

EXISTENCE D'IMMEUBLES TRIANGULAIRES QUASI-PÉRIODIQUES

Sylvain BARRÉ, Mikael PICHOT

Octobre 2005

Résumé

Nous montrons l'existence d'une infinité d'immeubles triangulaires satisfaisant à des propriétés de quasi-périodicité, sans pour autant être périodiques (i.e. cocompacts relativement à l'action d'un groupe d'isométries). Ceci nous permet d'exhiber des mesures ergodiques quasi-invariantes non triviales sur l'espace des immeubles triangulaires construit dans [6].

Abstract

On the existence of quasiperiodic triangular buildings. It is proved that there exists infinitely many triangular buildings satisfying quasiperiodic properties (without being periodic). This allows to exhibit non trivial quasi-invariant ergodic measures on the space of triangular buildings constructed in [6].

1 INTRODUCTION

Dans un immeuble affine de type $\tilde{A}_2$, aussi appelé immeuble triangulaire, le nombre de faces incidentes à chaque arête est constant et noté $q + 1$. L'entier q s'appelle l'ordre de l'immeuble considéré. Dans tout l'article on supposera q distinct de 3, 4 et de la forme $q = p^n$, où p est un nombre premier.

Un immeuble affine est dit classique s'il est associé à un groupe algébrique sur un corps local. Tous les immeubles affines de dimension ≥ 3 sont classiques (voir J. Tits [21]) mais on peut, en dimension 2, construire des immeubles triangulaires non classiques [17, 25, 5]. Dans [6], nous introduisons un cadre qui permet d'étudier les immeubles triangulaires dans leur ensemble.

Soit Δ un espace métrique. Nous dirons que Δ est *quasi-périodique* si, pour toute boule $B \subset \Delta$, il existe un nombre $R \geq 0$ tel que le R -voisinage de la réunion des boules de Δ isométriques à B soit un recouvrement de Δ . Par exemple, un espace métrique *périodique*, c'est-à-dire muni d'une action cocompacte d'un groupe d'isométries, est quasi-périodique.

Théorème 1. *Il existe une infinité d'immeubles triangulaires quasi-périodiques non périodiques d'ordre q .*

Il semble difficile, compte-tenu de la définition, d'appliquer des approches « classiques » de construction, développées par exemple dans [19] ou dans [5], pour obtenir de la quasi-périodicité. La démonstration du théorème 1 donnée ici repose sur l'étude de la structure de l'espace des immeubles triangulaires. L'objet de [6] était de montrer que dans cet espace, un immeuble générique a un groupe d'automorphismes trivial. Il n'est pas difficile de voir qu'on ne peut pas plus obtenir l'existence d'immeubles quasi-périodiques par un argument de genericité au sens de Baire : l'ensemble des immeubles quasi-périodiques est maigre (proposition 10).

L'espace des immeubles triangulaires d'ordre q est la famille Q_q de tous les immeubles triangulaires d'ordre q à isomorphisme près. Une difficulté qui se présente pour comprendre cet espace vient du fait qu'il est *singulier* ou *non commutatif* [10, 11]. Nous l'étudions ici par des techniques géométriques et dynamiques. L'espace Q_q admet une « désingularisation » naturelle T_q munie d'une structure feuilletée dont il est l'espace des feuilles. Par définition, T_q est l'espace des immeubles triangulaires pointés en un sommet, à isomorphisme pointé près, où deux immeubles pointés (Δ, u) et (Δ', u') sont sur une même feuille si et seulement si les immeubles Δ et Δ' sont isomorphes. La topologie naturelle sur T_q , selon laquelle deux immeubles pointés sont proches si et seulement s'ils coïncident sur une grosse boule centrée en leurs points base, en fait un espace compact séparé. La topologie quotient sur Q_q est non triviale mais assez grossière.

Le terme « quasi-périodique » est employé dans le théorème 1 en un sens très concret. Une façon plus formelle de voir la quasi-périodicité est « d'identifier » les notions de quasi-périodicité aux espaces feuilletés *minimaux* à isomorphisme stable près (rappelons qu'un espace topologique feuilleté est dit minimal si toutes ses feuilles sont denses). Ainsi, pour trouver un espace quasi-périodique, on cherche à le réaliser comme feuille d'espace feuilleté minimal, et inversement, pour trouver des sous-espaces minimaux d'un espace feuilleté, on en cherche des feuilles quasi-périodiques. La démonstration du théorème 1 repose sur de tels changements de point de vue : nous construisons d'abord des plats quasi-périodiques à l'aide de laminations minimales ; puis nous assemblons ces plats en des immeubles, très proches d'être quasi-périodiques au sens concret ci-dessus (ils vérifient la propriété de « ne pas contenir d'immeubles périodiques dans leur adhérence ») ; nous utilisons alors de tels immeubles pour obtenir des sous-espaces minimaux de T_q , dont les feuilles sont des immeubles non isométriques qui satisfont au théorème ci-dessus.

Le théorème suivant permet de distinguer entre eux certains immeubles quasi-périodiques.

Théorème 2. *Il existe une infinité de sous-espaces feuilletés minimaux dans T_q .*

Les immeubles quasi-périodiques construits ici diffèrent essentiellement par leurs « constantes de quasi-périodicité ». Par exemple, si Δ est un immeuble triangulaire quasi-périodique et si l'on note $\text{dens}_\Delta(R)$ la *densité des boules de rayon R incluses dans Δ* (définie à la section 3.2), les immeubles qui sont feuilles d'un même sous-espace feuilleté minimal de T_q définissent la même fonction $\text{dens}(\cdot)$ (proposition 8), mais on peut dans

le théorème 2 construire deux sous-espaces dont les feuilles ont des fonctions dens($\cdot$) distinctes.

Nous pouvons à présent dresser un tableau un peu plus précis de l'espace des immeubles triangulaires. Il comprend : les immeubles classiques, constituant une partie dénombrable (voir [20]), les immeubles dits « exotiques », donnant des feuilles compactes de T_q (voir [25, 5]), les immeubles sans automorphisme, dont la plupart sont des feuilles denses de T_q (voir [6]), et les immeubles quasi-périodiques, qui correspondent aux sous-espaces feuilletés minimaux.

