spécialisation en poids k est le q -développement à l'infini d'une série d'Eisensteins E_k , qui est à coefficients dans une extension complète de $\mathbb{Q}_p$. Cette famille joue un rôle important dans sa définition de forme modulaire surconvergente de poids κ quelconque. En fait, si $k \in \mathbb{N}$, la multiplication par E_k , induit un isomorphisme de K -Banach de $M_0^{\dagger, r}(\Gamma(N; p), K)$ sur $\mathcal{M}_k^{\dagger, r}(\Gamma(N; p), K)$. Si $\kappa \in \mathcal{W}(\mathbb{Q}_p)$, une forme modulaire r -surconvergente de poids κ de niveau $\Gamma(N; p)$ est une série formelle $F(q) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^n$, $a_n \in K$ telle que $F(q)/\text{Ev}_{\kappa}(E)$ est le q -développement d'une fonction rigide analytique sur $Z_1(r)$, pour certain $0 \leq r < 1$.

Posons $v_m = \frac{1}{p^{-m}(p+1)}$ pour $m \in \mathbb{N}$. Soit W un ouvert affinoïde de $\mathcal{W}$. On note

$$\mathcal{M}^{\dagger, v_m}(\Gamma(N; p), W) \text{ et } S^{\dagger, v_m}(\Gamma(N; p), W)$$

les $\mathcal{O}(W)$ -modules des familles de formes modulaires surconvergentes et surconvergentes cuspidales de rayon v_m respectivement. Le système

$$\mathcal{M}^{\dagger}(\Gamma(N; p)) = \{\mathcal{M}^{\dagger, v_m}(\Gamma(N; p), W), \text{res}_m\} \text{ (resp. } \mathcal{S}^{\dagger}(\Gamma(N; p)) = \{S^{\dagger, v_m}(\Gamma(N; p), W), \text{res}_m\})$$

est un système injectif de modules de Banach sur l'espace des poids. L'opérateur d'Atkin-Lehner U_p est un endomorphisme compact de système $\mathcal{M}^{\dagger}(\Gamma(N; p))$ (resp. $\mathcal{S}^{\dagger}(\Gamma(N; p))$). Ceci nous fournit deux données de la méthode de Coleman-Mazur-Buzzard :

- (1) $(\mathcal{M}^{\dagger}(\Gamma(N; p)), U_p, \rho_{\mathcal{M}^{\dagger}})$, où $\rho_{\mathcal{M}^{\dagger}} : \mathcal{H}_N \rightarrow \text{End}_{\mathcal{W}}(\mathcal{M}^{\dagger}(\Gamma(N; p)))$;
- (2) $(\mathcal{S}^{\dagger}(\Gamma(N; p)), U_p, \rho_{\mathcal{S}^{\dagger}})$, où $\rho_{\mathcal{S}^{\dagger}} : \mathcal{H}_N \rightarrow \text{End}_{\mathcal{W}}(\mathcal{S}^{\dagger}(\Gamma(N; p)))$.

On applique la méthode de Coleman-Mazur-Buzzard à la donnée $(\mathcal{M}^{\dagger}(\Gamma(N; p)), U_p, \rho_{\mathcal{M}^{\dagger}})$ (resp. $(\mathcal{S}^{\dagger}(\Gamma(N; p)), U_p, \rho_{\mathcal{S}^{\dagger}})$), et la courbe en résultant est appelée la courbe de Coleman-Mazur-Buzzard (resp. cuspidale), notée $\mathfrak{C}$ (resp. $\mathfrak{C}^0$). La courbe $\mathfrak{C}^0$ est une sous-courbe fermée de $\mathfrak{C}$.

Remarque 4.7. (1) Coleman et Mazur [17] donnent aussi une construction de famille de représentations de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$ sur la courbe de Hecke par une façon un peu tortue. En fait, ils construisent une autre courbe de Hecke en utilisant la théorie de déformation, qui paramètre les pseudo-représentations, et ils montrent que la plus grande sous-courbe réduite de cette courbe est exactement la courbe de Hecke construite ci-dessus. Ceci nous fournit une famille de représentations galoisiennes sur la courbe de Hecke.

(2) Andreatta-Iovita-Stevens [3] et Pilloni [42] trouvent une façon géométrique et directe à définir les formes modulaires surconvergentes par des points de vue différent, et ils montrent que leur définition coïncide avec celle de Coleman.

(3) Soit $\Delta_0 = \text{Div}^0(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}))$ le groupe abélien des diviseurs de degré 0 sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$. L'action naturelle de $\text{GL}_2(\mathbb{Q})$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ induit une action sur le groupe des diviseurs sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$, qui préserve Δ_0 . Soit V un $\mathbb{Z}[\Gamma(N; p)]$ -module. On note $\mathbf{Symb}_{\Gamma(N; p)}(V) = \text{Hom}_{\Gamma}(\Delta_0, V)$ le groupe des symboles modulaires à valeurs dans V . C'est un module muni d'une action naturelle de l'algèbre de Hecke et d'une convolution ι donnée par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ commutant entre eux. Ash et Stevens [5, proposition 4.2] montrent qu'on a un isomorphisme

$$\mathbf{Symb}_{\Gamma(N; p)}(V) \cong H_c^1(\Gamma(N; p), V).$$

Ceci nous permet d'appliquer la méthode de Coleman-Mazur-Buzzard à $H_c^1(\Gamma(N; p), V)$, où $V = \mathbf{D}(\rho_j^{\text{uinv}})$. C'est ce que fait Bellaïche dans [6, Theorem 3.30].

4.2 La courbe d'Ash-Stevens

La décomposition de pente $\leq v$

Soit E un corps complet pour une valuation p -adique et soit $(A, |\cdot|_A)$ une E -algèbre de Banach. Soit M un A -module muni d'un A -endomorphisme u (donc un $A[u]$ -module, et on dira simplement "un $A[u]$ -module M " dans la suite).

Soit $Q(T) = \sum_{i=0}^n a_i T^i \in A[T]$ un polynôme à coefficients dans A . Un polygône de Newton Newt_Q de Q est l'enveloppe convexe de l'ensemble $(i, -\log_p |a_i|_A)$ et de $[0, n] \times \{+\infty\}$. On appelle *pente* de P un élément de $\text{Newt}'_Q([0, n])$. On sait qu'il existe une racine de Q de norme $p^{-\lambda}$ si et seulement si $-\lambda$ est une pente de Newt_Q . Le polynôme Q est dit de pente $\leq v$ si les pentes de polygône de Newton de Q sont $\leq v$.

Définition 4.8. (1) Un polynôme $Q(T) \in A[T]$ est multiplicatif si le coefficient dominant de Q est une unité.

(2) Un élément m de M est de pente $\leq v$ s'il existe un polynôme multiplicatif $Q(T) \in A(T)$ de pente $\leq v$ tel que m est annulé par $Q^*(u)$, où $Q^*(T) = T^{\deg Q} Q(\frac{1}{T})$ est le réciproque de Q .

Remarque 4.9. Si m est un vecteur propre de u de valeur propre α , alors la pente de m est $-\log_p(|\alpha|_A)$.

On note S_v le sous-ensemble de $A[u]$ des polynômes multiplicatifs de pente $\leq v$, qui est un sous-ensemble multiplicatif. On note $M^{\leq v}$ (resp. $M^{>v}$) le sous- $A[u]$ -module de M des éléments de pente $\leq v$ (resp. $> v$). On a donc une décomposition de $A[u]$ -module $M = M^{\leq v} \oplus M^{>v}$.

Définition 4.10. Une décomposition d'un $A[u]$ -module M de pente $\leq v$ est la donnée d'une décomposition de $A[u]$ -module $M = M^{\leq v} \oplus M^{>v}$ telle que

- (1) $M^{\leq v}$ est un A -module de type fini,
- (2) $M^{>v}$ est un sous- A -module de M sur lequel, $Q^*(u)$ est inversible, $\forall Q \in S_v$.

On résume les propriétés de la décomposition de pente finie dans la proposition suivante et on renvoie le lecteur au [4, proposition 4.1.2] pour la démonstration :

Proposition 4.11. (1) *Un $A[u]$ -module M admet la décomposition de pente $\leq v$ si et seulement si $M^{\leq v}$ est un A -module de type fini et si la suite canonique suivante est exacte :*

$$0 \rightarrow M^{\leq h} \rightarrow M \rightarrow M \otimes_{A[u]} A[u][S_v^{-1}] \rightarrow 0.$$

(2) *Soient M_1, M_2 deux $A[u]$ -modules admettant la décomposition de pente $\leq v$. Si $\phi : M_1 \rightarrow M_2$ est un morphisme de $A[u]$ -modules, alors ϕ est compatible avec la décomposition de pente $\leq v$. Autrement dit, si $M_i = M_i^{\leq v} \oplus M_i^{>v}$, pour $i = 1, 2$, alors on a*

$$\phi(M_1^{\leq v}) \subset M_2^{\leq v} \text{ et } \phi(M_1^{>v}) \subset M_2^{>v}.$$

(3) *Si $\mathcal{C}^\bullet$ est un complexe des cochaines de $A[u]$ -modules admettant la décomposition de pente $\leq v$, alors le groupe de cohomologie $H^\bullet(\mathcal{C}^\bullet)$ admet la décomposition de pente $\leq v$ donnée par :*

$$H^\bullet(\mathcal{C}^\bullet) \cong H^\bullet(\mathcal{C}^{\bullet, \leq v}) \oplus H^\bullet(\mathcal{C}^{\bullet, >v}).$$

Remarque 4.12. Dans la décomposition de pente finie, on perd la projectivité de $M^{\leq v}$.

Pour terminer ce paragraphe, on établit le lien entre la théorie spectrale p -adique et la décomposition de pente finie. Soit $\mathcal{X}$ un espace rigide. Soit $(\mathcal{F}, \sigma)$ un $\mathcal{X}$ -module de Banach muni d'un endomorphisme compact σ . Soit $\mathcal{Z}$ la variété spectrale associée à la série de Fredholm $\mathbf{Fred}_{\mathcal{F}}(\sigma)$ et soit $\mathcal{C}_\sigma$ [16, proposition A 5.8] le recouvrement admissible canonique de $\mathcal{Z}$.

Proposition 4.13. *Un ouvert affinoïde admissible Z de $\mathcal{Z}$ appartient à $\mathcal{C}_\sigma$ si et seulement s'il existe un nombre $v > 0$ tel que le $\mathcal{O}(W)[\sigma]$ -module $\mathcal{F}(W)$ admet la décomposition de pente $\leq v$, où $W = \pi_1(Z)$.*

Démonstration. On déduit cette proposition de la bijection entre le sous-ensemble de $\mathcal{C}_\sigma$ des ouverts Z vérifiant $\pi_1(Z) = W$ et l'ensemble des décompositions de $\mathbf{Fred}_{\mathcal{F}}(\sigma)$ sur W , et de la bijection entre l'ensemble des décompositions $\mathbf{Fred}_{\mathcal{F}}(\sigma)$ sur W et celui des décompositions de pente finie de $\mathcal{F}(W)$. $\square$

Cohomologie du groupe profini et cohomologie du groupe discret

On note $\bar{\Gamma}(N; p)$ le complété profini de $\Gamma(N; p)$. Rappelons que pour tout ouvert affinoïde $W \subset \mathcal{W}$, il existe un nombre r_W , tel que, pour tout $r \geq r_W$, on a défini une $\mathcal{O}(W)$ -représentation de Banach $\mathbf{D}_{r, W, j}$ de $\mathbb{I}_0(p)$ dans §3.2. La proposition suivante montre que le $\mathcal{O}(W)$ -module $H^1(\Gamma(N; p), \mathbf{D}_{r, W, j})$ (resp. le $\mathbb{Q}_p$ -espace $H^1(\Gamma(N; p), \mathbf{D}_{r, k, j})$) est une W -représentation (resp. $\mathbb{Q}_p$ -représentation) du groupe de Galois $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$.

Proposition 4.14. *On a les isomorphismes de modules de Hecke suivant :*

- (1) $H^1(\Gamma(N; p), \mathbf{D}_{r, W, j}) \cong (\varprojlim_n H^1(\bar{\Gamma}(N; p), \mathbf{D}_{r, W, j}^+/p^n)) \otimes \mathbb{Q}_p \cong H^1(\bar{\Gamma}(N; p), \mathbf{D}_{r, W, j}),$
- (2) $H^1(\Gamma(N; p), \mathbf{D}_{r, k, j}) \cong (\varprojlim_n H_{\text{ét}}^1(Y_{\bar{\mathbb{Q}}}, \mathbf{D}_{r, k, j}^+/p^n)) \otimes \mathbb{Q}_p \cong H^1(\bar{\Gamma}(N; p), \mathbf{D}_{r, k, j}).$

Démonstration. Le (1) et (2) se démontrent de la même manière. On ne démontre que le premier. Rappelons que on a $\mathbf{D}_{r, W, j} \cong (\varprojlim_n \mathbf{D}_{r, W, j}^+/p^n) \otimes \mathbb{Q}_p$. Pour simplifier la notation, on note $\Gamma = \Gamma(N; p)$ et $\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}(N; p)$ dans cette démonstration. On a une suite exacte

$$0 \rightarrow (\varprojlim_n^1 H^0(\bar{\Gamma}, \mathbf{D}_{r, W, j}^+/p^n)) \otimes \mathbb{Q}_p \rightarrow H^1(\bar{\Gamma}, \mathbf{D}_{r, W, j}) \rightarrow (\varprojlim_n H^1(\bar{\Gamma}, \mathbf{D}_{r, W, j}^+/p^n)) \otimes \mathbb{Q}_p \rightarrow 0.$$

Pour démontrer l'isomorphisme $(\varprojlim_n H^1(\bar{\Gamma}, \mathbf{D}_{r, W, j}^+/p^n)) \otimes \mathbb{Q}_p \cong H^1(\bar{\Gamma}, \mathbf{D}_{r, W, j})$, on se ramène à montrer que $(\varprojlim_n^1 H^0(\bar{\Gamma}, \mathbf{D}_{r, W, j}^+/p^n)) \otimes \mathbb{Q}_p = 0$. On constate que

$$H^0(\bar{\Gamma}, \mathbf{D}_{r, W, j}^+/p^n) = H^0(\Gamma(N; p), \mathbf{D}_{r, W, j}^+/p^n) \subset (\mathbf{D}_{r, W, j}^+/p^n)^U$$

avec U est le sous-groupe unipotent de $\text{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$. On note ∂ l'opérateur différentiel associé à un générateur u du groupe p -adique analytique U . Un calcul immédiat montre que, pour tout $\mu \in \mathbf{D}_{r, W, j}$, on a

$$\partial \mathcal{A}_\mu = \log(1 + T) \mathcal{A}_\mu, \text{ où } \mathcal{A}_\mu \text{ est la transformé d'Amice de } \mu.$$

Ceci implique qu'il existe un nombre $N \geq v_p(\log(1 + T))$ tel que $(\mathbf{D}_{r, W, j}^+/p^n)^{\partial=0}$ sont p^N -torsions, pour tout les n . On en déduit que $(\varprojlim_n^1 H^0(\bar{\Gamma}, \mathbf{D}_{r, W, j}^+/p^n)) \otimes \mathbb{Q}_p = 0$.

D'autre part, d'après [49, p.15 Exercices], on a un isomorphisme

$$H^i(\Gamma, \mathbf{D}_{r, W, j}^+/p^n) \cong H^i(\bar{\Gamma}, \mathbf{D}_{r, W, j}^+/p^n).$$

Ceci nous permet de conclure la proposition. □

Algèbre de Hecke et l'opérateur U_p

On note Δ_p le sous-monoïde de $\mathbf{M}_2(\mathbb{Z}_p)$ engendré par $\mathbb{I}_0(p)$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$:

$$\Delta_p = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{Z}_p) : a \in \mathbb{Z}_p^*, c \in p\mathbb{Z}_p, ad - bc \neq 0 \right\}.$$

On note $\Delta = \mathbb{G}(\mathbb{A}_f^p) \times \Delta_p$, qui est un sous-monoïde de $\mathbb{G}(\mathbb{A}_f)$ contenant K . Soit A une E -algèbre de Banach et soit M un $A[\Delta]$ -module à droite. Dans ce paragraphe, on explique une description d'opérateur U_p sur $H^1(\Gamma(N; p), M)$ en relevant au niveau de complexe suivant l'idée d'Ash-Stevens [4] (voir aussi [26]).