Enfin, nous nous servons du théorème de Garnett (existence de mesures harmoniques sur les feuilletages) pour construire des mesures ergodiques sur T_q . Rappelons qu'une mesure de probabilité transverse sur T_q (disons, supportée sur la transversale des sommets) est dite *quasi-invariante* si le saturé d'un borélien négligeable est négligeable, et *ergodique* si toute partie borélienne saturée est négligeable ou de complémentaire négligeable.

Théorème 3. *Il existe une infinité de mesures transverses quasi-invariantes ergodiques sur T_q , à supports disjoints et non supportées sur une feuille compacte.*

L'espace des immeubles triangulaires permet d'établir des connexions entre dynamique moyennable et dynamique non moyennable, et plus exactement entre la dynamique des actions de $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}^2$ et celle de T_q . L'une de nos motivations originales de cette étude est l'existence de mesures transverses *invariantes* ergodiques non triviales sur T_q (pour des exemples d'applications, notamment la propriété T de Kazhdan, voir [14], [16]).

2 PRÉLIMINAIRES

1. Immeubles triangulaires. Un immeuble triangulaire est un complexe simplicial simplement connexe de dimension 2 dont les faces sont des triangles euclidiens équilatéraux et dont le link en chacun des sommets se code par un plan projectif : l'ensemble des points et droites correspond aux sommets de ce link (voir [18]). Par exemple, dans le cas $q = 2$, il n'y a qu'un seul link possible qui comporte 14 sommets et 21 arêtes. Ces propriétés locales suffisent pour caractériser un immeuble. En particulier, c'est un espace CAT(0) (voir [7]) tel que pour deux faces quelconques, il existe un appartement (plat isométrique à un plan euclidien) qui les contient. Précisons que dans un immeuble triangulaire, toute partie convexe compacte d'un plat est contenue dans une infinité non dénombrable de plats, et toute géodésique (ainsi que tout demi-plat) est contenue dans au moins un plat. Toute géodésique *singulière*, c'est-à-dire parallèle à une géodésique incluse dans le 1-squelette, est contenue dans une infinité non dénombrable de plats, et il sera utile de remarquer que toute géodésique non singulière est contenue dans un *unique* plat (car l'intersection de deux plats qui la contiennent est convexe).

2. Théorèmes de prescription dans les immeubles triangulaires. Pour tout $q \geq 2$, il est possible de distinguer plusieurs types d'isomorphismes de boules de rayon 2 dans les immeubles d'ordre q . En particulier, pour $q = 2$ il y en a exactement 2 (voir [22]). Il se trouve que l'invariant qui distingue ces deux boules n'est pas du tout localisé sur la sphère, de telle sorte qu'un théorème de prescription quelconque du type des 2-boules existe (voir [5]) :

Théorème 4. *Soient B une boule de centre O et de rayon N d'un immeuble d'ordre 2, et une application de prescription p définie sur l'ensemble des sommets de la sphère C de centre O et de rayon $N - 1$, à valeurs dans $\{0, 1\}$. Il existe alors une boule B' de rayon $N + 1$, de centre O' et une injection $j : B \longrightarrow B'$ qui envoie O sur O' et telles que pour tout sommet S de C , la 2-boule du sommet $j(S)$ soit de type $p(S)$.*

Le point clé dans la preuve de ce théorème était d'associer dans la construction d'une boule de rayon $N + 1$ au-dessus d'une boule de rayon N un degré de liberté propre à chaque sommet de la sphère de rayon $N - 1$ qui permette de faire basculer la nature de sa boule de rayon 2 d'un type à l'autre.

C'est cette même idée qui peut être mise en œuvre pour montrer un autre théorème de prescription dans le cas $q \geq 5$.

Considérons une arête α d'un immeuble triangulaire; elle relie deux sommets S_1 et S_2 . Les faces contenant cette arête déterminent une application entre les arêtes du link en S_1 , passant par le sommet correspondant à α et celles du link en S_2 . On dit que cette correspondance ou « liaison » est projective si tout automorphisme du link en S_1 qui fixe l'arête α , composé avec cette correspondance, donne une permutation autour de l'arête α qui se prolonge en un automorphisme du link en S_2 . Puisqu'il existe plus de bijections que de transformations projectives d'une droite dès $q \geq 5$ on peut construire des immeubles qui ont des liaisons non projectives.

On appellera *liaisons voisines* du sommet S les liaisons entre sommets à distance 1 de S . À tous sommets, on peut associer le nombre de liaisons voisines qui sont projectives. Notons que ce nombre est bien défini dès que la boule de centre S et de rayon 2 est fixée.

Dans le théorème suivant, on ne considère que des immeubles dont les links correspondent tous à un même plan projectif fini, par exemple le classique $P^2(\mathbb{F}_q)$.

Théorème 5. *Soient B une boule de centre O et de rayon N d'un immeuble d'ordre $q \geq 5$, et une application de prescription p définie sur l'ensemble des sommets de la sphère C de centre O et de rayon $N - 1$, à valeurs dans $\{0, 1\}$. Il existe alors une boule B' de rayon $N + 1$, de centre O' et une injection $j : B \longrightarrow B'$ qui envoie O sur O' et telles que pour tout sommet S de C , la parité du nombre de liaisons projectives voisines du sommet $j(S)$ soit la même que $p(S)$.*

Démonstration. Supposons construite une boule B' de rayon $N + 1$ qui contient B (de rayon N) en son centre. À tout sommet coin S de la sphère C de centre O et de rayon $N - 1$, on associe $(q + 1)q^2$ arêtes voisines de S dans la sphère de rayon N et seulement q^2 si le sommet S n'est pas un coin. Au-dessus de ces arêtes se trouvent les « vrilles

associées » définies dans [5] pour $q = 2$. Ces arêtes sont diamétralement opposées au centre O par rapport au sommet S .

Au-dessus de ces arêtes, on peut découper suivant la hauteur passant par leur milieu les q faces de la sphère de rayon $N+1$ pour les recoller entre-elles après libre permutation des demi-faces.

Par une telle chirurgie, on peut toujours rendre non projective une liaison qui l'était (car $q \geq 5$) et inversement car on a supposé tous les links identiques. On vérifie aisément que les opérations de chirurgie au-dessus de chaque arête associée à chacun des sommets n'interfèrent pas entre-elles. On peut donc bien prescrire la parité du nombre de liaisons voisines projectives (et même la congruence modulo q^2). ■

3. L'espace des immeubles triangulaires. Nous nous contentons ici de fixer quelques notations en renvoyant à [6] pour davantage de détails.

On note T_q l'ensemble des immeubles triangulaires pointés d'ordre q , à isomorphisme pointé près. La topologie sur T_q , selon laquelle deux immeubles pointés sont proches s'ils sont isomorphes sur une grosse boule centrée en leur point base, en fait un espace compact. On note $S_q \subset T_q$ l'ensemble des classes d'isomorphisme d'immeubles triangulaires pointés en un sommet.

L'espace T_q est muni d'une structure feuilletée naturelle. On dit que deux points $[\Delta, u]$ et $[\Delta', u']$ de T_q sont sur une même feuille si les immeubles Δ et Δ' sont isomorphes. Chaque feuille de T_q est un complexe cellulaire (quotient d'un immeuble par un groupe d'isométrie) et S_q est une transversale à T_q (c'est-à-dire une partie compacte dont l'intersection avec chaque feuille est un ensemble dénombrable).

L'espace des feuilles de T_q est canoniquement isomorphe à l'ensemble Q_q des classes d'isométrie d'immeubles triangulaires.

3 QUASI-PÉRIODICITÉ TOPOLOGIQUE

1. Adhérence d'un immeuble triangulaire. Soit S_q l'espace des immeubles d'ordre q pointés en un sommet. Un immeuble triangulaire Δ d'ordre q détermine une partie dénombrable de S_q définie en pointant en chacun de ses sommets. On notera encore $\Delta \subset S_q$ cette partie dénombrable.

Soit Δ un immeuble triangulaire d'ordre q .

Lemme 6. *L'adhérence $\overline{\Delta} \subset S_q$ de Δ dans S_q est saturée.*

Démonstration. Soit $(I, \star) \in \overline{\Delta}$. Soit $\star'$ un sommet de I . Montrons qu'il existe une suite s'_i de sommets de Δ et une suite $R'_i \rightarrow \infty$ telle que les boules de centre $\star'$ et s'_i et de rayon R'_i , respectivement de I et de Δ , soient isométriques. Comme $(I, \star) \in \overline{\Delta}$, il existe une suite de boules $B_\Delta(s_i, R_i)$ de Δ telle que $B_\Delta(s_i, R_i) \simeq B_I(\star, R_i)$ et $R_i \rightarrow \infty$. Considérons une suite $R'_i \rightarrow \infty$ telle que $B_I(\star', R'_i) \subset B_I(\star, R_i)$. Ainsi, la boule $B_I(\star', R'_i)$ se plonge isométriquement dans Δ . ■

2. Laminations minimales de l'espace des immeubles. Soit Δ un immeuble triangulaire.

Définition. On dit qu'une partie $\Lambda \subset \Delta$ est un réseau de Δ s'il existe un nombre $\lambda \geq 0$ tel que toute boule de rayon λ contienne au moins un point de Λ . On appelle densité de Λ l'inverse $\text{dens}(\Lambda) = 1/\lambda$ de la constante λ optimale dans cette définition.

Définition. On dit que Δ est quasi-périodique si pour toute boule $B \subset \Delta$, la réunion des centres des boules isométriquement isomorphes à B forme un réseau de Δ .

On note $\text{dens}_\Delta(R) = \min_B \text{dens}(\Lambda_B)$ la densité minimale, sur les boules B de rayon R incluses dans Δ , des centres $\Lambda_B \subset \Delta$ de copies de B dans Δ .

Proposition 7. Δ est quasi-périodique si et seulement si dens_Δ ne s'annule pas. Il est périodique si et seulement si dens_Δ est minorée par une constante strictement positive.

Démonstration. Le cas quasi-périodique est clair, ainsi que la minoration de dens_Δ pour les immeubles périodiques. Supposons dens_Δ minorée et montrons que Δ est périodique. Soient $\star$ un point base dans Δ et une constante $0 < \lambda < \infty$ telle que $\text{dens}_\Delta \geq 1/\lambda$. Soit y un autre sommet de Δ . Pour tout $R > 0$, il existe un point y_R dans la boule $B_\Delta(y, \lambda)$ de centre y et de rayon λ , tel que les boules $B_\Delta(\star, R)$ et $B_\Delta(y_R, R)$ soient isomorphes. Par suite il existe un point $\star' \in B_\Delta(y, \lambda)$ et une suite $R_n \rightarrow \infty$ telles que les boules $B_\Delta(\star, R_n)$ et $B_\Delta(\star', R_n)$ soient isomorphes pour tout n . Par procédé diagonal, on obtient un isomorphisme $\varphi \in \text{Aut}(\Delta)$ tel que $\varphi(\star) = \star'$. Donc le quotient de Δ par $\text{Aut}(\Delta)$ est compact. ■

Proposition 8. Δ est quasi-périodique si et seulement si $\overline{\Delta}$ est une lamination minimale (toutes les feuilles sont denses). De plus toutes les feuilles de $\overline{\Delta}$ sont alors quasi-périodiques, avec mêmes « constantes de quasi-périodicité » dens_Δ .