Soit $\mathbf{H}$ le demi-plan de Poincaré. La cohomologie $H^1(\Gamma(N; p), M)$ se calcule par deux complexes :

- (1) Le complexe des cochaines adéliques $\mathcal{C}_{\text{ad}}^\bullet(M) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}[\text{GL}_2(\mathbb{Q}) \times K]}(\mathcal{C}_\bullet(\mathbf{H}_{\mathbb{A}}), M)$ munis d'une action naturelle de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}) \times \text{GL}_2(\mathbb{A}_f)$, où $\mathbf{H}_{\mathbb{A}} = \mathbf{H} \times \text{GL}_2(\mathbb{A}_f)$, K est le sous-groupe compact de $\text{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ définissant la courbe modulaire de niveau $\Gamma(N; p)$ et $\mathcal{C}_\bullet(\mathbf{H}_{\mathbb{A}})$ est le complexe des chaines singulières sur $\mathbf{H}_{\mathbb{A}}$ muni d'une action naturelle de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}) \times \text{GL}_2(\mathbb{A}_f)$.

(2) Le complexe de Borel-Serre $\mathcal{C}_{\mathbf{BS}}^\bullet(M) = \text{Hom}_{\Gamma(N;p)}(\mathcal{C}_\bullet^{\mathbf{BS}}, M)$, où $\mathcal{C}_\bullet^{\mathbf{BS}}$ est une résolution finie libre de $\mathbb{Z}$ consistant des $\mathbb{Z}[\Gamma(N;p)]$ -modules libres de rang fini obtenue de la compactification de Borel-Serre de $\Gamma(N;p) \backslash \mathbf{H}$. De plus, il existe une équivalence d'homotopie

$$\mathcal{C}_\bullet^{\mathbf{BS}} \xrightleftharpoons[g]{f} \mathcal{C}_\bullet(\mathbf{H}) ,$$

où $\mathcal{C}_\bullet(\mathbf{H})$ le complexe des chaines singulière sur $\mathbf{H}$ muni d'une action à gauche de $\Gamma(N;p)$ induite par celle de $\mathbb{G}(\mathbb{Q})_+$. Ceci induit une équivalence d'homotopie

$$\mathcal{C}_{\mathbf{BS}}^\bullet(M) \xrightleftharpoons[f^*]{g^*} \mathcal{C}_{\mathbf{ad}}^\bullet(M) ,$$

Le complexe $\mathcal{C}_{\mathbf{ad}}^\bullet(M)$ est muni d'une action naturelle de Δ à droite donnée par la formule :

$$\phi * \delta = \phi(\sigma * \delta^{-1}) * \delta.$$

On note $\mathcal{H}_A$ l'algèbre de Hecke sur A engendrée par des classes doubles $[K(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & l \end{smallmatrix})K]$ dans $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_l)$ pour tout $l \nmid N$. On a un morphisme de A -algèbres :

$$\xi : \mathcal{H}_A \rightarrow \text{End}_A(\mathcal{C}_{\mathbf{ad}}^\bullet(M)).$$

Cette action commute avec l'application de cobords et induit l'action de Hecke usuelle définie par la correspondance sur cohomologie. En fixant une équivalence d'homotopie

$$\mathcal{C}_{\mathbf{BS}}^\bullet(M) \xrightleftharpoons[f^*]{g^*} \mathcal{C}_{\mathbf{ad}}^\bullet(M) ,$$

on a un morphisme de A -algèbre

$$\tilde{\xi} : \mathcal{H}_A \rightarrow \text{End}_A(\mathcal{C}_{\mathbf{BS}}^\bullet(M)); \tilde{\xi}(T) = f^* \circ \xi(T) \circ g^*.$$

On note $\tilde{U}_p$ la classe double $[K(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix})K]$ agissant sur le complexe $\mathcal{C}_{\mathbf{BS}}^\bullet(M)$. Elle est complètement continue et induit l'opérateur usuel U_p agissant sur la cohomologie.

La courbe d'Ash-Stevens

Pour tout $r \geq r_W$, l'endomorphisme $\tilde{U}_p \in \text{End}_{\mathcal{O}(W)}(\mathcal{C}_{\mathbf{BS}}^\bullet(\mathbf{D}_{r,W,j}))$ est compact et on note $F_W(X) \in 1 + X\mathcal{O}(W)\{\{X\}\}$ sa série de Fredholm, qui est indépendante de r . En plus, toutes ces séries $F_W(X)$ proviennent par restriction d'une unique série de Fredholm $F(X) \in 1 + X\mathcal{O}(W)\{\{X\}\}$ sur $\mathcal{W}$. On en construit une courbe spectrale $\mathcal{Z}_{\mathbf{BS}}$ associée à la série de Fredholm $F(X)$, ainsi qu'un recouvrement admissible $\mathcal{C}_{\tilde{U}_p}$ de $\mathcal{Z}_{\mathbf{BS}}$. En plus, un ouvert affinoïde $Z \subset \mathcal{Z}_{\mathbf{BS}}$ appartient à $\mathcal{C}_{\tilde{U}_p}$ si et seulement s'il existe un nombre $v \in \mathbb{Q}_+$ tel que $\mathcal{C}_{\mathbf{BS}}^\bullet(\mathbf{D}_{r,W,j})$, avec $W = \pi_1(Z)$ et r un nombre rationnel $\geq r_W$, admet la décomposition de pente $\leq v$. Ceci implique que $H^1(\Gamma(N;p), \mathbf{D}_{r,W,j})$ admet la décomposition de pente $\leq v$:

$$H^1(\Gamma(N;p), \mathbf{D}_{r,W,j}) \cong H^1(\Gamma(N;p), \mathbf{D}_{r,W,j})^{\leq v} \oplus H^1(\Gamma(N;p), \mathbf{D}_{r,W,j})^{>v}.$$

Si v est un nombre réel positif, il existe un ouvert affinoïde $W \subset \mathcal{W}$ adapté à v (i.e. on a un isomorphisme de $\mathcal{O}(W)$ -module $H^1(\Gamma(N;p), \mathbf{D}_{r,W,j})^{\leq v} \cong H^1(\Gamma(N;p), \mathbf{D}_{r',W,j})^{\leq v}$ pour tout $r, r' > r_W$). De plus, on suppose que $W = \text{Spm } R$ est agréable.

Théorème 4.15 (théorème d'évaluation). *Soit $k \in \mathbb{N} \subset W$ et soit $r > r_W$. Il existe un isomorphisme Hecke-Galois équivariant de $\mathbb{Q}_p$ -espaces de Banach,*

$$H^1(\Gamma(N; p), \mathbf{D}_{r, W, j}) \otimes_{\mathcal{O}(W), k} \mathbb{Q}_p \cong H^1(\Gamma(N; p), \mathbf{D}_{r, k, j}).$$

Démonstration. On a une suite exacte de $\mathbb{Q}_p$ -représentations de Banach de $\mathbb{I}_0(p)$ induite par l'application d'évaluation $\text{Ev}_{k, j}$:

$$0 \longrightarrow \mathbf{D}_{r, W, j} \xrightarrow{m_k} \mathbf{D}_{r, W, j} \xrightarrow{\text{Ev}_{k, j}} \mathbf{D}_{r, k, j} \longrightarrow 0,$$

où m_k est l'idéal maximal de R associé à k . Comme $\mathbf{D}_{r, k, j}^{\mathbb{I}_0(p)} = 0$, en prenant la cohomologie de $\Gamma(N; p)$, on a une suite exacte de $\tilde{\Sigma}_0(p)$ -module :

$$0 \longrightarrow \frac{H^1(\Gamma(N; p), \mathbf{D}_{r, W, j})}{m_k H^1(\Gamma(N; p), \mathbf{D}_{r, W, j})} \xrightarrow{\text{Ev}_{k, j}} H^1(\Gamma(N; p), \mathbf{D}_{r, k, j}) \longrightarrow H^2(\Gamma(N; p), \mathbf{D}_{r, W, j}).$$

Par ailleurs, $H^2(\Gamma(N; p), \mathbf{D}_{r, W}(\rho_j^{\text{uinv}})) = 0$ car la dimension cohomologique de $\Gamma(N; p)$ est 1. Ceci permet de conclure le théorème. $\square$

Remarque 4.16. (1) Ce théorème est un analogue de [6, theorem 3.10] qui décrit la situation dans la duale (l'espace des symboles modulaires). Mais dans l'espace des symboles modulaires, l'application d'évaluation est injective, et elle est surjective si $k \neq 0$ ou $N \neq 1$. Si $k = 0$ et $N = 1$, le conayou est un $\mathbb{Q}_p$ -espace de dimension 1 qui correspond à une forme modulaire quasi-holomorphe E_2^{crit} , dont son caractère $\mathcal{H}_N \rightarrow \mathbb{Q}_p$ associé est donné par envoyer T_l sur $1 + l$, U_p sur p et $\langle a \rangle$ sur 1.

(2) A. Iovita signale le fait que $H^1(\Gamma(N; p), \mathbf{D}_{r, W, j})$ est un R -module sans torsion comme on a l'injection

$$0 \longrightarrow H^1(\Gamma(N; p), \mathbf{D}_{r, W, j}) \xrightarrow{m_\kappa} H^1(\Gamma(N; p), \mathbf{D}_{r, W, j})$$

pour tout $\kappa \in W$ et m_κ l'idéal maximal associé à κ .

Proposition 4.17 (théorème de classicité à la Ash-Stevens). *Le morphisme de $\mathbb{I}_0(p)$ -modules $\pi_{k, j} : \mathbf{D}_{r, k, j} \rightarrow V_{k, j+2}$ induit un morphisme de modules de Hecke-Galois*

$$\pi_{k, j} : H^1(\Gamma(N; p), \mathbf{D}_{r, k, j}) \rightarrow H^1(\Gamma(N; p), V_{k, j+2}).$$

De plus, on a un isomorphisme de modules de Hecke-Galois pour la partie de pente $< k - 1$:

$$H^1(\Gamma(N; p), \mathbf{D}_{r, k, j})^{< k-1} \cong H^1(\Gamma(N; p), V_{k, j+2})^{< k-1}.$$

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ définit une involution ι sur $H^1(\Gamma(N; p), V)$, où V est une des représentations de $\Delta_p : \mathbf{D}_{r, W}(\rho_j^{\text{uinv}})$, $\mathbf{D}_{r, k, j}$, ou $V_{k, j}$. On note $H^{1, \pm}(\Gamma(N; p), V)$ le sous-module de $H^1(\Gamma(N; p), V)$ des éléments fixés ou multipliés par -1 sous cette involution, qui sont des $\mathcal{H}_N$ -modules car l'involution commute avec l'action de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_N$.

Proposition 4.18 (Eichler-Shimura). *Si $j = 1$, il existe un isomorphisme Hecke-équivariant*

$$\mathbf{Es} : H^1(\Gamma(N; p), V_{k, 1}) \cong M_k(\Gamma(N; p)) \oplus S_k(\Gamma(N; p)) = S_k(\Gamma(N; p)) \oplus \mathcal{E}_k(\Gamma(N; p)) \oplus S_k(\Gamma(N; p)).$$

Il se décompose en somme directe $\mathbf{Es} = \mathbf{Es}^+ \oplus \mathbf{Es}^-$ par l'involution ι , où $\mathbf{Es}^+, \mathbf{Es}^-$ sont deux morphismes injectifs Hecke équivariants :

$$\mathbf{Es}^\pm : H^{1,\pm}(\Gamma(N;p), V_{k,1}) \rightarrow S_k(\Gamma(N;p)) \oplus \mathcal{E}_k(\Gamma(N;p)),$$

dont ses images contiennent $S_k(\Gamma(N;p))$.

En composant l'isomorphisme de Eichler-Shimura avec l'application $\pi_{k,1}$, on a :

Corollaire 4.19. *Il existe deux morphismes canoniques de modules de Hecke :*

$$\mathbf{Es}^+ \circ \pi_{k,1} : H^{1,+}(\Gamma(N;p), \mathbf{D}_{r,k,1})^{<k-1} \longrightarrow S_k(\Gamma(N;p))^{<k-1} \oplus \mathcal{E}_k(\Gamma(N;p))^{<k-1}$$

$$\mathbf{Es}^- \circ \pi_{k,1} : H^{1,-}(\Gamma(N;p), \mathbf{D}_{r,k,1})^{<k-1} \longrightarrow S_k(\Gamma(N;p))^{<k-1} \oplus \mathcal{E}_k(\Gamma(N;p))^{<k-1},$$

dont ses images contiennent $S_k(\Gamma(N;p))^{<k-1}$.

Dans la suite, on note M le $\mathcal{O}(W)$ -module $H^1(\Gamma(N;p), \mathbf{D}_{r,W,1})^{\leq v}$ et on note $M^\pm$ ses sous-modules $H^{1,\pm}(\Gamma(N;p), \mathbf{D}_{r,W,1})^{\leq v}$. Comme W est agréable, les modules $M^\pm$ sont des R -modules libres de rang fini muni d'une action de $\mathcal{H}_N$. On en déduit deux morphismes de $\mathbb{Q}_p$ -algèbres $\mathcal{H}_N \rightarrow \text{End}_R(M^\pm)$ et on note $\mathbb{T}_{W,v}^\pm$ la sous- R -algèbre de $\text{End}_R(M^\pm)$ engendrée par l'image de $\mathcal{H}_N$ respectivement, qui est de rang fini comme $M^\pm$ est un R -module de rang fini. En plus, $\mathbb{T}_{W,v}^\pm$ sont sans-torsion. Ceci nous fournit deux courbes rigides $\mathfrak{C}_{W,v}^\pm := \text{Spm } \mathbb{T}_{W,v}^\pm$ muni de deux morphismes de poids finis plats $\kappa^\pm : \mathfrak{C}_{W,v}^\pm \rightarrow W$; c'est le morceau local de la courbe d'Ash-Stevens.

La courbe d'Ash-stevens globale se construit par recoller ces morceaux locaux par un processus standard. En plus, les $M^\pm$ se recollent en un faisceau cohérent $\mathcal{V}^\pm$ sur la courbe $\mathfrak{C}^\pm$ respectivement.

4.3 Famille de représentations galoisiennes sur la courbe de Hecke cuspidale

4.3.1 Coleman-Mazur-Buzzard VS. Ash-Stevens

En utilisant la proposition 4.5 de Chenevier, on peut comparer les morceaux locaux de la courbe d'Ash-Stevens avec ceux de la courbe de Coleman-Mazur-Buzzard. Le théorème suivant est un analogue du [6, théorème 3.27].

Théorème 4.20. *Soient v, W comme ci-dessus.*

- (1) *Il existe une immersion fermée $\mathfrak{C}_{W,v}^0 \subset \mathfrak{C}_{W,v}^\pm \subset \mathfrak{C}_{W,v}$, qui est compatible avec les morphismes de poids $\kappa^\pm$ et κ . De plus, toutes ces courbes sont réduites.*
- (2) *Soit $k \in \mathbb{Z}$. Il existe une injection de modules de Hecke*

$$S_k^\dagger(\Gamma(N;p))^{\text{ss}, \leq v} \subset \mathbf{Ev}_k(M^\pm)^{\text{ss}} \subset M_k^\dagger(\Gamma(N;p))^{\text{ss}, \leq v},$$

où ss signifie la semi-simplification comme module de Hecke.

- (3) *Soit $f_\alpha \in \mathfrak{C}_{W,v}^0$ une forme classique cuspidale raffinée. On a*

$$\dim(S_k^\dagger(\Gamma(N;p))_{(f_\alpha)}) = \dim(M_{(f_\alpha)}^\pm).$$

Démonstration. On utilise le théorème 4.5 de Chenevier à maintes reprises. Comme W est adapté à v , dans la suite, on va jeter l'indice en bas r et on notera $\mathbf{D}_{r,W,j}$ (resp. $\mathbf{D}_{r,k,j}$) par $\mathbf{D}_{W,j}$ (resp. $\mathbf{D}_{k,j}$).

D'abord, on pose $M_1 = S^\dagger(\Gamma(N;p), W)^{\leq v}$ et M_2 un des modules $M^\pm = H^{1,\pm}(\Gamma(N;p), \mathbf{D}_{W,1})^{\leq v}$. Soit X l'ensemble des entiers $k \in \mathbb{N}$ tels que $k \geq v+1$. Comme W est agréable, X est Zariski-dense dans W .