Démonstration. Supposons Δ quasi-périodique et montrons que $\overline{\Delta}$ est minimale. Soit $I \subset \overline{\Delta}$ une feuille de $\overline{\Delta}$ et $B = B_\Delta(s, R) \subset \Delta$ une boule fixée de Δ . Comme Δ est dense, il existe pour tout $\star \in I$ une suite de boules $B_\Delta(s_i, R_i)$ isométrique à $B_I(\star, R_i)$ et telle que $R_i \rightarrow \infty$. De plus, la réunion des boules isométriques à B est un réseau de Δ ; les boules $B_I(\star, R_i)$ contiennent donc une copie de B pour R_i assez grand (et la distance de $\star$ au centre de cette boule ne dépend que de R). Par suite $I \cap B_\Delta(s, R) \subset \overline{\Delta}$ est non vide. Il en résulte facilement que toutes les feuilles sont denses. De plus, dans ce cas, l'ensemble des types de boules d'une feuille $I \subset \overline{\Delta}$ est le même que celui de Δ , et il est donc clair que $\text{dens}_I = \text{dens}_\Delta$.

Réciproquement supposons que Δ ne soit pas quasi-périodique et montrons qu'il existe une feuille de $\overline{\Delta}$ qui n'est pas dense. Considérons une boule $B \subset \Delta$ pour laquelle il existe une suite de boules $B_\Delta(s_i, R_i)$ telles que $R_i \rightarrow \infty$ et ne contenant pas B . Considérons la suite de points $(\Delta, s_i) \in \overline{\Delta}$. Comme $\overline{\Delta}$ est compact, il existe quitte à extraire un point $(I, \star) \in \overline{\Delta}$ tel que (Δ, s_i) converge vers $(I, \star)$. Comme $\overline{\Delta}$ est saturé,

on a $I \subset \overline{\Delta}$. Par ailleurs, $(I, \star)$ coïncidant avec (Δ, s_i) sur la boule de rayon $R_i \rightarrow \infty$, l'immeuble I ne contient pas de copie de B . Par suite $I \subset \overline{\Delta}$ n'est pas dense. ■

Remarque. L'adhérence d'un immeuble quasi-périodique est d'intérieur vide. Plus précisément, la seule sous lamination de T_q contenant un ouvert non vide est T_q elle-même (car T_q contient des feuilles denses [6]). L'ensemble des immeubles quasi-périodiques est maigre dans T_q (cf. prop. 10).

3. Un immeuble générique est apériodique.

Lemme 9. *Pour tout $q \geq 2$, il existe un entier $N_q \geq 1$ tel que quelle que soit la boule B de rayon au moins N_q , il existe une boule de rayon arbitrairement grand ne contenant pas de copie de B .*

Démonstration. Si $q = 2$, on peut prendre $N_q = 2$. Les sommets sont en effet bicolorés suivant le type de leur 2-boule ([22]). Si la boule B contient un sommet blanc, il suffit prendre un immeuble noir, sinon prendre un immeuble blanc.

Dans le cas $q \geq 3$, puisqu'il existe une infinité d'immeubles classiques du même ordre, il existe un entier N_q et au moins deux immeubles classiques X_1 et X_2 ayant des boules de rayon N_q différentes. Soit maintenant une boule B rayon au moins N_q . Alors soit X_1 soit X_2 fournit des boules de rayon arbitrairement grand ne contenant pas de copies de B . ■

On convient que N_q désigne le plus petit entier ≥ 1 qui vérifie le lemme (on sait que $N_2 = 2$ par exemple).

Définition. *On dit qu'un immeuble Δ d'ordre q est apériodique si pour toute boule $B \subset \Delta$ de rayon au moins N_q , il existe une boule de rayon arbitrairement grand dans Δ ne contenant pas B .*

Proposition 10. *Un immeuble générique au sens de Baire est apériodique et dense.*

Démonstration. Soit B une boule de rayon au moins N_q et $i \geq 2$. Notons $O_i(B)$ l'ensemble des immeubles pointés $(\Delta, \star)$ qui contiennent B ainsi qu'une boule B_i de rayon i ne contenant pas B . Il est clair que $O_i(B)$ est ouvert, et il est dense car si on fixe une boule de rayon R , on peut l'épaissir en ajoutant B et en ajoutant une boule de rayon i ne contenant pas B (théorème de chirurgie [6]). Par suite l'ensemble

$$G = \cap_B \cap_i O_i(B)$$

est générique au sens de Baire. Pour tout $(\Delta, \star) \in G$, pour toute boule B de rayon au moins N_q , il existe une boule de rayon arbitrairement grand dans Δ ne contenant pas cette boule, i.e. Δ est apériodique.

Un immeuble est dense si et seulement si il contient toutes les boules. Un immeuble générique au sens ci-dessus contient toutes les boules. ■

En particulier un immeuble générique est non quasi-périodique. De plus son adhérence contient des feuilles compactes.

Dans cette partie, nous contruisons une coloration quasi-périodique non périodique du plan triangulé à l'aide d'actions topologiques de $\mathbf{Z}$. Une référence très utile sur ces actions est la monographie récente de Glasner [12].

1. Laminations des colorations. Fixons une triangulation du plan euclidien par triangles équilatéraux et considérons une boule simpliciale B_n de rayon n de cette triangulation. Une coloration de B_n est le choix d'une couleur, noire ou blanche, pour chacun de ses sommets. On dira que deux colorations sont isomorphes s'il existe un automorphisme simplicial de B_n qui respecte les couleurs.

Soit L_n l'ensemble des colorations de B_n à isomorphisme près. On note $p_n : L_n \rightarrow L_{n-1}$ les applications canoniques de restriction, et

$$L = \varprojlim L_n$$

la limite projective de $(L_n)_n$ relative à $(p_n)_n$. De même que pour les laminations T_q d'immeubles triangulaires, L est transversale d'une lamination dont les feuilles sont des quotients de triangulations colorées du plan.

2. Colorations quasi-périodiques de la droite réelle. Considérons une action minimale α de $\mathbf{Z}$ sur un espace de Cantor X (on notera γx l'image de $x \in X$ par $\alpha(\gamma)$, $\gamma \in \mathbf{Z}$). Soit $X = N \amalg B$ une 'coloration' de X en noir et blanc. On suppose N, B ouverts non vides. Notons SX la suspension de α . Ainsi les feuilles de SX sont des droites réelles simpliciales dont les sommets sont de couleur noire ou blanche.

Lemme 11. *Soit p un segment simplicial d'une feuille de SX . Alors toute feuille de SX contient une infinité de segments simpliciaux ayant la même coloration que p .*

Démonstration. Soit x un sommet de p . L'ensemble U des points x' tels que γx et $\gamma x'$ sont de la même couleur pour tout $\gamma \in \mathbf{Z}$ tel que $\gamma x \in p$ est un voisinage ouvert de x . Par minimalité toute feuille de SX coupe U une infinité de fois. ■

Lemme 12. *Toutes les feuilles de SX sont quasi-périodiques.*

Démonstration. En effet, dans le cas contraire il existe un segment p d'une feuille f de SX , et une infinité de segments p_n de f dont la longueur tend vers l'infini et qui ne contiennent pas p . Soient x_n un sommet au centre de p_n , x une valeur d'adhérence de x_n dans X , et R un nombre entier. L'ensemble U des points x' telles que les segments $[x' - R, x' + R]$ et $[x - R, x + R]$ des feuilles de x' et x aient la même coloration est un voisinage de x . Par suite il existe un entier n tel que $[x - R, x + R]$ s'injecte dans p_n . En particulier il ne contient pas p , et R étant arbitraire, la feuille passant par x ne contient pas de copies de p . ■

On suppose maintenant α minimale et faiblement mélangeante. Rappelons qu'une action est dite faiblement mélangeante si l'action diagonale sur X^2 est topologiquement

transitive (il existe une orbite dense), ou de façon équivalente, si pour tous ouverts non vides N, N', B, B' de X , il existe $\gamma \in \mathbf{Z}$, $N_1 \subset N$ et $B_1 \subset B$ non vides tels que $\gamma N_1 \subset N'$ et $\gamma B_1 \subset B'$ (voir e.g. [12]). La *suite de Chacón* ([12, page 27]), par exemple, définit une action minimale et faiblement mélangeante de $\mathbf{Z}$. On note encore SX la suspension de α .

Lemme 13. *Aucune feuille de SX n'est périodique.*

Démonstration. Soit f une feuille de SX . Supposons qu'il existe une translation θ de f qui préserve la coloration. L'action de $\mathbf{Z}$ sur X induit une action libre simpliciale sur f , ayant une orbite de sommets et une orbite d'arêtes (car $\mathbf{Z}$ est abélien). Par suite θ coïncide, en restriction à f , avec l'action d'un automorphisme $\gamma \in \mathbf{Z}$. Alors γ préserve la coloration de X . En effet tout point $x \in S$ est limite de sommets de f , qu'on peut supposer de même couleur que x (la coloration étant ouverte), donc x et γx sont de la même couleur, puisque c'est le cas en restriction à f .

Il suffit donc de vérifier qu'un automorphisme non trivial $\theta \in \mathbf{Z}$ ne peut pas préserver la coloration. Ceci résulte de l'hypothèse de mélange, qui permet d'imposer un nombre fini de conditions au sens suivant. Notons $\Lambda = \langle \theta \rangle$ et k le cardinal de $\mathbf{Z}/\Lambda$. Il existe (par récurrence fini) deux ouverts $U \subset B$ et $V \subset N$ non vides, et $\gamma_0 = 1, \gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}$ dans $\mathbf{Z}$ tels que pour tout $i = 0..k-1$, on ait

$$\gamma_i U \subset B \quad \text{et} \quad \gamma_i V \subset \alpha(i)N.$$

Soit $\gamma \in \mathbf{Z}$ tel que $\gamma U \cap V \neq \emptyset$. Alors $\gamma = \alpha(i_0)\lambda$ pour $i_0 < k$ et $\lambda \in \Lambda$, et comme $\gamma_{i_0}\gamma U \cap \gamma_{i_0}V \neq \emptyset$, et les inclusions précédentes donnent $\gamma B \cap \alpha(i_0)N \neq \emptyset$. Donc $\lambda B \cap N \neq \emptyset$. ■

Remarque. On peut aussi bien utiliser un nombre dénombrable de couleurs $X = C_1 \amalg C_2 \amalg C_3 \amalg \dots$. Aucune de ces couleurs ne sera invariante par un automorphisme $\theta \in \mathbf{Z}$ non trivial.

Lemme 14. *Étant donnée une coloration périodique de la droite réelle, la longueur du plus grand segment de cette coloration qui s'injecte dans une feuille de SX est fini.*

Démonstration. Supposons qu'il existe une suite p_n de segments d'une droite périodique fixée, dont la longueur tend vers l'infini, et qui s'injectent chacun dans l'une des feuilles de SX en respectant les colorations. Soit x_n un sommet au centre de p_n et x une valeur d'adhérence de x_n dans X . Alors la feuille passant par x est périodique. ■

3. Densités et mesures invariantes. Supposons maintenant que α est, de plus, uniquement ergodique sur l'espace de Cantor X , i.e. qu'il existe exactement une mesure de probabilité invariante sur X . (La suite de Chacón, par exemple, est uniquement ergodique [12, page 101].) Soient $H_n : C(X) \rightarrow C(X)$ les applications linéaires positives définies par

$$H_n f(x) = \frac{1}{2n} \sum_{y \in B(x,n)} f(y),$$

où $B(x, n)$ est l'ensemble des sommets de la feuille passant par x à distance inférieure à n de x sur cette feuille. Il est bien connu que $H_n f$ converge uniformément vers une fonction constante pour toute fonction f (cette propriété caractérise l'unique ergodicité, voir [12]). Soit $X = N \amalg B$ une coloration de X en noir et blanc (N, B ouverts). On appelle *densité de noir* le nombre $\delta = \delta(N) = \lim H_n(\chi_N) \in [0, 1]$. On a

$$\delta = \lim \frac{\#B(x, n) \cap N}{2n}$$

où limite est indépendante de $x \in X$ et la convergence *uniforme* en x .