Le fibre $M_{1,k}$ de M_1 en un point $k \in X$ est $S_k^\dagger(\Gamma(N;p))^{\leq v}$, qui est isomorphe à $S_k(\Gamma(N;p))^{\leq v}$ par le théorème de classicité de Coleman (cf. proposition 4.6). D'autre part, le fibre $M_{2,k}$ de M_2 en un point $k \in X$ est $H^{1,\pm}(\Gamma(N;p), \mathbf{D}_{k,1})^{\leq v}$. On déduit du corollaire 4.19 que l'existence des injections $M_{1,k} \subset M_{2,k}$, pour $k \in X$. Alors, le théorème 4.5 de Chenevier implique qu'il existe deux immersions fermée de courbes $\mathfrak{C}_{W,v}^0 \subset \mathfrak{C}_{W,v}^\pm$, ainsi que deux inclusions de modules de Hecke $M_{1,\kappa}^{\text{ss}} \subset M_{2,\kappa}^{\text{ss}}$, pour tout $\kappa \in W$. Ensuite, on prend $M_3 = M^\dagger(\Gamma(N;p), W)^{\leq v}$ et on prend le même sous-ensemble X de $\mathbb{N}$ comme ci-dessus. Le théorème de classicité de Coleman dit que $M_{3,k} = M_k(\Gamma(N;p))^{\leq v}$, pour tout $k \in X$. Le corollaire 4.19 dit que $M_{2,k} \subset M_{3,k}$, pour tout $k \in X$. En appliquant le théorème de Chenevier à M_2 et M_3 , on obtient deux immersions fermée de courbes $\mathfrak{C}_{W,v}^\pm \subset \mathfrak{C}_{W,v}$, ainsi que deux inclusions de modules de Hecke $\text{Ev}_\kappa(M^\pm)^{\text{ss}} \subset M_{3,\kappa}^{\text{ss}}$, pour tout $\kappa \in W$.

En particulier, on obtient deux inclusions $M_{1,k}^{\text{ss}} \subset M_{2,k}^{\text{ss}} \subset M_{3,k}^{\text{ss}}$, pour tout $k \in \mathbb{Z} \cap W(\mathbb{Q}_p)$. D'autre part, tout les points $k \in \mathbb{Z}$ admet un voisinage $W \subset \mathscr{W}$ agréable, ce qui permet de montrer l'existence des inclusions $S_k^\dagger(\Gamma(N;p))^{\leq v, \text{ss}} \subset \text{Ev}_k(M^\pm)^{\text{ss}} \subset M_k^\dagger(\Gamma(N;p))^{\leq v, \text{ss}}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Les arguments ci-dessus montrent que les assertions (1) et (2) sont vrais sauf que les courbes sont réduites. On prend un sous-ensemble $X' \subset X$ des entiers $> 2v-1$, qui est aussi Zariski-dense dans W . On se ramène à montrer que les opérateurs de Hecke agissant sur $M_k(\Gamma(N;p))^{\leq v}$ sont semi-simples, pour $k \in X'$. Les opérateurs de Hecke sauf U_p sont normales, et donc semi-simples. Il ne reste qu'à montrer que U_p est semi-simple sur chaque espace propre généralisé. La théorie d'Atkin-Lehner montre que c'est vrais pour les formes primitives. Pour les formes qui sont vieux en p , la condition $k > 2v-1$ assure qu'il existe une seule racine α de l'équation $X^2 - a_p X + \epsilon(p)p^{k-1}$ telle que $v_p(\alpha) \leq v$. Ceci implique que si la forme propre f est nouvelle pour le niveau $\Gamma_1(N')$ avec $N'|N$, alors l'espace propre $M_k(\Gamma_1(N'))_{(f)} \cong M_k(\Gamma(N;p))_{(f)}^{\leq v}$ et U_p agit par la multiplication de α sur cet espace propre généralisé. On conclut que les courbes sont réduites.

L'assertion (3) est évidente. □

4.3.2 La transformation stricte

Comme $\mathfrak{C}^0 \subset \mathfrak{C}^\pm$, on peut construire un faisceau sans torsion

$$\mathscr{V} = \mathscr{V}^+|_{\mathfrak{C}^0} \oplus \mathscr{V}^-|_{\mathfrak{C}^0}$$

sur la courbe de Hecke cuspidale.

Définition 4.21. Un morphisme $\pi : \mathscr{X}' \rightarrow \mathscr{X}$ d'espaces rigides réduits est birationnel s'il existe un faisceau d'idéal cohérent $H \subset \mathcal{O}_{\mathscr{X}}$, tel que, le complément U du sous-espace fermé $V(H)$ défini par H est Zariski-dense dans $\mathscr{X}$, le morphisme π induit un isomorphisme $\pi^{-1}(U) \rightarrow U$ et l'image inverse $\pi^{-1}(U)$ est Zariski-dense dans $\mathscr{X}'$.

Soit $\pi : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ un morphisme propre et rationnel d'espaces rigides réduits. Fixons un faisceau d'idéal cohérent H dans la définition ci-dessus. Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -faisceau cohérent, on définit un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}$ -faisceau cohérent $\mathcal{M}'$, appelé la transformée stricte $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{M}$, en quotientant le $\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}$ -faisceau cohérent $\pi^*\mathcal{M}$ par ses H'^∞ -torsions, où H' est le faisceau d'idéal cohérent définissant le sous-ensemble fermé $\pi^{-1}(V(H)) \subset \mathcal{X}'$. En général, la définition de la transformée stricte de $\mathcal{M}$ dépend du choix de H . Si $\mathcal{M}$ est muni d'une action continue $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -linéaire d'un groupe topologie G , ceci induit une action continue $\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}$ -linéaire sur $\mathcal{M}'$ et l'application naturelle $\pi^*\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ est G -équivariant. En particulier, si $\mathcal{M}$ est sans torsion, alors $\mathcal{M}'$ est aussi sans torsion et $\mathcal{M}'$ ne dépend pas du choix de H .

Le lemme suivant nous permet de modifier le faisceau $\mathcal{V}$ en une vraie famille de représentations de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$ sur $\tilde{\mathcal{C}}^0$ la normalisation de $\mathcal{C}^0$.

Lemme 4.22. [7, lemma 3.4.2] *Soit $\mathcal{M}$ un faisceau cohérent sans torsion sur un espace rigide réduit. Il existe un morphisme propre et birationnel $\pi : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ avec $\mathcal{X}'$ réduit, tel que, la transformée stricte $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{M}$ par π est un faisceau cohérent localement libre. En particulier, on peut choisir π par l'éclatement de la normalisation $\tilde{\mathcal{X}}$ de $\mathcal{X}$ le long un sous-espace fermé non-dense partout. De plus, si $\mathcal{X}$ est une courbe, il suffit de prendre la normalisation de la courbe.*

Soit $\mathcal{V}'$ la transformée stricte de $\mathcal{V}$ par le morphisme propre et birationnel $\pi : \tilde{\mathcal{C}}^0 \rightarrow \mathcal{C}^0$, qui est une famille de représentations de $\mathcal{G}$. En particulier, $\mathcal{V}'$ est une famille de représentations de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$. On note Z le sous-ensemble de $\mathcal{C}^0$ des formes cuspidales raffinées régulières non-critiques, qui est Zariski-dense dans $\tilde{\mathcal{C}}^0$. On note $\tilde{\alpha} \in \mathcal{O}(\tilde{\mathcal{C}}^0)$ l'image inverse de $\alpha \in \mathcal{O}(\mathcal{C}^0)$ sous l'application de normalisation.

Proposition 4.23. *La donnée $(\mathcal{V}', \tilde{\alpha}, Z, \kappa_1 = \kappa, \kappa_2 = 0)$ est une famille faiblement raffinée de représentations p -adiques de dimension 2 sur $\tilde{\mathcal{C}}^0$.*

Remarque 4.24. Récemment, Andreatta, Iovita et Stevens [2] ont donné une autre construction de familles de représentations galoisiennes grâce à l'isomorphisme d'Eichler-Shimura surconvergent.

5 Construction de la famille de système d'Euler de Kato sur la courbe de Hecke cuspidale

5.1 Projection du système d'Euler de Kato

Soit $\hat{\Gamma}$ un sous-groupe de congruence de $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ tel que l'application $\hat{\Gamma} \xrightarrow{\det} \hat{\mathbb{Z}}^*$ est surjective, et on note $\tilde{\Gamma}$ l'image inverse de $\hat{\Gamma}$ dans $\Pi_{\mathbb{Q}}$ via l'application $\Pi_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ et $\bar{\Gamma}$ son intersection avec $\Pi_{\mathbb{Q}}$, qui est le complété profini de $\Gamma = \hat{\Gamma} \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. On a une suite exacte de groupes :

$$1 \rightarrow \bar{\Gamma} \rightarrow \tilde{\Gamma} \rightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{Q}} \rightarrow 1.$$

On note $\Lambda^n = \mathbb{Z}_p[[T_1, T_2, \dots, T_n]]$ l'algèbre d'Iwasawa en n -variables et $\mathfrak{m}$ son idéal maximal. On dira qu'une $\mathbb{Q}_p$ -représentation V de $\tilde{\Gamma}$ est de type compact si elle admet un Λ^n -sous-module V^+ de rang fini stable sous l'action de $\tilde{\Gamma}$ tel que

$$V^+ = \varprojlim_l V^+/\mathfrak{m}^l \text{ et } V = V^+ \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p.$$

Soit $z \in H^2(\tilde{\Gamma}, \mathfrak{D}_0(\mathbf{M}_2^{(p)}, V))$, où V est une $\mathbb{Q}_p$ -représentation de $\tilde{\Gamma}$ de type compact. Si ϕ est une fonction localement constante sur $\mathbf{M}_2(\hat{\mathbb{Z}})^{(p)}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ invariante sous l'action de $\tilde{\Gamma}$, on définit une mesure $z_{\phi,0} \in H^2(\tilde{\Gamma}, \mathfrak{D}_0(\hat{\mathbb{Z}}^{(p)}, V))$ par

$$\int_{\hat{\mathbb{Z}}^{(p)}} \psi z_{\phi,0} = \int_{\mathbf{M}_2(\hat{\mathbb{Z}})^{(p)}} \psi(\det x) \phi(x) z, \text{ si } \psi \in \mathcal{C}^0(\hat{\mathbb{Z}}^{(p)}, \mathbb{Z}_p).$$

Lemme 5.1. *Soit V une $\mathbb{Q}_p$ -représentation de $\tilde{\Gamma}$ comme ci-dessus. On a un isomorphisme*

$$H^2(\tilde{\Gamma}, \mathfrak{D}_0(\hat{\mathbb{Z}}^{(p)}, V)) \cong \varinjlim_{N, (N,p)=1} (\varprojlim_{n,l} H^2(\tilde{\Gamma}, \mathbb{Z}_p[\hat{\mathbb{Z}}^{(p)}/Np^n] \otimes V^+/\mathfrak{m}^l)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p.$$

Démonstration. Par définition, on a

$$H^2(\tilde{\Gamma}, \mathfrak{D}_0(\hat{\mathbb{Z}}^{(p)}, V)) = \varinjlim_{N, (N,p)=1} (\varprojlim_n H^2(\tilde{\Gamma}, \mathbb{Z}_p[\hat{\mathbb{Z}}^{(p)}/Np^n] \otimes V^+)) \otimes \mathbb{Q}_p.$$

Le lemme déduit du fait que $\{\mathbb{Z}_p[\hat{\mathbb{Z}}^{(p)}/Np^n] \otimes V^+/\mathfrak{m}^l\}_{n,l}$ est un système projectif de Mittag-Leffler avec la limite projective $\mathbb{Z}_p[\hat{\mathbb{Z}}^{(p)}/Np^n] \otimes V^+$. □

Par la suite spectrale de Hochschild-Serre, on a une application naturelle :

$$H^2(\tilde{\Gamma}, \mathbb{Z}_p[\hat{\mathbb{Z}}^{(p)}/Np^n] \otimes V^+/\mathfrak{m}^l) \rightarrow H^1(\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}, H^1(\bar{\Gamma}, \mathbb{Z}_p[\hat{\mathbb{Z}}^{(p)}/Np^n] \otimes V^+/\mathfrak{m}^l)).$$

Comme $\bar{\Gamma}$ agit trivialement sur $\hat{\mathbb{Z}}^{(p)}$, on a un isomorphisme :

$$H^1(\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}, H^1(\bar{\Gamma}, \mathbb{Z}_p[\hat{\mathbb{Z}}^{(p)}/Np^n] \otimes V^+/\mathfrak{m}^l)) \cong H^1(\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}^{(p)}/Np^n] \otimes H^1(\bar{\Gamma}, V^+/\mathfrak{m}^l)).$$

Comme la cohomologie de $\bar{\Gamma}$ dans un module fini est un groupe fini, le système projectif $\{\mathbb{Z}_p[\hat{\mathbb{Z}}^{(p)}/Np^n] \otimes H^1(\bar{\Gamma}, V^+/\mathfrak{m}^l)\}_{n,l}$ est un système de Mittag-Leffler. Ceci implique que

$$\varinjlim_{N, (N,p)=1} (\varprojlim_{n,l} H^1(\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}_p[\hat{\mathbb{Z}}^{(p)}/Np^n] \otimes H^1(\bar{\Gamma}, V^+/\mathfrak{m}^l))) \otimes \mathbb{Q}_p \cong H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}, H^1(\bar{\Gamma}, V)).$$

En composant les applications obtenus ci-dessus, on déduit d'un morphisme, appelé le projecteur d'Iwasawa,

$$\pi_{\phi,V} : H^2(\tilde{\Gamma}, \mathfrak{D}_0(\mathbf{M}_2^{(p)}, V)) \rightarrow H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}, H^1(\bar{\Gamma}, V)).$$

Si $z \in H^2(\tilde{\Gamma}, \mathfrak{D}_0(\mathbf{M}_2^{(p)}, V))$, on note $z_{\phi} \in H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}, H^1(\bar{\Gamma}, V))$ l'image de z sous l'application $\pi_{\phi,V}$.

Comme $\mathbf{Mes}_{\mathscr{W},j}^{\text{bd}}(2)$ est une représentation de $\tilde{\Gamma}$ de type compact, le projecteur d'Iwasawa est applicable ; et on note le projecteur d'Iwasawa sur $\mathbf{Mes}_{\mathscr{W},j}^{\text{bd}}(2)$ et sur $V_{k,j}$ par $\pi_{\phi,\mathscr{W},j}$ et $\pi_{\phi,k,j}$ respectivement. On a une application de spécialisation

$$H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}, H^1(\bar{\Gamma}, \mathbf{Mes}_{\mathscr{W},j}^{\text{bd}}(2))) \rightarrow H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}, H^1(\bar{\Gamma}, V_{k,j}))$$

induite par l'application de spécialisation $\text{Sp}_{k,j} : \mathbf{Mes}_{\mathscr{W},j}^{\text{bd}}(2) \rightarrow V_{k,j}$, notée encore par $\text{Sp}_{k,j}$.