4. De la dimension 1 à la dimension 2. Soit $\delta, \delta' \in]0, 1[$. Considérons deux droites d et d' colorées, quasi-périodiques de densité de noirs δ et δ' respectivement (obtenues comme feuille d'une action α uniquement ergodique faiblement méleangeante de $\mathbf{Z}$ sur un espace de Cantor coloré $X = N \amalg B$ comme dans la partie précédente), et fixons deux sommets consécutifs u et v sur d , le premier noir et le second blanc.

Soit Π un plan euclidien pavé en triangles équilatéraux. Colorons Π en prenant d et d' pour modèles de la façon suivante. Soient deux droites simpliciales ℓ et ℓ' de Π formant un angle de $\pi/3$. La première droite (appelée horizontale) est colorée suivant d , en plaçant u à l'intersection. La seconde est colorée suivant d' , en plaçant un sommet noir à l'intersection. On étend alors cette coloration à chaque droite parallèle à ℓ , en conservant d pour modèle et en plaçant u ou v à l'intersection avec ℓ' selon la couleur.

Proposition 15. *Le plat Π est quasi-périodique.*

Démonstration. Il est facile de vérifier qu'il y a quatre colorations possibles pour les droites parallèles à ℓ' : entièrement noire, entièrement blanche, selon le modèle d' ou selon son négatif $\bar{d}'$. Numérotons de 1 à 4 les sommets de la droite ℓ suivant les cas. Comme le numéro d'un sommet ne dépend que de la couleur de ce sommet et de son voisin de droite, cette numérotation est quasi-périodique.

Montrons que Π est quasi-périodique. Soit P un parallélogramme de Π déterminé par deux segments $p \subset \ell$ et $p' \subset \ell'$. Ainsi p est numéroté et p' est coloré. Puisque la numérotation de ℓ est quasi-périodique, il existe un rayon R tel que tout segment de longueur R de ℓ contienne une copie de p . De même il existe un rayon R' tel que tout segment de longueur R' de ℓ' contienne une copie de p' . Il est alors facile de voir que tout parallélogramme de taille $R \times R'$ contenu dans Π contient au moins une copie de P . ■

Dans le plan Π ainsi défini, la densité de noirs dans les boules simpliciales converge *uniformément* vers δ , puisque c'est le cas sur ℓ et ses translatés. Nous noterons Π_δ un tel plan. Il est facile de voir que Π_δ n'est pas périodique.

Proposition 16. *L'adhérence de Π_δ dans la lamination L des colorations du plan est une lamination minimale ; si de plus $\delta \neq \delta'$, les adhérences correspondantes sont disjointes dans L .*

Démonstration. Le premier point est analogue à la proposition 8, et le deuxième point résulte de la convergence uniforme de la limite des densités des densités de noirs dans les boules de Π_δ et $\Pi_{\delta'}$. ■

5 CONSTRUCTION D'IMMEUBLES SANS PÉRIODIQUE DANS LEUR ADHÉRENCE

Soit F_0 une face d'un plat Π_0 muni d'un bicolariage de ses sommets. On supposera que toutes les droites dans l'une au moins des trois directions simpliciales sont colorées de façon quasi-périodique non périodique (par exemple de la même façon, comme dans la partie précédente).

On supposera $q = 2$ ou $q \geq 5$.

Proposition 17. *Il existe un immeuble triangulaire Δ d'ordre q , une face F de Δ et une correspondance $\phi : F \longrightarrow F_0$ tels que pour tout plat Π contenant la face F , l'unique application $\Pi \longrightarrow \Pi_0$ qui étend ϕ , respecte le bicolariage donné par la nature du link d'ordre deux dans Δ lorsque $q = 2$, et la parité du nombre de liaisons projectives voisines dans le cas $q \geq 5$.*

Démonstration. On considère une boule B_2 de rayon deux (d'un immeuble triangulaire d'ordre q) de centre le sommet S_0 et de type celui du sommet A_0 de la face $F_0 = (A_0, A_1, A_2)$. On choisit alors une face $F = (S_0, S_1, S_2)$ quelconque de cette boule.

Pour tout sommet S de la sphère de rayon un de B_2 , il existe un unique sommet A de Π_0 tel que pour tout disque plat D de rayon 1 inclus dans B_2 qui contient la face F et le sommet S , l'unique injection $i : D \longrightarrow \Pi_0$ telle que $i(S_i) = A_i$, $\forall i = 0, 1, 2$ vérifie : $i(S) = A$. En effet, étant donné un disque D' de B_1 qui contient F , on peut construire une rétraction $\rho_{D,F}$ de B_1 sur D' qui préserve les distances à F , et fixe l'intersection $D \cap D'$ (voir [8]). Ceci permet de définir A .

Les théorèmes de prescription 4 ou 5 permettent alors de prolonger la boule B_2 en une boule B_3 de rayon 3 telle que le type de S soit celui du point A correspondant, et ce pour tous les sommets S de la sphère de rayon un de B_2 .

On itère ce raisonnement pour étendre les boules de centre S_0 en un immeuble Δ qui satisfait le théorème. ■

Lemme 18. *Pour tout disque D d'un plat Π d'un immeuble Δ , il existe un plat Π_1 contenant la face F_0 et dont l'intersection avec D contient au moins un secteur simplicial de D issu de son centre et d'ouverture $\pi/3$.*

Démonstration. Considérons le segment géodésique γ qui réalise la distance entre le centre O de la face F_0 et le centre du disque D . Il existe alors dans Π un secteur opposé à γ d'ouverture $\pi/3$, et un plat Π_1 contenant à la fois ce secteur et γ . ■

Soit Δ comme dans la proposition 17.

Lemme 19. *Pour tout plat coloré périodique Π , il existe un rayon R tel que le plus grand disque de Π qui se plonge dans un plat de Δ (en respectant la coloration donnée par le type des sommets), soit de rayon $\leq R$.*

Démonstration. Pour tout disque D de rayon R plongé dans Δ , il existe d'après la proposition 18 un disque $D' \subset D$ de rayon $R/4$ contenu dans un plat qui passe par F_0 . Notons R_0 la longueur du plus grand segment de Π qui se plonge dans la direction quasi-périodique du plat modèle Π_0 (voir le lemme 14). Alors $R = 4R_0$ convient. ■

Lemme 20. *Soit G un groupe qui opère de façon co-compacte sur un immeuble X . Alors X possède un plat périodique sous l'action de G .*

Démonstration. Soit γ une géodésique de X dont la direction n'est pas singulière et qui est périodique dans le quotient X/G , par exemple une géodésique faisant un angle de $\pi/6$ avec une direction singulière. Cette géodésique contient deux points distincts $u = \gamma(t_0)$ et $v = \gamma(t_1)$ qui sont identifiés dans le quotient et tels que l'image de γ dans le quotient ait même dérivée en t_0 et t_1 . Soit $g \in G$ qui envoie u sur v et qui identifie $\gamma'(t_0)$ et $\gamma'(t_1)$. En reportant le segment $[u, v]$ par g , on obtient alors une géodésique γ_0 , l'axe de g . Cette géodésique est dans un unique plat Π (car non singulière). L'unicité du plat Π qui contient γ_0 fait que g translate ce plat tout entier. Rappelons que cette unicité provient de la propriété locale suivante : deux arêtes opposées dans un link se trouvent dans un unique plat. Or dans le quotient, les segments géodésiques fermés de longueur donnée et d'orientations rationnelles sont en nombre fini ; ainsi, on retrouve dans Π deux géodésiques distinctes γ_1 et γ_2 parallèles à γ_0 et identiques dans le quotient. Notons g_0 la translation du plat Π définie par g et h_0 une translation de Π qui envoie γ_1 sur γ_2 et qui se projette sur l'identité. Deux points de Π identifiés sous l'action de $\langle g_0, h_0 \rangle$, le sont aussi sous l'action de G , ce qu'il fallait démontrer. Précisons que dans le cas où G opère librement alors il existe $h \in G$ dont la restriction au plat Π donne un h_0 et G contient alors un $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ qui translate Π . ■

Théorème 21. *La feuille définie par l'immeuble Δ n'admet pas de feuille compacte dans son adhérence.*

Démonstration. En effet, soit Δ_1 un immeuble qui admet un quotient compact. On sait d'après le lemme précédent, qu'il doit avoir des plats périodiques. Donc, si la feuille définie par Δ_1 est dans l'adhérence de celle définie par Δ alors des disques périodiques de tailles arbitrairement grandes doivent se trouver dans Δ . Ce qui est exclu d'après le lemme 19. ■

Théorème 22. *Soient Π_0 et Π_1 deux colorations dont les adhérences sont disjointes dans la lamination L . Les immeubles Δ_0 et Δ_1 modelés respectivement sur Π_0 et Π_1 correspondent alors à des feuilles dans T_q d'adhérences disjointes.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un immeuble (pointé en $\star$) $\Delta \in \overline{\Delta_0} \cap \overline{\Delta_1}$. On trouve alors des boules de Δ (centrée en $\star$) de rayons arbitrairement grands contenues

à la fois dans Δ_0 et dans Δ_1 . Ce qui donne aussi pour tout R des boules du plat modèle Π_0 de rayon $R/4$ (comme dans la démonstration du lemme 19) qui contiennent à leur tour des boules de l'autre plat modèle Π_1 de rayon $R/16$. Ce qui est contradictoire avec le fait que Π_0 et Π_1 sont d'adhérences disjointes dans L . ■

6 EXISTENCE D'IMMEUBLES QUASI-PÉRIODIQUES

Dans cette section nous montrons les théorèmes 1, 2 et 3.

1. Laminations sans feuille compacte et laminations minimales.

Théorème 23. *Soit Δ un immeuble dont l'adhérence ne contient pas de feuille compacte. Il existe un immeuble quasi-périodique non périodique $I \subset \overline{\Delta}$. La lamination $\overline{I}$ associée est minimale et contient un nombre non dénombrable de feuilles, toutes quasi-périodiques non périodiques.*

Démonstration. Ordonnons les parties saturées de $\overline{\Delta}$ par inclusion et choisissons à l'aide du lemme de Zorn une partie minimale $S \subset \overline{\Delta}$ (invariante compacte) pour cet ordre. Clairement toutes les feuilles de cette sous-lamination sont denses. De plus cette lamination n'est pas réduite à une feuille compacte, donc contient un nombre non dénombrable de feuilles d'après le théorème de Baire. Chacune de ces feuilles est un immeuble quasi-périodique non périodique (cf. prop. 8). ■

2. Laminations minimales et mesures quasi-invariantes. Soit $T \subset T_q$ une lamination minimale associée à un immeuble quasi-périodique non périodique et $S \subset S_q$ la transversale des sommets. Le théorème suivant, bien connu en théorie des feuilletages, est dû à L. Garnett. Il permet de passer d'un 'concept topologique' à un 'concept mesuré' de quasi-périodicité ([15]).

Théorème 24. *Il existe une mesure de probabilité ergodique et quasi-invariante sur S .*

Démonstration. Rappelons que les feuilles de T sont munies d'une structure cellulaire donnée par les immeubles qui les définissent (voir [6]). On note $\sim$ la relation d'adjacence induite par le 1-squelette de T . Considérons l'opérateur de diffusion $H : C(S) \rightarrow C(S)$ défini par

$$Hf(x) = \frac{1}{\text{val}(x)} \sum_{y \sim x} f(y),$$

où $\text{val}(x)$ est la valence de x dans T . Clairement $\|Hf\| \leq \|f\|$, i.e. H est une contraction de $C(S)$. Soit $I - H$ l'opérateur de Laplace associé à H . Ainsi, si x est un maximum de f , alors $(I - H)f(x) \geq 0$, alors que si c'est un minimum, $(I - H)f(x) \leq 0$. Par suite toute fonction dans l'adhérence de l'image de $I - H$ prend à la fois des valeurs positives et négatives. En particulier $1 \notin \overline{\text{Im}(I - H)}$.