Le théorème suivant est un résumé de la construction ci-dessus :

Théorème 5.2. *On a le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccc} H^2(\tilde{\Gamma}, \mathfrak{D}_0(\mathbf{M}_2^{(p)}, \mathbf{Mes}_{\mathscr{W},j}^{\text{bd}}(2))) & \xrightarrow{\pi_{\phi,\mathscr{W},j}} & H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}, H^1(\bar{\Gamma}, \mathbf{Mes}_{\mathscr{W},j}^{\text{bd}}(2))) \\ \downarrow \text{Sp}_{k,j} & & \downarrow \text{Sp}_{k,j} \\ H^2(\tilde{\Gamma}, \mathfrak{D}_0(\mathbf{M}_2^{(p)}, V_{k,j})) & \xrightarrow{\pi_{\phi,k,j}} & H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}, H^1(\bar{\Gamma}, V_{k,j})) \end{array}$$

5.2 Application à la famille de système d'Euler de Kato

Soit K le sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ défini comme suit : on pose un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}}^{[p]})$:

$$K^{[p]} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{G}(\hat{\mathbb{Z}}^{[p]}) : c \equiv d - 1 \equiv 0 \pmod{N} \right\};$$

et on note $K = K^{[p]} \times \mathbb{I}_0(p)$. Alors son image sous l'application de déterminant est $\hat{\mathbb{Z}}^*$ et $K \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \Gamma(N; p)$. On note $\bar{\Gamma}(N; p)$ le complété profini de $\Gamma(N; p)$. On note $\tilde{K}$ l'image inverse de K dans $\Pi_{\mathbb{Q}}$ sous l'application $\Pi_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$. Soit ϕ une fonction localement constante sur $\mathbf{M}_2(\hat{\mathbb{Z}})^{(p)}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ invariante sous l'action de $\tilde{K}$. Le théorème 5.2 nous fournit un diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^2(\tilde{K}, \mathfrak{D}_0(\mathbf{M}_2^{(p)}, \mathbf{Mes}_{\mathscr{W},j}^{\mathrm{bd}}(2))) & \xrightarrow{\pi_{\phi, \mathscr{W},j}} & \mathrm{H}_{\mathrm{Iw}}^1(\mathbb{Q}, \mathrm{H}^1(\bar{\Gamma}(N; p), \mathbf{Mes}_{\mathscr{W},j}^{\mathrm{bd}}(2))) \\ \downarrow \mathrm{Sp}_{k,j} & & \downarrow \mathrm{Sp}_{k,j} \\ \mathrm{H}^2(\tilde{K}, \mathfrak{D}_0(\mathbf{M}_2^{(p)}, V_{k,j})) & \xrightarrow{\pi_{\phi, k,j}} & \mathrm{H}_{\mathrm{Iw}}^1(\mathbb{Q}, \mathrm{H}^1(\bar{\Gamma}(N; p), V_{k,j})) \end{array}$$

Soit v un nombre réel et soit $W = \mathrm{Spm} R$ un ouvert affinoïde de $\mathscr{W}$ adapté à v . Pour tout $r \geq r_W$, on a un morphisme naturel de $\mathcal{O}^{\mathrm{bd}}(\mathscr{W})$ -modules $\mathbb{I}_0(p)$ -équivariant

$$\mathbf{Mes}_{\mathscr{W},j}^{\mathrm{bd}} \rightarrow \mathbf{Mes}_{\mathscr{W},j}^{\mathrm{bd}} \otimes_{\mathcal{O}^{\mathrm{bd}}(\mathscr{W})} R \rightarrow \mathbf{D}_{r,W,j}.$$

Ceci induit un morphisme

$$\mathrm{H}_{\mathrm{Iw}}^1(\mathbb{Q}, \mathrm{H}^1(\bar{\Gamma}(N; p), \mathbf{Mes}_{\mathscr{W},j}^{\mathrm{bd}}(2))) \rightarrow \mathrm{H}_{\mathrm{Iw}}^1(\mathbb{Q}, \mathrm{H}^1(\bar{\Gamma}(N; p), \mathbf{D}_{r,W,j}(2))).$$

Si $k \in W$, alors l'application de spécialisation $\mathrm{Sp}_{k,j} : \mathbf{D}_{r,W,j}(2) \rightarrow V_{k,j}$ induit un morphisme de spécialisation

$$\mathrm{Sp}_{k,j} : \mathrm{H}_{\mathrm{Iw}}^1(\mathbb{Q}, \mathrm{H}^1(\bar{\Gamma}(N; p), \mathbf{D}_{r,W,j}(2))) \rightarrow \mathrm{H}_{\mathrm{Iw}}^1(\mathbb{Q}, \mathrm{H}^1(\bar{\Gamma}(N; p), V_{k,j})),$$

tel que, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}_{\mathrm{Iw}}^1(\mathbb{Q}, \mathrm{H}^1(\bar{\Gamma}(N; p), \mathbf{Mes}_{\mathscr{W},j}^{\mathrm{bd}}(2))) & \xrightarrow{\quad} & \mathrm{H}_{\mathrm{Iw}}^1(\mathbb{Q}, \mathrm{H}^1(\bar{\Gamma}(N; p), \mathbf{D}_{r,W,j}(2))) \\ & \searrow \mathrm{Sp}_{k,j} & \downarrow \mathrm{Sp}_{k,j} \\ & & \mathrm{H}_{\mathrm{Iw}}^1(\mathbb{Q}, \mathrm{H}^1(\bar{\Gamma}(N; p), V_{k,j})) \end{array}$$

D'après la proposition 4.14, on a $\mathrm{H}^1(\bar{\Gamma}(N; p), \mathbf{D}_{r,W,j}) \cong \mathrm{H}^1(\Gamma(N; p), \mathbf{D}_{r,W,j})$. Comme l'action de groupe de Galois commute avec l'action de U_p , la décomposition de pente $\leq v$ pour l'opérateur U_p nous donne un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}_{\mathrm{Iw}}^1(\mathbb{Q}, \mathrm{H}^1(\Gamma(N; p), \mathbf{D}_{r,W,j}(2))) & \xrightarrow{\quad} & \mathrm{H}_{\mathrm{Iw}}^1(\mathbb{Q}, \mathrm{H}^1(\Gamma(N; p), \mathbf{D}_{r,W,j}(2))^{\leq v}) \\ \downarrow \mathrm{Sp}_{k,j} & & \downarrow \mathrm{Sp}_{k,j} \\ \mathrm{H}_{\mathrm{Iw}}^1(\mathbb{Q}, \mathrm{H}^1(\Gamma(N; p), V_{k,j})) & \xrightarrow{\quad} & \mathrm{H}_{\mathrm{Iw}}^1(\mathbb{Q}, \mathrm{H}^1(\Gamma(N; p), V_{k,j})^{\leq v}) \end{array}$$

On applique la construction de la courbe d'Ash-Stevens à $H^1(\Gamma(N; p), \mathbf{D}_{r, W, j}(2))$ en résultant un faisceau $\mathcal{V}_{W, v}(1 - j)$ sans torsion sur $\mathfrak{C}_{W, v}^0$. Soit $f_\alpha \in \mathfrak{C}_{W, v}^0$ une forme cuspidale raffinée non-critique de poids k de pente $v_p(\alpha)$. D'après le (3) du théorème 4.20, on a un isomorphisme de représentations galoisiennes

$$\mathrm{Ev}_{f_\alpha}(\mathcal{V}_{W, v}) \cong H^1(\Gamma(N; p), V_{k, 1})_{\pi_{f_\alpha}}^{\leq v} = V_{f_\alpha}.$$

Ceci induit un morphisme de spécialisation de $H_{\mathrm{Iw}}^1(\mathbb{Q}, \mathcal{V}(\mathfrak{C}^0))$ dans $H_{\mathrm{Iw}}^1(\mathbb{Q}, V_{f_\alpha})$, noté Sp_{f_α} . La proposition suivante est une conséquence immédiate de la construction de la projection sur $\mathfrak{C}^0$ et de la construction de Sp_{f_α} .

Proposition 5.3. *Soit $f_\alpha \in \mathfrak{C}_{W, v}^0$ une forme raffinée classique de poids k de pente $v_p(\alpha)$. Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathrm{Iw}}^1(\mathbb{Q}, H^1(Y_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbf{D}_{r, W}(\rho_j^{\mathrm{univ}})(2))^{\leq v}) & \longrightarrow & H_{\mathrm{Iw}}^1(\mathbb{Q}, \mathcal{V}_{W, v}(1 - j)) \\ \downarrow \mathrm{Sp}_{k, j} & & \downarrow \mathrm{Sp}_{f_\alpha} \\ H_{\mathrm{Iw}}^1(\mathbb{Q}, H^1(Y_{\overline{\mathbb{Q}}}, V_{k, j})^{\leq v}) & \xrightarrow{\pi_{f_\alpha}} & H_{\mathrm{Iw}}^1(\mathbb{Q}, V_{f_\alpha}(1 - j)) \end{array}$$

En composant les diagrammes commutatifs obtenues ci-dessus, on obtient un diagramme commutatif :

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} H^2(\tilde{K}, \mathfrak{D}_0(\mathbf{M}_2^{(p)}, \mathbf{Mes}_{\mathscr{W}, j}^{\mathrm{bd}}(2))) & \xrightarrow{\mathrm{Sp}_{k, j}} & H^2(\tilde{K}, \mathfrak{D}_0(\mathbf{M}_2^{(p)}, V_{k, j})) \\ \downarrow \pi_{\phi, \mathscr{W}, j} & & \downarrow \pi_{\phi, k, j} \\ H_{\mathrm{Iw}}^1(\mathbb{Q}, H^1(\Gamma(N; p), \mathbf{Mes}_{\mathscr{W}, j}^{\mathrm{bd}}(2))) & \xrightarrow{\mathrm{Sp}_{k, j}} & H_{\mathrm{Iw}}^1(\mathbb{Q}, H^1(\Gamma(N; p), V_{k, j})) \\ \downarrow & & \downarrow \pi_{f_\alpha} \\ H_{\mathrm{Iw}}^1(\mathbb{Q}, \mathcal{V}_{W, v}(1 - j)) & \xrightarrow{\mathrm{Sp}_{f_\alpha}} & H_{\mathrm{Iw}}^1(\mathbb{Q}, V_{f_\alpha}(1 - j)) \end{array}$$

On note $z_{\mathrm{Kato}, \phi}(\mathfrak{C}_{W, v}^0, j)$ (resp. $z_{\mathrm{Kato}, \phi}(f_\alpha, j)$) l'image de $z_{\mathrm{Kato}, c, d}(\nu_j)$ (resp. $z_{\mathrm{Kato}, c, d}(k, j)$) dans $H_{\mathrm{Iw}}^1(\mathbb{Q}, \mathcal{V}_{W, v}(1 - j))$ (resp. $H_{\mathrm{Iw}}^1(\mathbb{Q}, V_{f_\alpha}(1 - j))$) sous l'application construite ci-dessus.

Théorème 5.4. *On a $\mathrm{Sp}_{f_\alpha}(z_{\mathrm{Kato}, \phi}(\mathfrak{C}_{W, v}^0, j)) = z_{\mathrm{Kato}, \phi}(f_\alpha, j)$.*

Démonstration. Ce théorème se déduit de la relation $\mathrm{Sp}_{k, j}(z_{\mathrm{Kato}, c, d}(\nu_j)) = z_{\mathrm{Kato}, c, d}(k, j)$, des définitions de $z_{\mathrm{Kato}, \phi}(\mathfrak{C}_{W, v}^0, j)$ et $z_{\mathrm{Kato}, \phi}(f_\alpha, j)$, et de la construction du diagramme (4). $\square$

6 Fonction L p -adique en deux variables

6.1 La distribution $z_{\mathrm{Eis}, c, d}(k, j)$

Soit A un sous-anneau de $\overline{\mathbb{Q}}$. On note $\mathbf{Dir}(\overline{\mathbb{Q}})$ le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des séries de Dirichlet formelles à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$. On note $\mathbf{Dir}(A)$ le sous A -module de $\mathbf{Dir}(\overline{\mathbb{Q}})$ des séries de Dirichlet formelles dont ses coefficients sont dans A .

Soit $\alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. On définit les séries de Dirichlet formelles $\zeta(\alpha, s)$ et $\zeta^*(\alpha, s)$, appartenant à $\mathbf{Dir}(\mathbb{Q}^{\text{cycl}})$, par les formules :

$$\zeta(\alpha, s) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Q}_+^* \\ n \equiv \alpha \pmod{\mathbb{Z}}}} n^{-s} \text{ et } \zeta^*(\alpha, s) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2i\pi\alpha n} n^{-s}.$$

On définit les séries d'Eisenstein $E_{\alpha,\beta}^{(k)}$ et $F_{\alpha,\beta}^{(k)}$, éléments de $\mathcal{M}^{\text{cong}}(\mathbb{Q}^{\text{cycl}})$, par ses q -développements :

(1) si $k \geq 1, k \neq 2$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, alors le q -développement $\sum_{n \in \mathbb{Q}_+} a_n q^n$ de $E_{\alpha,\beta}^{(k)}$ est donné par

$$\sum_{n \in \mathbb{Q}_+^*} \frac{a_n}{n^s} = \zeta(\alpha, s) \zeta^*(\beta, s - k + 1) + (-1)^k \zeta(-\alpha, s) \zeta^*(-\beta, s - k + 1).$$

De plus, on a : si $k \neq 1$ et si $\alpha \neq 0$ (resp. $\alpha = 0$), alors $a_0 = 0$ (resp. $a_0 = \zeta^*(\beta, 1 - k)$) ; si $k = 1$ et si $\alpha \neq 0$ (resp. $\alpha = 0$), alors $a_0 = \zeta(\alpha, 0)$ (resp. $a_0 = \frac{1}{2}(\zeta^*(\beta, 0) - \zeta^*(-\beta, 0))$).

(2) si $k \geq 1$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (si $k = 2, (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$), alors le q -développement $\sum_{n \in \mathbb{Q}_+} a_n q^n$ de $F_{\alpha,\beta}^{(k)}$ est donné par

$$\sum_{n \in \mathbb{Q}_+^*} \frac{a_n}{n^s} = \zeta(\alpha, s - k + 1) \zeta^*(\beta, s) + (-1)^k \zeta(-\alpha, s - k + 1) \zeta^*(-\beta, s).$$

De plus, on a : si $k \neq 1$, alors $a_0 = \zeta(\alpha, 1 - k)$, la valeur spéciale de la fonction zêta de Hurwitz ; si $k = 1$ et si $\alpha \neq 0$ (resp. $\alpha = 0$), alors $a_0 = \zeta(\alpha, 0)$ (resp. $a_0 = \frac{1}{2}(\zeta^*(\beta, 0) - \zeta^*(-\beta, 0))$).

L'action de $\text{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ induite par celle de $\Pi_{\mathbb{Q}}$ sur ces fonctions est donnée par les formules suivantes (cf. [54, proposition 2.12]) : Si $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}}), k \geq 1$ et $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$, on a :

$$(5) \quad E_{\alpha,\beta}^{(k)} * \gamma = E_{a\alpha+c\beta, b\alpha+d\beta}^{(k)} \text{ et } F_{\alpha,\beta}^{(k)} * \gamma = F_{a\alpha+c\beta, b\alpha+d\beta}^{(k)}.$$

Soit $\langle\langle \cdot \rangle\rangle : \mathbb{Z}_p^* \rightarrow \hat{\mathbb{Z}}^*$ l'inclusion naturelle en envoyant x sur $\langle\langle x \rangle\rangle = (1, \dots, x, 1, \dots)$, où x est à la place p . Considérons l'inclusion de $\hat{\mathbb{Z}}^*$ dans $\text{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ en envoyant d sur $\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$. D'après la proposition 5, cela définit une action de $d \in \hat{\mathbb{Z}}^*$ sur les séries d'Eisenstein par les formules : si $k \geq 1$ et $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$, on a

$$(6) \quad d \cdot E_{\alpha,\beta}^{(k)} = E_{d\alpha, d\beta}^{(k)} = E_{\alpha,\beta}^{(k)} * \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \text{ et } d \cdot F_{\alpha,\beta}^{(k)} = F_{d\alpha, d\beta}^{(k)} = F_{\alpha,\beta}^{(k)} * \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

où l'action de $*$ est celle de $\text{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ sur les séries d'Eisenstein.

Considérons l'injection de $\mathcal{M}_k^{\text{cong}}(\overline{\mathbb{Q}})$ dans $\mathcal{M}_k^{\text{cong}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$. On peut définir une variante de séries d'Eisenstein à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ comme ci-dessous : si $c \in \mathbb{Z}_p^*$, on pose

$$E_{c,\alpha,\beta}^{(k)} = \begin{cases} c^2 E_{\alpha,\beta}^{(k)} - c^k E_{\langle\langle c \rangle\rangle\alpha, \langle\langle c \rangle\rangle\beta}^{(k)}; & \text{si } k \geq 1 \text{ et } k \neq 2, \\ c^2 \tilde{E}_{\alpha,\beta}^{(2)} - c^2 \tilde{E}_{\langle\langle c \rangle\rangle\alpha, \langle\langle c \rangle\rangle\beta}^{(2)}; & \text{si } k = 2; \end{cases}$$

$$F_{c,\alpha,\beta}^{(k)} = c^2 F_{\alpha,\beta}^{(k)} - c^{2-k} F_{\langle\langle c \rangle\rangle\alpha, \langle\langle c \rangle\rangle\beta}^{(k)} \text{ si } k \geq 1 \text{ et } k \neq 2, \text{ ou si } (\alpha, \beta) \neq (0, 0) \text{ et } k = 2.$$

Elles sont des combinaisons linéaires de séries d'Eisenstein.