Définissons une forme linéaire $\mu : \mathbf{C}1 \oplus \overline{\text{Im}(I - H)} \rightarrow \mathbf{C}$ par $\mu(c \oplus f) = c$, de sorte que $\|\mu\| \leq 1$. D'après le théorème de Hahn-Banach, μ s'étend à $C(S)$ en une forme linéaire continue de norme ≤ 1 . Comme $\mu(1) = 1$, μ est représentée par une mesure de probabilité (encore notée μ) sur S qui vérifie par construction

$$\int H f d\mu = \int f d\mu.$$

(on dit que μ est harmonique relativement à H). Soit φ un isomorphisme borélien de S tel que $\varphi(x) \sim x$. Si $A \subset S$ est une partie borélienne on a (en notant c le nombre de sommets des links d'ordre q)

$$\mu(A) = \int \frac{1}{\text{val}(x)} \sum_{y \sim x} \chi_A(y) d\mu(x) \geq \frac{1}{c} \int \chi_A(\varphi(x)) d\mu(x) \geq \frac{1}{c} \mu(\varphi^{-1}A)$$

donc μ est quasi-invariante. La proposition en résulte, quitte à désintégrer μ en composantes ergodiques. Remarquons que l'estimée des dérivés de Radon-Nikodým donnée par cette démonstration est trop faible pour appliquer le critère $\lambda_1 > 1/2$ pour la propriété T de Kazhdan (cf. [14]). ■

Corollaire 25. *Il n'existe pas de classification borélienne des immeubles triangulaires. En d'autres termes il n'existe pas de fonction borélienne $c : T_q \rightarrow X$, où X est un espace borélien standard, qui se factorise à l'espace quotient Q_q des immeubles triangulaires et telle que $c(\Delta) \neq c(\Delta')$ lorsque les immeubles Δ et Δ' ne sont pas isomorphes.*

Démonstration. Rappelons que X est mesurablement isomorphe à l'intervalle $[0, 1]$ (ou un ensemble dénombrable). Le corollaire résulte immédiatement de l'existence de mesure ergodiques μ sur S non concentrées sur une feuille compacte (proposition précédente). En effet, soit $c : S \rightarrow [0, 1]$ une fonction borélienne constante sur les feuilles. Par ergodicité c est μ -presque sûrement constante et il y a donc une famille non dénombrable de feuilles du support de μ qu'elle ne peut pas distinguer. ■

RÉFÉRENCES

- [1] Artin E., « Algèbre géométrique », Paris, 1978.
- [2] Barré S., « Polyèdres finis de dimension 2 à courbure négative ou nulle et de rang 2 », Ann. de l'Inst. Fourier, T45, 1995.
- [3] Barré S., « Polyèdres de rang deux », Thèse, ENS Lyon, 1996.
- [4] Barré S., « Sur les polyèdres de rang 2 », Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie, No. 15, Année 1996–1997, 99–104, Sémin. Théor. Spectr. Géom., 15, Univ. Grenoble I, Saint-Martin-d'Hères, 1997.
- [5] Barré S., « Immeubles de Tits triangulaires exotiques », Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) 9, no. 4, 575–603, 2000.

- [6] Barré S., Pichot M., « Trivialité du groupe d'automorphismes d'un immeuble triangulaire générique », prépublication.
- [7] Bridson M., Haefliger A. « Metric Spaces of non-positive curvature » Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 319, Berlin 1999.
- [8] Brown K.S., « Buildings », Springer, 1989.
- [9] Brown K.S., « Five lectures on buildings », Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, 1990), 254–295, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1991.
- [10] Connes A., « Sur la théorie non commutative de l'intégration », Algèbres d'opérateurs, Lecture Notes in Math., 725, 19-143, 1979.
- [11] Connes A., « Non commutative geometry », Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1994.
- [12] Glasner E., « Ergodic theory via joinings », Mathematical Surveys and Monographs, 101. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [13] Haglund F., « Existence, unicité et homogénéité de certains immeubles hyperboliques. », Math. Z. 242, no. 1, 97–148, 2002
- [14] Pichot M. « Sur la théorie spectrale des relations d'équivalence mesurées », prépublication.
- [15] Pichot M., « Quasi-périodicité et théorie de la mesure », Thèse.
- [16] Pichot M. « Harmonic analysis from quasi-periodic domains », en préparation.
- [17] Ronan, M. A., « A construction of buildings with no rank 3 residues of spherical type », Buildings and the geometry of diagrams (Como, 1984), 242-248, Lectures Notes in Math., 1181, Springer, Berlin, 1986.
- [18] Ronan, M. A., « Lectures on buildings », Academic Press, 1989.
- [19] Ronan, M. A., Tits J., « Building Buildings », Math. Ann. 278, 291-306 1987.
- [20] Serre, J.P. « Corps locaux », Hermann, Paris 1968.
- [21] Tits J. « Lecture Notes in mathematics 386 », Springer Verlag, 1974.
- [22] Tits J. « Sphere of Radius 2 in Triangle Buildings, I. », Finite Geometries buildings and related Topics. Pingree Park Conference 1988.
- [23] Tits J., Weiss R.M. « Moufang Polygons », Springer 2002.
- [24] Van Maldeghem, H. « Automorphisms of nonclassical triangle buildings », Bull. Soc. Math. Belg. Sér.B 42 1990 no.2, 201-237 .
- [25] Van Maldeghem, H. « Nonclassical triangle buildings », Geom. Dedicata 24 1987 no.2, 123-206.

S. Barré : Université de Bretagne Sud, BP 573, Centre Yves Coppens, Campus de Tohannic, 56017 Vannes, France. *Courrier électronique* : sylvain.barre@univ.ubs.fr

M. Pichot : Institut des Hautes Études Scientifiques, 35 Route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette, France. *Courrier électronique* : pichot@ihes.fr