Les relations de distribution des séries d'Eisenstein se traduisent en l'énoncé suivant :

Proposition 6.1. [54, proposition 2.14] Soit $c \in \mathbb{Z}_p^*$. Si $k \geq 1$, il existe une distribution algébrique $z_{\text{Eis},c}(k)$ (resp. $z'_{\text{Eis},c} \in \mathfrak{D}_{\text{alg}}((\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}})^2, \mathcal{M}_k^{\text{cong}}(\mathbb{Q}_p^{\text{cycl}}))$) vérifiant : quel que soient $r \in \mathbb{Q}^*$ et $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$, on a

$$\int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}}) \times (b+r\hat{\mathbb{Z}})} z_{\text{Eis},c}(k) = r^{-k} E_{c,r^{-1}a,r^{-1}b}^{(k)} \quad (\text{resp.} \int_{(a+r\hat{\mathbb{Z}}) \times (b+r\hat{\mathbb{Z}})} z'_{\text{Eis},c}(k) = r^{k-2} F_{c,r^{-1}a,r^{-1}b}^{(k)})$$

De plus, si $\gamma \in \text{GL}_2(\mathbb{A}_f)$, alors on a

$$z_{\text{Eis},c}(k) * \gamma = z_{\text{Eis},c}(k) \quad \text{et} \quad z'_{\text{Eis},c} * \gamma = |\det \gamma|^{1-k} z'_{\text{Eis},c}(k).$$

On peut identifier $\mathbb{A}_f^2 \times \mathbb{A}_f^2$ avec $\mathbf{M}_2(\mathbb{A}_f)$ via $((a, b), (c, d)) \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Soient $c, d \in \mathbb{Z}_p^*$. En utilisant le fait que le produit de deux formes modulaires de poids i et j est une forme modulaire de poids $i + j$, si $k \geq 2$ et $1 \leq j \leq k - 1$, on définit une distribution $z_{\text{Eis},c,d}(k, j)$ appartient à $\mathfrak{D}_{\text{alg}}(\mathbf{M}_2(\mathbb{A}_f), \mathcal{M}_k(\mathbb{Q}_p^{\text{cycl}}))$ par la formule :

$$z_{\text{Eis},c,d}(k, j) = \frac{1}{(j-1)!} z'_{\text{Eis},c}(k-j) \otimes z_{\text{Eis},d}(j).$$

Si $\gamma \in \text{GL}_2(\mathbb{Q} \otimes \hat{\mathbb{Z}})$, on a $z_{\text{Eis},c,d}(k, j)|_k \gamma = |\det \gamma|^{j-1} z_{\text{Eis},c,d}(k, j)$.

6.2 La méthode de Rankin-Selberg

Soit ϵ un caractère de Dirichlet modulo N . Soit $f = \sum_{n \geq 1} a_n q^n \in S_k(\Gamma_0(N), \epsilon)$ une forme primitive. On note f^* la conjuguée complexe de f (i.e. $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})} = \sum \overline{a_n} q^n$). Le corps $\mathbb{Q}(f) = \mathbb{Q}(a_2, \dots, a_n, \dots)$ est une extension finie de $\mathbb{Q}$. De plus, on a $\overline{a_n} = \chi^{-1}(n) a_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$ premier à N , et $f * T(l) = a_l f$, $f * T'(l) = \overline{a_l} f$, $f * \begin{pmatrix} u^{-1} & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} = \epsilon(u) f$, si $l \nmid N$ est un nombre premier et $u \in \hat{\mathbb{Z}}^*$. Soient α, β les racines du polynôme $X^2 - a_p X + \epsilon(p) p^{k-1}$. Soit $v_p(\alpha) < k - 1$, on pose $f_\alpha(\tau) = f(\tau) - \beta f(p\tau)$ le raffinement de f .

On reprend la présentation de Colmez [18, §3.2] sur la méthode de Rankin-Selberg dans §6.2.1, on effectue les calculs pour la convolution de Rankin pour nos séries d'Eisenstein dans §6.2.2, ce qui permet d'expliciter la période utilisée pour rendre algébriques les valeurs spéciales de la fonction L de f_α .

6.2.1 Généralité

Soit $\Gamma(N) = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}), b \equiv c \equiv 0[N] \}$ et soit χ_1 et χ_2 des caractères de Dirichlet modulo N (pas nécessairement primitifs). Soient $k \geq 2, 1 \leq j \leq k - 1$. Soient $f = \sum_{n \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}, n > 0} a_n q^n \in S_k(\Gamma(N), \chi_1)$ et $g = \sum_{n \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}, n \geq 0} b_n q^n \in \mathcal{M}_{k-j}(\Gamma(N), \chi_2)$ des formes propres pour tous les opérateurs $T(l)$ avec $(l, N) = 1$. Sous les notations au-dessus, on a les produits d'Euler suivants :

$$\sum_{n > 0} \frac{a_n}{n^s} = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}[\frac{1}{N}]^*, n > 0} \frac{a_n}{n^s} \right) \cdot \prod_{l \nmid N} \frac{1}{(1 - \alpha_{l,1} l^{-s})(1 - \alpha_{l,2} l^{-s})}, \quad \text{avec } \alpha_{l,1} \alpha_{l,2} = \chi_1(l) l^{k-1},$$

$$\sum_{n > 0} \frac{b_n}{n^s} = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}[\frac{1}{N}]^*, n > 0} \frac{b_n}{n^s} \right) \cdot \prod_{l \nmid N} \frac{1}{(1 - \beta_{l,1} l^{-s})(1 - \beta_{l,2} l^{-s})}, \quad \text{avec } \beta_{l,1} \beta_{l,2} = \chi_2(l) l^{k-j-1}.$$

Soient $D(f, g, s)$ la série de Dirichlet définie par

$$D(f, g, s) = L(\bar{\chi}_1 \chi_2, j + 2(s - k + 1)) \cdot \sum_{n>0} \frac{\bar{a}_n b_n}{n^s}$$

et la série d'Eisenstein non-holomorphe de poids j de niveau $\Gamma(N)$ définie par

$$E_s(\tau) = \sum_{c \equiv d-1 \equiv 0 [N]} \frac{1}{(c\tau + d)^j} \left(\frac{\text{Im } \tau}{|c\tau + d|^2} \right)^{s+1-k}.$$

Si $\text{Re}(s) \gg 0$, le produit gE_s est une forme modulaire *quasi-holomorphe* au sens de Shimura. On note le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des formes modulaires quasi-holomorphe de poids k pour $\Gamma(N)$ par $\mathcal{M}_k^{nl}(\Gamma(N))$ et son sous-espace des formes cuspidales par $S_k^{nl}(\Gamma(N))$. Il existe un produit scalaire de Petersson :

$$\langle, \rangle_N : S_k^{nl}(\Gamma(N)) \times \mathcal{M}_k^{nl}(\Gamma(N)) \rightarrow \mathbb{C},$$

donné par la formule :

$$\langle f, g \rangle_N := \frac{1}{[\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)]} \int_{\Gamma(N) \backslash \mathcal{H}} \bar{f} g y^k \frac{dx dy}{y^2}.$$

Proposition 6.2. [18, proposition 3.4, corollaire 3.5] *Sous les hypothèse ci-dessus, on a :*

$$(7) \quad D(f, g, s) = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}[\frac{1}{N}]^*} \frac{\bar{a}_n b_n}{n^s} \right) \cdot \prod_{l|N} \frac{1}{\left(1 - \frac{\bar{\alpha}_{l,1}\beta_{l,1}}{l^s}\right) \left(1 - \frac{\bar{\alpha}_{l,1}\beta_{l,2}}{l^s}\right) \left(1 - \frac{\bar{\alpha}_{l,2}\beta_{l,1}}{l^s}\right) \left(1 - \frac{\bar{\alpha}_{l,2}\beta_{l,2}}{l^s}\right)},$$

$$(8) \quad \frac{\Gamma(s)}{(4\pi)^s} D(f, g, s) = \frac{[\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)]}{N} \langle f, gE_s \rangle_N.$$

En conséquence, on a

$$(9) \quad \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1}} \cdot \frac{\Gamma(j)}{(-2i\pi)^j} \cdot D(f, g, k-1) = \frac{[\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)]}{N^{j+1}} \langle f, gE_{0, \frac{1}{N}}^{(j)} \rangle_N.$$

Démonstration. La formule (7) est exactement le résultat du lemme de Rankin ([51, lemma 1]), qui se démontre facteur d'Euler par facteur d'Euler. La démonstration pour la formule (8) se trouve en détail dans [18, proposition 3.4].

On ne démontre que la formule (9), qui se déduit par le calcul ci-dessous :

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1}} \cdot \frac{\Gamma(j)}{(-2i\pi)^j} \cdot D(f, g, k-1) = \frac{\Gamma(j)}{(-2i\pi)^j} \frac{[\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)]}{N} \langle f, gE_{k-1} \rangle_N \\ &= \frac{\Gamma(j)}{(-2i\pi)^j} \cdot \frac{1}{N} \int_{\Gamma(N) \backslash \mathcal{H}} \bar{f} g \sum_{\substack{c \equiv d-1 \equiv 0 \\ \text{mod } [N]}} \frac{1}{(cz + d)^j} (\text{Im } z)^k \frac{dx dy}{y^2} \\ &= \frac{\Gamma(j)}{(-2i\pi)^j} \cdot \frac{1}{N^{j+1}} \int_{\Gamma(N) \backslash \mathcal{H}} \bar{f} g \sum_{w \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}z} \frac{1}{(w + \frac{1}{N})^j} (\text{Im } z)^k \frac{dx dy}{y^2} \\ &= \frac{[\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)]}{N^{j+1}} \langle f, gE_{0, \frac{1}{N}}^{(j)} \rangle_N. \end{aligned}$$

□

Remarque 6.3. La définition de la séries d'Eisenstein E_s dépend du choix de niveau N , et donc le produit scalaire $\langle f, gE_s \rangle_N$, pour f, g fixées, en dépend. Par contre, la convolution de Rankin $D(f, g, k-1)$ ne dépend pas du choix de niveau N .

6.2.2 Périodes et algébricité de valeurs spéciales

Soit χ_1 est un caractère de Dirichlet modulo M_1 (pas nécessaire primitif). Choisissons χ_2 un caractère de Dirichlet de conducteur M_2 tel que $\chi_1\chi_2(-1) = (-1)^{k-j}$. On pose

$$F_{\chi_1, \chi_2}^{(k-j)} = \frac{1}{2G(\chi_2)} \sum_{a=1, (a,p)=1}^{M_1} \sum_{b=1}^{M_2} \chi_1(a)\chi_2(b) F_{\frac{a}{M_1}, \frac{b}{M_2}}^{(k-j)},$$

où $G(\chi_2) = \sum_{b=1}^{M_2} \chi_2(b) e^{2i\pi \frac{b}{M_2}}$ est la somme de Gauss associée à χ_2 .

Lemme 6.4. (1) Soit $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ avec $b \equiv 0 \pmod{M_1}$, $c \equiv 0 \pmod{M_2}$ et $p \mid bc$. Alors l'action de γ sur $F_{\chi_1, \chi_2}^{(k-j)}$ est donnée par la formule

$$(F_{\chi_1, \chi_2}^{(k-j)})|_{k-j} \gamma = \chi_1 \chi_2^{-1}(d) F_{\chi_1, \chi_2}^{(k-j)}.$$

(2) Le q -développement de $F_{\chi_1, \chi_2}^{(k-j)}$ est donné par :

$$\sum_{n \in \mathbb{Q}_+^*} \frac{c_n}{n^s} = M_1^{s-(k-j)+1} (1 - \chi_1(p) p^{-s+k-j-1}) L(\chi_1, s - (k-j) + 1) \cdot L(\chi_2^{-1}, s).$$

Démonstration. (1) Pour tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$, par la formule (5), on a :

$$(F_{\chi_1, \chi_2}^{(k-j)})|_{k-j} \gamma = \frac{1}{2G(\chi_2)} \sum_{a_0=1, (a_0,p)=1}^{M_1} \sum_{b_0=1}^{M_2} \chi_1(a_0) \chi_2(b_0) F_{a \frac{a_0}{M_1} + c \frac{b_0}{M_2}, b \frac{a_0}{M_1} + d \frac{b_0}{M_2}}^{(k-j)}.$$

Si $b \equiv 0 \pmod{M_1}$ et $c \equiv 0 \pmod{M_2}$, on a $F_{a \frac{a_0}{M_1} + c \frac{b_0}{M_2}, b \frac{a_0}{M_1} + d \frac{b_0}{M_2}}^{(k-j)} = F_{\frac{aa_0}{M_1}, \frac{db_0}{M_2}}^{(k-j)}$. Par ailleurs on a $(a, p) = 1$ car $p \mid bc$. On en déduit que

$$(F_{\chi_1, \chi_2}^{(k-j)})|_{k-j} \gamma = \frac{1}{2G(\chi_2)} \sum_{a_0=1, (a_0,p)=1}^{M_1} \sum_{b_0=1}^{M_2} \chi_1(aa_0) \chi_2(db_0) \chi_1 \chi_2^{-1}(d) F_{\frac{aa_0}{M_1}, \frac{db_0}{M_2}}^{(k-j)} = \chi_1 \chi_2^{-1}(d) F_{\chi_1, \chi_2}^{(k-j)},$$

où la première égalité vient de la relation $\chi_i(\det \gamma) = \chi_i(ad) = 1$, pour $i = 1, 2$.

(2) Rappelons que la série de Dirichlet formelle associée à $F_{\frac{a}{M_1}, \frac{b}{M_2}}^{(k-j)}$ est

$$\zeta\left(\frac{a}{M_1}, s - (k-j) + 1\right) \zeta^*\left(\frac{b}{M_2}, s\right) + (-1)^{k-j} \zeta\left(-\frac{a}{M_1}, s - (k-j) + 1\right) \zeta^*\left(-\frac{b}{M_2}, s\right).$$

Par ailleurs, on a $L(\chi_1, s) = \sum_{n \in \mathbb{N}, n > 0} \frac{\chi_1(n)}{n^s} = M_1^{-s} \sum_{a=1}^{M_1} \chi_1(a) \zeta\left(\frac{a}{M_1}, s\right)$. On en tire que

$$\sum_{a=1, (a,p)=1}^{M_1} \chi_1(a) \zeta\left(\frac{a}{M_1}, s\right) = M_1^s (1 - \chi_1(p) p^{-s}) L(\chi_1, s).$$

Si $\sum_{n \in \mathbb{Q}_+^*} c_n q^n$ est le q -développement de $F_{\chi_1, \chi_2}^{(k-j)}$, on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{Q}_+^*} \frac{c_n}{n^s} = M_1^{s-(k-j)+1} (1 - \chi_1(p) p^{-s+k-j-1}) \frac{L(\chi_1, s - (k-j) + 1)}{2G(\chi_2)} \cdot A,$$

où $A = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} \sum_{b=1}^N \chi_2(b) e^{\frac{2i\pi bn}{N}} + \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} \sum_{b=1}^{M_2} \chi_2(-b) e^{\frac{-2i\pi bn}{M_2}}$. On conclut la proposition de la relation $\sum_{b=1}^{M_2} \chi_2(b) e^{\frac{2i\pi bn}{M_2}} = \chi_2^{-1}(n) G(\chi_2)$. $\square$

Soient χ_1 un caractère de Dirichlet modulo M et χ_2 un caractère de Dirichlet de conducteur N tels que

$$\chi_1 \chi_2(-1) = (-1)^{k-j} \text{ et } L(f_\alpha^*, \chi_2^{-1}, k-1) \neq 0.$$

Si H est un multiple de N , p et M , on pose

$$F_{\chi_1, \chi_2, H}^{(k-j)} = \frac{1}{G(\chi_2)} \sum_{a=1, (a,p)=1}^H \sum_{b=1}^H \chi_1(a) \chi_2(b) F_{\frac{a}{H}, \frac{b}{H}}^{(k-j)}.$$

Proposition 6.5. *Soient $f = \sum_{n \geq 1} a_n q^n \in S_k(\Gamma_0(N), \epsilon)$, χ_1, χ_2 et H ci-dessus. Si $1 \leq j \leq k-1$, alors,*

$$\begin{aligned} & \frac{[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(H)]}{H^{j+1}} \langle f_\alpha, F_{\chi_1, \chi_2, H}^{(k-j)} E_{0, \frac{1}{H}}^{(j)} \rangle_H \\ &= \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1}} \frac{\Gamma(j)}{(-2i\pi)^j} \frac{H^{2-(k-j)}}{N} A(f_\alpha, \chi_1, \chi_2) (1 - \bar{\alpha} \chi_1(p) p^{-j}) L(f_\alpha^*, \chi_1, j) L(f_\alpha^*, \chi_2^{-1}, k-1), \end{aligned}$$

où $A(f_\alpha, \chi_1, \chi_2) = \sum_{n \in \mathbb{Z}[\frac{1}{N}]^*} \frac{\bar{\alpha}_n B_{Nn}}{n^s}$ avec les B_n sont définis par la série de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n^s} = (1 - \chi_1(p) p^{-s+(k-j)-1}) L(\chi_1, s - (k-j) + 1) L(\chi_2^{-1}, s).$$

Démonstration. De la formule (9), on a

$$\frac{[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(H)]}{H^{j+1}} \langle f_\alpha, F_{\chi_1, \chi_2, H}^{(k-j)} E_{0, \frac{1}{H}}^{(j)} \rangle_H = \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1}} \frac{\Gamma(j)}{(-2i\pi)^j} D(f_\alpha, F_{\chi_1, \chi_2, H}^{(k-j)}, k-1);$$

on se ramène donc à calculer la série de Dirichlet associée à $F_{\chi_1, \chi_2, H}^{(k-j)}$. Par la relation de distribution de $F_{\alpha, \beta}^{(k)}$ (cf. [54, lemme 2.6]), on a

$$F_{\chi_1, \chi_2, H}^{(k-j)} = \frac{H}{N} \frac{1}{G(\chi_2)} \sum_{a=1, (a,p)=1}^H \sum_{b=1}^N \chi_1(a) \chi_2(b) F_{\frac{a}{H}, \frac{b}{N}}^{(k-j)} (q^{H/N}).$$

Soit $\sum_{n \in \mathbb{Q}_+} \frac{A_n}{n^s}$ la série de Dirichlet associée à $F_{\chi_1, \chi_2, H}^{(k-j)}$. On déduit du lemme 6.4 que

$$A_n = \frac{H^{2-(k-j)}}{N} B_{Nn}, \text{ où } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n^s} = (1 - \chi_1(p) p^{-s+(k-j)-1}) L(\chi_1, s - (k-j) + 1) L(\chi_2^{-1}, s).$$

D'autre part, si $f_\alpha = \sum_{n \in \mathbb{Q}_+} b_n q^n$, on a $b_n = 0$ avec $n \notin \mathbb{N}$, $b_n = a_n$ avec $p \nmid n$ et

$$L(f_\alpha, s) = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}[\frac{1}{N}]^*} \frac{a_n}{n^s} \right) \frac{1}{1 - \alpha p^{-s}} \prod_{l \mid Np} \frac{1}{(1 - \alpha_l l^{-s})(1 - \beta_l l^{-s})}, \text{ avec } \alpha_l \beta_l = \chi(l) l^{k-1}.$$

Un calcul direct, en utilisant la méthode de Rankin, montre que

$$\begin{aligned} & D(f_\alpha, F_{\chi_1, \chi_2, H}^{(k-j)}, s) \\ &= \frac{H^{2-(k-j)}}{N} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}[\frac{1}{N}]^*} \frac{\overline{a_n} B_{Nn}}{n^s} \right) (1 - \bar{\alpha} \chi_1(p) p^{-s+(k-j)-1}) L(f_\alpha^*, \chi_1, s - (k-j) + 1) L(f_\alpha^*, \chi_2^{-1}, s). \end{aligned}$$

On conclut la démonstration en prenant $s = k - 1$. $\square$

On note $\langle, \rangle_{\Gamma(N;p)}$ le produit scalaire de Petersson pour le groupe $\Gamma(N;p)$. Il est bien connu ([45], [52]) que les nombres

$$\frac{L(f_\alpha^*, \chi_1, j) L(f_\alpha^*, \chi_2^{-1}, k-1)}{\pi^{k-1+j} \langle f_\alpha, f_\alpha \rangle_{\Gamma(N;p)}},$$

pour $j \in \mathbb{N}$ et $1 \leq j \leq k-1$, et $\chi_1 \chi_2(-1) = (-1)^{k-j}$, sont algébriques. On pose

$$\tilde{L}_{\chi_2}(f_\alpha^*, \chi_1, j) = \frac{\Gamma(j) \Gamma(k-1) L(f_\alpha^*, \chi_1, j) L(f_\alpha^*, \chi_2^{-1}, k-1)}{\pi^{k-1+j} [\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N;p)] \langle f_\alpha, f_\alpha \rangle_{\Gamma(N;p)}},$$

qui dépend du choix de χ_2 .

6.3 Raffinement du système d'Euler de Kato

Dans ce paragraphe, on effectue la projection du système d'Euler de Kato sur une forme modulaire raffinée f_α en utilisant la méthode de Rankin-Selberg et on obtient un système d'Euler de Kato raffiné associé à f_α . De plus, on donne une caractérisation de ce système d'Euler de Kato raffiné via l'exponentielle duale de Bloch-Kato (cf. théorème 6.7).

6.3.1 Des fonctions localement constantes

Si A, M_1, M_2, N sont des entiers ≥ 1 , on définit le sous-groupe $\hat{\Gamma}_{A(M_1), N(M_2)}$ comme l'intersection de $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ avec l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathbf{M}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ vérifiant $a-1 \in A\hat{\mathbb{Z}}$, $b \in AM_1\hat{\mathbb{Z}}$, $c \in NM_2\hat{\mathbb{Z}}$, $d-1 \in N\hat{\mathbb{Z}}$. En particulier, on note $\hat{\Gamma}_{A,N}$ le groupe $\hat{\Gamma}_{A(M_1), N(M_2)}$ avec $M_1 = M_2 = 1$.

Fixons un caractère de Dirichlet χ de conducteur N avec $(N, p) = 1$. Soit M un multiple de N et p tel que $\mathcal{P}(M) = \mathcal{P}(N) \cup \{p\}$, où $\mathcal{P}(N)$ désigne l'ensemble des facteurs premiers de N . Soient a, b deux entiers tels que $1 \leq a \leq M$, $(a, p) = 1$ et $1 \leq b \leq M$. On pose

$$A_{a,b,M} = \{g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\hat{\mathbb{Z}})^{(p)} : \beta - b \equiv \alpha - a \equiv \delta \equiv \gamma - 1 \equiv 0 \pmod{M}\},$$

et on définit une fonction localement constante

$$\phi_{\chi, M} = \frac{N}{M} \sum_{a=1, (a,p)=1}^M \sum_{b=1}^M \chi(b) 1_{A_{a,b,M}}$$

sur $\mathbf{M}_2(\hat{\mathbb{Z}})^{(p)}$, qui est invariante sous l'action de $\hat{\Gamma}(1(M), M)$ à droite.

Proposition 6.6. *Si M', M sont deux multiples de N et p tels que $\mathcal{P}(M) = \mathcal{P}(M') = \mathcal{P}(N) \cup \{p\}$, alors on a*

$$\mathrm{cor}_{\hat{\Gamma}(1(M), M)}^{\hat{\Gamma}(1(N), Np)} \phi_{\chi, M} = \mathrm{cor}_{\hat{\Gamma}(1(M'), M')}^{\hat{\Gamma}(1(N), Np)} \phi_{\chi, M'}.$$

Démonstration. Il s'agit à montrer que $\mathrm{cor}_{\hat{\Gamma}(1(M), M)}^{\hat{\Gamma}(1(M'), M')} \phi_{\chi, M} = \phi_{\chi, M'}$ pour $M' | M$. Comme $\phi_{\chi, M}$ est stable sous l'action de $\hat{\Gamma}(1(N), M)$, alors $\mathrm{cor}_{\hat{\Gamma}(1(M), M)}^{\hat{\Gamma}(1(M'), M')} \phi_{\chi, M} = \frac{M}{M'} \phi_{\chi, M}$. Posons $m = M/M'$. On note G (resp. H) le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/M)$ tel que

$$\hat{\Gamma}(1(M'), M) \backslash \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}}) \cong G \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/M) \text{ (resp. } \hat{\Gamma}(1(M'), M') \backslash \mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}}) \cong H \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/M)).$$

Comme $\mathcal{P}(M) = \mathcal{P}(M')$, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{Z}/m)^2$, on peut fixer un élément $s_{x, y}$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/M)$ de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ M'v & 1+M'u \end{pmatrix}$ tel que $u \equiv x \pmod{m}$ et $v \equiv y \pmod{m}$. Les $s_{x, y}$ forment un système de représentants de $H \backslash G$. Alors, la fonction localement constante $\frac{M}{M'} \phi_{\chi, M}$ est envoyé sur la fonction localement constante $\sum_{(x, y) \in (\mathbb{Z}/m)^2} \frac{M}{M'} \phi_{\chi, M} * s_{x, y} = \phi_{\chi, M'}$ par l'application de corestriction $\mathrm{cor}_{\hat{\Gamma}(1(M'), M)}^{\hat{\Gamma}(1(M'), M')}$. $\square$

On note $K = \hat{\Gamma}_{1, N} \cap (\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}}^{[p]}) \times \mathbb{I}_0(p))$. On pose $\phi_\chi = \mathrm{cor}_{\hat{\Gamma}(1(M), M)}^K \phi_{\chi, M}$, qui est indépendamment du choix de M par la proposition ci-dessus. On va utiliser cette fonction comme la fonction localement constante commune dans la stratégie de Colmez pour projeter le système d'Euler de Kato à une forme raffinée et sur la courbe de Hecke cuspidale.

6.3.2 Caractérisation du raffinement de système d'Euler de Kato

Si V est une représentation de de Rham de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p(\zeta_M)}$, le cup-produit avec $\log \chi_{\mathrm{cycl}} \in H^0(\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p(\zeta_M)}, \mathbb{Q}_p)$ fournit un isomorphisme

$$H^0(\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p(\zeta_M)}, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\bar{\mathbb{Q}}_p) \otimes V) \cong H^1(\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p(\zeta_M)}, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\bar{\mathbb{Q}}_p) \otimes V),$$

et on définit l'application exponentielle duale de Bloch-Kato $\exp_{\mathbf{BK}}^*$ comme l'inverse de cet isomorphisme.

Rappelons que on a construit une fonction localement constante $\phi_\chi \in \mathrm{LC}(\mathbf{M}_2(\mathbb{Z})^{(p)}, \mathbb{Z})^{\tilde{K}}$. En appliquant la stratégie de Colmez à la donnée $(\phi_\chi, V_{k, j}, z_{\mathrm{Kato}, c, d}(k, j))$ de telle sorte qu'un élément

$$z_{\mathrm{Kato}, \chi}(k, j) \in H^1(\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_0(\hat{\mathbb{Z}}^{(p)}, H^1(\Gamma(N; p), V_{k, j})).$$

On note $z_{\mathrm{Kato}, \chi}(f_\alpha, j)$ la projection de $z_{\mathrm{Kato}, \chi}(k, j)$ sur

$$(H^1(\Gamma(N; p), V_{k, j}) \otimes \mathbb{Q}(f_\alpha))_{\pi_{f_\alpha}} \cong V_{f_\alpha}(1 - j).$$

Théorème 6.7. *Il existe un élément $z_{\mathrm{Kato}, \chi}(f_\alpha)$ de $H^1(\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_0(\hat{\mathbb{Z}}^{(p)}, V_{f_\alpha}))$, tel que, quels que soient $l \in \{0, \dots, k-2\}$ et η un caractère de Dirichlet modulo Np^m vérifiant que $\eta\chi(-1) = (-1)^{k-l-1}$, on ait*

$$\exp_{\mathbf{BK}}^* \left(\int_{\hat{\mathbb{Z}}^{(p)}} \eta(x) x_p^{-l} z_{\mathrm{Kato}, \chi}(f_\alpha) \right) = A_{c, d}(\eta, \chi) A(f_\alpha, \eta, \chi) \frac{(1 - \bar{\alpha}\eta(p)p^{-l-1})}{(-2i)^{l+1}} \tilde{L}_\chi(f_\alpha^*, \eta, l+1) f_\alpha,$$

où $A_{c, d}(\eta, \chi)$ est le facteur $2G(\chi)(c^2 - c^{3-k+l}\eta\chi(\langle c^{-1} \rangle))(d^2 - d^{l+1}\chi(\langle d \rangle) \cdot \iota(\langle d \rangle))$ et $A(f_\alpha, \eta, \chi)$ est le facteur d'Euler aux places l avec $l \mid N$.

Démonstration. La construction de $z_{\text{Kato},\chi}(f_\alpha, j)$, pour $j = 1$, nous fournit un élément dans $H^1(\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_0(\hat{\mathbb{Z}}^{(p)}, V_{f_\alpha}))$, noté par $z_{\text{Kato},\chi}(f_\alpha)$. On montre dans la suite qu'il est l'élément que l'on cherche. Il ne reste qu'à calculer l'image de l'intégrale $\int_{\hat{\mathbb{Z}}^{(p)}} \eta(x) x_p^{-l} z_{\text{Kato},\chi}(f_\alpha)$ sous l'application exponentielle duale de Bloch-Kato. Dans ce cas, Kato [30, §10] (revisité par Colmez [18, §2], Scholl [46] et l'auteur [54]) a construit une autre application exponentielle duale $\exp_{\text{Kato}}^*$ pour calculer cet image. Plus précisément, il a montré que $\exp_{\text{BK}}^* = \exp_{\text{Kato}}^*$ dans ce cas et on a la loi de réciprocité explicite de Kato $\exp_{\text{Kato}}^*(z_{\text{Kato},c,d}(k, j)) = z_{\text{Eis},c,d}(k, j)$ pour $1 \leq j \leq k-1$.

Par construction, il équivaut à calculer l'image de

$$\text{cor}_{\tilde{\Gamma}(1(M), M)}^{\tilde{K}} \int_{\mathbf{M}_2(\hat{\mathbb{Z}})^{(p)}} \eta(\det x) \phi_{\chi, M}(x) z_{\text{Kato},c,d}(k, l+1)$$

sous l'application $\exp_{\text{Kato}}^*$ avec $M = Np^m$ et à calculer sa projection sur la composant correspondant à f_α .

(1) Par la loi de réciprocité explicite de Kato, on a

$$\exp_{\text{Kato}}^*\left(\int \eta(\det x) \phi_{\chi, M}(x) z_{\text{Kato},c,d}(k, l+1)\right) = \sum_{a=1, (a,p)=1}^M \sum_{b=1}^M \frac{N}{M} \eta(a) \chi(b) \frac{1}{l!} M^{k-4-2l} F_{c, \frac{a}{M}, \frac{b}{M}}^{(k-l-1)} E_{d,0, \frac{1}{M}}^{(l+1)}.$$

Ceci implique que, en revenant à la définition de $F_{c,\alpha,\beta}^{(k)}$ et $E_{d,\alpha,\beta}^{(k)}$ (cf. §6.1), l'image de $\int_{\hat{\mathbb{Z}}^{(p)}} \eta(x) z_{\text{Kato},\chi}(k, l+1)$ sous l'application $\exp_{\text{Kato}}^*$ est

$$\text{cor}_{\Gamma(M)}^{\Gamma(N;p)} (A_{c,d}(\eta, \chi) \frac{N}{M} \frac{1}{l!} M^{k-4-2l} F_{\eta,\chi,M}^{(k-l-1)} E_{0, \frac{1}{M}}^{(l+1)}).$$

où $A_{c,d}(\eta, \chi)$ est le facteur $2G(\chi)(c^2 - c^{3-k-l}\eta\chi(\langle c^{-1} \rangle))(d^2 - d^{l+1}\chi(\langle d \rangle)\iota(\langle d \rangle))$ avec $\iota(\langle d \rangle) \in \text{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$.

(2) La projection sur la composant correspondant à f_α nous conduit à calculer le produit scalaire de Petersson de f_α avec le produit de séries d'Eisenstein ci-dessus; on utilise la méthode de Rankin pour ce faire car $\chi\eta(-1) = (-1)^{k-j-1}$. En fait, on déduit de la proposition 6.5 que

$$\begin{aligned} & [\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N; p)] \langle f_\alpha, \exp_{\text{BK}}^* \left(\int_{\hat{\mathbb{Z}}^{(p)}} \eta(x) x_p^{-l} z_{\text{Kato},\chi}(f_\alpha) \right) \rangle_{\Gamma(N;p)} \\ &= \frac{N}{M} A_{c,d}(\eta, \chi) [\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(M)] M^{k-4-2l} \frac{1}{l!} \langle f_\alpha, F_{\eta,\chi,M}^{(k-l-1)} E_{0, \frac{1}{M}}^{(l+1)} \rangle_M \\ &= A_{c,d}(\eta, \chi) A(f_\alpha, \eta, \chi) \frac{(1 - \bar{\alpha}\eta(p)p^{-l-1})}{(-2i\pi)^{l+1}} L(f_\alpha^*, \eta, l+1) \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1}} L(f_\alpha^*, \chi^{-1}, k-1), \end{aligned}$$

où $A(f_\alpha, \eta, \chi)$ est le facteur d'Euler aux places dans $S = \{l \in \mathcal{P}, l \mid N\}$. Ceci implique

$$\begin{aligned} & \frac{\langle f_\alpha, \exp_{\text{BK}}^* (\int_{\hat{\mathbb{Z}}^{(p)}} \eta(x) z_{\text{Kato},\chi}(k, j+1)) \rangle_{\Gamma(N;p)}}{\langle f_\alpha, f_\alpha \rangle_{\Gamma(N;p)}} \\ &= A_{c,d}(\eta, \chi) A(f_\alpha, \eta, \chi) \frac{(1 - \bar{\alpha}\eta(p)p^{-l-1})}{(-2i)^{l+1}} \tilde{L}_\chi(f_\alpha^*, \eta, l+1). \end{aligned}$$

□

6.4 Fonction L p -adique d'une forme raffinée f_α

Dans ce paragraphe, on construit la fonction L p -adique associée à la forme f_α à partir d'un raffinement du système d'Euler de Kato $z_{\text{Kato}, \chi}(f_\alpha)$. La technique que l'on utilise ici est une variante de celle de Colmez [18]. Plus précisément, Colmez utilise la φ -base du φ -module filtré admissible $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V_{f_\alpha})$ pour décomposer un élément de $\mathbf{D}^\dagger(V_{f_\alpha})^{\psi=1}$ dans $\mathbf{D}_{\text{rig}}(V_{f_\alpha}) \otimes \mathcal{R}[\frac{1}{t}]$ et on utilise la théorie de représentation trianguline, dont son comportement bien varie en famille.

La transformée de Fourier

Si $\eta \in \text{LC}_c(\mathbb{Q}_p, \overline{\mathbb{Q}})$ est constante modulo p^m , on définit sa transformée de Fourier $\hat{\eta} \in \text{LC}_c(\mathbb{Q}_p, \overline{\mathbb{Q}})$ par la formule

$$\hat{\eta}(x) = p^{-m} \sum_{y \bmod p^m} \eta(y) e^{-2i\pi xy},$$

où m est un entier arbitraire $\geq \sup(n, -v_p(x))$, $e^{-2i\pi xy}$ est la racine de l'unité d'ordre une puissance de p en utilisant l'isomorphisme $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbb{Z}$.

Si $\eta : \mathbb{Z}_p^* \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ est un caractère de Dirichlet de conducteur p^n , on a

$$\hat{\eta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{G(\eta^{-1})} \eta^{-1}(p^n x) & \text{si } n \geq 1, \\ 1_{\mathbb{Z}_p}(x) - \frac{1}{p} 1_{p^{-1}\mathbb{Z}_p}(x) & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Si $\eta_p \in \text{LC}_c(\mathbb{Q}_p, \overline{\mathbb{Q}})$, si $\eta^{[p]} \in \text{LC}(\hat{\mathbb{Z}}^{[p]}, \overline{\mathbb{Q}})$ et si $\eta \in \text{LC}_c(\mathbb{Q}_p \times \hat{\mathbb{Z}}^{[p]}, \overline{\mathbb{Q}})$ est donnée par la formule $\eta(x) = \eta_p(x_p) \eta^{[p]}(x^{[p]})$, on définit sa p -transformation de Fourier $\mathcal{F}_p(\eta)$ comme l'élément de $\text{LC}_c(\mathbb{Q}_p \times \hat{\mathbb{Z}}^{[p]}, \overline{\mathbb{Q}})$ donné par la formule

$$\mathcal{F}_p \eta(x) = \hat{\eta}(x) \eta^{[p]}(x^{[p]}).$$

On étend $\mathcal{F}_p$ en une application $\overline{\mathbb{Q}}$ -linéaire de $\text{LC}_c(\mathbb{Q}_p \times \mathbb{Z}^{[p]}, \overline{\mathbb{Q}})$ dans lui-même.

Fonction L p -adique d'une forme raffinée f_α

Le (φ, Γ) -module $\mathbf{D}_{\text{rig}}(V_{f_\alpha})$ sur $\mathcal{R}$ admet une triangulation

$$0 \subsetneq \mathcal{R} \otimes \mathbf{D}_{\text{rig}}(V_{f_\alpha})^{\varphi=\alpha, \Gamma=\chi_{\text{cycl}}^{k-1}} \subsetneq \mathbf{D}_{\text{rig}}(V_{f_\alpha}).$$

Le (φ, Γ) -module $\mathcal{R} \otimes \mathbf{D}_{\text{rig}}(V_{f_\alpha})^{\varphi=\alpha, \Gamma=\chi_{\text{cycl}}^{k-1}}$ de rang 1 est isomorphe à $\mathcal{R}(\delta)$ avec $\delta \in \text{Hom}_{\text{cont}}(\mathbb{Q}_p^*, L)$ tel que $\delta(p) = \alpha$ et $\delta|_{\mathbb{Z}_p^*} = \chi_{\text{cycl}}^{k-1}$. On note e_α un générateur de $\mathcal{R}(\delta)$. Le produit extérieur $\wedge \mathbf{D}_{\text{rig}}(V_{f_\alpha})$ est un (φ, Γ) -module étale de rang 1 sur $\mathcal{R}_L$, qui est engendré par un élément e vérifiant $\varphi(e) = e$ et $\gamma(e) = \chi_{\text{cycl}}^{k-1}(\gamma)e$ pour $\gamma \in \Gamma$.

Proposition 6.8. *Soit $v_p(\alpha) > 0$. On note $\mathbf{D} = \mathbf{D}_{\text{rig}}(V_{f_\alpha})$. Si $z \in \mathbf{D}^\dagger(V_{f_\alpha})^{\psi=1}$ et si $z \wedge e_\alpha = w_\alpha e \in \wedge \mathbf{D}$ avec $w_\alpha \in \mathcal{R}$, alors il existe une distribution μ_α d'ordre $v_p(\alpha)$ sur $\mathbb{Z}_p$ à valeurs dans L vérifiant $\psi(\mu_\alpha) = \alpha^{-1} \mu_\alpha$ telle que l'on ait $w_\alpha = \int_{\mathbb{Z}_p} (1+T)^x \mu_\alpha$.*

Démonstration. On déduit de la condition $z \in \mathbf{D}^\dagger(V_{f_\alpha})^{\psi=1}$ que $\psi(w_\alpha) = \alpha^{-1}w_\alpha$. L'existence d'une distribution vient de ce qu'une solution dans $\mathcal{R}_L$ d'une équation de type $\psi(x) - \alpha^{-1}x \in \mathcal{R}_L^+$ où $\alpha \in L$ vérifie $v_p(\alpha) > 0$, appartient à $\mathcal{R}_L^+$, et donc est la transformation d'Amice d'une distribution. On déduit de [9, proposition V.3.2] ou [18, proposition 4.10] que w_α est d'ordre $v_p(\alpha)$. $\square$

Soit V une représentation p -adique de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ de dimension finie. On a le résultat suivant, dû à Fontaine (cf. [18, théorème 4.8]), qui décrit la cohomologie d'Iwasawa en utilisant la théorie de (φ, Γ) -module.

Proposition 6.9. *Soit V une représentation p -adique de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ de dimension finie. On a un isomorphisme :*

$$\text{Exp}^* : H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, V) \cong \mathbf{D}^\dagger(V)^{\psi=1},$$

où $\mathbf{D}^\dagger(V)$ est le (φ, Γ) -module surconvergent associé à V et ψ est l'inverse à gauche de φ .

Par la théorème de comparaison, on a $f_\alpha \in \mathbf{D}_{\text{cris}}(V_{f_\alpha})$. Comme on est en poids de Hodge-Tate positifs, on a $\mathbf{D}_{\text{rig}}(V_{f_\alpha}) \subset \mathbf{D}_{\text{cris}}(V_{f_\alpha}) \otimes \mathcal{R}$. D'autre part, l'isomorphisme d'Eichler-Shimura montre que f_α est de poids 0. On en déduit que $f_\alpha \in \mathbf{D}_{\text{rig}}(V_{f_\alpha})$ et $f_\alpha \wedge e_\alpha \neq 0$.

Théorème 6.10. *Si $v_p(\alpha) > 0$, il existe une distribution $\mu_{f_\alpha, \chi}$ d'ordre $v_p(\alpha)$ sur $\mathbb{Z}_p$ vérifiant*

- (1) $\text{Exp}^*(z_{\text{Kato}, \chi}(f_\alpha)) \wedge e_\alpha = (\int_{\mathbb{Z}_p} (1+T)^x \mu_{f_\alpha, \chi}) f_\alpha \wedge e_\alpha$,
- (2) *si η un caractère de Dirichlet modulo Np^m tel que $\eta\chi(-1) = (-1)^{k-l-1}$, on a*

$$\int_{\mathbb{Z}(p)} \eta(x) x^{-l} \mu_{f_\alpha, \chi} = A_{c,d}(\eta, \chi) A(f_\alpha, \eta, \chi) \frac{G(\eta)}{\alpha^m \eta(-1)} p^{lm} \frac{(1 - \bar{\alpha}\eta(p)p^{-l-1})}{(-2i)^{l+1}} \tilde{L}_\chi(f_\alpha^*, \eta^{-1}, l+1),$$

où les facteurs $A_{c,d}(\eta, \chi)$ et $A(f_\alpha, \eta, \chi)$ sont définis dans le théorème 6.7.

Démonstration. On déduit l'existence de la distribution vérifiant la condition (1) de la proposition 6.8. Il ne reste que à vérifier la deuxième condition. On donne dans la suite un calcul pour $l = 0$. Les autres valeurs spéciales se déduisent de la torsion à la Soulé.

(1) On applique la loi de réciprocité de Colmez [18, théorème 4.9] à la mesure $z_{\text{Kato}, \chi}(f_\alpha)$, on obtient

$$p^{-m} \varphi^{-m} (\text{Exp}^*(z_{\text{Kato}, \chi}(f_\alpha)) \wedge e_\alpha) = \alpha^{-m} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} \exp_{\mathbf{BK}}^* \left(\int_{1+p^m \mathbb{Z}_p} x^l z_{\text{Kato}, \chi}(f_\alpha) \right) \right) \wedge e_\alpha.$$

Si on pose η un caractère de Dirichlet de conducteur p^m tel que $\eta\chi(-1) = (-1)^{k-1}$, alors, de la caractérisation de $z_{\text{Kato}, \chi}(f_\alpha)$ (cf. théorème 6.7), on obtient

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_m} \eta(\chi_{\text{cycl}}(\gamma)) (p^{-m} \varphi^{-m} (\text{Exp}^*(z_{\text{Kato}, \chi}(f_\alpha))) * \gamma \right) \wedge e_\alpha \\ &= \left(\sum_{a \in \mathbb{Z}_p^*/(1+p^n \mathbb{Z}_p)} \eta(a) \sum_{l \in \mathbb{Z}} \exp_{\text{Kato}}^* \left(\int_{1+p^n \mathbb{Z}_p} (ax)^{-l} z_{\text{Kato}, \chi}(f_\alpha) \right) \right) \wedge e_\alpha \\ &= \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} \exp_{\text{Kato}}^* \left(\int_{\mathbb{Z}_p^*} \eta(x) x^{-l} z_{\text{Kato}, \chi}(f_\alpha) \right) \right) \wedge e_\alpha \\ &= \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} A_{c,d}(\eta, \chi) A(f_\alpha, \eta, \chi) \frac{(1 - \bar{\alpha}\eta(p)p^{-l-1})}{(-2i)^{l+1}} \tilde{L}_\chi(f_\alpha^*, \eta, l+1) f_\alpha \cdot t^l \right) \wedge e_\alpha. \end{aligned}$$

On constate que le terme constant de cette série en t est

$$A_{c,d}(\eta, \chi)A(f_\alpha, \eta, \chi) \frac{(1 - \bar{\alpha}\eta(p)p^{-1})}{-2i} \tilde{L}_\chi(f_\alpha^*, \eta, 1) f_\alpha \wedge e_\alpha.$$

(2) En utilisant la définition de $\mu_{f_\alpha, \chi}$, on obtient

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_m} \eta(\chi_{\text{cycl}}(\gamma)) (p^{-m} \varphi^{-m} (\text{Exp}^*(z_{\text{Kato}, \chi}(f_\alpha))) * \gamma \right) \wedge e_\alpha \\ (10) \quad &= \sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_m} \eta(\chi_{\text{cycl}}(\gamma)) (p^{-m} \varphi^{-m} \left(\frac{\alpha^m}{\chi_{\text{cycl}}^{k-1}(\gamma)} \text{Exp}^*(z_{\text{Kato}, \chi}(f_\alpha)) \wedge e_\alpha \right) * \gamma \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_m} \eta(\chi_{\text{cycl}}(\gamma)) p^{-m} \varphi^{-m} \left(\alpha^m \left(\int_{\mathbb{Z}_p} (1+T)^x \mu_{f_\alpha, \chi} * \gamma \right) f_\alpha \wedge e_\alpha \right). \end{aligned}$$

On déduit de la formule $\varphi^{-m}(\int_{\mathbb{Z}_p} (1+T)^x \mu_{f_\alpha, \chi}) = (\int_{\mathbb{Z}_p} \zeta_p^x e^{tx/p^m} \mu_{f_\alpha, \chi})$ que

$$\begin{aligned} (10) &= \sum_{a \in \mathbb{Z}_p^*/1+p^m\mathbb{Z}_p} \eta(a) p^{-m} \alpha^m \int_{\mathbb{Z}_p} \zeta_p^{ax} e^{\frac{atx}{p^m}} \mu_{f_\alpha, \chi} f_\alpha \wedge e_\alpha \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{a \in \mathbb{Z}_p^*/1+p^m\mathbb{Z}_p} \eta(a) p^{-m} \alpha^m \int_{\mathbb{Z}_p} \frac{1}{l!} \zeta_p^{ax} \left(\frac{atx}{p^m} \right)^l \mu_{f_\alpha, \chi} f_\alpha \wedge e_\alpha \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \alpha^m \int_{\mathbb{Z}_p} \frac{1}{l!} (p^{-m} \sum_{a \in \mathbb{Z}_p^*/1+p^m\mathbb{Z}_p} \eta(a) \zeta_p^{ax} \left(\frac{atx}{p^m} \right)^l) \mu_{f_\alpha, \chi} f_\alpha \wedge e_\alpha. \end{aligned}$$

Comme $p^{-m} \sum_{a \in \mathbb{Z}_p^*/1+p^m\mathbb{Z}_p} \eta(a) \zeta_p^{ax} = \hat{\eta}(-\frac{x}{p^m}) = \frac{1}{G(\eta^{-1})} \eta^{-1}(-x)$, on en déduit que le terme constant est

$$\alpha^m \int_{\mathbb{Z}_p} \frac{1}{G(\eta^{-1})} \eta^{-1}(-x) \mu_{f_\alpha, \chi} f_\alpha \wedge e_\alpha.$$

On conclut la formule suivant pour $l = 0$, en comparant les termes constants dans les deux développements en t ci-dessus :

$$\alpha^m \int_{\mathbb{Z}_p} \frac{1}{G(\eta^{-1})} \eta^{-1}(-x) \mu_{f_\alpha, \chi} = A_{c,d}(\eta, \chi) A(f_\alpha, \eta, \chi) \frac{(1 - \bar{\alpha}\eta(p)p^{-1})}{(-2i)} \tilde{L}_\chi(f_\alpha^*, \eta, 1).$$

Ceci implique que

$$\int_{\hat{\mathbb{Z}}(p)} \eta^{-1}(x) \mu_{f_\alpha, \chi} = A_{c,d}(\eta, \chi) A(f_\alpha, \eta, \chi) \frac{G(\eta^{-1})}{\alpha^m \eta^{-1}(-1)} \frac{(1 - \bar{\alpha}\eta(p)p^{-1})}{-2i} \tilde{L}_\chi(f_\alpha^*, \eta, 1).$$

□

6.5 Fonction L p -adique en deux variables

Soit S une $\mathbb{Q}_p$ -algèbre affinoïde. On définit les anneaux $\mathcal{E}_S^+, \mathcal{R}_S^+$ par les formules :

$$\mathcal{E}_S^+ = \mathcal{E}^+ \hat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} S \text{ et } \mathcal{R}_S^+ = \mathcal{R}^+ \hat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} S.$$

Si $\Gamma = \text{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p)$, on définit de la même manière

$$\mathcal{E}_S^+(\Gamma) = \mathcal{E}^+(\Gamma) \hat{\otimes} S \text{ et } \mathcal{R}_S^+(\Gamma) = \mathcal{R}^+(\Gamma) \hat{\otimes} S.$$

Soit $\mathcal{X}$ un espace rigide analytique réduit et séparé. Soit $\mathcal{V}$ une famille de représentations p -adiques sur $\mathcal{X}$. Supposons que $\mathcal{V}$ admet une structure entière, c'est à dire, pour tout $X = \text{Spm } S$ ouvert affinoïde de $\mathcal{X}$, la S -représentation $\mathcal{V}_S$ contient un sous S^+ -module $\mathcal{V}_S^+$ invariant sous l'action de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$, tel que $\mathcal{V}_S^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} = \mathcal{V}_S$, où S^+ la $\mathbb{Z}_p$ -algèbre des éléments $s \in S$ de norme ≤ 1 pour la norme de Banach sur S .

On note $H_{\text{Iw}}^i(\mathbb{Q}_p, \mathcal{V})$ le faisceau² sur $\mathcal{X}$ défini comme suit : pour tout $X = \text{Spm } S$ ouvert affinoïde de $\mathcal{X}$, on pose

$$H_{\text{Iw}}^i(\mathbb{Q}_p, \mathcal{V})(X) = (\varprojlim_n H^i(\mathcal{G}_{K_n}, \mathcal{V}_S^+)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p.$$

Fixons un ouvert affinoïde $X = \text{Spm } S$. Le module $H_{\text{Iw}}^i(\mathbb{Q}_p, \mathcal{V})(X)$ est un $\mathcal{E}_S^+(\Gamma)$ -module.

Le résultat suivant, dû à Kedlaya-Pottharst-Xiao (cf. [32, corollary 4.4.10]), est une version en famille de l'application exponentielle duale Exp^* de Fontaine :

Proposition 6.11. *Soit V_S une S -représentation localement libre de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p}$ muni d'une structure entière. Alors on a un isomorphisme de $\mathcal{R}_S^+(\Gamma)$ -modules :*

$$\text{Exp}_S^* : H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, V_S) \hat{\otimes}_{\mathcal{E}^+(\Gamma)} \mathcal{R}^+(\Gamma) \cong \mathbf{D}_{\text{BC,rig}}(V_S)^{\psi=1},$$

où ψ est l'inverse à gauche de φ . Cet isomorphisme est compatible avec le changement de base. En particulier, si $x \in X = \text{Spm } S$, on a

$$\text{Ev}_x(\text{Exp}_S^*) = \text{Exp}^* : H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, V_x) \otimes_{\Lambda(\Gamma)} \mathcal{R}^+(\Gamma) \cong \mathbf{D}_{\text{rig}}(V_x)^{\psi=1}.$$

Rappelons que $(\mathcal{V}', Z, \tilde{\alpha}, \kappa_1 = 0, \kappa_2 = \kappa)$ est une famille faiblement raffinée de représentations p -adiques sur $\tilde{\mathfrak{C}}^0$ de poids de Hodge-Tate $0, \kappa$, dont $\kappa(z)$ est le plus grand poids de V_z , pour tout $z \in Z$. D'après le théorème 2.11, $\mathbf{D}_{\text{BC,rig}}(\mathcal{V}')$ admet un sous-faisceau cohérent localement libre de rang 1

$$\mathbf{D}_{\tilde{\alpha}} := \mathcal{R} \hat{\otimes} \mathbf{D}_{\text{BC,rig}}(\mathcal{V}')^{\varphi=\tilde{\alpha}, \Gamma=\kappa \circ \chi_{\text{cycl}}}.$$

On note $e_{\tilde{\alpha}}$ la base de $\mathbf{D}_{\tilde{\alpha}}$ comme $\mathcal{R}_{\tilde{\mathfrak{C}}^0}$ -module et on a

$$\varphi(e_{\tilde{\alpha}}) = \tilde{\alpha} e_{\tilde{\alpha}} \text{ et } \gamma(e_{\tilde{\alpha}}) = \kappa \circ \chi_{\text{cycl}}(\gamma).$$

D'autre part, le $\mathcal{R}_{\tilde{\mathfrak{C}}^0}$ -module $\wedge^2 \mathbf{D}_{\text{BC,rig}}(\mathcal{V}')$ est localement libre de rang 1, qui admet une base e telle que

$$\varphi(e) = e \text{ et } \gamma(e) = \kappa \circ \chi_{\text{cycl}}(\gamma).$$

Proposition 6.12. *Soit $|\tilde{\alpha}|_p \leq 1$ et $\tilde{\alpha} \neq 1$. Soit z une section globale de $\mathbf{D}_{\text{BC,rig}}(\mathcal{V}')^{\psi=1}$. Alors il existe une section globale w_F de $\mathcal{R}_{\tilde{\mathfrak{C}}^0}^+$ telle que $z \wedge e_{\tilde{\alpha}} = w_{\tilde{\alpha}} e$, qui est la transformée d'Amice d'une famille de distributions sur $\tilde{\mathfrak{C}}^0$.*

2. On déduit que ce préfaisceau est un faisceau du théorème 6.11.

Démonstration. On a $\psi(z \wedge e_{\tilde{\alpha}}) = z \wedge \psi(e_{\tilde{\alpha}}) = \tilde{\alpha}^{-1}z \wedge e_{\tilde{\alpha}} = \tilde{\alpha}^{-1}w_{\tilde{\alpha}}e$. D'autre part, on a $\psi(w_{\tilde{\alpha}}e) = \psi(w_{\tilde{\alpha}})e$. On en déduit que $\psi(w_{\tilde{\alpha}}) = \tilde{\alpha}^{-1}w_{\tilde{\alpha}}$. L'existence de la famille de distributions vient de ce qu'une solution dans $\mathcal{R}_{\tilde{\mathfrak{C}}^0}$ d'une équation du type $\psi(x) - \alpha x \in \mathcal{R}_{\tilde{\mathfrak{C}}^0}^+$, où $\alpha \in \mathcal{O}(\tilde{\mathfrak{C}}^0)$ vérifiant $|\alpha|_p \geq 1$ et $\alpha \neq 1$, appartient à $\mathcal{R}_{\tilde{\mathfrak{C}}^0}^+$, et donc est la transformée d'Amice d'une famille de distributions. $\square$

En particulier, cette proposition s'applique à la famille de systèmes d'Euler de Kato $z_{\text{Kato},\phi}(\tilde{\mathfrak{C}}^0)$, image de $z_{\text{Kato},\phi}(\mathfrak{C}^0)$ sous la transformée stricte par rapport à l'application de normalisation. On note $\mu_{\tilde{\mathfrak{C}}^0,\chi}$ la famille de distributions telle que

$$\text{Exp}_{\tilde{\mathfrak{C}}^0}^*(z_{\text{Kato},\chi}(\tilde{\mathfrak{C}}^0)) \wedge e_{\tilde{\alpha}} = \int_{\mathbb{Z}_p} (1+T)^z \mu_{\tilde{\mathfrak{C}}^0,\chi} e.$$

On note Z le sous-ensemble des points classiques non-critiques de $\mathfrak{C}^0$.

Théorème 6.13. *Si $f \in Z$, il existe une constante non-nulle $C(f)$ dépendant f , telle que, on ait*

$$\text{Ev}_f(\mu_{\tilde{\mathfrak{C}}^0,\chi}) = C(f)\mu_{f,\chi}, \text{ où } \text{Ev}_f \text{ est l'application d'évaluation en } f.$$

Démonstration. Si $f_\alpha \in Z$ est une forme de poids k , on a $f \wedge e_\alpha$ est une base du (φ, Γ) -module $\wedge \mathbf{D}_{\text{rig}}(V_\alpha)$. On a donc $\text{Ev}_{f_\alpha}(e) = C(f_\alpha)f_\alpha \wedge e_\alpha$, où $C(f_\alpha) \in \bar{\mathbb{Q}}_p^*$ est une constante dépendante de la forme f_α . On déduit des définitions de $\mu_{\tilde{\mathfrak{C}}^0,\chi}$ et $\mu_{f_\alpha,\chi}$ que $\text{Ev}_{f_\alpha}(\mu_{\tilde{\mathfrak{C}}^0,\chi}) = C(f_\alpha)\mu_{f_\alpha,\chi}$. $\square$

Enfin, on définit la fonction L p -adique en deux variables

$$L_{p,\chi}(s, \eta, f) = \mathbf{E}\mathbf{v}_f\left(\int_{\hat{\mathbb{Z}}(p)} \eta(z) < z_p >^{-s} \mu_{\tilde{\mathfrak{C}}^0,\chi}\right).$$

Remarque 6.14. Soit $U \subset \tilde{\mathfrak{C}}^0$ un voisinage d'un point classique non-critique f_α où la fonction L p -adique en deux variables de Panchishkin $L_{\text{Pan}}(s, \eta, f)$ est définie. Il existe un élément F dans le corps des fractions de $\mathcal{O}(U) \times \Lambda$ sans zéro ni pôle sur

$$\Sigma = \{(f, l) : f \in U \cap Z \text{ et } 0 \leq l \leq k-1 \text{ tels que } \eta\chi(-1) = (-1)^{k-l-1} \text{ où } k \text{ est le poids de } f\},$$

telles que, pour tout point $(f, l) \in \Sigma$, on a $L_{p,\chi}(l, \eta, f) = \text{Ev}_{f,l}(F)L_{\text{Pan}}(l, \eta, f)$ avec $\text{Ev}_{f,l}$ l'application d'évaluation en (f, l) .

Références

- [1] Y. AMICE ; J. VÉLU : Distributions p -adiques associées aux séries de Hecke. (French) Journées Arithmétiques de Bordeaux (Conf., Univ. Bordeaux, Bordeaux, 1974), pp. 119–131. Asterisque, Nos. 24-25, Soc. Math. France, Paris, 1975.
- [2] F. ANDREATTA ; A. IOVITA ; G. STEVENS : overconvergent Eichler-Shimura isomorphisms. à paraître dans Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu
- [3] F. ANDREATTA ; A. IOVITA ; G. STEVENS : Overconvergent modular sheaves and modular forms for $\text{GL}(2, \mathbb{F})$. à paraître dans the Israel Journal of Mathematics
- [4] A. ASH ; G. STEVENS : p -adic deformations of arithmetic cohomology. preprint

- [5] A. ASH ; G. STEVENS : Modular forms in characteristic l and special values of their L-functions. Duke Math. J. **53**(3) 849-868 (1986)
- [6] J. BELLAÏCHE : Critical p -adic L-functions. Invent. Math. 189 (2012), no. 1, 1–60.
- [7] J. BELLAÏCHE, G. CHENEVIER : Families of Galois representations and Selmer groups. Astérisque **324**, Soc. Math. France (2009)
- [8] L. BERGER : Représentation p -adique et équations différentielles. Invent. Math. **148** (2002), p.219-284
- [9] L. BERGER : Équations différentielles p -adiques et (φ, N) -modules filtrés. Astérisque **319** (2008)
- [10] L. BERGER ; P. COLMEZ : Familles de représentations de de Rham et monodromie p -adique. Représentations p -adiques de groupes p -adiques. I. Représentations galoisiennes et (φ, Γ) -modules. Astérisque No. 319 (2008), 303–337.
- [11] K. BUZZARD : Eigenvarieties
- [12] G. CHENEVIER : Une correspondance de Jacquet-Langlands p -adique. Duke math. journal 126 no.1, 161-194 (2005).
- [13] F. CHERBONNIER ; P. COLMEZ : Représentations p -adiques surconvergentes, Invent. Math. vol. **133**, p.581-611.
- [14] F. CHERBONNIER ; P. COLMEZ : Théorie d’Iwasawa des représentations p -adiques d’un corps local. J.A.M.S vol. **12** Number 1 (1999) p.241-268
- [15] R. COLEMAN : Classical and overconvergent modular forms, Invent. Math. vol. **124** (1996)
- [16] R. COLEMAN : p -adiques Banach spaces and families of modular forms. Invent. Math. vol. **127** p.417-479 (1997)
- [17] R. COLEMAN ; B. MAZUR : The eigencurve. Galois representations in arithmetic algebraic geometry (Durham, 1996), 1C113, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **254**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.
- [18] P. COLMEZ : La Conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer p -adique. Astérisque **294** (2004).
- [19] P. COLMEZ : Représentations de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ et (φ, Γ) -modules. Astérisque **330** (2010), p. 281-509.
- [20] D. DELBOURGO : Elliptic curves and big Galois representations, London Mathematical Society Lecture Note Series, **356**. Cambridge University Press, Cambridge, (2008).
- [21] P. DELIGNE : Formes modulaires et représentations l -adiques, Séminaire Bourbaki, 21ème année(1968/69), Exp. No. 355, Springer, Berlin, 1969, pp. 139-172.
- [22] G. FALTINGS : Hodge-Tate structures and modular forms. Math. Ann. **278** (1987), no. 1-4, 133–149. vol 2, Prog. in Math. 87, 249–309, Birkhäuser 1991.
- [23] T. FUKAYA : Coleman power series for K_2 and p -adic zeta functions of modular forms. Kazuya Kato’s fiftieth birthday. Doc. Math. (2003), Extra Vol., 387–442 (electronic).
- [24] M. EMERTON : On the interpolation of systems of eigenvalues attached to automorphic Hecke eigenforms. Invent. Math. **164** (2006), no. 1, 1–84.

- [25] J-M. FONTAINE : Arithmétique des représentations galoisiennes p -adiques. Astérisque **295** (2004).
- [26] D. HANSEN : Universal coefficients for overconvergent cohomology and the geometry of eigenvarieties
- [27] H. HIDA : Le produit de Pertersson et de Rankin p -adique. Séminaire de théorie des nombres 1988-89, Progr. Math. 91 (1990), 87-102.
- [28] H. HIDA : Elementary theory of L -functions and Eisenstein series. London Math. Soc. Stud. Texts 26, Cambridge University Press, 1993
- [29] U. JANNSEN : Continous étale cohomology. Math. Ann. **280** (1988), 207-245.
- [30] K. KATO : p -adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms. Astérisque **295** (2004).
- [31] K. KEDLAYA : A p -adic monodromy theorem. Ann. of Math. 160 (2004), 93–184.
- [32] K.S. KEDLAYA, J. POTTHARST, L. XIAO : Cohomology of arithmetic families of (φ, Γ) -modules ; preprint, arxiv :1203.5718
- [33] K.S. KEDLAYA, R. LIU : On families of (φ, Γ) -modules ; Algebra Number Theory 4 (2010), no. 7, 943–967.
- [34] R. LIU : Triangulation of refined families. Preprint, arXiv :1202.2188.
- [35] Y. MANIN : Periods of cusp forms, and p -adic Hecke series. (Russian) Mat. Sb. (N.S.) 92(134) (1973), 378–401, 503.
- [36] B. MAZUR ; P. SWINNERTON-DYER : Arithmetic of Weil curves. Invent. Math. **25** (1974), 1–61.
- [37] B. MAZUR ; J. TATE ; J. TEITELBAUM, *On p -adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer*. Invent. Math. 84 (1986), no. 1, 1–48.
- [38] A. PANCHISHKIN : A new method of constructiong p -adic L -functions associated with modular forms. Moscow Mathematical Journal Vol. **2** No.2 (2002)
- [39] B. PERRIN-RIOU : Théorie d’Iwasawa des représentations p -adiques sur un corps local, Invent. Math. 115 (1994), 81-149.
- [40] B. PERRIN-RIOU : Fonctions L p -adiques des repr´esentations p -adiques, Astérisque 229 (1995).
- [41] B. PERRIN-RIOU : Quelques remarques sur la théorie d’Iwasawa des courbes elliptiques, Number theory for the millennium, III (Urbana, IL, 2000) 119–147.
- [42] V. PILLONI : Formes modulaires surconvergentes. à paraître à Annales de l’institut Fourier.
- [43] R. POLLACK, G. STEVENS : Overconvergent modular symbols and p -adic L -functions. Ann. Sci. Ec. Norm. Super. (4) 44 (2011), no. 1, 1-42.
- [44] R. POLLACK, G. STEVENS : Critical slope p -adic L -functions. à paraître dans Journal of the London Mathematical Society.
- [45] R. RANKIN : The scalar product of modular forms. Proc. London Math. Soc. (3) 2, (1952). 198–217.

- [46] A.J. SCHOLL : An introduction to Kato's Euler systems. Galois representations in arithmetic algebraic geometry (Durham, 1996), 379–460, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 254, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.
- [47] G. STEVENS : Rigid analytic modular symbols. Preprint, available on <http://math.bu.edu/people/ghs/research.html>
- [48] G. STEVENS : Family of overconvergent modular symbols. Unpublished
- [49] J. P. SERRE : Galois cohomology. Translated from the French by Patrick Ion and revised by the author. Corrected reprint of the 1997 English edition. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2002. x+210 pp.
- [50] M. VISHIK : A non-Archimedean analogue of perturbation theory. (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR 249 (1979), no. 2, 267–271.
- [51] G. SHIMURA : The special values of the zeta functions associated with cusp forms. Commun. Pure Appl. Math. **29**, 783-804 (1976)
- [52] G. SHIMURA : On the periods of modular forms. Math. Ann. 229 (1977), no. 3, 211–221.
- [53] G. SHIMURA : Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions
- [54] S. WANG : Le système d'Euler de Kato. à paraître à Journal de Théorie des nombres à Bordeaux (2013)
- [55] S. WANG : Le système d'Euler de Kato en famille (I). à paraître dans Commentarii Mathematici Helvetici.
- [56] S. WANG : Le système d'Euler de Kato en famille (III). En préparation.